کاربرد روش گرم و سرد کردن شبیه سازی شده در حل مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌های شبکهٔ اتوبوسرانی

هدایت ذکایی آشتیانی* و بهرنگ حجازی**
دانشکدهٔ مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۷۹/۳/۲ – دریافت نسخه نهایی: ۸۰/۹/۱۱)

چکیده : طراحی شبکه‌های اتوبوسرانی یکی از مسائل مهم در برنامه‌ریزی حمل و نقل همگانی است. یکی از عمده‌ترین گامها در طراحی ساختار شبکهٔ اتوبوسرانی، تعیین تعداد و محل پایانه‌های اتوبوسرانی است. این مسئله حالت خاصی از مسئلهٔ مکانیابی تسهیلات در حالات کلی است. مدل مکانیابی یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی ترکیبی در مقیاس بزرگ است که معمولا حل دقیق آن برای شهرهای بزرگ بسیار وقتگیر است. در کوششهای پیشین برای شهرهای مشهد و تهران، این مسئله با استفاده از روش عمومی شاخه و کرانه و به کارگیری نرم‌افزار GAMS حل شده است.

هدف این تحقیق بررسی سایر روشهای حل و انتخاب روشی کاراتر است. از جمله تکنیکهای مورد نظر، روش گرم و سرد کردن شبیه سازی شده (SA) است، که روشی کارا برای حل مسائل پیچیدهٔ برنامه‌ریزی ریاضی است. در این تحقیق با توجه به مشخصات مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌های شبکهٔ اتوبوسرانی، پارامترهای مورد نیاز روش SA تعیین شده و با تنظیم برنامه‌ای براساس الگوریتم این روش، مسئله مذکور حل شده است. علاوه بر روش SA، مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌ها توسط روش شمارش ضمنی نیز حل شده است.

در این مقاله نتایج حاصل از به کارگیری سه روش بالا برای شبکهٔ اتوبوسرانی شهر مشهد، با یکدیگر مقایسه شده است. معیار بررسی کارایی روشها، زمان اجرا و دقت جواب بوده است. از نظر مقدار تابع هدف، روش SA در تمامی موارد جوابی برابر یا بهتر از روشهای شاخه و کرانه، و شمارش ضمنی به دست می‌دهد. زمان اجرای آن نیز بسیار کمتر از دو روش دیگر است، به طوری که روش SA حدود ۱۵۰ برابر سریعتر از نرم‌افزار عمومی GAMS و حدود ۵۰ برابر سریعتر از روش شمارش ضمنی است. نتایج ارائه شده از کاربرد روش SA برای شبکهٔ اتوبوسرانی تهران، کارایی این روش را در حل مسائل بسیار بزرگ نیز نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی : شبکهٔ اتوبوسرانی، مکانیابی پایانه‌ها، شمارش ضمنی، شبیه‌سازی به روش سرد و گرم و شمارش ضمنی

Solving Bus Terminal Location Problem Using Simulated Annealing Method

H. Z. Aashtiani and B. Hejazi
Department of Civil Engineering, Sharif University of Technology

Abstract: ***Bus network design is an important problem in public transportation. A main step to this design is determining the number of required terminals and their locations. This is a special type of facility location problem, which is a time-consuming, large scale, combinatorial problem. In a previous attempt by the authors, this problem had been solved by GAMS, based on a branch and bound algorithm.***

---

* – دانشیار ** – کارشناس ارشد

In this research, different techniques for solving the problem are investigated to choose the best one. One of these methods is Simulated Annealing (SA), which is an efficient algorithm for solving complex optimization problems. SA's parameters vary from one problem to another. Here, for the bus terminal location problem, SA's parameters are determined, then the problem is solved. Another algorithm is the Implicit Enumeration method.

In this paper, the results obtained from the above 3 techniques are compared. The criteria for this comparison are the CPU time and the accuracy of the solution. In all the cases studied, SA gave the most accurate results. Its CPU time is lower than the others, too. Solving the bus terminal location problem for the Mashhad network shows that SA is about 150 times faster than GAMS and 50 times faster than Implicit Enumeration. Moreover, bus terminal location problem for the network of the city of Tehran, which is a more difficult problem, has been solved by the SA algorithm successfully.

Keywords: *Bus network, Lacation problem, Heuristic, Simulated Annealing, Implicit Enumeration*

۱- مقدمه

از جمله اهدافی که در برنامه ریزی حمل و نقل دنبال می‌شود، بهینه سازی سیستمهای حمل و نقل است. رشد روزافزون جمعیت و به سبب آن توسعهٔ شهرها موجب بروز مشکلاتی در جابه جایی مسافر می‌شود. تقاضای سفر افزایش می‌یابد اما تسهیلات حمل و نقل موجود کفایت این تقاضا را نمی‌کند. لذا کارایی سیستمهای حمل و نقل می‌بایست افزایش یابد و بهبود سیستم حمل و نقل همگانی گامی مؤثر در رسیدن به این هدف است. بهبود سیستم حمل و نقل همگانی نیازمند طراحی این سیستم است. هدف از طراحی سیستم حمل و نقل همگانی در درجهٔ اول بهبود سیستم برای استفاده کنندگان موجود این سیستم و در درجهٔ دوم جذب مسافرین حمل و نقل شخصی است.

عمده‌ترین جزء سیستم حمل و نقل همگانی را شبکهٔ اتوبوسرانی تشکیل می‌دهد. وجود مشکلات در یک سیستم اتوبوسرانی سبب پایین آمدن سطح خدمت و در نتیجه پایین آمدن تقاضا برای آن می‌شود. این مشکلات را می‌توان ناشی از کمبود امکانات و منابع، برنامه‌ریزی نامناسب برای تخصیص منابع، و مدیریت نادرست دانست. به عبارت دیگر اضافه کردن امکانات و منابع تنها راه بهبود سیستم اتوبوسرانی و افزایش تقاضای آن نیست. بلکه در بسیاری از موارد اصلاح و بهینه سازی سیستم نقش مؤثرتری خواهد داشت.

مسئلهٔ طراحی سیستم حمل و نقل همگانی، از جمله اتوبوسرانی، یکی از مسائل پیچیده در برنامه ریزی حمل و نقل است که شامل زیرمسئله‌های مختلفی می‌شود. این مسئله از یک دیدگاه به دو بخش تعیین ساختار شبکه و تعیین برنامهٔ عملیاتی سیستم تقسیم می‌شود. تعیین ساختار شبکه شامل تعیین تعداد و محل پایانه‌های عمده و تعیین مسیر خطوط می‌شود. در تحقیق حاضر قسمتی از بخش اول مسئله یعنی تعیین محل پایانه‌های عمده مدنظر قرار می‌گیرد.

در مرجع [۱] مسئلهٔ تعیین محل پایانه‌ها برای یک سیستم اتوبوسرانی به صورت یک مسئلهٔ مکانیابی تسهیلات مدل شده است. برای حل این مدل از روش عمومی شاخه و کرانه و به کارگیری نرم‌افزار GAMS استفاده شده است. ولی از آنجا که این مدل مکانیابی از نوع مسائل بهینه‌سازی ترکیبی در مقیاس بزرگ است، حل آن بسار مشکل و زمانبر است.

از جمله راه حلهای موجود برای برخورد با مسائل بهینه سازی ترکیبی، الگوریتمهای تقریبی یا ابتکاری است. یکی از این روشها، روش گرم و سرد کردن شبیه سازی شده[1] است که از این پس به عنوان روش SA معرفی می‌شود. این روش، روشی کارا برای حل مسائل پیچیدهٔ برنامه‌ریزی ریاضی است که تاکنون در حیطهٔ حمل و نقل کمتر به کار رفته است. روش مذکور روشی انعطاف پذیر است که پارامترها و الگوریتم آن از مسئله‌ای به مسئلهٔ دیگر تغییر می‌کند و شدیداً تحت تأثیر ساختار مسئله قرار می‌گیرد. در مقالهٔ حاضر نتایج استفاده از این روش برای حل مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌ها با نتایج حاصل از به کارگیری یک روش عمومی شاخه و کرانه و همچنین یک روش خاص شمارش ضمنی مقایسه خواهد شد. معیار مقایسهٔ زمان اجرای برنامه و مقدار تابع هدف خواهد بود. جزییات کاملتر این تحقیق در مرجع [۲] موجود است.

۲- مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌های شبکهٔ اتوبوسرانی

یکی از مسائل مطرح در طراحی سیستم اتوبوسرانی مشخص کردن مکانهای مناسب برای ایجاد پایانه‌های اتوبوسرانی درون شهری است. در حالت کلی، مسئلهٔ مکانیابی تسهیلات نوعی مسئلهٔ برنامه ریزی است که هدف آن انتخاب زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه محلهای کاندید برای تسهیلات است که بیشترین خدمت‌دهی را فراهم سازد. در یک سیستم اتوبوسرانی هم، ایستگاههای آن، که در هر یک تعدادی مسافر سوار و پیاده می‌شوند، می‌توانند به عنوان نقاط کاندید در نظر گرفته شوند. هدف، انتخاب تعدادی از ایستگاههاست به گونه‌ای که میزان خدمت‌دهی بیشینه شود.

برای بیان مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌های سیستم اتوبوسرانی، یک شبکهٔ خیابانی مدنظر قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که کلیه گره‌های شبکه می‌توانند به عنوان ایستگاههای سیستم اتوبوسرانی در نظر گرفته شوند. همچنین فرض می‌شود. میزان سوار و پیاده شدن مسافرین در هر گره (پتانسیل گره) در دست است، همان گونه که در مرجع [۱] آمده است، برای تعیین این پارامتر ابتدا یک سیستم فرضی اتوبوسرانی تعریف می‌شود. این سیستم به گونه‌ای تعریف می‌شود که از تمام خیابانهای اصلی شبکه حداقل یک خط اتوبوس عبور کند و تا حد امکان تمام شبکه را پوشش دهد. سپس تقاضای سفر به این سیستم تخصیص داده می‌شود. با استفاده از نتایج حاصل از این تخصیص، پارامتر پتانسیل سفر برای گره‌های شبکه محاسبه می‌شود. به علاوه فرض بر آن است که چنانچه پایانه‌ای در یک گره ایجاد شود نه تنها می‌تواند به تمام مسافرین خود آن گره خدمت‌دهی کند، بلکه می‌تواند به بقیهٔ گره‌های نزدیک به خود نیز خدمت دهد. برای بیان ریاضی مسئلهٔ مکانیابی، پارامترها و متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم

- پارامترها

J مجموعه گره‌های شبکه

$I \subseteq J$ مجموعه گره‌های کاندید برای ایجاد پایانه

c_{ij} فاصلهٔ هوایی بین گره‌های i و j

d_j پتانسیل گره j برای $j \in J$

k تعداد پایانه‌های مورد نیاز

$f(c_{ij})$ تابع نمایی منفی از فاصله بین i و j

$J_i^* \subseteq J$ مجموعهٔ گره‌هایی از شبکه که می‌توانند از گرهٔ i خدمت بگیرند $i \in I$

B یک عدد بزرگ

- متغیرها

x_{ij} سهم خدمت‌دهی گره i به گره j

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر گرهٔ i به عنوان پایانه انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

- تابع هدف و محدودیتهای مدل مکانیابی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i^*} d_j . f(c_{ij}) . x_{ij} \qquad (۱)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in I \text{ s.t. } j \in J_i^*} x_{ij} \le 1 \quad \forall j \in J \qquad (۲)$$

$$\sum_{j \in J_i^*} x_{ij} \le B.y_i \quad \forall i \in I \qquad (۳)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = k \qquad (٤)$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \forall j \in J_i^*, i \in I \qquad (۵)$$

$$y_i = 0 \text{ یا } 1 \quad \forall i \in I \qquad (٦)$$

تابع هدف، میزان خدمت‌دهی گره‌های کاندید به تمام گره‌ها را مشخص می‌کند. مسلماً هر چه پتانسیل گرهٔ j بالاتر باشد، یعنی تعداد مسافرین سوار و پیاده شده در آن بیشتر باشد و فاصلهٔ کمتری تا گرهٔ کاندید i داشته باشد، میزان خدمت‌دهی گرهٔ i باید بیشتر شود. برای این منظور تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(c_{ij}) = e^{-c_{ij}} \qquad (۷)$$

محدودیت (۲) نشان می‌دهد مجموع سهم خدمتی که هر مسافر گرهٔ j از گره‌های کاندید می‌گیرد حداکثر باید برابر ۱ باشد. محدودیت (۳) نشان می‌دهد، تنها در صورتی که گره i به عنوان پایانه انتخاب شود (y_i=1) به گره‌های اطراف خود خدمت می‌دهد و در غیر این صورت (y_i=0) به هیچ گره‌ای

خدمت نداده و در نتیجه x_{ij} برای تمام گرههای j برابر صفر خواهد شد. محدودیت (٤) تعداد پایانه‌های مورد نیاز را تنظیم می‌کند. محدودیت (٥) غیرمنفی بودن متغیر x_{ij} و محدودیت (٦) صفر یا یک بودن متغیر y_i را نشان می‌دهد.

مدل مکانیابی بالا یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی مختلط در مقیاس بزرگ است که حل دقیق آن برای شهرهای بزرگ بسیار پیچیده و وقتگیر است. مسلماً کاهش تعداد متغیرها و در نتیجه ابعاد مسئله می‌تواند کمک زیادی در حل مسئله بکند. از آنجا که مهمترین عامل مشکل کنندهٔ مسئله، تعداد متغیرهای صحیح آن، یعنی تعداد گرههای کاندید است، بنابراین هر چه این تعداد کمتر باشد حل مسئله عملیتر خواهد شد. برای این منظور در مرجع [١] تنها گرههایی از شبکه به عنوان کاندید انتخاب شده است که شانس بیشتری در انتخاب نهایی دارند. در تحقیق مذکور دو عامل در انتخاب گرههای کاندید مدنظر قرار گرفته‌اند. یکی پتانسیل خودگرهٔ i (یعنی d_i) و دیگری حداکثر میزان خدمت‌دهی آن به تمام گرههای شبکه، S_i ، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_i = \sum_{j \in J_i^*} d_j . f(c_{ij}) \qquad (٨)$$

در مرجع [١] با استفاده از دو کمیت پتانسیل و حداکثر خدمت‌دهی، مجموعهٔ گرههای کاندید تا حد ممکن کاهش یافته است. د رانتخاب گرهها ملاحظات دیگری نیز در نظر گرفته شده است. از جمله این که بین دو گرهٔ نزدیک به هم و با حداکثر خدمت‌دهی تقریباً برابر، آنکه دارای پتانسیل بیشتری است انتخاب شده است.

روش دیگری که در مرجع [١] برای کاهش ابعاد مسئله، مدنظر قرار گرفته است، کم کردن تعداد متغیرهای غیرصحیح مسئله است. از آنجا که گرههایی با پتانسیل (یا خدمت‌دهی) کم یا دور از گرههای کاندید، خدمت کمی دریافت می‌کنند، می‌توان مجموعهٔ J_i^* را به صورت زیر تعریف کرد

$$J_i^* = \left\{ j \middle| d_j \geq d_{min} \left(\text{or } S_j \geq S_{min} \right), c_{ij} \leq c_{max} \right\} \qquad (٩)$$

که در آن $d_{min}(S_{min})$ حداقل پتانسیل (حداقل خدمت‌دهی) قابل در نظرگیری و c_{max} حداکثر فاصله برای خدمت‌گیری است. در مطالعهٔ مذکور S_{min} برابر ١٠٠ و c_{max} برابر ٢ کیلومتر انتخاب شده است.

٣- روشهای دقیق

در طول دو دههٔ گذشته کاربرد بهینه‌سازی در زمینه‌های مختلفی چون مهندسی صنایع، برق، رایانه، ارتباطات و حمل و نقل گسترش یافته است. بهینه سازی خطی و غیرخطی با متغیرهای پیوسته، در دهه‌های پنجاه و شصت از اصلیترین جنبه‌های توجه به بهینه سازی بود. بهینه‌سازی ترکیبی[٢] که مربوط به مسائل بهینه‌سازی با متغیرهای گسسته[٣] می‌شود در دههٔ ٧٠ مورد توجه قرار گرفت. یک روش ناشیانه برای حل یک مسئلهٔ بهینه سازی ترکیبی شمارش کامل است که در آن برای تمامی ترکیبهای ممکن، مقدار تابع هدف محاسبه و درنهایت بهترین جواب امکانپذیر انتخاب می‌شود. روشن است که شیوهٔ شمارش کامل، نهایتاً به جواب دقیق مسئله منجر می‌شود. اما در عمل به دلیل زیاد بودن تعداد ترکیبهای ممکن، در مسائل واقعی استفاده از آن بی‌نتیجه است. با توجه به مشکلات مربوط به روش شمارش کامل، تلاش بسیاری در توسعهٔ روشهای مؤثرتر و کاراتر صورت گرفته است. در همین راستا الگوریتمهای مختلفی به وجود آمده است که مشهورترین نمونه‌های آن، شاخه و کرانه[٤] و شمارش ضمنی[٥] اند.

شاخه و کرانه در اصل یک استراتژی تقسیم و تسخیر است. ایدهٔ آن تقسیم ناحیه امکانپذیر به زیربخشهای قابل کنترلتر و در صورت نیاز تقسیم آنها به زیربخشهای کوچکتر است. در حالت کلی راههای زیادی برای تقسیم ناحیه امکانپذیر وجود دارد و در نتیجه الگوریتمهای شاخه و کرانه متعددی وجود دارند. همچنین نرم‌افزارهای متعددی بر پایه الگوریتم شاخه و کرانه برای حل مسائل بهینه‌سازی تهیه شده‌اند که نرم افزار GAMS از آن جمله است. همان طور که اشاره شد، در مرجع [١] نیز برای حل مدل مکانیابی، همین نرم‌افزار مورد استفاده قرار گرفته است.

در روش عمومی شاخه و کرانه برای حل مسائل

برنامه‌ریزی مختلط، پس از مشخص شدن مقادیر تعدادی از متغیرهای صحیح، در هر شاخه یک برنامهٔ خطی برای تعیین مقادیر بقیه متغیرها حل می‌شود. روش شمارش ضمنی، حالت خاصی از روش شاخه و کرانه است که در هر شاخه مقادیر تمام متغیرهای صحیح مشخص‌اند. این روش وقتی کارایی دارد که پس از مشخص شدن مقادیر متغیرهای صحیح، حل باقیماندهٔ مسئله برای تعیین متغیرهای پیوسته ساده باشد و نیازی به حل یک برنامهٔ خطی نباشد. در مسئلهٔ مکانیابی مورد بحث این مقاله نیز، پس از تعیین متغیرهای صحیح (y_iها)، حل مسئلهٔ باقیمانده و تعیین متغیرهای پیوسته (x_{ij} ها) ساده است و نیازی به حل یک برنامهٔ خطی نیست. زیرا هر نقطه‌ای از نزدیکترین پایانه انتخاب شده ($y_l=1$) خدمت می‌گیرد.

٤- روشهای جستجوی ابتکاری

در قسمت قبل توضیحاتی پیرامون روشهای دقیق حل مسائل بهینه‌سازی ارائه شد. باید توجه داشت که روشهای مذکور برای مسائل با ابعاد بزرگ، کارایی خود را از دست می‌دهند و عملکردی بهتر از شمارش کامل نخواهند داشت. به دلایل بالا اخیراً تمرکز بیشتری بر روشهای ابتکاری صورت گرفته است. برای روشهای ابتکاری نمی‌توان تعریفی جامع و مانع ارائه کرد، با وجود این در اینجا کوشش می‌شود تعریفی تا حد امکان مناسب برای آن عنوان شود

روش جستجوی ابتکاری، روشی است که با جستجو در بین جوابهای ممکن، جوابی خوب (نزدیک به بهینه) در زمانی محدود برای یک مسئله ارائه کند. معمولاً هیچ تضمینی برای بهینه بودن جواب وجود ندارد و حتی نمی‌توان میزان نزدیکی جواب به دست آمده به جواب بهینه را نیز تعیین کرد.

الگوریتم جستجوی همسایه[6] (NS) یا جستجوی محلی یکی از روشهای جستجوی ابتکاری مبتنی بر تکرار است و انجام هر تکرار آن مستلزم وجود یک مکانیزم تولید جواب است. مکانیزم تولید جواب، برای هر جواب i یک همسایه R_i به وجود می‌آورد که می‌توان از i به آن منتقل شد. الگوریتم از یک نقطه (جواب) شروع می‌شود و در هر تکرار از نقطهٔ جاری به یک نقطهٔ همسایه جابه جایی صورت می‌گیرد. اگر جواب همسایه هزینه کمتری داشته باشد، جایگزین جواب جاری می‌شود (در مسئلهٔ حداقل سازی) و در غیر این صورت نقطهٔ همسایه دیگری انتخاب می‌شود. هنگامی که هزینهٔ یک جواب از هزینهٔ تمام نقاط همسایهٔ آن کمتر باشد الگوریتم پایان می‌یابد.

مفهوم روش جستجوی همسایه از حدود چهل سال پیش مطرح شده است. از جمله اولین موارد آن کارهای کرز [۳] است که مفهوم جستجوی همسایه برای حل مسئلهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد مورد استفاده قرار گرفته است. در کارهای اخیر گزارش شده توسط ریوز [٤] نیز جنبه‌هایی از این شیوه یافت می‌شود.

الگوریتم جستجوی همسایه معمولاً با چند اشکال مواجه می‌شود. ممکن است الگوریتم در یک بهینهٔ محلی متوقف شود و مشخص نشود که آیا جواب به دست آمده یک بهینهٔ محلی است یا یک بهینهٔ جهانی. بهینهٔ محلی به دست آمده وابسته به جواب اولیه است و در مورد چگونگی انتخاب جواب اولیه هیچ راه حلی در دسترس نیست. به علاوه معمولاً نمی‌توان یک حد بالا برای زمان اجرا تعیین کرد.

البته الگوریتمهای مبتنی بر جستجوی همسایه مزایایی نیز دارند. از جمله اینکه یافتن جواب اولیه، تعیین یک تابع هزینه و مکانیزم تولید جواب همسایه به طور معمول ساده است. با وجود آنکه تعیین حد بالا برای زمان اجرا امکانپذیر نیست ولی با اطمینان می‌توان گفت که هر تکرار از الگوریتم در زمان مشخصی قابل اجراست.

برای اجتناب از مشکلات موجود در روش جستجوی همسایه، الگوریتمی توسط متراپلیس [۸]، کرک پاتریک [۵] و سرنی [٦] ابداع شد که به دلیل شباهت به پدیدهٔ سرد کردن جامدات مذاب به نام گرم و سرد کردن شبیه سازی شده (SA) شناخته می‌شود. جواب حاصل از این روش به جواب اولیه وابسته نیست و به طور معمول می‌توان توسط آن جوابی نزدیک

به جواب بهینه به دست آورد. حد بالایی زمان اجرای الگوریتم نیز قابل تعیین است. بنابراین SA الگوریتمی است تکراری که اشکالات روشهای عمومی مبتنی بر تکرار را ندارد. در ادامه جزئیات بیشتری از الگوریتم SA از مرجع [۷] ارائه می‌شود.

الگوریتم SA در شکل عمومی آن براساس شباهت میان سرد شدن جامدات مذاب و حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی به وجود آمده است. به این دلیل الگوریتم مذکور گرم و سرد کردن شبیه‌سازی شده نامیده شده است. در فیزیک مواد فشرده، گرم و سرد کردن[۸] فرایندی فیزیکی است که طی آن یک ماده جامد در ظرفی گرما داده می‌شود تا مایع شود سپس گرمای آن به تدریج کاهش می‌یابد. بدین ترتیب تمام ذرات فرصت می‌یابند تا خود را در پایینترین سطح انرژی منظم کنند. چنین وضعی در شرایطی ایجاد می‌شود که گرمادهی کافی باشد و سرد کردن نیز به آهستگی صورت گیرد.

با فرض اینکه دما به حد ماکزیمم رسیده باشد، می‌توان فرایند سرد کردن را بدین شرح بیان کرد. در هر دمای T، به جامد اجازه داده می‌شود که به یک تعادل گرمایی[۹] برسد. احتمال قرار گرفتن در سطح انرژی E با استفاده از توابع بولتزمن[۱۰] بدین شرح است

$$\Pr\{E\} = \frac{1}{Z(T)} . \exp\left(\frac{-E}{K_B T}\right) \qquad (۱۰)$$

که در آن $Z(T)$ ضریبی است که برای نرمال کردن به کار می‌رود و تابعی از T است، K_B ثابت بولتزمن نام دارد، و $\exp(-E/K_B T)$ به عنوان ضریب بولتزمن شناخته می‌شود.

با کاهش دما توزیع بولتزمن روی پایینترین سطح انرژی متمرکز می‌شود و درنهایت هنگامی که دما به طرف صفر میل می‌کند، انرژی جسم با احتمال ۱ به سمت پایینترین مقدار آن میل می‌کند. این نکته کاملاً مشخص است که اگر فرایند سرد کردن به سرعت انجام شود و به جسم فرصت دستیابی به تعادل گرمایی در هر دما داده نشود حالت یخ زدگی[۱۱] پیش می‌آید. در این حالت در حقیقت جسم به جای آنکه ساختار بلوری منظم پیدا کند، شیشه‌ای می شود. چرا که ذرات فرصت آنکه نخواهند به طور منظم در کنار هم قرار گیرند را پیدا نمی‌کنند.

به منظور شبیه سازی مکانیزم رسیدن به تعادل گرمایی در یک دمای ثابت T، متروپلیس و همکاران [۸] روش مونت کارلو را پیشنهاد کردند. این روش به ترتیب زیر، یکسری سطوح انرژی را برای جسم مورد نظر تولید می‌کند. یک سطح انرژی خاص در نظر گرفته می‌شود که در آن هر ذره در محلی خاص قرار گرفته است. به واسطهٔ تغییر مکان ذره‌ای که به طور تصادفی انتخاب شده است، یک سطح جدید به وجود خواهد آمد. اگر تفاوت انرژی E میان حالت کنونی و اولیه منفی، $\Delta E<0$، باشد، یعنی سطح انرژی جدید پایینتر باشد، فرایند با حالت جدید ادامه می‌یابد. اگر $\Delta E\geq 0$ باشد، آن گاه احتمال قبول حالت جدید برابر با $\exp(-\Delta E/K_B T)$ خواهد بود. این معیار مقبولیت به نام معیار متروپلیس[۱۲] معروف است. با به کارگیری این معیار سیستم به سمت تعادل گرمایی سیر می‌کند. به عبارت دیگر پس از تعداد زیادی تکرار، توزیع احتمالاتی سطوح انرژی به سمت توزیع بولتزمن میل می‌کند. در مکانیک آماری، روش مونت‌کارلو که به نام الگوریتم متروپلیس نیز شناخته می‌شود از جمله روشهایی است که برای تخمین میانگین (با استفاده از تکنیک نمونه‌گیری تصادفی) به کار می‌رود.

الگوریتم متروپلیس برای تولید نقاط جواب مسئلهٔ بهینه سازی ترکیبی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت جواب نقش یک سطح انرژی را بازی می‌کند و تابع هزینه C و پارامتر کنترل کنندهٔ T، به ترتیب معرف انرژی و دما هستند.

در چنین حالتی، الگوریتم SA در حقیقت مشتمل بر مجموعه‌ای از الگوریتمهای متروپلیس است. این الگوریتم را می‌توان بدین ترتیب شرح داد. ابتدا، به پارامتر کنترل کننده مقدار بزرگی داده می‌شود. سپس یک سری جواب برای مسئلهٔ مینیمم‌سازی ترکیبی تولید می‌شود. حال بر اساس الگوریتم متروپلیس $\Delta C_{ij}=C(j)-C(i)$ قرار داده می‌شود، که $C(i)$ و $C(j)$ به ترتیب هزینهٔ جواب جاری و جواب همسایه‌اند. اگر $\Delta C_{ij}\leq 0$ باشد، j با احتمال ۱ به عنوان جواب جدید انتخاب می‌شود و اگر $\Delta C_{ij}\geq 0$ باشد، j با احتمال $\exp(-\Delta C_{ij}/T)$ جواب جدید خواهد بود (ثابت متروپلیس برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود).

بنابراین جوابی که دارای هزینه‌ای بیشتر از هزینه جواب جاری است، با احتمال غیرصفر مورد قبول قرار می‌گیرد. این عمل تا رسیدن به وضعیت تعادل ادامه می‌یابد. وضعیت تعادل حالتی است که توزیع احتمالی جوابها به طرف توزیع بولتزمن میل می‌کند

$$\Pr\{i \text{ جواب}\} = q_i(T) = \frac{1}{Q(T)}.\exp\left(\frac{-C(i)}{T}\right) \qquad (۱۱)$$

که $Q(T)$ تابعی از پارامتر کنترل کنندهٔ T است.

در ادامه الگوریتم، پارامتر کنترل کننده در گامهای مختلف کاهش می‌یابد و در هر گام به سیستم اجازه دستیابی به حالت تعادل داده می‌شود. الگوریتم در مقادیر کوچک T پایان می‌یابد و این هنگامی است که هیچ گونه افزایشی در هزینه مورد قبول واقع نمی‌شود. معمولاً معیار مقبولیت براساس مقایسهٔ یک عدد تصادفی در بازهٔ $[0.1]$ با $\exp(-\Delta C_{ij}/T)$ انتخاب می‌شود.

در شکلهای (۱) و (۲) دو نوع الگوریتم تحت عنوان الگوریتم همگن و ناهمگن، که در واقع دو روش متفاوت برای تعیین پارامتر کنترل کنندهٔ (T) هستند، آورده شده است [۹].

۵- به کارگیری روش SA در حل مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌ها

در این قسمت نحوهٔ به کارگیری روش SA براساس الگوریتم همگن در حل مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌ها تشریح می‌شود. مشابه روش شمارش ضمنی، در روش SA نیز پس از تعیین متغیرهای صحیح، مقایر متغیرهای پیوسته با توجه به اینکه هر نقطه از نزدیکترین پایانه انتخاب شده خدمت می‌گیرد، تعیین می‌شوند.

همان گونه که اشاره شد، حل یک مسئلهٔ بهینه سازی توسط روش SA مستلزم اتخاذ تصمیماتی است که به دو گروه عمده تقسیم‌بندی می‌شوند. تصمیمات کلی که بیشتر مربوط به نحوهٔ سرد کردن (تعیین T) و تصمیماتی که مربوط به مشخصه‌های مسئلهٔ مورد نظر می‌شوند. در ادامه، تصمیمات اتخاذ شده برای مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌ها تشریح می‌شود.

۵-۱- تصمیمات مربوط به نحوهٔ سرد کردن

الف – دمای اولیه و نهایی (T_{int} و T_{fin})

فرض کنید Δ تفاوت نسبی مقدار تابع هدف جواب جاری و جواب همسایه و جواب همسایه بدتر از جواب جاری باشد. شرط رد شدن جواب بد این است که

$$\exp(-\Delta/T) < U = [0,1] \text{ عدد تصادفی دربازهٔ } \qquad (۱۲)$$

در نتیجه می‌توان گفت، احتمال رد شدن جواب بد برابر $1-\exp(-\Delta/T)$ است.

احتمال رد شدن جواب بد برای مقادیر مختلف Δ و T در جدول (۱) نشان داده شده است. با توجه به این جدول و مانند مرجع [۱۰]، محدودهٔ دمای ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۵ ($T_{int} = 0.05$ و $T_{fin} = 0.001$) انتخاب می‌شود. در این حالت احتمال رد شدن جواب بد بین ۱۸ درصد تا ۱۰۰ درصد قرار می‌گیرد.

ب – تابع کاهش دما

برای مسئلهٔ مورد نظر این تحقیق، تابع کاهش دما به صورت زیر پیشنهاد می‌شود

$$T_{fin} = g^n.T_{int} \qquad (۱۳)$$

که در آن n تعداد مراحل تغییر دماست. با گرفتن الگوریتم از رابطهٔ بالا خواهیم داشت

$$\ln T_{fin} = n\ln g + \ln T_{int} \qquad (۱٤)$$

$$n = \frac{\ln T_{fin} - \ln T_{int}}{\ln g} = \frac{\ln 0.001 - \ln 0.05}{\ln g} = \frac{-3.91}{\ln g} \qquad (۱۵)$$

مقدار n (تعداد مراحل تغییر دما) برحسب مقادیر مختلف g (ضریب کاهش دما) در جدول (۲) ارائه شده است. باید توجه داشت که اگر مقدار g کوچک انتخاب شود امکان دارد حالت یخ زدگی رخ دهد، و الگوریتم فرصت یافتن جواب بهینه را نداشته باشد. در این حالت به احتمال زیاد جواب مناسبی حاصل نمی‌شود. انتخاب مقادیر بزرگ g نیز مدت زمان جستجوی جواب بهینه را افزایش می‌دهد. لذا بهتر است مقادیری بین ۰/۸ تا ۰/۹۵ برای g انتخاب شود. در این تحقیق، مانند مرجع [۱۰]،مقدار ضریب کاهش دما برابر ۰/۸۵ انتخاب می‌شود. با انتخاب این ضریب، پارامتر دما طی ۲٤ گام از $T_{int} = 0.05$ تا $T_{fin} = 0.001$ کاهش می‌یابد.

جدول ۱- احتمال رد شدن جواب بد برای مقادیر مختلف Δ و T

T \ Δ	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۲	۰/۵	۰/۷۵	۱
۱۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۰۲۰	۰/۰٤۹	۰/۰۷۲	۰/۰۹۵
۵	۰/۰۰۲	۰/۰۱۰	۰/۰۳۹	۰/۰۹۵	۰/۱۳۹	۰/۱۸۱
۲	۰/۰۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۹۵	۰/۲۲۱	۰/۳۱۳	۰/۳۹۳
۱	۰/۰۱۰	۰/۰٤۹	۰/۱۸۱	۰/۳۹۳	۰/۵۲۸	۰/٦۳۲
۰/۵	۰/۰۲۰	۰/۰۹۵	۰/۳۳۰	۰/٦۳۲	۰/۷۷۷	۰/۸٦۵
۰/۰۵	۰/۱۸۱	۰/٦۳۲	۰/۹۸۲	۱	۱	۱
۰/۰۳	۰/۲۸۳	۰/۸۱۱	۰/۹۹۹	۱	۱	۱
۰/۰۱	۰/٦۳۲	۰/۹۹۳	۱	۱	۱	۱
۰/۰۰۳	۰/۹٦٤	۱	۱	۱	۱	۱
۰/۰۰۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

گام ۱: یک جواب اولیه i، k=1 (پارامتر شمارشگر) و یک دمای اولیه انتخاب کنید.

گام ۲: جواب j را در همسایگی i انتخاب کنید.

گام ۳: $\Delta C_{ij} = C(j) - C(i)$ را محاسبه کنید.

گام ٤: اگر $\Delta C_{ij} \le 0$، قرار دهید i=j و بروید به گام ۵.

اگر "عدد تصادفی دربازهٔ $[0,1]$" $< \exp(-\Delta C_{ij}/T_k)$، قرار دهید i=j

گام ۵: k=k+1

گام ٦: دما را کاهش دهید $T_{k+1} = f(T_k)$ و بروید به گام ۲.

شکل ۱- الگوریتم ناهمگن SA (دما پس از هر تکرار کاهش می‌یابد).

گام ۱: یک جواب اولیه i، k=1 (پارامتر شمارشگر)، یک دمای اولیه و پارامتر L را انتخاب کنید.

گام ۲: گامهای ۳ تا ٦ را L دفعه تکرار کنید.

گام ۳: جواب j را در همسایگی i انتخاب کنید.

گام ٤: $\Delta C_{ij} = C(j) - C(i)$ را محاسبه کنید.

گام ۵: اگر $\Delta C_{ij} \le 0$، قرار دهید i=j و بروید به گام ٦.

اگر "عدد تصادفی دربازهٔ $[0,1]$" $< \exp(-\Delta C_{ij}/T_k)$، قرار دهید i=j

گام ٦: k=k+1

گام ۷: دما را کاهش دهید $T_{k+1} = f(T_k)$ و بروید به گام ۲.

شکل ۲- الگوریتم همگن SA (دما پس از L تکرار کاهش می‌یابد).

جدول ۲- تعداد مراحل تغییر دما (n) برحسب مقادیر مختلف ضریب کاهش دما (g)

g	n
۰/۹۹	۳۹۰
۰/۹۵	۷۸
۰/۹	۳۸
۰/۸۵	۲٤
۰/۸	۱۸
۰/۷۵	۱۱
۰/٦	۸
۰/۵	٦

ج – تعداد تکرارها در هر دما

با افزایش تعداد تکرارها در هر دما، تعداد کل تکرارها افزایش می‌یابد. هر چه تعداد تکرارها افزایش یابد جستجوی بیشتری برای جواب بهینه صورت می‌گیرد. در نتیجه جواب بهتری به دست می‌آید.

به منظور به دست آوردن مقدار مناسب برای تعداد تکرارها در هر دما (L) از روش سعی و خطا استفاده می‌شود. در مورد هر مسئله، برای تمام پارامترها مقادیر ثابتی در نظر گرفته می‌شود. سپس مقادیر مختلفی برای تعداد تکرارهای هر دما مورد آزمایش قرار می‌گیرد، و مقدار منجر به جواب مناسبتر انتخاب می‌شود.

۵-۲- تصمیمات مربوط به مشخصات مسئله

الف – جواب اولیه

به منظور انتخاب جواب اولیه، گره‌های کاندید به ترتیب کاهش حداکثر خدمت‌دهی مرتب شده و سپس به تعداد پایانه‌های مورد نظر، گره‌های ابتدای فهرست مذکور انتخاب می‌شوند.

ب – تولید نقطهٔ همسایه

نقطهٔ همسایه به صورت تصادفی انتخاب می‌شود. بدین ترتیب که، یک گره به طور تصادفی از میان گره‌های جواب جاری انتخاب می‌شود و با یک گره دیگر که از میان باقیماندهٔ گره‌های کاندید که آن هم به طور تصادفی انتخاب شده تعویض می‌شود. به عنوان مثال، در مورد انتخاب ۵ پایانه از میان ۲۰ گرهٔ کاندید، اگر جواب جاری به صورت زیر باشد

۲۰۳ و ۲۲۲ و ۲۹۷ و ۷٦۸ و ۲۱۸

و گرهٔ ۲۹۷ به طور تصادفی از میان این ۵ گره و گرهٔ ۳۰۵ به طور تصادفی و بدون هیچ اولویتی از میان ۱۵ گره دیگر انتخاب شده باشند. جواب جدید به صورت زیر می‌شود

۲۰۳ و ۲۲۲ و ۳۰۵ و ۷٦۸ و ۲۱۸

ج – محاسبهٔ ΔC_{ij}

در هر تکرار از الگوریتم SA تفاوت هزینه (منهای مقدار تابع هدف مدل مکانیابی) جواب جاری و جواب همسایه مقایسه می‌شود. در تحقیق حاضر، مانند آنچه در مرجع [۱۰] آورده شده است تفاوت نسبی مقادیر هزینه مدنظر قرار می‌گیرد. یعنی ΔC_{ij} به صورت زیر خواهد بود

$$\Delta C_{ij} = \frac{C(j) - C(i)}{C(i)} \qquad (۱٦)$$

٦- حل چند مثال واقعی

در این بخش از مقاله، عملکرد روشهای گرم و سرد کردن شبیه سازی شده (SA) و شمارش ضمنی (IE) و نرم افزار GAMS در حل مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌ها مقایسه می‌شود. برای این منظور، دو شبکهٔ اتوبوسرانی واقعی و در ابعاد بزرگ که مربوط به شهرهای مشهد و تهران می‌شوند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. مبنای مقایسه کارایی روشها، مقادیر تابع هدف و همچنین زمان اجرای برنامه‌هاست.

٦-۱- شبکهٔ اتوبوسرانی مشهد

شبکهٔ مشهد که در مرجع [۱] بررسی شده است، دارای ۲۷٤ گره (نقاطی که مسافر سوار اتوبوس یا از آن پیاده می‌شود) است. مدل مکانیابی پایانه‌ها برای این شبکه در حالتی که تعداد پایانه‌ها برابر ۳۰ باشد، دارای ۳۰ متغیر صحیح، حدود ٤۵۰

متغیر پیوسته، و در حدود ۷۸۰ محدودیت است، و در حالتی که تعداد پایانه‌های کاندید برابر ۲۰ باشد این کمیتها به ترتیب برابر ۲۰، ۳۰۰ و ٦١٠ هستند. برای هر دو حالت بالا، مدل مکانیابی پایانه‌ها توسط نرم‌افزار GAMS حل شده است که نتایج آن در مرجع [1] ارائه شده است.

برای استفاده از روش SA در حل مدل مکانیابی پایانه‌ها، ابتدا باید مقدار پارامتر مربوط به تعداد تکرارها در هر دما (L) که مقدار آن وابسته به ابعاد مسئله است تعیین شود. برای تعیین این پارامتر از روش سعی و خطا استفاده می‌شود. برنامه با مقادیر مختلف این پارامتر اجرا می‌شود (برای یک تعداد پایانهٔ خاص)، سپس بهترین مقدار انتخاب می‌شود. به طور معمول با چند سعی و خطا مقدار مطلوب به دست می‌آید، ولی در اینجا به منظور تشریح چگونگی تغییرات تابع هدف براساس تغییرات تعداد تکرار در هر دما، پارامتر مذکور در دامنه‌ای وسیعتر تغییر داده می‌شود. مقدار پارامتر مذکور از ۱ تا ۹۰ تغییر یافته است. وقتی مقدار این پارامتر کم است، جواب از جواب بهینه فاصله دارد. با افزایش تعداد تکرارها در هر دما،تعداد کل تکرارها افزایش می‌یابد و تابع هدف بهتری به دست می‌آید. در شکل (۳) نحوهٔ تغییرات مقدار تابع هدف برحسب افزایش پارامتر مذکور برای شبکهٔ مشهد با ۳۰ گرهٔ کاندید ارائه شده است. براساس نتایج این سعی و خطا مقدار ۸۰ برای پارامتر مورد نظر انتخاب شده است. یعنی در هر دما ۸۰ تکرار انجام گرفته و سپس دما کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که برای کنترل، برنامه با مقادیر ۲۰۰ و ۱۰۰۰ تکرار در هر دما نیز اجرا شد. در این دو حالت، زمان اجرا به ترتیب ۲/۵ و ۱۲/۵ برابر شد، ولی تغییری در مقدار تابع هدف ایجاد نشد.

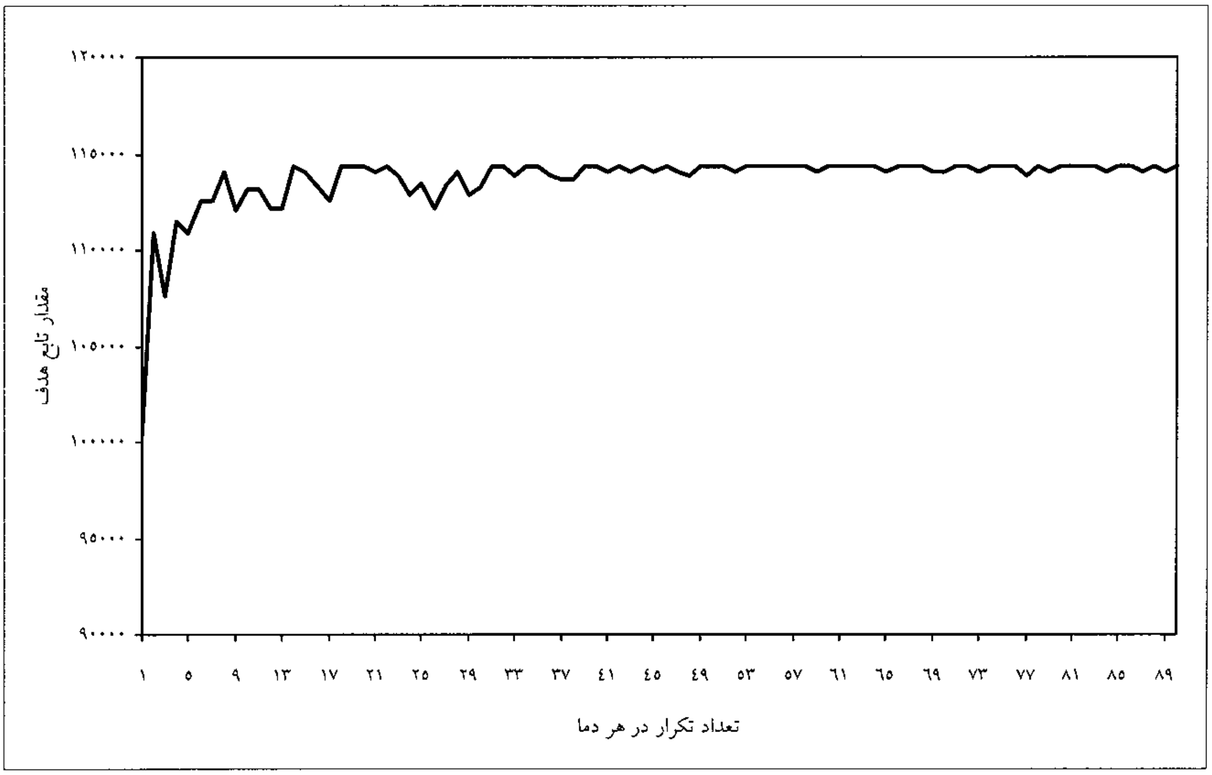
در جدول (۳) نتایج حاصل از حل مدل مکانیابی پایانه‌ها برای شهر مشهد با ۳۰ گره کاندید توسط GAMS و SA در کنار هم آورده شده است. اختلاف نسبی تابع هدف دو روش نیز در ستون جداگانه‌ای موجود است. همانطور که مشخص است، در اغلب موارد زمان اجرای SA کمتر است. مقایسهٔ زمان اجرای دو روش نیز کارایی الگوریتم SA را مشخصتر می‌کند. یاداوری می‌شود که زمان اجرای GAMS حداکثر ۲ ساعت انتخاب شده است و به همین دلیل در اغلب موارد مقدار تابع هدف GAMS از مقدار تابع هدف SA کمتر است. لذا از نظر دقت جواب نیز برنامه مبتنی بر SA نتایج بهتری ارائه می‌کند (هر دو برنامه توسط 486DX2 66 MHz اجرا شده است).

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول (۳)، مجموع زمان اجرای SA (برای ۳۰ حالت) برابر ۳۰۳۸ ثانیه است. کل زمان اجرای GAMS برابر ۱۳۹۲٤۹ ثانیه است و تقریباً ۵۰ برابر زمان اجرای SA است. مقایسهٔ ارقام مربوط به متوسط زمان اجرا برای یک پایانه در سطر آخر جدول (۳)، نتیجه مشابهی را به دست می‌دهد. این در شرایطی است که تابع هدف GAMS نیز به طور متوسط ۵/۲ درصد از تابع هدف SA کمتر است. برای حالتی که تعداد پایانه‌های مورد نیاز ٤ است و هر دو روش منجر به جوابهای بهینه می‌شوند، روش SA تقریباً ۱۷۰ برابر سریعتر از برنامه GAMS عمل می‌کند.

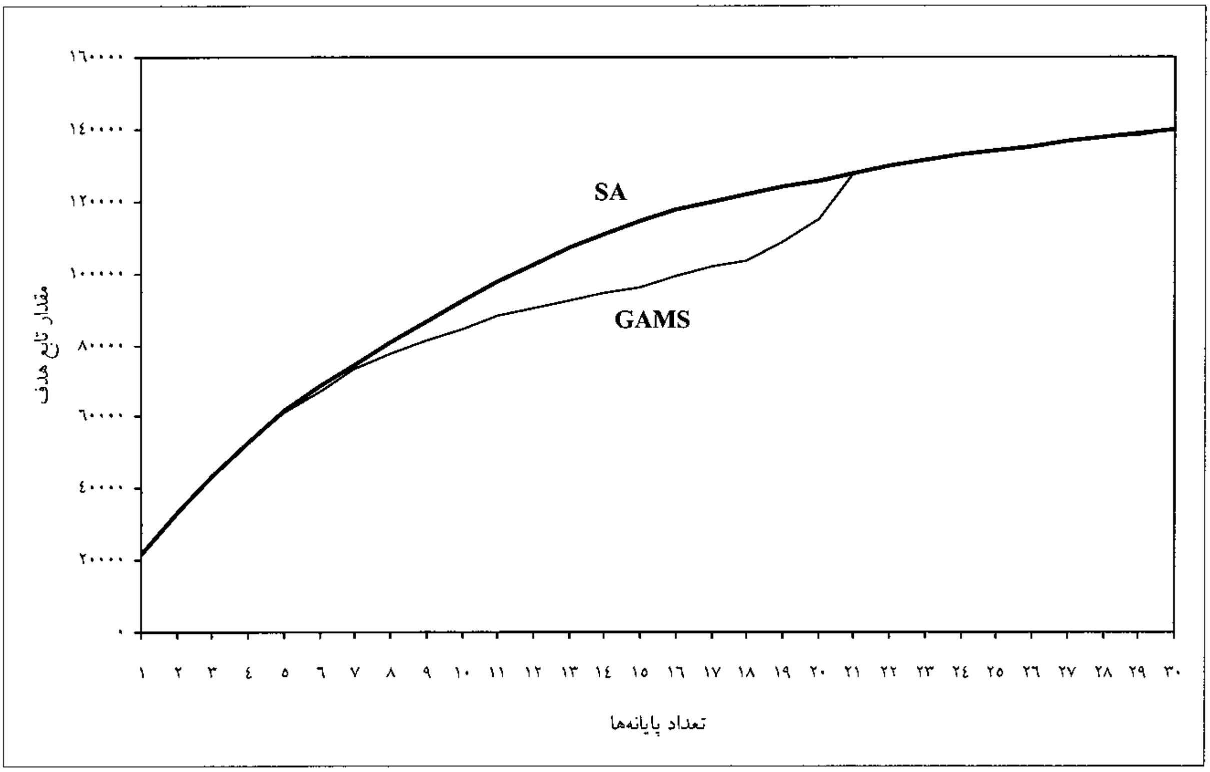
در شکل (٤) مقادیر تابع هدف به دست آمده از نرم‌افزار GAMS با مقادیر تابع هدف حاصل از SA مقایسه شده است. در محدودهٔ ۸ تا ۲۱ پایانه اختلاف چشمگیری بین مقادیر تابع هدف وجود دارد و اختلاف تابع هدف GAMS و SA حتی به ١٦ درصد نیز می‌رسد. مقادیر تابع هدف حاصل از SA به جواب بهینه بسیار نزدیک است.

نتایج حاصل از حل مدل مکانیابی پایانه‌ها برای شهر مشهد با ۲۰ گرهٔ کاندید توسط روشهای GAMS، SA و IE در جدول (٤) خلاصه شده است. در این حالت نیز تعداد تکرارهای روش SA در هر دما با استفاده از سعی و خطا برابر ۳۵ انتخاب شده است. به دلیل کوچک بودن ابعاد مسئلهٔ مکانیابی در این حالت، در هر سه روش جواب بهینه حاصل شده است. از این رو، زمان اجرای روشها را می‌توان به عنوان مبنای مقایسهٔ روشها در نظر گرفت.

اگر کل زمان اجرای برنامه‌ها برای ۲۰ حالت مبنای مقایسه در نظر گرفته شود، مشاهده می‌شود که روش SA حدود ۱۵۰ برابر سریعتر از GAMS و حدود ۵۰ برابر سریعتر از روش



شکل ۳- منحنی تغییرات مقدار تابع هدف برحسب تغییرات تعداد تکرار در هر دما (تعداد گره‌های کاندید برابر ۳۰ و ضریب کاهش دما مساوی ۰/۸۵ است).



شکل ٤- مقایسهٔ تابع هدف برنامه‌های SA و GAMS برای شبکهٔ مشهد با ۳۰ گرهٔ کاندید

جدول ٣- مقایسهٔ نتایج برنامه‌های SA و GAMS برای شبکهٔ مشهد با ٣٠ گرهٔ کاندید

تعداد پایانه	GAMS		SA		درصد اختلاف نسبی مقادیر تابع هدف
	تابع هدف	زمان اجرا (ثانیه)	تابع هدف	زمان اجرا (ثانیه)	
١	٢١٨٨٨	٢٣	٢١٨٨٨	١٦	٠
٢	٣٣١٧٤	٣٤٩	٣٣١٧٤	٢٦	٠
٣	٤٣٢٢٤	٢٩٢٩	٤٣٢٢٤	٣٦	٠
٤	٥٢٧٧٦	٧٢٠٤	٥٢٧٧٦	٤٣	٠
٥	٦١١٢٤	٧٢٠٦	٦١٨٠٥	٥٠	١/١
٦	٦٧٢٢٥	٧٢٠٥	٦٨٥١١	٥٧	١/٩
٧	٧٣٢٥٧	٧٢٠١	٧٤٦٩٥	٦٤	٠/٩
٨	٧٧٤٧٦	٧٢٠٨	٨٠٥٦٣	٧١	٣/٨
٩	٨١٣٩٠	٧٢٠٢	٨٦٤٠٣	٧٧	٥/٨
١٠	٨٤٦٣١	٧٢٠٣	٩٢١٥١	٨٣	٨/٢
١١	٨٨٢٤٩	٧٢٠٤	٩٧٤٩٤	٨٩	٩/٥
١٢	٩٠٣٧٤	٧٢٠٣	١٠٢٥٥٩	٩٥	٧٧/٩
١٣	٩٢٣٥١	٧٢٠٤	١٠٧٣٠٥	١٠٠	١٣/٩
١٤	٩٤٣١٦	٧٢٠٦	١١٠٩٤٣	١٠٥	١٥/٠
١٥	٩٦١٦٨	٧٢٠٣	١١٤٣٨١	١١٠	١٥/٩
١٦	٩٩٣٤٢	٧٢٠٧	١١٧٥١٧	١١٥	١٥/٥
١٧	١٠١٧٤٦	٧٢٠٣	١١٩٨٧١	١٢٠	١٥/١
١٨	١٠٣٤٥٣	٧٢٠٥	١٢١٩٢١	١٢٥	١٥/١
١٩	١٠٨٧٩٦	٧٢٠٣	١٢٣٨٩٨	١٣٠	١٢/١
٢٠	١١٤٩٧٥	٧٢٠٢	١٢٥٨٥٣	١٣٤	٨/٦
٢١	١٢٧٦١١	٧٢٠٢	١٢٧٨٠٩	١٣٨	٠/٢
٢٢	١٢٩٦٦١	٣٤٦٢	١٢٩٦٦١	١٤٢	٠
٢٣	١٣١٣٦٨	١٥٠٣	١٣١٣٦٨	١٤٦	٠
٢٤	١٣٢٩٣٢	٥٥٤	١٣٢٩٣٢	١٥٠	٠
٢٥	١٣٤١٩٤	٢٦٢	١٣٤١٩٤	١٥٥	٠
٢٦	١٣٥٤١٢	٨٦	١٣٥٤١٢	١٥٩	٠
٢٧	١٣٦٥٨٥	٤٣	١٣٦٥٨٥	١٦٣	٠
٢٨	١٣٧٧٠٠	١٥	١٣٧٧٠٠	١٦٧	٠
٢٩	١٣٨٧٠٦	٤	١٣٨٧٠٦	١٧١	٠/٢
٣٠	١٣٩٦٩٠	٢	١٣٩٦٩٠	١	٠
جمع	–	١٣٨٩٠٣	–	٣٠٣٨	٠
متوسط زمان اجرا برای یک پایانه		٤٨٣	–	٨	–

جدول ٤- مقایسهٔ زمان اجرای GAMS، IE و SA برای شبکهٔ مشهد با ۲۰ گرهٔ کاندید

تعداد پایانه	زمان اجرای GAMS (ثانیه)	زمان اجرای IE (ثانیه)	زمان اجرای SA (ثانیه)
۱	۱۲	۱	۷
۲	۱۰۳	۱	۱۱
۳	۵۱۰	۳	۱۶
٤	۱۷۸۷	۱۷	۱۹
۵	٤٦۳۹	۹۳	۲۲
٦	۹٦٦۵	٤۵۵	۲۵
۷	۱٦۳٦۸	۱۵۰٦	۲۸
۸	۲۰۰۰۱	۳٤۲۰	۳۱
۹	۱۹۰۱۲	۵٦٤۰	۳٤
۱۰	۱۲۰٤۵	۷۱٤۰	۳٦
۱۱	۵٦۳۲	۷۲۰۰	۳۸
۱۲	۲۲٦۳	۵۷۰۰	٤۱
۱۳	۱۱۱۰	۳۷۸۰	٤۳
۱٤	٤۷۵	۱۹۸۰	٤۵
۱۵	۱٤۹	۸٤۰	٤۷
۱٦	٦٦	۲۸۲	٤۹
۱۷	۲۹	۷۰	۵۱
۱۸	۱٤	۱۳	۵۳
۱۹	۷	۲	۵۵
۲۰	۲	۱	۱
جمع	۹٦۸۸٦	۳۸۱٤٤	٦۵۲

شمارش ضمنی است. چنانچه تنها حالت ۸ پایانه، که مشکلترین (وقتگیرترین) حالت است در نظر گرفته شود، روش SA حدود ۶۰۰ برابـر سـریعتر از GAMS و حـدود ۱۰۰ برابـر سـریعتر از روش شمارش ضمنی است. در شکل (۵) تغییرات زمان اجـرای سه برنامهٔ مذکور برحسب افزایـش تعـداد پایانـه‌ها ارائـه شـده است.

٦-۲- شبکهٔ اتوبوسرانی تهران

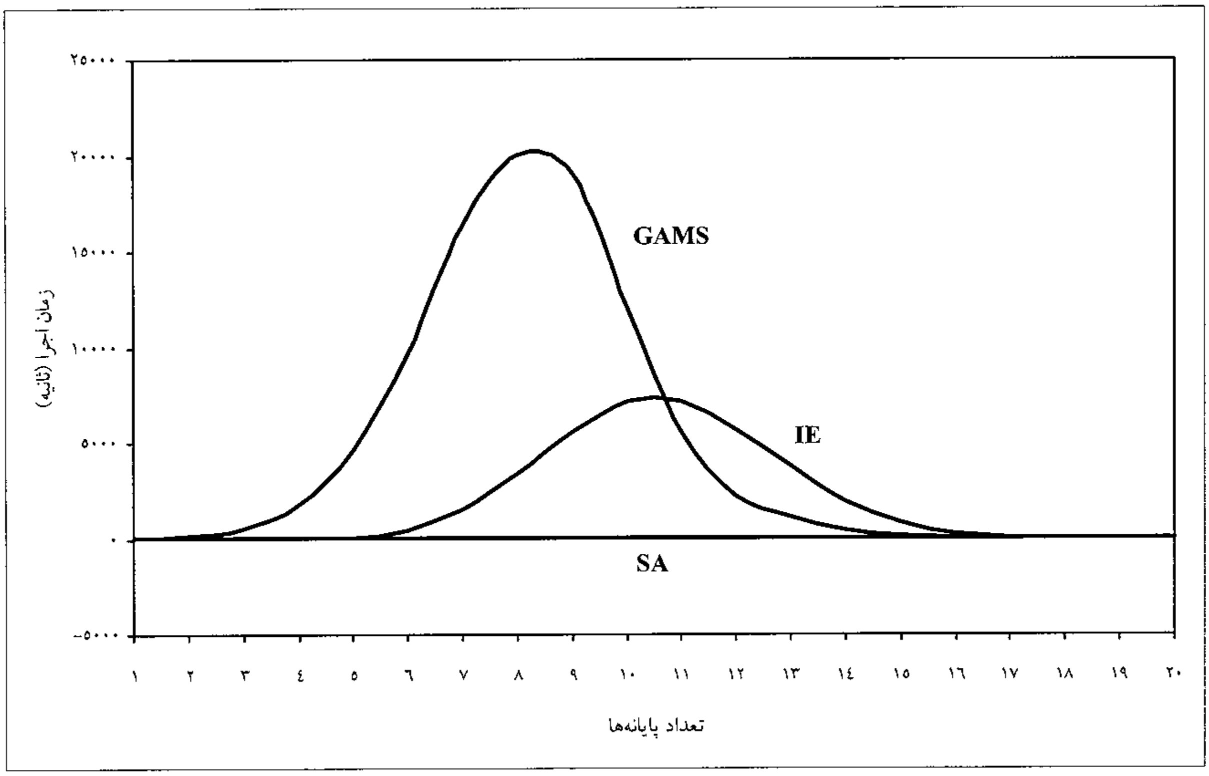
دومین شبکهٔ واقعی بررسی شده مربوط به شبکهٔ اتوبوسرانی تهران با مترو می‌شـود. ایـن شـبکه دارای ۱٦۵۰ گره بـا ۹۹ گرهٔ کاندید اســت. در ایـن حـالت مـدل مکانیـابی دارای ۹۹ متغیر صحیــح، حــدود ۲۵۰۰ متغــیر پیوســته و در حــدود ٤۳۰۰ محدودیت است. حل این مسئله توسط GAMS به عنـوان یـک مسئلهٔ واحد (و بدون تقسیم‌بندی شبکه) عملاً ناممکن است. بـه عنوان مثال،زمان لازم بـرای حـل ایـن مسـئله حتـی بـا ۳۸ گره کاندید بیش از چهار شبانه روز شد. برای اسـتفاده از روش SA در حل مدل مکانیابی، در اولین گام با انتخـاب ضریـب کـاهش دما برابر ۰/۹۷ به همراه تعداد ۱۰۰ تکرار در هر دما،مسـئلهٔ بـالا به صورت مقدماتی حل شد. از آنجا که برخی از جوابها از دقت کافی برخوردار نبودند، تعدادی از گره‌های کاندید که احتمـال

جدول ۵- نتایج حل مسئلهٔ مکانیابی شبکهٔ تهران با ۷۵ گرهٔ کاندید با به کارگیری برنامهٔ SA

تعداد پایانه	تابع هدف	زمان اجرا (دقیقه)	تعداد پایانه	تابع هدف	زمان اجرا (دقیقه)	تعداد پایانه	تابع هدف	زمان اجرا (دقیقه)
١	٧٨٩٥٤	١	٢٦	٥٢٢٨١٢	٥٣	٥١	٦٤٧٠٧١	٩٥
٢	١٣٧٢١٩	٣	٢٧	٥٢٩٣٧٦	٥٥	٥٢	٦٥٠١٢٩	٩٦
٣	١٧٧١٥٢	٣	٢٨	٥٣٧٤٠٦	٥٧	٥٣	٦٥٣٨٩١	٩٧
٤	٢١٥٦٩١	٣	٢٩	٥٤٢٥٨٦	٥٨	٥٤	٦٥٥٦٠٧	٩٩
٥	٢٤٤٧٨٢	٥	٣٠	٥٥٠٠٥٧	٦٠	٥٥	٦٥٨٨٦٢	١٠١
٦	٢٦٨٢٨١	٥	٣١	٥٥٥٥٩٩	٦٢	٥٦	٦٦١٢٦٧	١٠٢
٧	٢٨٩٥٧٤	٥	٣٢	٥٦٠٩٩١	٦٣	٥٧	٦٦٤٩٧٣	١٠٤
٨	٣٠٧٥٥٧	٧	٣٣	٥٦٨٦٦١	٦٥	٥٨	٦٦٧٢٣٨	١٠٦
٩	٣٢٤٩٥٤	٧	٣٤	٥٧٢٩٤١	٦٧	٥٩	٦٧٠٠٣٩	١٠٧
١٠	٣٤٢٠٤٢	٨	٣٥	٥٨٠٤١٩	٦٨	٦٠	٦٧١٠٢١	١٠٨
١١	٣٥٨٩١٠	٩	٣٦	٥٨٤٦٤٥	٧٠	٦١	٦٧٢٥٦٠	٣٧
١٢	٣٧٥٦١٦	٩	٣٧	٥٩١٣٠٦	٧٢	٦٢	٦٧٦٣٧٢	٣٧
١٣	٣٩١٧٢٦	١٠	٣٨	٥٩٤٨٥٨	٧٣	٦٣	٦٧٨٣٧٦	٣٨
١٤	٤٠٧٠٢٨	١٠	٣٩	٥٩٩٣٠١	٧٥	٦٤	٦٨٠٣٤٧	٣٨
١٥	٤٢١٧٩٨	١١	٤٠	٦٠٤٥٣٠	٧٧	٦٥	٦٨١٠٩٤	٣٨
١٦	٤٣٣٩١١	١٢	٤١	٦٠٨٥٥٢	٧٨	٦٦	٦٨٣١٩٣	٣٩
١٧	٤٤٥١٢٧	١٢	٤٢	٦١٢٠٥٠	٨٠	٦٧	٦٨٥٩٣٧	٣٩
١٨	٤٥٥٩٤٨	١٣	٤٣	٦١٧٠٧٤	٨٢	٦٨	٦٨٧٤٦٣	٤٠
١٩	٤٦٦٣٦٩	١٣	٤٤	٦٢١٣٧٣	٨٣	٦٩	٦٨٩١٢٣	٤١
٢٠	٤٧٥٣٣٠	٤٣	٤٥	٦٢٦٢٨١	٨٥	٧٠	٦٩٠٩٠٢	٤١
٢١	٤٨٤١٥٧	٤٤	٤٦	٦٢٩٤٦٣	٨٦	٧١	٦٩٢١٢٣	٤١
٢٢	٤٩٢٣٥٤	٤٦	٤٧	٦٣٣٢٤٣	٨٩	٧٢	٦٩٣٦٢٥	٤٢
٢٣	٥٠٠٣٠٩	٤٨	٤٨	٦٣٧٦١٥	٨٩	٧٣	٦٩٤٩٤٤	٤٣
٢٤	٥٠٨١٥٩	٤٩	٤٩	٦٤٠٠٥٩	٩١	٧٤	٦٩٥٩١٨	٤٣
٢٥	٥١٥٥٦٣	٥١	٥٠	٦٤٤٣٦١	٩٣	٧٥	٦٩٦٦٢٤	–

انتخاب آنها بسیار کم بود حذف شدند و ۷۵ گره به عنوان گره‌های کاندید جدید انتخاب شدند. مسئلهٔ مکانیابی با گره‌های کاندید جدید مجدداً حل شد.

با مشاهدهٔ نتایج حاصل از حل مسئلهٔ مکانیابی با ۷۵ گره کاندید مشخص شد که برای حالات ۲۰ تا ۶۰ پایانه مورد نیاز، برخی جوابها احتمالاً با جواب بهینه فاصله دارند. از این رو



شکل ۵- مقایسهٔ زمان اجرای برنامه‌های GAMS، IE و SA برای شبکهٔ مشهد با ۲۰ گرهٔ کاندید

برای این حالات، مسئله بار دیگر و این بار با دقت مضاعف حل شد. د رمرحلهٔ دوم ضریب کاهش دما برابر G=0.98 و تعداد تکرارها در هر دما، برابر ۲۰۰ در نظر گرفته شد. در جدول (۵) مقادیر تابع هدف مسئلهٔ مکانیابی در شبکهٔ تهران (با مترو) به همراه زمان اجرای هر حالت ارائه شده است.

۷- جمعبندی مطالب

از جمله مسائل مهم در برنامه‌ریزی حمل و نقل، طراحی شبکه‌های اتوبوسرانی است و طراحی ساختار این شبکه گامی مهم در این راستاست. از جمله مواردی که در طراحی ساختار شبکه مدنظر قرار می‌گیرد. تعیین محل پایانه‌های اتوبوسرانی است. مکانیابی مذکور توسط حل مدلی از نوع مکانیابی تسهیلات انجام می‌گیرد. این مسئله از جمله مسائل برنامه‌ریزی ترکیبی در مقیاس بزرگ است و در کوششهای پیشین، این مسئله با استفاده از روش شاخه و کرانه و به کارگیری نرم‌افزار GAMS حل شده است. در تحقیق حاضر دو روش گرم و سرد کردن شبیه‌سازی شده و شمارش ضمنی مد نظر قرار گرفتند و مسئلهٔ مکانیابی بالا توسط این دو روش حل شد.

حل مجدد مسئلهٔ مکانیابی، با هدف مقایسهٔ کارایی این روشها انجام گرفت. براساس نتایج حاصل از حل مسئلهٔ مذکور، کارایی فوق‌العادهٔ روش SA در مقایسه با دو روش دیگر مشخص شد. مطالعهٔ موردی بر روی شبکهٔ مشهد انجام گرفت و در یکی از حالات حل مسئله، زمان حل مسئله توسط SA بیش از ۵۰ برابر سریعتر از روش شمارش ضمنی، و بیش از ۱۵۰ برابر سریعتر از روش عمومی شاخه و کرانه است. مقادیر تابع هدف حاصل از به کارگیری SA نیز در تمامی موارد برابر یا بهتر از مقادیر تابع هدف حاصل از دو روش دیگر بوده است.

پس از آنکه کارایی روش SA در حل مسئلهٔ مکانیابی مذکور مشخص شد، مسئلهٔ مکانیابی شبکهٔ اتوبوسرانی شهر تهران نیز توسط این روش حل شد. ابعاد شبکهٔ شهر تهران ۵

برابر شبکهٔ شهر مشهد است و حل مسئلهٔ مذکور توسط نرم‌افزار GAMS مستلزم تقسیم کردن شهر به چند زیرناحیه و حل مجزای آنهاست. در غیر این صورت به دلیل بالا رفتن زمان اجرا، حل مسئله توسط GAMS تقریباً غیرعملی است. این مسئله بدون نیاز به تقسیم‌بندی شهر با استفاده از روش SA حل و مکان پایانه‌ها برای طراحی شبکهٔ اتوبوسرانی جدید تعیین شد.

واژه نامه

1. simulated annealing
2. combinatorial optimization
3. discrete variables
4. branch and bound
5. implicit enumeration
6. neighbourhood search
7. transition
8. annealing
9. thermal equilibrium
10. Boltzman distribution
11. freezing
12. Metropolis criterion

مراجع

۱. ابوالقاسم، ا.، "مکانیابی پایانه‌های درون شهری برای شبکهٔ اتوبوسرانی،" پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، مهرماه ۱۳۷۶.

۲. حجازی، ب.، "حل مسئلهٔ مکانیابی پایانه‌های شبکه اتوبوسرانی با استفاده از روش SA،" پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، شهریورماه ۱۳۷۸.

3. Croes, G. A., "A Method for Solving Travelling Salesman Problems," *Operations Research,* Vol. 6, P. 791, 1958.
4. Reeves, C. R., *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems,* Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1993.
5. Kirkpatrick, S., Gelaltt, C. D., and Vecchi, M. P., "Optimization by Simulated Annealing," *Science*, Vol. 220, No. 4598, pp. 671-680, 1983.
6. Cerny, V., "Thermodynamical Approach to Travelling Salesman Problem: an Efficient Simulation Algorithm," *J. Opt. Theory Appl.,* Vol. 45, pp. 41-45, 1985.
7. Van Laarhoven, P. J. M., and E. H. L. Aarts, *Simulated Annealing: Theory and Applications*, D. Reidel Publishing Company, 1987.
8. Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., and Teller, A. H., "Equation of State Calculation by Fast Computing Machines," *The J. of Chemical Physics*, Vol. 21, No. 6, 1953.
9. Vidal, R. V. V., Applied Simulated Annealing, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 396, Springer-Verlag, 1993.

۱۰. مخاطب رفیعی، ف.، و معطرحسینی، م.، "مسئلهٔ تعیین اندازهٔ اقتصادی و ترتیب تولید با روش SA،" استقلال، سال ۱۷، شمارهٔ ۲،اسفند ۱۳۷۷.