یک کلاس ویژه از شبکه‌های پرت احتمالی

سیدمحمدتقی فاطمی قمی* و مسعود ربانی**
دانشکدهٔ مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۱۱/۲۳ - دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۷۷/۱۱/۱۸)

چکیده - در مطالعهٔ شبکه‌های پرت احتمالی، توجه به ساختار شبکه به عنوان یک راهکار جدید مطرح است. در مقالهٔ حاضر، شبکه‌های هامنی [۱] به عنوان یک کلاس ویژه از شبکه‌ها بررسی می‌شوند. دو مکانیزم ساختاری تحت عناوین انقباض و حذف کمانی به منظور تبدیل شبکه‌های هامنی به شبکه‌های سری - موازی معرفی می‌شوند. ساختار شبکه‌های سری - موازی به‌گونه‌ای است که فقط با استفاده از دو عملیات ضرب و پیچش [۲] می‌توان تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را محاسبه کرد. در مقالهٔ حاضر برای اولین بار، شبکه‌های سری - موازی از نظر ساختاری مطالعه می‌شوند. نتیجهٔ بررسی مزبور مؤید تعلق این شبکه‌ها به کلاس شبکه‌های هامنی است.

یک قضیه کلیدی قابلیت و امکانپذیری مکانیزمهای انقباض و حذف کمانی را برای شبکه‌های هامنی غیرسری - موازی تبیین می‌کند.

A Special Class of Stochastic PERT Networks

S. M. T. Fatemi Ghomi, M. Rabbani

Department of Indus. Engineering, Amirkabir University of Technology

ABSTRACT- *Considering the network structure is one of the new approaches in studying stochastic PERT networks (SPN). In this paper, planar networks are studied as a special class of networks. Two structural reducible mechanisms titled arc contraction and deletion are developed to convert any planar network to a series-parallel network structure.*

In series-parallel SPN, the completion time distrubution function can be calculated only by means of multiplication and convolution operations. For the first time, series-parallel networks are studied on the basis of the structural viewpoint. These networks belong to planar networks class. A key theorem provides capability of application of these mechanisms for non series-parallel planar networks.

---

* دانشیار ** دانشجوی دکترا

فهرست علائم

AN	مجموعهٔ شبکه‌های بدون دور		و $|A|=q$ و $|V|=n$ است	T_N	زمان ختم شبکه (پروژه)
$F(t)$	تابع توزیع مدت زمان تکمیل شبکه	idv_i	درجهٔ ورودی گرهٔ v_i (تعداد کمانهای ورودی به گرهٔ v_i)	X_{ij}	متغیر تصادفی مربوط به مدت زمان فعالیت (i,j)
$Fx_{ij}(t)$	تابع توزیع مدت زمان فعالیت (i,j)	odv_i	درجهٔ خروجی گرهٔ v_i (تعداد کمانهای خروجی از گرهٔ v_i)	$Z(\pi)$	زمان مسیر π
$G(A,V)$	یک شبکهٔ بدون دور که مجموعهٔ کمانهای آن A و مجموعهٔ گره‌های آن V است	P	مجموعهٔ مسیرهای شبکه از گرهٔ اول به گرهٔ آخر	π	یکی از مسیرهای شبکه از گرهٔ اول به گرهٔ آخر

۱- مقدمه

یک شبکهٔ پرت احتمالی، یک گراف جهتدار باز (بدون دور) همبند است. این شبکه دارای یک گرهٔ شروع و یک گرهٔ پایان است. در شبکه‌های احتمالی مدت زمان فعالیتهای متغیرهای تصادفی مستقل‌اند که تابع توزیع معلوم دارند. شبکه‌های احتمالی، مدلهای مفیدی برای مدیریت و کنترل پروژه‌های واقعی محسوب می‌شوند. این شبکه‌ها در زمینه‌های متعددی مانند تحقیقات، تولید، فعالیتهای ساختمانی، نگهداری و تعمیرات و جریان در شبکه کاربرد دارند. یک مسئلهٔ اصلی در شبکه‌های احتمالی تعیین تابع توزیع زمان ختم شبکه است. زمان ختم پروژه مبنای مهمی در بودجه بندی و زمانبندی پروژه محسوب می‌شود. محاسبهٔ تابع توزیع شبکه از پیچیدگی خاصی برخوردار است. می‌توان زمان مسیر $\pi \in P$ را به صورت زیر تعریف کرد.

$$Z(\pi) = \sum_{(i,j)\in\pi} X_{ij} \tag{۱}$$

در این راستا، زمان ختم پروژه را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$T_N = \max_{\pi\in P} \{Z(\pi)\} \tag{۲}$$

اینک تابع توزیع T_N به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F(t) = P\{T_N \le t\} = P\{Z(\pi)\le t,\ \forall\pi\in P\} \tag{۳}$$

برای بسیاری از شبکه‌های احتمالی محاسبهٔ $F(t)$ به دلیل وابستگی بین مسیرها که ناشی از کمانهای مشترک آنهاست، کاملاً دشوار است.

ورتهام و هارتلی [۱] شبکه‌های پرت را با توجه به درجهٔ وابستگی مسیرها و پیچیدگی شبکه به گروههای مختلفی تقسیم کردند و محاسبات ریاضی را به‌صورت ضریب یا پیچش برای محاسبهٔ زمان ختم پروژه به کار گرفتند. روش آنها تنها برای شبکه‌های ساده و هنگامی که تابع توزیع فعالیتها ساده است قابل کاربرد است. رینگر [۲] مدل ورتهام و هارتلی را تعمیم داد. وی با فرض وابستگی آماری در شبکه‌های ساده محاسباتش را سازماندهی کرد. از طرف دیگر کالکارنی و آدلاخا [۳] شبکهٔ پرت را به صورت یک زنجیر مارکوف پیوسته مدلبندی کردند. گرچه این مدل بر فرض توزیع نمایی برای مدت زمان فعالیتها استوار است، لیکن قادر است که تحلیلی دقیق برای مشخصه‌های شبکه ارائه دهد. مارتین [۴] یک روش محاسباتی برای ارزیابی توزیع زمان شبکه تحت این فرض که توابع چگالی زمان فعالیتها چندجمله‌ای است، ایجاد کرد. در روش وی ابتدا هر شبکه جهتدار باز به شبکهٔ سری - موازی بدل می‌شود. در مرحلهٔ بعد شبکهٔ جدید با یک سری محاسبات ضرب و پیچش به شبکه‌ای با یک کمان بدل می‌شود و تابع چگالی زمان کمان مزبور، مشخصه‌های زمان شبکهٔ اولیه را بیان می‌کند. دودین [۵] با فرض استقلال آماری مدت زمان فعالیتها تخمینی از کران پایین ارائه کرد. روبیلارد و تراهان [۶] نیز روشی برای تخمین یک کران ایجاد کردند. کلیندورفر [۷] توزیعات حدی بالا و پایین برای زمانهای شروع و ختم شبکه ارائه کرد، ولی روش وی فقط برای شبکه‌هایی که توابع توزیع فعالیتها گسسته‌اند طرح شده است.

محاسبهٔ امید ریاضی مدت زمان شبکه، مواردی نظیر تخمینهای نقطه‌ای و کرانهای بالا و پایین را دربرمی‌گیرد. روش وان‌اسلایک [۸] میانگین زمان ختم را براساس مفهوم شاخص بحرانیت تخمین می‌زند. اسکولی [۹] روشی را در این زمینه با

فرض توزیع نرمال و استقلال برای مدت زمان فعالیتها ایجاد کرد. کامبورفسکی [۱۰] با فرض استقلال و توزیع آماری پیوسته برای مدت زمان فعالیتها کاری را ارائه داد. توزیع آماری مذکور تنها با دو پارامتر معرفی می‌شود. همچنین وی روشی برای دستیابی به تخمینهایی برای کرانهای بالا و پایین هنگامی که فعالیتها مدت زمان مستقل و نرمال دارند، ابداع کرد. فالکرسون [۱۱] با فرض استقلال متغیرهای تصادفی چندمتغیره مربوط به زمان تحقق یک گره، با محاسبهٔ یک نوع احتمال شرطی، زمان تحقق گره را محاسبه و سپس با یک معادلهٔ برگشتی، میانگین زمان ختم شبکه را محاسبه کرد. در محاسبهٔ میانگین زمان رسیدن به هر گرهٔ j، امید ریاضی به صورت مجموع حاصلضرب احتمال هر گره متصل به j در طولانیترین مسیر رسیدن به j محاسبه شد. کلینگن [۱۲] تخمین فالکرسون را برای حالت پیوسته گسترش داد. المغربی [۱۳] دو تقریب بهتر از فالکرسون مطرح کرد. روبیلارد و تراهان [۱۴] تخمین فالکرسون را تعمیم دادند و کرانهایی را برای امید ریاضی مدت زمان شبکه ارائه کردند. آنها نشان دادند که تخمین‌شان حداقل به دقت تخمین فالکرسون و بهتر از تخمین المغربی است. تخمین لیندسی [۱۵] بهتر از تخمین فالکرسون است زیرا در انتخاب مسیری که طولش می‌تواند طول مسیر بحرانی را تخمین بزند، انعطاف پذیری بیشتری دارد. دودین [۱۶] مقدار متوسط یک توزیع تقریبی از زمان ختم را به عنوان کران بالایی برای متوسط زمان ختم به کار گرفت. اورد [۱۷] روشی برای تقریب توزیع پیوستهٔ زمان تکمیل شبکه به حالت گسسته ارائه کرد. در روش وی، برد یک متغیر تصادفی غیرمنفی (مثلاً زمان یک فعالیت) به k قسمت تفکیک می‌شود به گونه‌ای که احتمال فراگیری متغیر مزبور بین هر دو مقدار یک عدد معین باشد، سپس طی محاسبه یک احتمال مشروط امید ریاضی مقدار متغیر تصادفی محاسبه می‌شود. در مرحلهٔ آخر وی با محاسبهٔ احتمال رخداد مقدار امید ریاضی برای متغیر تصادفی اولیه آن را به عنوان احتمال رخداد متغیر تصادفی معرفی می‌کند.

دودین و سروانسی [۱۸] با بهره‌گیری از نظریه مقدار بحرانی تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را تقریب زدند. آنها نشان دادند که روش تقریبی آنهانتایج بهتری درمقایسه بافرض نرمال برای فعالیتها درپی دارد.

بر مبنای نظریه مقدار بحرانی ابتدا تخمینهایی برای امید ریاضی و واریانس فعالیتها ارائه و سپس تابع توزیع زمان تکمیل را تخمین زدند. ویلیامز طی دو مقاله [۱۹و ۲۰] بحث روی ساختار تابع توزیع مدت فعالیتها و مفهوم بحرانیت را مطرح کرد و تأثیرات این دو را در محاسبات مربوط به شاخص مقدار بحرانی بودن فعالیتها و مسیرها و محاسبهٔ تابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌ها متذکر شد. سروش [۲۱] با ارائه یک مکانیزم ساختاری تحت عنوان چیرگی مسیرها، مبادرت به شناسایی بحرانی‌ترین مسیر در شبکه کرد. وی بحرانی‌ترین مسیر در شبکه را با استفاده از قضیه حد مرکزی به صورت مسیری که کمترین حد بالا را برای احتمال اتمام مدت شبکه در یک مدت معلوم نشان می‌دهد، تعریف می‌کند. سروش [۲۲] همچنین در مقاله دیگری موضوع ریسک‌پذیری را در شرایط احتمالی برای مدیریت پروژه (شبکه) بررسی می‌کند. در این مقاله مدت فعالیتهای متغیرهای تصادفی غیرمنفی‌اند و با استفاده از یک تابع عدم مطلوبیت، مسیری را که عدم مطلوبیت مورد انتظار را حداکثر می‌کند، به عنوان مسیر بحرانی معرفی و زمان ختم شبکه را بر مبنای آن محاسبه می‌کند. ماگوت و اسکودلارسکی [۲۳] با فرض نمایی بودن مدت فعالیتها، برای اجتناب از محاسبهٔ تعداد حالات زنجیر مارکوفی حاصل از شبکهٔ مزبور، روشی تقریبی را برای محاسبهٔ میانگین زمان ختم شبکه ارائه کردند. در این زمینه از یک تقریب چندمتغیره و دیدگاههای کامبورفسکی مستقیماً استفاده کرده‌اند.

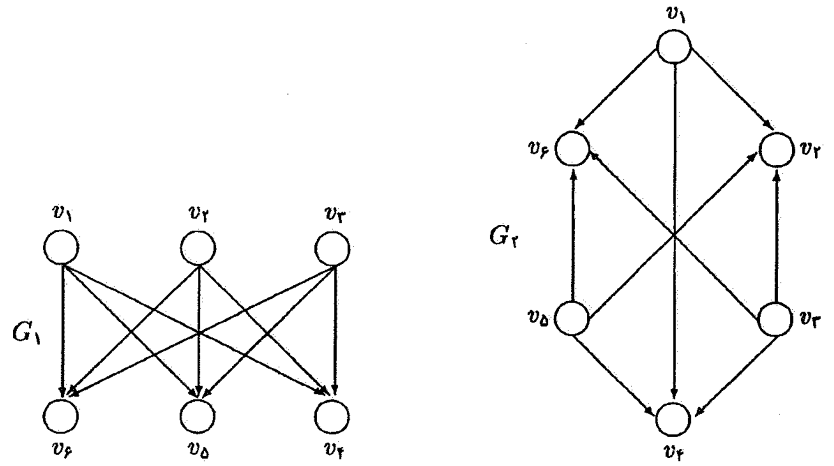
۲- تعاریف و پیش‌نیازها

تعریف ۱- شبکهٔ G_1 را ایزومورف شبکهٔ G گویند اگر اولاً: تعداد رئوس و کمانهای این دو شبکه با هم مساوی باشند. ثانیاً: یک مصور مانند ϕ وجود دارد به گونه‌ای که به ازای هر دو رأس u و v که کمان uv متعلق به مجموعهٔ کمانهای G است $\phi u\phi v$ نیز جزو کمانهای مجموعه کمانهای G_1 باشد و برعکس [۲۴و۲۵].

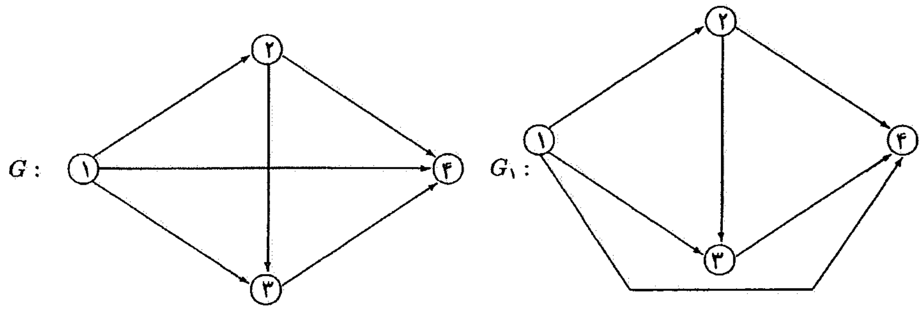
در شکل (۱) شبکه‌های G_1 و G_2 ایزومورف‌اند. به عنوان مثال مصور ϕ به صورت $\phi:V(G_1)\rightarrow V(G_2)$ به صورت زیر می‌تواند تعریف شود

$$\phi v_1=v_1 \quad , \quad \phi v_2=v_3 \quad , \quad \phi v_3=v_5 \quad , \quad \phi v_4=v_2, \quad \phi v_5=v_4 \quad , \quad \phi v_6=v_6$$

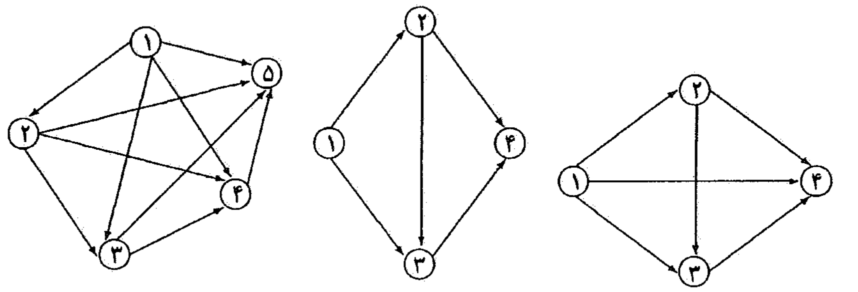
تعریف ۲- یک عضو از مجموعهٔ AN (شبکه‌های بدون دور) را هامنی گویند، اگر بتوان آن را بر صفحه‌ای نشاند. این بدان معناست



شکل ۱- دو شبکهٔ ایزومورف



شکل ۲- یک شبکه هامنی و ایزومورف مسطح آن



(الف) (ب) (ج)

هامنی است ولی مسطح نیست — هامنی و مسطح است — هامنی نیست و مسطح نیز نیست

شکل ۳- انواع شبکه‌های هامنی و مسطح

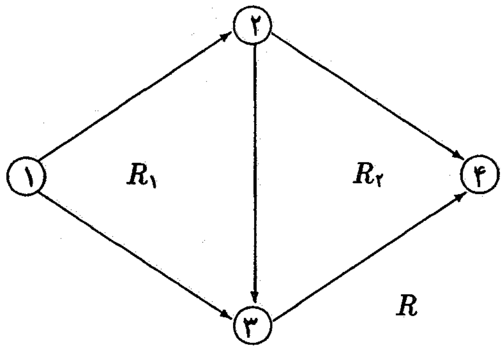
که اگر $G \in AN$ یک شبکهٔ هامنی باشد، یک شبکهٔ مانند G_1 ایزومورف با آن وجود دارد به گونه‌ای که هیچ دو کمانی از G_1 همدیگر را قطع نمی‌کنند. [۲۴و۲۵].

در شکل (۲) شبکهٔ G یک شبکهٔ هامنی است و G_1 ایزومورف مسطح[۳] آن است.

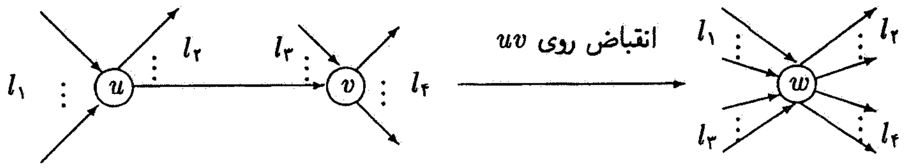
تعریف ۳- یک شبکه را مسطح گویند، اگر بر صفحه نشسته باشد؛ یعنی کمانهای آن همدیگر را قطع نمی‌کنند [۲۴و۲۵].

تذکر : یک شبکهٔ هامنی شبکه‌ای است که می‌توان یک شبکهٔ مسطح ایزومورف با آن یافت. شبکهٔ مسطح، شبکه‌ای است که خاصیت مسطح بودن (عدم تقاطع دو کمان در شبکه) را دارد.

در شکل (۳) شبکهٔ (الف) هامنی است ولی مسطح نیست.



شکل ۴- وجوه یک شبکه



شکل ۵- انقباض کمانی

شبکهٔ (ب) در شکل (۳) هامنی و مسطح است.

شبکهٔ (ج) در شکل بالا، شبکه‌ای را نشان می‌دهد که بـه هـیچ وجه نمی‌توان شبکه‌ای ایزومورف با آن رسم کرد که حداقل دو کمان متقاطع نداشته باشد. لذا شکل (ج)، هامنی نیست. شکل (الف) را می‌توان به صورت مسـطح رسـم کـرد، پس هـامنی است ولی در ترسیم فعلی مسطح نیست.

تعریف ۴- محدودهٔ بسته بین زیرمجموعه‌ای از گـره‌های شـبکه و کمانهای مابین را وجه شبکه گویند. در ایـن شـبکه دو نـوع وجـه داخلی و خارجی وجود دارد. در شکل (۴)، R_1 و R_2 وجوه داخلی و R وجه خارجی است [۲۴و۲۵].

تعریف ۵- کمان $e=uv$ را در نظر بگیرید. چنانچه انقباض کـمانی روی e انجام شود، رأس ω پـدید مـی‌آید کـه کـمانهای ورودی و خروجی آن به صورت شکل (۵) است [۲۵].

تعریف ۶- یک کمان در شبکهٔ G را پل کلی[۴] گویند، اگر با حذف آن شبکه به شکل منفصل تبدیل شود؛ یا به بیان دیگر همبندی حفظ نشود. به این ترتیب کمانی که با حذف آن همبندی شـبکه پـایدار بماند، پل کلی نیست.

تعرف ۷- شبکه‌ای را منفصل داخلی گویند که هیچ دو مسیری از آن به غیر از دو گره ابتدا و انتهای شبکه، در گرهٔ دیگـری بـا یکـدیگر مشترک نباشند، شکل (۶)، [۲۴و۲۵].

تعریف ۸- عملیات سری اگر دو کمان در شبکه به صورت e_1 و e_{11} سری باشند، می‌توان آنها را با یک کمان که طولش جمع دو کمان مزبور است جایگزین کرد [۱و۴].

تابع توزیع مدت زمان کمان حاصل از جمع دو کمان اولیه به صورت پیچش، دو تابع مربوط به e_1 و e_{11} محاسبه می‌شود.

$$F_{X_e}(t)=F_{X_{e_1}}(t)*F_{X_{e_{11}}}(t)=\int_0^t F_{X_{e_1}}(t-x)dF_{X_{e_{11}}}(t) \quad (۴)$$

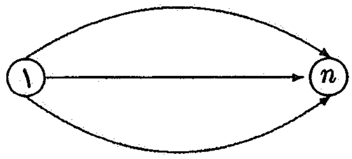
مجموعهٔ عملیات پیچش در یک شبکه که به معنای جایگزینی هر دو کمان سری با یک کمان متناسب به نحو بالاست را عملیات سری یا پیچش گویند.

تعریف ۹- عملیات موازی اگر دو کـمان e_1 و e_{11} مـوازی بـاشند، می‌توان آنها را با کمانی به طول $X_e=\max(X_{e_1},X_{e_{11}})$ جایگزین کرد [۱و۴].

تابع توزیع مدت زمان کـمان حـاصل از دو کـمان مـوازی بـه صورت ضرب دو تابع مربوط به e_1 و e_{11} محاسبه می‌شود

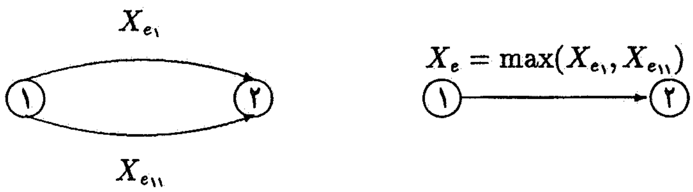
$$F_{X_e}(t)=F_{X_{e_1}}(t).F_{X_{e_{11}}}(t) \quad (۵)$$

مجموعهٔ عملیات ضرب در یک شبکه که به معنای جایگزینی هر

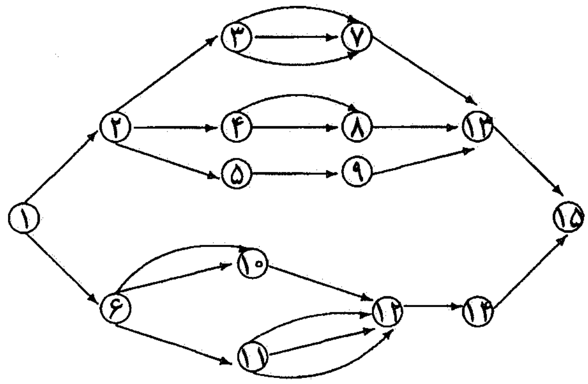


شکل ۶- یک شبکهٔ منفصل داخلی با ۳ مسیر

شکل ۷- دو کمان در وضعیت سری و کمان معادل با آن دو



شکل ۸- دو کمان در وضعیت موازی و کمان معادل با آن دو



شکل ۹- یک شبکهٔ هامنی کاملاً کاهش پذیر

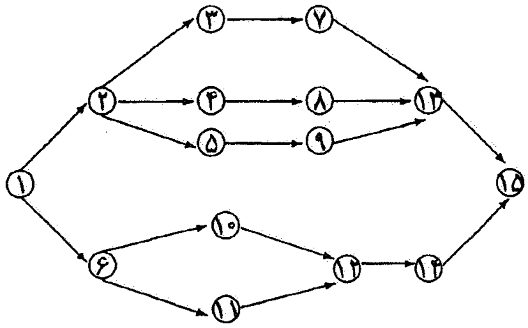
دو کمان موازی با یک کمان متناسب به نحو بالاست را عملیات موازی یا ضرب گویند.

تعریف ۱۰- شبکهٔ کاهش‌پذیر شبکه‌ای را گویند که امکان استفاده از دو عملیات سری و موازی برای ساده کردن ساختار آن وجود داشته باشد. لذا شبکهٔ کاهش ناپذیر شبکه‌ای است که امکان استفاده از عملیات سری و موازی برای ساده‌سازی ساختار آن وجود ندارد [۵].

تعریف ۱۱- شبکهٔ سری - موازی شبکهٔ پرت احتمالی $G(V,A) \in AN$ که $|V|=n$ و $|A|=q$ را سری - موازی گویند چنانچه هامنی و کاملاً کاهش پذیر باشد. یعنی با استفاده از عملیات سری و موازی بتوان آن را به شبکهٔ $G'(V',A')$ که $|V'|=۲$ و $|A'|=۱$ است تبدیل کرد. در این صورت دو گرهٔ شبکهٔ G' همانا گره‌های شروع و ختم شبکهٔ G و تابع توزیع مربوط به کمان G' همان تابع توزیع حرکت از گرهٔ شروع به گرهٔ ختم شبکهٔ G (تابع توزیع تکمیل شبکهٔ پرت احتمالی) خواهد بود.

تذکر: تعریف ۱۱ با استفاده از قضایای پیوست (۱) ارائه شده است و در ادامهٔ مقاله در مواقع لزوم از عبارت شبکه‌های هامنی کاملاً کاهش پذیر به جای شبکه‌های سری - موازی استفاده می‌شود.

به عنوان مثال مراحل زیر را در ساده‌سازی ساختاری شبکهٔ شکل (۹) می‌توان در عملیات سری - موازی پیشنهاد کرد.



شکل ۱۰- شبکهٔ شکل (۹) پس از انجام عملیات موازی روی کمانهای (۷-۳)، (۸-۴)، (۱۰-۶)، (۱۲-۱۱)

تداوم عملیات سری - موازی منجر به دستیابی به شبکه‌ای با دو گره که همان دو گرهٔ ابتدا و انتهای شبکه اصلی‌اند خواهد شد. انجام عملیات سری - موازی در شبکه‌های مثال ذکر شده به روی توابع توزیع مدت فعالیتها در نهایت منجر به محاسبهٔ مستقیم تابع توزیع زمان تکمیل شبکه خواهد شد. ساختار یک شبکهٔ هامنی کاملاً کاهش پذیر (سری - موازی) تنها ساختاری است که انجام محاسبهٔ مستقیم تابع توزیع زمان تکمیل شبکه با کمک دو عملیات سری و موازی را میسر می‌سازد.

۳- شبکه‌های هامنی

۳-۱- مکانیزمهای کاهش یک شبکه بدون دور هامنی

در این قسمت دو مکانیزم انقباض کمانی و حذف کمانی معرفی می‌شوند. این مکانیزمها قادرند ساختار شبکه را ساده کرده و ساختاری کاملاً قابل کاهش ایجاد کنند. در ساختار جدید لازم است تنها از دو عمل ضرب و پیچش استفاده شود تا شبکه به شبکه‌ای با دو گره و کمان مابین تبدیل شود.

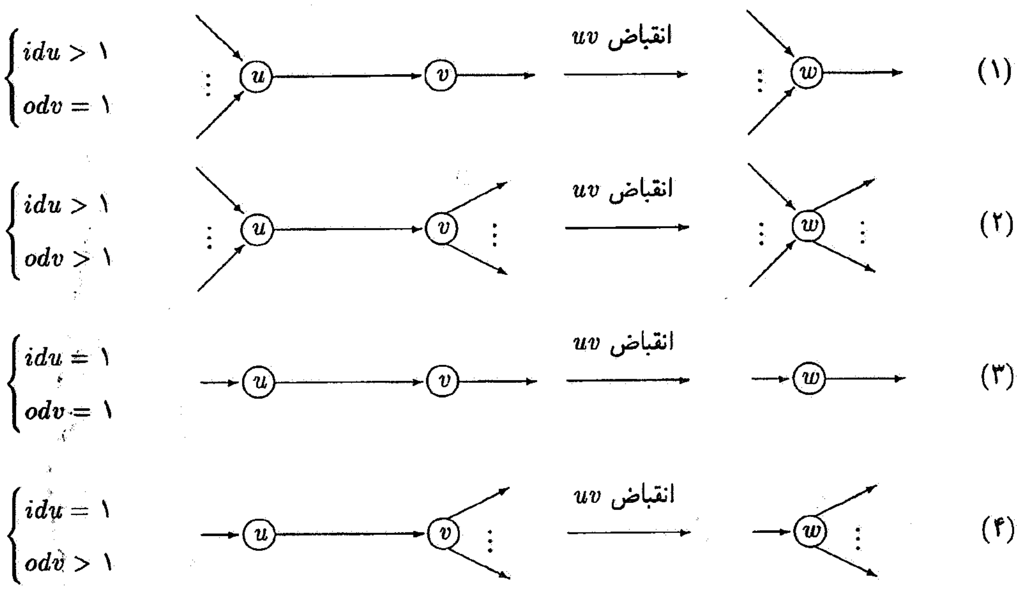
۳-۱-۱ مکانیزم انقباض کمانی

قضیهٔ ۱- کمان $e=uv$ را به عنوان کمانی از مجموعه کمانها شبکه بدون دور G در نظر بگیرید. چنانچه به غیر از کمان e تعداد 1 مسیر از u به v در G وجود داشته باشد، انجام انقباض روی e شبکه‌ای را ایجاد می‌کند که دیگر بدون دور نیست؛ بلکه در آن 1 دور وجود دارد.

اثبات: کاملاً بدیهی است.

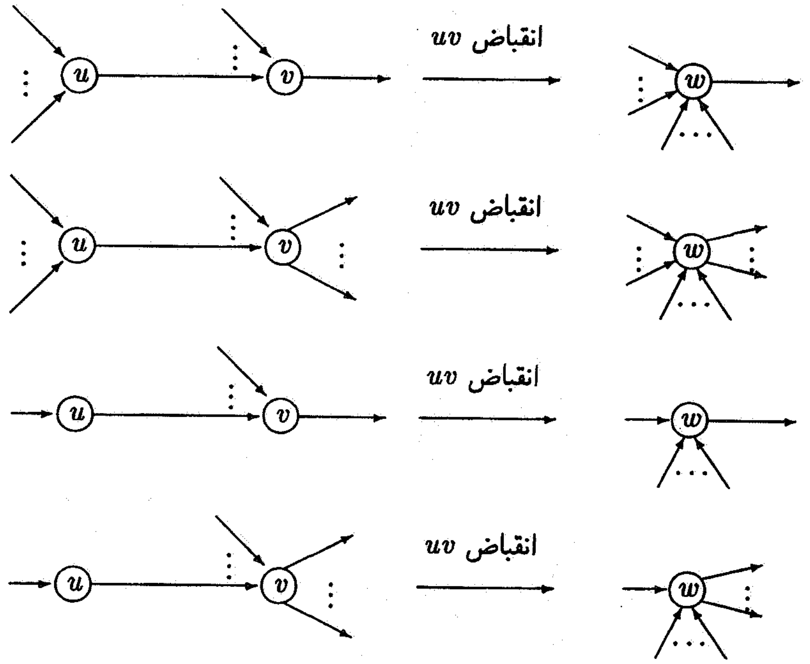
اگر عمل انقباض روی کمانی انجام شود، با توجه به درجهٔ ورودی و خروجی دو گرهٔ ابتدا و انتهای کمان مزبور جمعاً ۱۶ حالت به صورت زیر پدید می‌آید

الف) odu=۱ ، idv=۱



شکل ۱۱- انقباض کمانی در حالتهای odu=۱ و idv=۱

ب) $idv>۱$ ، $odu=۱$



$$\begin{cases} idu > ۱ \\ odv = ۱ \end{cases} \qquad (۵)$$

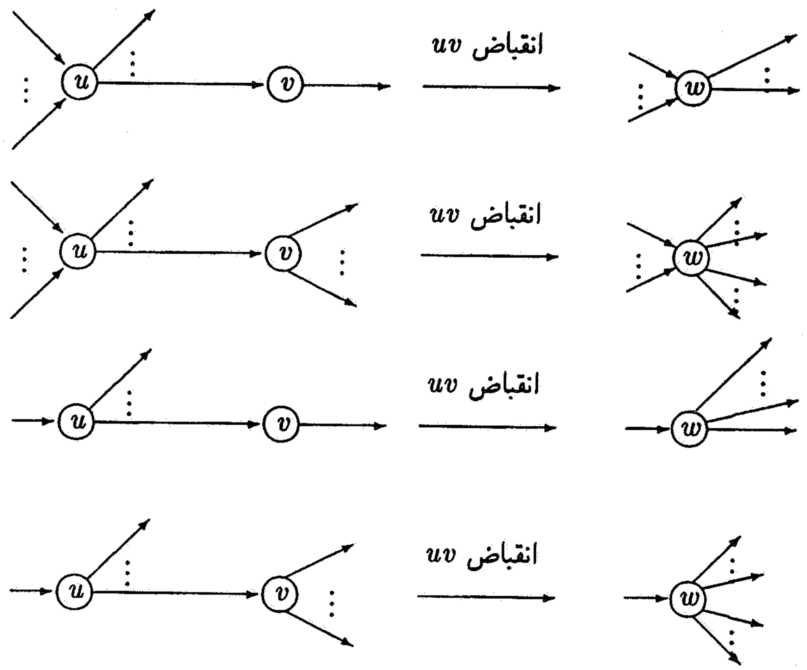
$$\begin{cases} idu > ۱ \\ odv > ۱ \end{cases} \qquad (۶)$$

$$\begin{cases} idu = ۱ \\ odv = ۱ \end{cases} \qquad (۷)$$

$$\begin{cases} idu = ۱ \\ odv > ۱ \end{cases} \qquad (۸)$$

شکل ۱۲- انقباض کمانی در حالتهای $odu=۱$ ، $idv>۱$

ج) $idv=۱$ ، $odu>۱$



$$\begin{cases} idu > ۱ \\ odv = ۱ \end{cases} \qquad (۹)$$

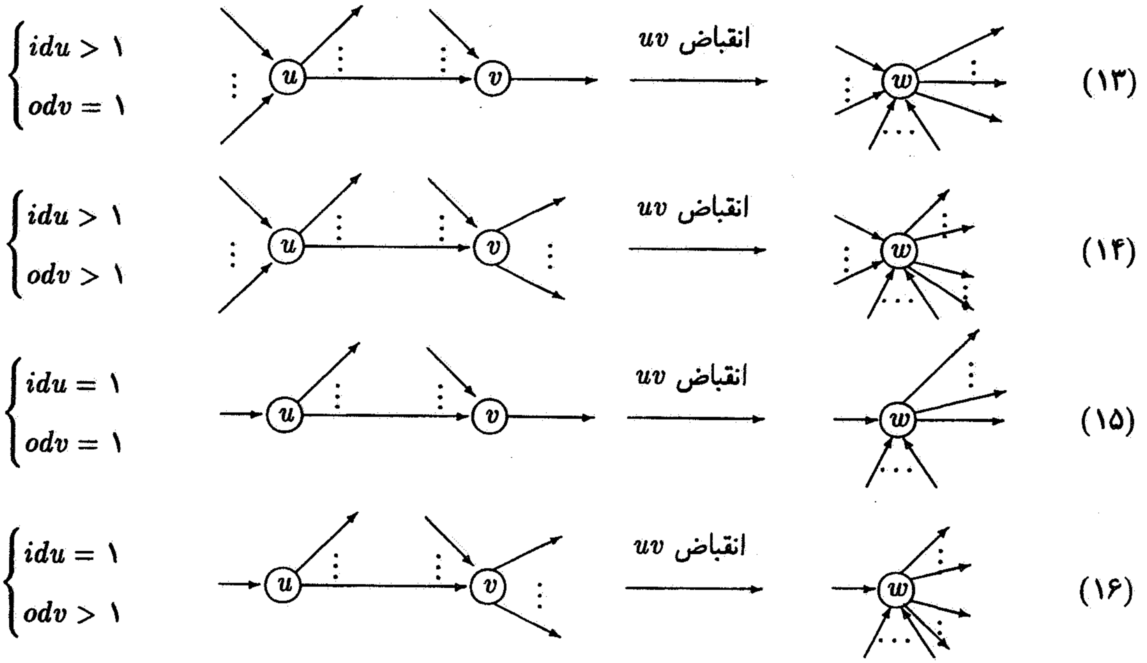
$$\begin{cases} idu > ۱ \\ odv > ۱ \end{cases} \qquad (۱۰)$$

$$\begin{cases} idu = ۱ \\ odv = ۱ \end{cases} \qquad (۱۱)$$

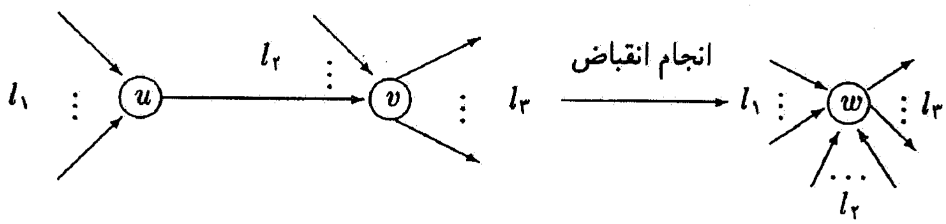
$$\begin{cases} idu = ۱ \\ odv > ۱ \end{cases} \qquad (۱۲)$$

شکل ۱۳- انقباض کمانی در حالتهای $odu>۱$ ، $idv=۱$

د) $idv>۱$ ، $odu>۱$



شکل ۱۴- انقباض کمانی در حالتهای $odu>۱$ ، $idv>۱$



شکل ۱۵- شکل کمانها در حالت (۶) و انجام انقباض

تعریف مسیرهای موضعی[5] عبارت از مسیرهایی است که به صورت محلی فقط از گره یا گره‌های مورد نظر عبور می‌کنند. انجام یک انقباض کمانی در یک شبکه از دو دیدگاه اصلی حائز توجه و اهمیت است.

اولاً : تغییر وابستگی کمانها و به تبع آن ثانیاً: تغییر مسیرهای شبکه.

قضیهٔ ۲- اگر در شبکهٔ $G\in AN$ که دارای کمان $e=uv$ است بخواهیم انقباض کمانی را روی e انجام دهیم، چنانچه $idv=۱$ یا $odu=۱$ و یا هر دو باشد، این انقباض تأثیری در تعداد مسیرهای موضعی شبکه بین دو رأس u و v نخواهد داشت.

اثبات: با انجام شمارش کامل روی فرمهای ۱ الی ۱۲ در شکلهای ۱۱ تا ۱۳ و محاسبهٔ تعداد مسیرهای قبل و بعد از انقباض قضیه اثبات می‌شود. به عنوان مثال حالت (۶) را بررسی می‌کنیم، (شکل ۱۵).

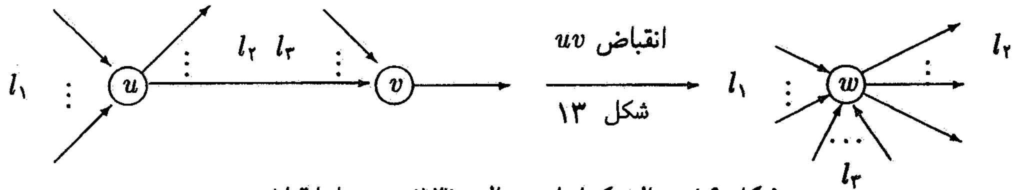
$$idu=l_۱$$
$$odu=۱$$
$$idv=l_۲+۱$$
$$odv=l_۳$$

$l_۱l_۳ + l_۲l_۳$ = تعداد مسیرهای موضعی بین v و u قبل از انقباض

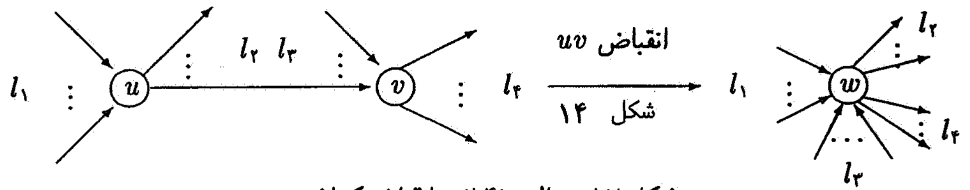
$(l_۱+l_۲)l_۳$ = تعداد مسیرهای موضعی از ω بعد از انقباض

پس تعداد مسیرهای موضعی قبل و بعد از انقباض با هم برابرند. این موضوع برای حالتهای ۱ الی ۱۲ صادق است.

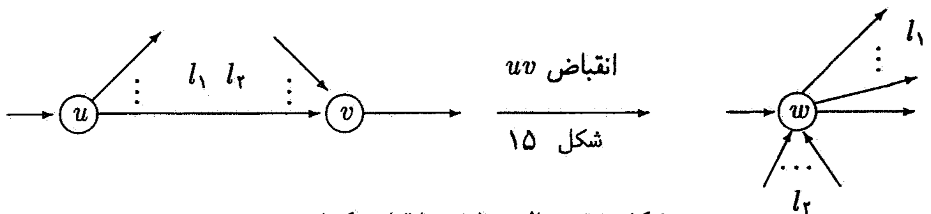
قضیه ۳- در شبکهٔ $G\in AN$ اگر انقباض کمانی را روی $e=uv$ با شرط $idv>۱$ و $odu>۱$ انجام دهیم به گونه‌ای که $idu\geq۱$ و



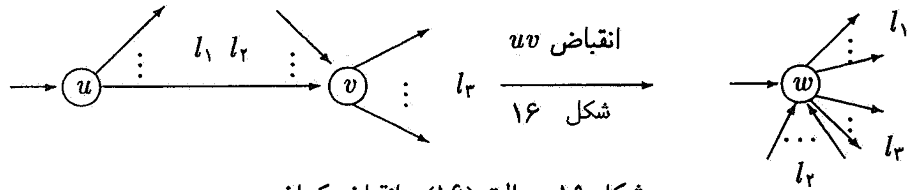
شکل ۱۶- حالت کمانها در حالت (۱۳) به همراه انقباض



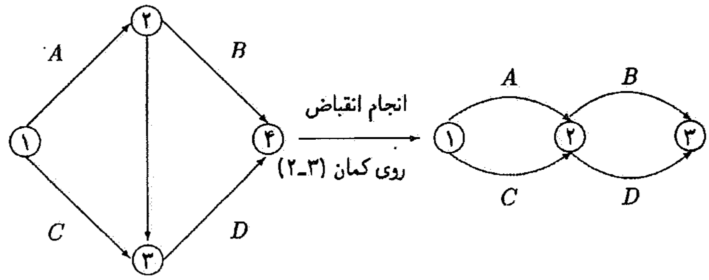
شکل ۱۷- حالت (۱۴) و انقباض کمان



شکل ۱۸- حالت (۱۵) و انقباض کمان



شکل ۱۹- حالت (۱۶) و انقباض کمان

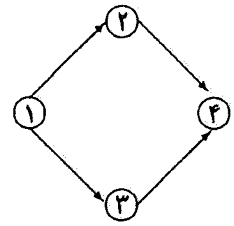


شکل ۲۰- یک حداقل شبکهٔ کاهش ناپذیر و انجام انقباض روی یک کمان

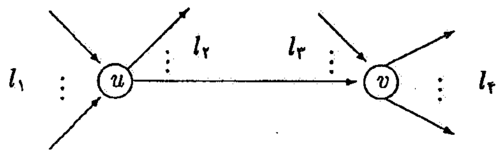
$odv \geq 1$ باشد، در این صورت مجموع تعداد مسیرهای موضعی عبوری از رأس ω (رأس ناشی از انقباض $e=uv$) بیشتر از مجموع تعداد مسیرهای موضعی عبوری از u و v است. تعداد مسیرهای افزایش یافته برابر حاصلضرب $(1 - odu)(1 - idv)$ خواهد بود. اثبات در پیوست است).

چنانچه کاهش ناپذیر بودن یک شبکه را به دلیل وجود زیرشبکه‌های کاهش ناپذیر در شبکه بدانیم (دودین [۵])، بنابراین ساده‌سازی این نوع زیرشبکه، فاکتور اصلی در ساده‌سازی ساختار شبکه محسوب می‌شود. شکل(۲۰) یک حداقل شبکه کاهش‌ناپذیر رانشان می‌دهد.

مشاهده می‌شود که به طور کلی ساختمان شبکهٔ تغییر حالت یافته و شبکهٔ جدیدی با ۳ گره و چهار کمان از کمانهای قبلی، ولی با حالت وابستگی جدیدی ایجاد شده‌اند. یک کمان دچار انقباض شده است و به این ترتیب یک مسیر حذف شده است. تغییرات در مسیرهای شبکه،



شکل ۲۱- شبکهٔ شکل (۲۰) بعد از حذف کمان (۳-۲)



شکل ۲۲- وضعیت کمانها در اتصال دو گره

تحت تأثیر انقباض کمانی عبارت‌اند از: ایجاد یک مسیر جدید و انقباض یک مسیر به مقدار یک کمان.

ملاحظه می‌شود که مکانیزم انقباض کمانی، ساختار مسئله را به حالتی کاملاً کاهش پذیر تغییر می‌دهد ولی مانند هر مکانیزم دیگری (مثلاً مضاعف سازی کمانی دودین [۵]) به دلیل در هم ریختن ساختار شبکه اصلی، تعداد و حالت مسیرها را تغییر می‌دهد. ازاین رو لازم است در طراحی روش محاسبه F(t) راه‌حلی جستجو شود که میزان خطای حاصل از تقریب حداقل شود.

۳-۱-۲ مکانیزم حذف کمان

چنانچه کمانی را در یک شبکه حذف کنیم دو گرهٔ ابتدا و انتهای آن باقی می‌مانند و فقط یک کمان حذف می‌شود. از طرف دیگر حذف کمان مزبور منجر به حذف تمامی مسیرهایی می‌شود که از آن کمان عبور می‌کند. یکی از جنبه‌های اصلی تمایز بین مکانیزمهای انقباض و حذف توجه به این نکته است که در انجام انقباض کمانی، تعداد مسیرهای شبکه افزایش یافته و یا ثابت می‌مانند. در مکانیزم حذف قطعا تعداد مسیرها کاهش می‌یابد و در صورت انتخاب مناسب کمان، از پیچیدگی شبکه کاسته می‌شود.

از آنجایی که هر کمان حداقل در ساختار یک وجه حضور دارد، حذف کمان به معنای حذف یک مرز خواهد بود و به همین دلیل دو وجه با یکدیگر در هم آمیخته و وجه جدیدی را خواهند ساخت. شکل (۲۰) یک شبکهٔ کاهش ناپذیر را نشان می‌دهد.

با حذف کمان (۳-۲) شبکهٔ شکل (۲۱) به دست می‌آید

اولاً: یکی از مسیرهای شبکه یعنی ۴-۳-۲-۱ حذف شد. ثانیاً وجه حاصل در شکل (۲۱) کاملاً کاهش پذیر است.

بررسی نحوهٔ عمل مکانیزم حذف کمان به بررسی در حالتهای ۱۶گانه که در مبحث انقباض مطرح شد برمی‌گردد و منحصراً بررسی به حالتهایی که در شبکه‌های کاهش ناپذیر مشاهده می‌شوند، مربوط می‌شود. قبل از این بررسی توجه به نکات زیر مهم است.

الف - اگر شبکه دارای پل کلی باشد، انجام حذف کمانی بروی آن میسر نیست، زیرا منجر به عدم همبندی شبکه می‌شود.

ب - در میان حالتهای ۱۶گانه که براساس درجات ورودی و خروجی گره‌های مابین یک کمان پدید می‌آید، تنها برخی موارد در یک شبکه منجر به ایجاد وضعیت کاهش ناپذیر می‌شود.

قضیه ۴- چنانچه در یک شبکه بر روی کمان $e=uv$ که پل کلی نیست (حذف آن همبندی شبکه را برهم نمی‌زند)، حذف کمانی را انجام دهیم، تعداد کاهش مسیر موضعی برابر حاصلضرب $(idu)(odv)$ خواهد بود.

اثبات : مسئله را در حالت کلی و مانند شکل (۲۲) در نظر می‌گیریم.

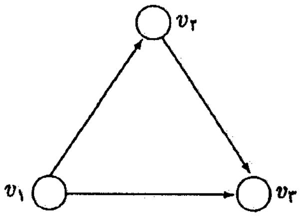
$$idu = l_1 \qquad idv = l_3+1$$

$$odu = l_2+1 \qquad odv = l_4$$

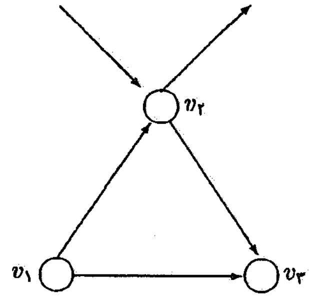
با حذف uv ، تعداد مسیرگذرنده از u که قبل از حذف l_1l_2 است تغییر نمی‌کند. تعداد مسیر گذرنده از v منشعب از l_3 عوض نمی‌شود که همانا l_3l_4 است. ممکن است کمان خروجی از u با مسیری منجر به کمانی ورودی به v شود که در صورت حذف uv، تأثیری در این زمینه ایجاد نمی‌شود. ولی براساس درجهٔ ورودی u از طریق uv، به گره v می‌رسیم و از طریق l_4 کمان از v می‌توان خارج شد که جمعاً به تعداد l_1l_4 مسیر موضعی از طریق uv ایجاد می‌شود که با حذف v آنها از بین می‌روند پس تعداد مسیر کاهش یافتهٔ موضعی برابر است با $(odv)(idu)$.

براساس مکانیزم حذف امکان هیچ گونه دسته بندی حالتها وجود ندارد چون حداقل در حالت ۱۵ با حذف کمان uv، حداقل یک واحد کاهش مسیر موضعی وجود دارد و چون مقدار idu و odv در کاهش تعداد مسیر موضعی مؤثرند، جز تحت یک مسئله نمی‌توان حالتهای مطروحه را مقایسه کرد.

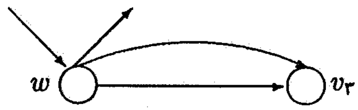
با توجه به قضیه دودین [۵] پیچیدگی شبکه در هنگام محاسبهٔ



شکل ۲۳- وجه سه ضلعی کاهش پذیر



شکل ۲۴- وجه سه ضلعی کاهش ناپذیر



شکل ۲۵- انجام انقباض روی کمان v_1v_2 در شکل (۲۴)

F(t) منشعب از وجود حالت کاهش ناپذیر است. بنابراین انجام حذف کمانی بر روی کمانی انجام می‌شود که اولاً تعداد حالت کاهش ناپذیر را در شبکه کاهش دهد و ثانیاً حاصلضرب $(idu)(odv)$ کمتر باشد.

۴- بررسی امکانپذیری استفاده از مکانیزمهای انقباض و حذف کمان

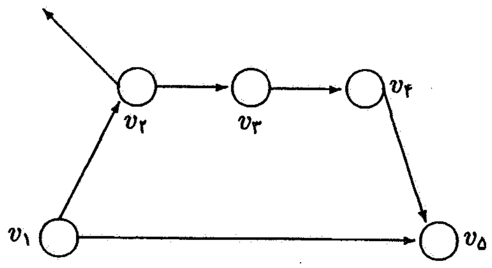
امکان استفاده از مکانیزمهای انقباض و حذف کمان در یک شبکهٔ هامنی با استفاده از قضیهٔ زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۵- در یک شبکه هامنی عضو AN، گرهی وجود دارد که با مکانیزم حذف کمانی یا انقباض کمانی که از آن منشعب می‌شود، یا به آن منتهی می‌شود، می‌توان ساختار جدیدی را ایجاد کرد که قطعاً یک عمل سری یا موازی قابل اجرا باشد.

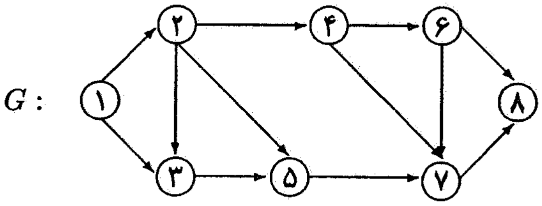
اثبات: شبکهٔ $G' \in AN$ و ایزومورف مسطح آن G را در نظر بگیرید. مسئله در دو وضعیت زیر قابل بررسی است.

الف - اگر شبکهٔ G دارای حداقل یک وجه سه ضلعی باشد

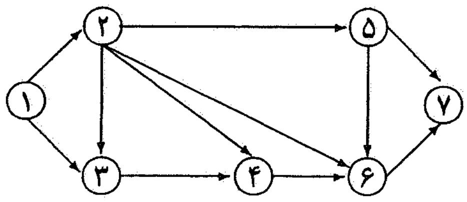
این وجه می‌تواند کاهش پذیر یا کاهش ناپذیر باشد. اگر وجه



شکل ۲۶- یک وجه غیرسه‌ضلعی غیرپایه



شکل ۲۷- یک شبکهٔ هامنی کاهش ناپذیر (غیرسری - موازی)



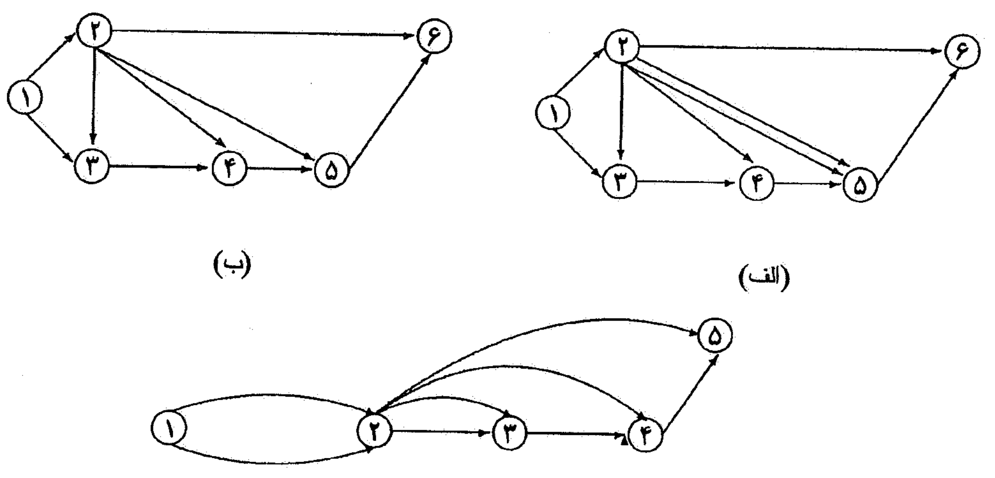
شکل ۲۸- شبکهٔ G پس از انجام انقباض روی (۴-۲)
و شماره‌گذاری مجدد

کاهش‌پذیر باشد روی دوضلع آن می‌توان انقباض ایجاد کرد، شکل(۲۳).

روی ضلع سوم به دلیل حفظ عدم تشکیل دور نمی‌توان عمل انقباض کمانی را انجام داد. در شکل بالا با توضیحات ارائه شده، روی یکی از دو کمان v_1v_2 یا v_2v_3 می‌توان انقباض کمانی را انجام داد. اگر این وجه سه ضلعی، کاهش ناپذیر باشد، درجهٔ ورودی و خروجی v_2 دیگر ۱ نیست و لزوماً ورودی و خروجیهای دیگری خواهد داشت. لذا ممکن است شکل (۲۳) به صورت شکل (۲۴) تغییر یابد.

مجدداً ملاحظه می‌شود که با وجود آنکه $idv_2>1$ و $idv_1>1$ است، می‌توان حداقل با انقباض روی v_1v_2 یا v_2v_3 حالت توازی دو کمان منتهی به v_3 را ایجاد کرد. به بیان دیگر شکل (۲۵) حاصل می‌شود.

در وضعیت جدید اگر کمانهای ورودی یا خروجی به v_2 حذف شوند، وجه سه ضلعی کاهش پذیری ایجاد می‌شود که با توجه به



(الف) (ب) (ج)

شکل ۲۹- انجام عمل انقباض و عملیات سری و موازی در شبکهٔ شکل (۲۸)

مطالب مذکور در ابتدای اثبات این قضیه مجدداً می‌توان از عمل موازی برای دو کمان قبل و بعد از v_2 بهره گرفت. افزایش درجات ورودی و خروجی v_1 و v_3 در این تحلیل نقشی ایفا نمی‌کنند.

ب - اگر شبکه دارای وجه سه ضلعی نباشد

در این حالت چنانچه وجه مورد نظر کاملاً قابل کاهش نباشد رأسی وجود دارد که درجهٔ ورودی و یا خروجی (یا هر دو) بیش از ۱ است، شکل (۲۶).

در شکل فوق v_2 رأسی است که درجهٔ ورودی و یا خروجی آن بیش از ۱ است. بنابراین حداقل یک رأس با درجهٔ ۳ (مجموع درجهٔ ورودی و خروجی) وجود دارد که عمل حذف کمان (یا کمانها) ساختاری را ایجاد می‌کند که در آن v_2 دارای درجه ورودی و خروجی ۱ است. در این ساختار امکان عملیات سری فراهم خواهد بود.

با توجه به مطالب بالا در یک شبکه هامنی همواره می‌توان گرهی یافت که انجام عمل انقباض یا حذف بر روی کمانی که از آن منشعب می‌شود یا به آن منتهی می‌شود، میسر است. بنابراین دو مکانیزم بالا قطعاً منجر به دستیابی به ساختار کاملاً کاهش پذیر در صورت استفادهٔ مکرر خواهند شد.

۵- ارائهٔ مثالها

مثال ۱: شبکهٔ G در شکل (۲۷) یک شبکهٔ هامنی است. می‌خواهیم با انجام انقباض شبکه را کاملاً کاهش دهیم.

اگر گرهٔ (۲) را در نظر بگیریم سه کمان (۳-۲)، (۴-۲) و (۵-۲) از آن منشعب شده‌اند که انجام انقباض بر روی (۵-۲) ناممکن است (زیرا مسیر دیگری بین گرهٔ ۲ و ۵ وجود دارد و انجام انقباض روی آن یک دور را ایجاد می‌کند). کمان (۳-۲) در وضعیت ۱۵ و کمان (۴-۲) در وضعیت ۱۲ قرار دارد پس بهترین کمان برای انقباض (۴-۲) است، شکل (۲۸).

تداوم عمل انقباض به ترتیب حالات (الف) الی (ج) را در شکل (۲۹) ایجاد می‌کند.

شبکهٔ حالت (ج) در شکل (۲۹) کاملاً کاهش پذیر است و دیگر نیازی به انجام انقباض نیست و به سادگی قابل تبدیل به شبکه‌ای با دو گره و کمان مابین است.

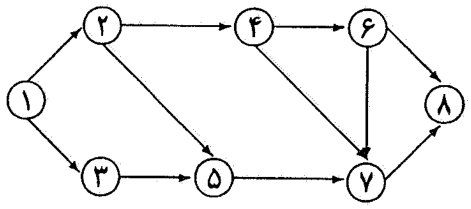
مثال ۲: همان شبکهٔ (۲۷) در مثال قبل را با مکانیزم حذف کمانی مجدداً مطرح می‌کنیم.

اگر گرهٔ (۲) را در نظر بگیرید سه کمان (۳-۲)، (۴-۲) و (۵-۲) مطرح‌اند. حذف کمانی روی کمان (۳-۲) مناسبتر است زیرا مقدار (idu)(od$v$) برای آن کمتر از دو کمان دیگر است، شکل (۳۰).

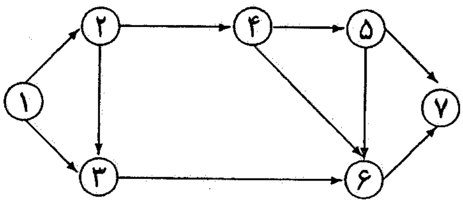
با انجام ساده سازی و یک مرحله عملیات سری، شکل زیر به دست می‌آید

با تداوم عملیات حذف کمانی حالات (الف) الی (د) در شکل (۳۲) ایجاد خواهد شد.

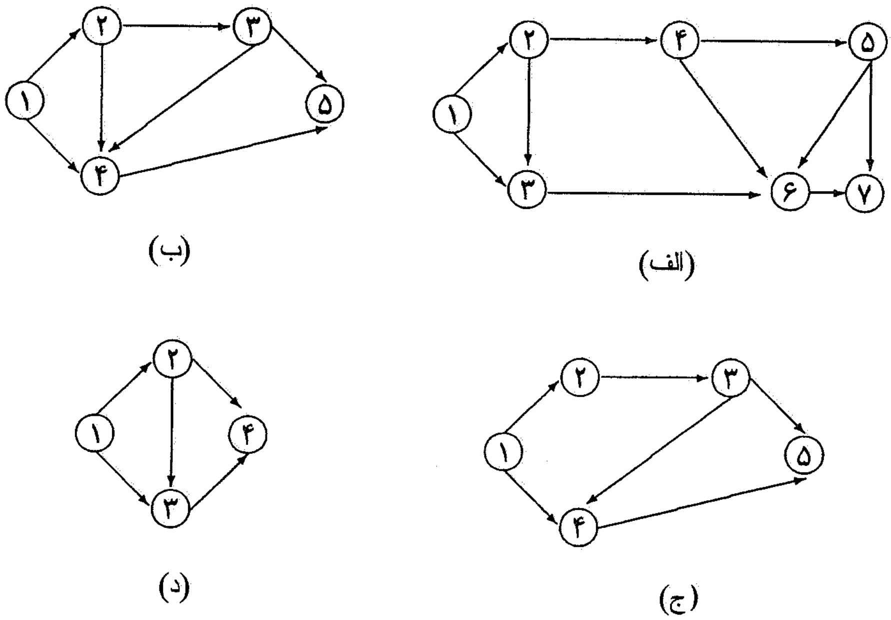
در پایان با حذف کمان (۳-۲) شبکهٔ کاملاً به یک شبکهٔ کاهش پذیر بدل می‌شود.



شکل ۳۰- شبکهٔ شکل (۲۷) بعد از حذف کمان (۳-۲)



شکل ۳۱- شبکهٔ شکل (۳۰) بعد از ساده‌سازی



شکل ۳۲- انجام عمل حذف کمانی به همراه عملیات سری و موازی برای شبکهٔ شکل (۳۱)

چنانچه شبکهٔ مورد نظر یک شبکهٔ پرت احتمالی فرض شود، در این صورت برای هر یک از کمانها، یک متغیر تصادفی که معرف مدت زمان کمان مزبور و یک تابع توزیع احتمال، متناظر با آن خواهیم داشت. با استفاده از دو مکانیزم انقباض و حذف کمان وانجام تدریجی عملیات سری و موازی (مانند دو مثال بالا) می‌توان یک شبکهٔ هامنی را به یک شبکهٔ هامنی کاملاً کاهش پذیر تبدیل کرد و در نتیجه امکان محاسبهٔ مستقیم تابع توزیع زمان تکمیل شبکهٔ پرت احتمالی فراهم می‌شود. این نکته اصلیترین کاربرد دو مکانیزم معرفی شده است که در مقالهٔ جداگانه‌ای بحث می‌شود. طبق قضیهٔ ۵ مشخصاً تحت هر شرایطی در یک شبکهٔ هامنی امکان انجام انقباض کمانی یا حذف کمانی وجود دارد.

۶- نتیجه گیری

شبکه‌های سری - موازی، ساده‌ترین ساختار شبکه‌های پرت احتمالی محسوب می‌شوند. این نوع شبکه‌ها به کلاس خاصی از شبکه‌ها در نظریه گراف یعنی کلاس شبکه‌های هامنی تعلق دارند. با توجه به دیدگاه ارائه شده، دو مکانیزم ساده‌سازی ساختاری جدید به نامهای انقباض و حذف کمانی مطرح و موارد کاربرد مناسب آنها توضیح داده شد. عملکرد آنها طی دو مثال تبیین شد. نهایتاً با ارائهٔ یک قضیه کلیدی آشکار شد که امکان کاربرد این دو مکانیزم در شبکه‌های هامنی کاهش ناپذیر وجود دارد.

هدف اصلی مقاله تشریح کلاس شبکه‌های هامنی و معرفی مکانیزمهای ساختاری برای تبدیل این شبکه‌ها به شبکه‌های کاهش پذیر بوده است. البته برای تشریح قابلیت مکانیزمهای ارائه شده، لازم است که رویکردی جداگانه ایجاد شود تا $F(t)$ را به طور مناسب تقریب بزند. برای این منظور در صورت استفاده از مکانیزمهای انقباض و حذف کمانی دو معضل اصلی می‌بایستی مرتفع شوند که عبارت‌اند از:

الف - تغییر در تعداد مسیرهای شبکه در اثر انقباض یا حذف کمانی

ب - انقباض یا حذف یکی از کمانهای شبکه که در شرایط واقعی به

معنای حذف یکی از فعالیتهای پروژه است.

در این راستا در طراحی الگوریتمهای مربوطه برای محاسبهٔ F(t) قطعاً مناسبترین حالت، بررسی امکانپذیری انجام انقباض یا حذف در حالاتی است که اصولاً تأثیری در تعداد مسیرهای شبکه ندارند و یا حداقل مقدار بروز می‌کند. همچنین در زمینهٔ معضل دوم بایستی اثری افزایشی در مدت مسیرهای دربرگیرندهٔ انقباض یا حذف طراحی کرد.

این دو نکته با تمهیدات لازم منجر به ایجاد الگوریتمهای انجام بهینهٔ انقباض و یا حذف کمان برای ساده سازی کامل شبکه خواهند شد.

واژه نامه

1. planar
2. convolution
3. plane
4. global bridge
5. local paths
6. homomorphic with

مراجع

1. Harthly, H.O., and Wortham, A.W., "A Statistical Theory for PERT Critical Path Analysis, " *Management Science,* Vol. 12, No. 10, pp. 469-481, 1966.
2. Ringer, L.J., "Numerical Operators for Statistical PERT Critical Path Analysis," *Management Science,* Vol. 16, No. 2, pp. 136-143, 1969.
3. Kulkarni, V.G., and Adlakha, V.G., "Markov and Markov-Regenerative PERT Network," *Journal of Operations Research,* Vol. 34, No 5, pp. 769-781, 1986.
4. Martin, J.J., "Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network," *Operations Research,* Vol. 13, No. 1, pp. 46-66, 1965.
5. Dodin, B., "Bounding the Project Completion Time Distribution in PERT Networks," *Journal of Operations Research,* Vol. 33, No. 4, pp. 826-881, 1985.
6. Robillard, P., and Trahan, M., "The Completion Time of PERT Networks," *Journal of Operations Research,* Vol. 25, No. 1, pp. 15-29, 1977.
7. Kleindorfer, G.B., "Bounding Distributions for a Stochastic Acyclic Network," *Journal of Operations Research*, Vol. 19, No. 7, pp. 1586-1601, 1977.
8. Van Slykle, R.M., "Monte Carlo Methods and the PERT Problem," *Operations Research,* Vol. 11, No. 5, pp. 839-860, 1963.
9. Sculli, D., "The Completion Times of PERT Networks," *Journal of Operations Research Society,* Vol. 34, No. 2, pp. 155-158, 1983.
10. Kamburowski, J., "An Upper Bound on the Expected Completion Time of PERT Networks," *European Journal of Operational Research Society,* Vol. 21, No. 2, pp. 206-212, 1985.
11. Fulkerson, D.R., "Expected Critical Path Lenght in PERT Networks," *Operations Research,* Vol. 10, No. 6, pp. 808-817, 1962.
12. Clingen, C.T., "A Modification of Fulkerson's PERT Algorithm," *Operations Research,* Vol. 12, No. 4, pp. 629-632, 1964.
13. Elmaghraby, S.E., "On the Expected Duration of PERT Type Networks," *Management Science,* Vol. 13, No. 5, pp. 299-306, 1967.
14. Robillard, P., and Trahan, M., "Expected Completion Time in PERT Networks," *Operations Research,* Vol. 24, No. 1, pp. 177-182, 1976.
15. Lindsey, J.H., "An Estimate of Expected Critical Path Length in PERT Networks," *Journal of Operations Research,* Vol. 20, No. 4, pp. 800-812, 1972.
16. Dodin, B.M., "Approximating the Distribution Function in Stochastic Network," *Computers and Operations Research,* Vol. 12, No. 3, pp. 251-264, 1985.
17. Ord, J.K., "Simple Approximation to the Completion Time Distribution for a PERT Networks," *Journal of Operations Research Society,* Vol. 42, No. 11, pp. 1011-1017, 1991.

18. Dodin, B. M., and Sirvanci, M., "Stochastic Networks and the Extreme Value Distribution," *Computers and Operations Research,* Vol. 17, No. 4, pp. 397-409, 1990.
19. Williams, T.M., "Critically in Stochastic Networks," *Journal of Operations Research Society,* Vol. 43, No. 4, pp. 353-357, 1992.
20. Williams, T.M., "Practical Use of Distributions in Networks Analysis," *Journal of Operational Research Society,* Vol. 43, No. 3, pp. 265-270, 1992.
21. Soroush, H.M., "Risk Taking in Stochastic PERT Networks," *European Journal of Operational Research,* Vol. 67, pp. 221-241, 1993.
22. Soroush, H. M., "The Most Critical Path in a PERT Networks," *Journal of Operations Research Society,* Vol. 45, No. 3, pp. 287-300, 1994.
23. Magott, J., and Skudlarski, K., "Estimating the Mean Completion Time of PERT Networks with Exponentially Distributed Durations of Activities," *European Journal of Operational Research,* Vol. 71, No. 1, pp. 70-79, 1993.
24. Chartrand, G., and Lesniak, L., *Graphs and Digraphs*, Second Ed., Wadsworth inc., Belmont California, 1986.
25. Harary, F. *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

پیوست

۱- مطالعهٔ ساختاری شبکه‌های سری - موازی

قضیهٔ ۶- شبکهٔ بدون دور G که $G \in AN$ هامنی است را در نظر بگیرید. چنانچه G_1 شبکهٔ مسطح ایزومورف با G باشد، G_1 هم شبکه‌ای بدون دور است.

اثبات: شبکه $G \in AN$ راکه هامنی است در نظر بگیرید و شبکهٔ ایزومورف مسطح آن را G_1 بنامید. فرض کنید که G_1 دارای دوری به حالت $C: v_1, v_2, \ldots, v_i, v_1$ باشد. پس بایستی در G_1 کمانهای v_1v_2، v_2v_3، ...، $v_{i-1}v_i$، v_iv_1 وجود داشته باشد. چون G_1 ایزومورف G است پس مصور به حالت $\phi v_1 = v'_1, \phi v_2 = v'_2, \ldots, \phi v_i = v'_i$ وجود دارد. از طرفی طبق تعریف ایزومورفیسم بایستی در G کمانهای $v'_1v'_2$، ...، $v'_{i-1}v'_i$، $v'_iv'_1$ وجود داشته باشد. پس G دارای دور می‌شود که طبق فرض چون $G \in AN$ است، ناممکن است. پس G_1 نمی‌تواند دارای دور باشد.

با اثبات قضیه فوق اطمینان حاصل می‌شود که در صورتی که یک شبکهٔ هامنی بدون دور بر صفحه نشانده شود، شبکهٔ حاصل نیز بدون دور خواهد بود.

ساده‌ترین ساختار شبکه‌ای در محاسبهٔ تابع توزیع زمان ختم شبکه، در شبکه‌های سری - موازی است و به همین دلیل بخشی از تلاشهای به عمل آمدهٔ قبلی برای محاسبهٔ تابع توزیع زمان ختم شبکه، با هدف بهره‌گیری از ساختار شبکه‌ای سری - موازی بوده است.

وجوه یک شبکه سری - موازی را به دو گروه می‌توان تقسیم کرد، ۱- وجوه پایه ۲- وجوه غیرپایه

تعریف ۴- وجه پایه: وجه n ضلعی در یک شبکهٔ سری - موازی را پایه گویند اگر بتوان بدون خروج از وجه مزبور آن را به طور کامل حذف کرد (این حذف به معنای جایگزینی وجه پایه با یک کمان خواهد بود).

تعریف ۵- رأس لولای قطعی: رأسی از یک وجه است که درجه ورودی و خروجی آن ۱ است.

تعریف ۶- وجه غیرپایه: وجه n ضلعی را در یک شبکهٔ سری - موازی غیرپایه گویند اگر برای انجام عملیات سری - موازی ناچار به خروج از آن وجه باشیم (ساده‌سازی در وجه دیگر برای انجام ساده‌سازی در وجه غیرپایه لازم است).

تعریف ۷- رأس لولای ضمنی: رأسی از یک وجه راگویند که در اثر ساده‌سازی در وجهی دیگر به رأس لولای قطعی بدل شود.

قضیه ۷- یک شبکهٔ بدون دور سری - موازی، اگر دارای وجهی n ضلعی و پایه باشد که $n \geq 3$ است، در این صورت این وجه دارای $n-2$ رأس لولای قطعی است.

اثبات : با استقراء بر n قضیه قابل اثبات است.

نتیجه : یک شبکهٔ بدون دور با P رأس و یک ابتدا و انتها، سری - موازی است اگر مجموع رئوس لولای قطعی و ضمنی برای آن P-۲ باشد. یعنی کلیه رئوس به غیر از ابتدا و انتهای شبکه، لولای قطعی و یا ضمنی هستند.

قضیه ۸- هر شبکه سری - موازی عضو مجموعهٔ AN، هامنی است.

اثبات: شبکهٔ سری - موازی G که $G \in AN$ است را در نظر بگیرید. اگر G زیرشبکهٔ همسان ریخت[۶] با شبکهٔ جهتدار شدهٔ K_5 یا $K(3,3)$ نداشته باشد، هامنی خواهد بود. به دلیل آنکه فرض شده است که شبکهٔ G سری - موازی است بنابراین هر گرهٔ آن لولای قطعی یا لولای ضمنی است. در K_5 یا $K(3,3)$ جهتدار شده، هیچ یک از گره‌ها، لولای قطعی نیست (درجهٔ ورودی و خروجی هیچ گرهی در این دو شبکه ۱ نیست). پس اگر چنین زیرشبکه‌هایی و یا همسان ریخت با آن در یک شبکه سری - موازی وجود داشته باشد، باید گره‌های K_5 یا $K(3,3)$ جهتدار شده لولای ضمنی باشند. شبکه‌های جهتدار شدهٔ K_5 یا $K(3,3)$ با عملیات سری - موازی قابل ساده‌سازی نیستند. پس باید هر گرهٔ آنها برای مواردی که در ساختار وجوه دیگری از شبکه دخالت دارند کاملاً قابل کاهش باشند. با فرض حتی این حالت، در نهایت حداکثر ساده‌سازی در وجوه هر یک از این دو شبکه جهتدار شدهٔ K_5 و $K(3,3)$، زیرشبکه به کمانی در شبکه‌های مذکور تبدیل می‌شود. این شبکه‌ها همان‌گونه که ذکر شد قابل کاهش نیستند. پس یک شبکهٔ سری - موازی عضو مجموعهٔ AN نمی‌تواند زیرشبکه‌ای همسان ریخت با K_5 یا $K(3,3)$ جهتدار شده داشته باشد. پس هامنی است.

۲- اثبات قضیه ۳

$idu = l_1$

$odu = l_2 + 1$ تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض $= l_1 + l_1 l_2 + l_3$

$idv = l_3 + 1$ تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض $= (l_1 + l_3)(l_2 + 1)$

$odv = 1$

تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض - تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض $= l_1 l_2 + l_1 + l_2 l_3 + l_3 - (l_1 + l_1 l_2 + l_3)$

$= l_2 l_3 = (odu-1)(idv-1)$

$idu = l_1$

$odu = l_2 + 1$ تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض $= l_1 l_2 + l_1 l_4 + l_3 l_4$

$idv = l_3 + 1$ تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض $= (l_1 + l_3)(l_2 + l_4)$

$odv = l_4$

تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض - تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض $= l_2 l_3 = (odu-1)(idv-1)$

$idu = 1$

$odu = l_1 + 1$ تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض $= l_1 + 1 + l_2$

$idv = l_2 + 1$ تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض $= (l_2 + 1)(l_1 + 1)$

$odv = 1$

تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض - تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض $= l_1 l_2 = (odu-1)(idv-1)$

$idu = 1$

$odu = l_1 + 1$ تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض $= l_1 + l_3 + l_2 l_3$

$idv = l_2 + 1$ تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض $= (l_2 + 1)(l_1 + l_3)$

$odv = l_3$

تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض - تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض $= l_1 l_2 = (odu-1)(idv-1)$