

# تحلیل عددی میدان جریان سه‌بعدی حول یک کره در رینولدزهای پایین به روش مختصات منطبق بر مرز

محمد رضا مدرس رضوی\*، حمید نیازمند\*\* و سید علی میربزرگی\*\*\*  
گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۷۸/۱۱/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۸۰/۹/۱)

**چکیده:** در این پژوهش به بررسی عددی میدان جریان تراکم ناپذیر در اطراف یک کره جامد در رینولدزهای پایین (تا حدود ۲۷۰) پرداخته شده است. برای توسعه قابلیت‌های روش حجم محدود، از روش مختصات منطبق بر مرز استفاده شده است. برای گسسته کردن معادلات دیفرانسیل جزئی به روابط جبری از روش حجم محدود با آرایش مرتب شده متغیرها، برای مدل کردن شارهای جابه جایی از روش وان لیر و برای مرتبط کردن میدانهای فشار و سرعت، از الگوریتم سیمپل‌سی استفاده شده است. سیستم معادلات جبری حاصل نیز توسط روش TDMA حل شده‌اند. برای بررسی صحت روندها و الگوریتمهای مورد استفاده، میدان جریان حول کره جامد در رینولدزهای (۲۱۰-۲۰) تحلیل شده و با نتایج تجربی و عددی موجود مقایسه شده است. پس از آن به بررسی میدان جریان حول کره جامد در رینولدزهای (۲۱۰-۲۷۰) پرداخته شده است. نتایج به دست آمده از جریان خارجی حول یک کره در رینولدزهای پایین (۲۱۰-۲۷۰) نشان داده است که اگرچه جریان پایدار است اما عدم تقارن پدید آمده در صفحات متعامد به خوبی قابل مشاهده است و مرحله از بین رفتن تقارن هندسی خطوط جریان در رینولدز ۲۱۱ شروع می‌شود.

واژگان کلیدی: کره جامد، برخاستگی، تحلیل سه‌بعدی، مختصات منطبق بر مرز

## Three Dimensional Analysis of Flow Past a Solid-Sphere at Low Reynolds Numbers with the Aid of Body Fitted Coordinates

M. R. Modarres-Razavi, H. Niazmand and S. A. Mirbozorgi  
Department of Mechanical Engineering, Mashhad Ferdowsi University

**Abstract:** In this paper, the flow-field of an incompressible viscous flow past a solid-sphere at low Reynolds numbers (up to 270) is investigated numerically. In order to extend the capabilities of the finite volume method, the boundary (body) fitted coordinates (BFC) method is used. Transformation of the partial differential equations to algebraic relations is based on the finite-volume method with collocated variables arrangement. For solving the obtained algebraic relations, the TDMA in periodic state is used. To approximate the convective fluxes, the differencing scheme of Van leer is used and SIMPLEC handles the linkage between velocities and pressures. The verification of the code is checked by the analysis of flow past a solid sphere at low Reynolds numbers of 20 to 210. A good agreement is obtained between the present results and the available experimental and numerical data. The flow-field past a sphere at low Reynolds numbers of 210 to 270 shows that the steady non-axisymmetric regime is going to build up at the Reynolds number of 211.

**Keywords:** Solid-Sphere, Wake, Three Dimensional Analysis, Boundary Fitted Coordinates

\*\*\* - دانشجوی کارشناسی ارشد

\*\* - استادیار

\* - دانشیار

حجم	$v$	سطح	$A$
شکل اندیسی معرفی محورهای مختصات عمومی	$X_j$	ضرایب معادله انفصال	$a$
طول گردابه پشت کره	$X_{wake}$	ضریب پسا فشاری	$C_p$
مختصات کارترین مراکز گردابه‌ها	$X_v, Y_v$	ضریب برا (نیروی جانبی)	$C_L$
علائم یونانی		شار پخش	diff
ضریب زیر تخفیف	$\alpha$	قطر	$D$
ضخامت لایه مرزی	$\delta$	ضریب انبساط شبکه	$f$
حجم جزئی یک حجم کنترل	$\delta_v$	نیروی پسا در امتداد جریان	$F_x$
متغیر عمومی	$\phi$	نیروی جانبی عمود بر جهت جریان	$F_y$
ضریب نفوذ متغیر عمومی	$\Gamma_\phi$	شکل اندیسی بردارهای پایه کانتراوارینت در مختصات عمومی	$g^i$
لزجت	$\mu$	شکل اندیسی بردارهای پایه کوارینت در مختصات عمومی	$g^j$
لزجت دینامیکی	$\nu$	تانسور متریک اقلیدسی	$g^{ij}$
زاویه جدایش	$\theta_s$	نرخ جرم عبوری	$\dot{m}$
چگالی	$\rho$	تعداد حداکثر گره‌های یک امتداد در شبکه بندی	$N_i$
محورهای دستگاه مختصات محاسباتی	$\xi, \eta, \zeta$	عدد رینولدز	$Re$
زیرنویسها		شعاع کره	$r_1$
به ترتیب: وجوه غربی، شرقی، جنوبی، شمالی، پایینی و بالایی	$w, e, s, n, l, h$	عبارت چشمه برای یک متغیر عمومی در معادله دیفرانسیلی ممتهم	$S_\phi$
مشتقات نسبت به محورهای مختصات کارترین	$x, y, z$	عبارت چشمه در معادله انفصال	$S_u$
مشتقات نسبت به محورهای مختصات محاسباتی	$\xi, \eta, \zeta$	سرعت جریان آزاد	$U_{in} \text{ or } U_\infty$
بالانویسها		شکل اندیسی معرفی مولفه‌های سرعت کارترین و کوارینت	$U_j$
(پریم) مقادیر اصلاحی	'		
(ستاره) مقادیر قدیمی	*		

## ۱- مقدمه

جریانهای سه‌بعدی، پیچیدگی مسیر حرکت ذرات سیال بسیار بیشتر است و لذا درک آنها به آسانی میسر نمی‌شود. تاکنون بررسیهای تجربی و عددی متنوعی برای بررسی جریان حول کره در اعداد رینولدز مختلف انجام پذیرفته است از جمله تاندا [۱] روش تجربی آشکارسازی جریان را برای مطالعه برخاستگیهای<sup>۳</sup> پشت کره در رینولدزهای ۳۰۰-۵ مورد

بررسی سه‌بعدی جریان عبوری از روی کره، حالت ساده‌ای از جریان سیالات بر روی اجسام است ولی در عین حال اکثر پیچیدگیهای چنین جریانهایی را داراست. مانند جریان روی استوانه، ناپایداریها<sup>۲</sup> عامل ایجاد جریانهای نادائم حتی در حضور تقارن هندسی در جسم‌اند. برخلاف جریانهای دوبعدی، در

حول یک کره در رینولدزهای بین ۲۱۰ تا ۲۷۰، مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان سیال، معادلات اصل بقای جرم و ممتنم هستند. این معادلات برای سیالات تراکم ناپذیر نیوتنی در شکل تانسوری به صورت زیر بیان می‌شوند [۶]

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

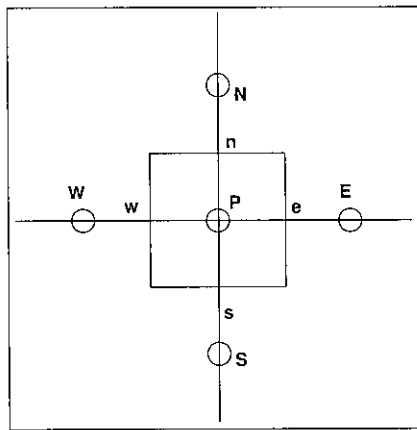
که در آن  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  و  $\mu$  لزجت سیال است. معادلات بالا از نوع معادلات با شرایط مرزی و اولیه بوده و لذا جواب آنها کاملاً وابسته به شرایط مرزی است. حل معادلات فوق به جز برای حالات بسیار ساده، از طریق تحلیل ریاضی بسیار مشکل است. لذا باید توسط روشهای دیگری مانند تحلیلی-تقریبی و یا تحلیل عددی به حل آنها پرداخت [۷].

در روش عددی ارائه شده در این مقاله مانند تمام روشهای عددی اجباراً معادلات گسسته می‌شوند و برای تبدیل معادلات با مشتقات جزئی بالا به روابط جبری بین متغیرهای وابسته از روش حجم محدود کمک گرفته می‌شود و برای پرهیز از محاسبات مربوط به مشتقات کووارینت یا کانتراوارینت، معادلات ممتنم برای سرعتها در مختصات کارترین یعنی  $u, v, w$  به عنوان یک اسکالر حل می‌شوند. نکته قابل ذکر این است که مختصات به کار رفته در حل، مختصات منحنی الخط منطبق بر مرزند و فقط به جای مؤلفه‌های سرعت کووارینت یا کانتراوارینت، مؤلفه‌های سرعت کارترین به کار گرفته شده‌اند. علاوه بر شکل تانسوری ارائه شده می‌توان یک مدل عمومی واحد به صورت زیر ارائه کرد [۷]. این مدل عمومی به معادله انتقال متغیر اسکالر عمومی  $\phi$  شهرت دارد و در مقاله حاضر مبنای انفصال معادلات ممتنم است.

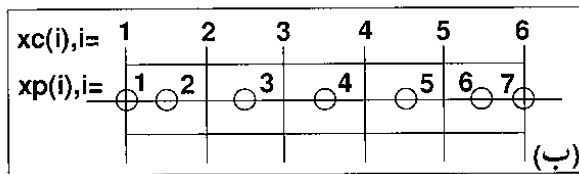
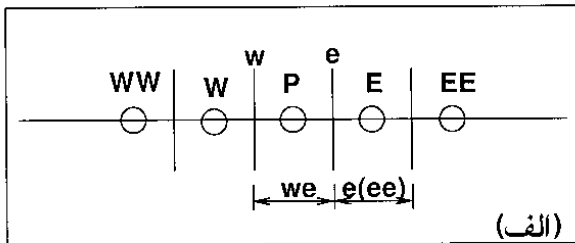
استفاده قرار داده است. او در رابطه با پایداری منطقه بر خاسته مشاهده کرد که در  $Re=130$  یک حرکت متناوب خفیف با دامنه تناوب خیلی زیاد در پشت حلقه گردابه شروع می‌شود. مگاروی و بی‌شاپ [۲] روش تجربی مرئی‌سازی توسط رنگ را به کار بردند و مشاهده کردند در  $210 < Re < 270$  جریان تقارن محوری خود را از دست می‌دهد در حالی که هنوز پایداری خود را حفظ می‌کند.

توم بولیدز [۳] جریان روی کره را به روش عددی المان طیفی<sup>۴</sup> در محدوده  $25 < Re < 1000$  بررسی کرده است و اعلام داشت که در  $Re=212$  برخاستگی پشت کره از حالت تقارن پایدار به نامتقارن پایدار تغییر شکل می‌دهد و ناتاراجان و اکریوس [۴] روش عددی المان محدود را به کار بسته و رینولدز ۲۱۰ را برای حالت گذر از متقارن به نامتقارن پایدار معرفی می‌کنند و در آخرین مطالعه انجام شده، جان سون و پاتل [۵] با بررسی جریان سه‌بعدی توسط روش معرفی گام زمانی کاذب<sup>۵</sup>، وجود صفحات متقارن و نامتقارن عمود بر هم را آشکار و عدد رینولدز ۲۱۰ را به عنوان رینولدز گذر از متقارن به نامتقارن پایدار معرفی می‌کنند. قابل ذکر است که آنان معادلات حاکم را برای یک شبکه کاملاً کروی با حدود چهارصد و بیست و هشت هزار گره  $(101 \times 42 \times 101)$  حل کرده‌اند.

از آنجا که هم اکنون بررسی موضوعاتی نظیر جریان حول یک کره، نیازمند به کارگیری گره‌های زیاد است، در نتیجه حجم محاسبات فراتر از توانایی رایانه‌های موجود است. بنابراین هدف ما در اینجا غلبه بر چنین مشکلی با اتخاذ یک شیوه حل عددی است که محاسبات لازم به ازای هر گره را کاهش دهد. در پژوهش حاضر با استفاده از روش حجم محدود با آرایش مرتب شده متغیرها و همچنین به کارگیری مؤلفه‌های کارترین سرعت به جای مؤلفه‌های کووارینت یا کانتراوارینت<sup>۶</sup> آنها، حجم محاسبات به شدت کاهش یافته و در نتیجه امکان بررسی جریان حول یک کره و مقایسه نتایج آن با نتایج ارائه شده توسط دیگران فراهم شده است. در ادامه دینامیک جریان



شکل ۱- تصویر دوبعدی حجم کنترل در فضای محاسباتی (بعد سوم عمود بر صفحه است)



شکل ۲- موقعیت گره‌ها و سطوح حجم کنترل در یک بعد: (الف) نامگذاری، (ب) شماره گذاری

خواهد شد. برای اجتناب از این مسئله در اینجا از میانبایی رای-چو [۸] استفاده شده است. در این میانبایی، ابتدا گرادیان فشار بین وجوه از مؤلفه‌های سرعت در مرکز حجم کنترل کسر شده سپس میانبایی معمولی انجام شده و در انتها گرادیان فشار بین گره‌های حجم کنترل به آن اضافه شده است. برای مدل کردن شارهای جابه‌جایی متغیرهای وابسته  $\phi$  از روش وان‌لیر [۹] استفاده شده است. این روش به طور خلاصه، یک روش با دقت مرتبه اول بالادست است که توسط یک جمله تصحیح کننده از دقت مرتبه دوم برخوردار شده است البته به جز در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی که دارای دقت مرتبه اول می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (3)$$

که در آن  $\Gamma_\phi$  ضریب نفوذ متغیر عمومی  $\phi$  است و در معادله ممتهم همان  $\mu$  است و  $x_j$  ها محورهای دستگاه مختصات منحنی الخط هستند. اگر شار کل  $I$  برابر مجموع شار جابه‌جایی و شار پخش باشد و عبارت وابسته به زمان در جمله چشمه پنهان شود، معادله به شکل ساده زیر در می‌آید

$$\frac{\partial I_j}{\partial x_j} = S_\phi \quad (4)$$

$$I_j = \rho U_j \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (5)$$

با انتگرال گیری از معادله (۵) بر روی یک حجم کنترل دلخواه و با استفاده از قانون معروف گوس، معادله انتگرالی ممتهم به صورت زیر در می‌آید.

$$\int_A \vec{I} \cdot d\vec{A} = \int_V S_\phi dV \quad (6)$$

### ۳- انفصال معادلات حاکم

شکل نهایی معادله ممتهم، اکنون آماده است تا در شبکه ایجاد شده در حوزه محاسباتی، روی حجمهای کنترل شکل (۱) منفصل شود. حاصل انفصال چنین است

$$(\vec{I} \cdot \vec{A})_e + (\vec{I} \cdot \vec{A})_w + (\vec{I} \cdot \vec{A})_n + (\vec{I} \cdot \vec{A})_s + (\vec{I} \cdot \vec{A})_h + (\vec{I} \cdot \vec{A})_l = S_\phi \delta V \quad (7)$$

پس از محاسبه مقادیر شارهای جابه‌جایی و پخش و همچنین عبارت چشمه برای هر حجم کنترل، می‌توان معادله بالا را برای گره مرکزی  $P$  به شکل استاندارد زیر خلاصه کرد

$$a_p \phi_p = \sum a_{NB} \phi_{NB} + S_u \quad (8)$$

$$a_p = \sum a_{NB} - S_p \quad (9)$$

طبق شکل (۱) زیرنویس  $NB$  دلالت بر گره‌های مجاور گره  $P$  دارد.

### ۴- محاسبه شار جابه‌جایی جرم و متغیر وابسته $\phi$

طبق شکل (۲) اگر در محاسبه سرعت بر روی وجوه حجم کنترل از میانبایی خطی برحسب مقادیر آن در مرکز حجم کنترل استفاده شود، باعث ایجاد نوسانات غیرفیزیکی در جوابها

## ۵- محاسبه شار پخش

عبارت دوم سمت راست در معادله (۵) شار پخش است که به صورت زیر محاسبه شده است

$$(\text{diff})_e = (-\Gamma_\phi \nabla_\phi \cdot \bar{A})_e = \Gamma_\phi (-\bar{A} \cdot \nabla_\phi)_e \quad (10)$$

مقدار  $\bar{A} \cdot \nabla_\phi$  برای وجه شرقی در مختصات نامتعامد عمومی چنین است

$$(-\bar{A} \cdot \nabla_\phi)_e = -\left( \bar{A} \cdot \mathbf{g}^j \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right)_e = -\left( |A| \bar{n} \cdot \mathbf{g}_i \mathbf{g}^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right)_e \quad (11)$$

که در آن  $\mathbf{g}_i$  بردار پایه کوواریانت و  $\mathbf{g}^j$  بردار پایه کانترواریانت و  $\bar{n}$  تانسور متریک اقلیدسی است [۱۰].

## ۶- معادله اصلاح فشار

برای تبدیل معادله پیوستگی به معادله‌ای برای فشار، الگوریتم سیمپل سی [۱۱] روی شبکه جابه جا نشده اعمال شده است. استفاده از شبکه جابه جا نشده به خاطر پرهیز از محاسبات اضافی در پارامترهای هندسی و همچنین سهولت اعمال شرایط مرزی بوده است. برای شروع، شار جرم وجه شرقی  $m_e$  به دو قسمت قدیم به علاوه اصلاحی تفکیک شده است.

$$m_e = m_e^* + m_e' \quad (12)$$

$$m_e' = \rho \bar{A} \cdot (U_j)_e' \quad (13)$$

که در آن  $(U_j)_e'$  مقادیر مؤلفه‌های سرعت کوواریانت هستند. این مؤلفه‌ها در روش سیمپل سی به صورت زیر با میدان فشار مربوط می‌شوند.

$$U_j' = \frac{-\alpha}{1-\alpha} \frac{\delta V}{a_p} \frac{\partial P'}{\partial x_j} \quad (14)$$

با جاگذاری (۱۴) در (۱۳)

$$m_e' = \rho \bar{A} \cdot \left( \frac{-\alpha}{1-\alpha} \frac{\delta V}{a_p} \frac{\partial P'}{\partial x_j} \right)_e = -\rho \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\delta V}{a_p} \bar{A} \cdot \nabla P'_e \quad (15)$$

که در آن  $\alpha$  ضریب زیر تخفیف است.

حال می‌توان معادله پیوستگی را به شکل معادله‌ای برای

اصلاح فشار تبدیل کرد. اگر از معادله پیوستگی روی حجم کنترل شکل (۱) انتگرال‌گیری شود و همچنین برای اختصار برای یک امتداد در نظر گرفته شود می‌توان نوشت

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w = 0 \quad (16)$$

با جاگذاری معادله (۱۵) و (۱۲) در معادله (۱۶) آن گاه

$$\left( \rho \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\delta V}{a_p} \bar{A} \cdot \nabla P' \right)_w - \left( \rho \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\delta V}{a_p} \bar{A} \cdot \nabla P' \right)_e + \dot{m}_e^* - \dot{m}_w^* = 0 \quad (17)$$

این معادله انفصال شده پیوستگی در یک بعد است که مجهول آن فشار اصلاحی ( $P'$ ) در روش سیمپل سی خواهد بود.

## ۷- روش حل عددی

برای اعمال روش حل عددی، حوزه فیزیکی پیچیده  $x_j$  در دستگاه مختصات منحنی الخط منطبق بر مرز، شبکه‌بندی می‌شود. این شبکه‌بندی با افزایش حوزه فیزیکی توسط ۵ یا ۶ وجهیهای کوچک و عموماً متعامد صورت می‌گیرد و در مرکز هر سلول این شبکه یک گره قرار می‌گیرد. از آنجا که مختصات کارتیزین هر کدام از این سلولها به راحتی قابل محاسبه است در گوشه هر یک از آنها یک دستگاه مختصات محلی متعامد تعریف می‌شود که بردارهای پایه آن، اضلاع آن گوشه هستند. در این صورت دیگر نیازی به دانستن رابطه ریاضی صریح بین محورهای مختصات کارتیزین و مختصات منحنی الخط منطبق بر مرز نیست. در عوض هر جا که به مشتق، نسبت به محورهای کارتیزین نیاز باشد با اعمال روش مشتق زنجیره‌ای و به کارگیری بردارهای پایه دستگاه مختصات محلی محاسبه می‌شوند.

پس از انفصال معادلات حاکم به روش حجم محدود برای حل آنها نیازمند روش خاصی می‌باشیم. روش به کار رفته در این پژوهش مبتنی بر حل ضمنی و تکراری معادلات منفصل شده است. ابتدا معادلات ممتم و سپس معادله فشار به این طریق حل می‌شوند. حل دستگاه معادلات نیز با کاربرد روش حل ماتریسی سه قطری صورت می‌گیرد. در پایان هر تکرار

معیار همگرایی ارزیابی می‌شود و معیار همگرایی نیز مجموع قدر مطلق تمام باقی‌مانده‌ها بخش بر جرم ورودی است که باید تا  $0.0001$  نزل کند.

## ۸- شرایط مرزی و اولیه

پس از بررسی‌های لازم پیرامون حوزه متاثر از حضور کره در جریان سیال، سرانجام منطقه لازم و کافی در اطراف کره، برای حل معادلات حاکم مطابق شکل (۳) انتخاب شد. تعداد گره‌های انتخاب شده  $(61 \times 61 \times 31)$  بوده و ضریب انبساط شبکه در نزدیک کره  $f=1.07$  است که در این صورت حداقل  $10$  گره در لایه مرزی نزدیک منطقه سکون وجود دارد. قابل ذکر است که حوزه تحدیدشده انتخابی باعث شده است که با تعداد گره کمتری (حدود یک چهارم مقدار در نظر گرفته شده توسط جانسون و پاتل) بتوان مسئله را تقریباً با همان دقت تحلیل کرد. زمان اجرای برنامه با یک رایانه پنتیوم  $233$  و  $32$  MB RAM در حدود شش ساعت خواهد بود که با توجه به تعداد  $115000$  گره موجود زمان بسیار مناسبی است. شرایط مرزی سرعت و فشار طبق شکل فوق‌الذکر عبارت‌اند از

الف - بر روی سطح کره  $(i=1)$  شرط عدم لغزش اعمال شده است.

ب - بر روی مرز خارجی  $(i=n_i)$  در ناحیه ورودی  $v=\omega=0$  و  $u=U_\infty$ .

ج - بر روی مرز خارجی  $(i=n_i)$  در ناحیه خروجی، گرادیانهای سرعت در امتداد خط جریان محلی صفر است.

د - برای مرزهای عددی  $\eta(j=1)$  و  $\eta(j=n_j)$  مشتق مرتبه اول و دوم صفر است و از برونیابی کمانی استفاده می‌شود.

ه - برای مرزهای عددی  $\zeta(k=1)$  و  $\zeta(k=n_k)$  به علت پریودیک بودن از برونیابی و میانگین‌گیری استفاده می‌شود.

و - برای مرزهای فشار همه جا برونیابی انجام می‌شود. شرایط اولیه برای مؤلفه سرعت، در امتداد جریان، مقدار  $U_\infty$  است و برای دو امتداد دیگر صفر در نظر گرفته شده است.

## ۹- ارائه نتایج و بحث بر روی آنها

### الف) جریان حول کره در رینولدز $20-210$ (رژیم پایدار)

تحلیل میدان جریان بر روی کره در این رژیم جریانی به عنوان آزمون صحت روندها و الگوریتمهای حل انتخاب شده است. پایداری زمانی این رژیم در  $\Delta t$  های مختلف بررسی و تایید شده است. عدم وابستگی نتایج به ابعاد شبکه با چهار شبکه مختلف بررسی شده است. نتایج این بررسیها برای رینولدز  $100$  در جدول (۱) نشان داده شده است.

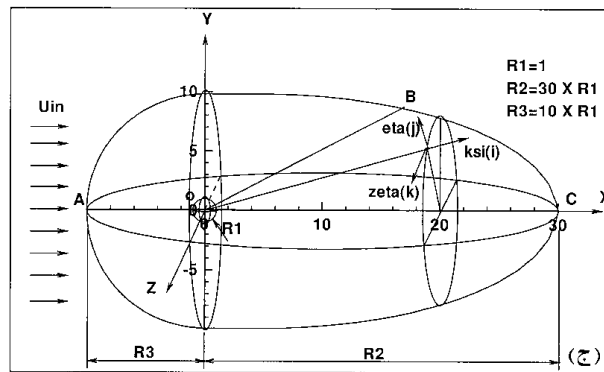
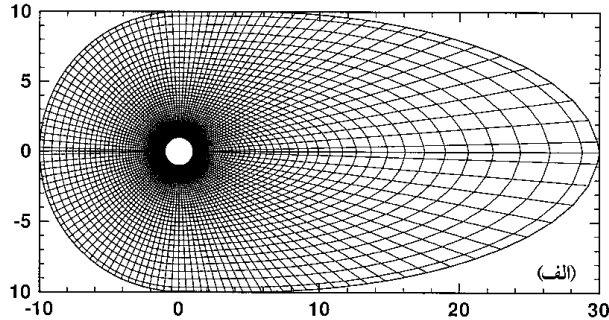
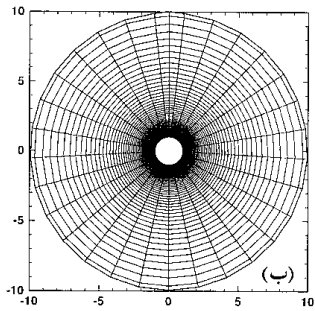
همان طور که مشاهده می‌شود با تغییر ابعاد شبکه، مشخصات میدان جریان فقط تغییرات ناچیزی را نشان می‌دهد و روند این تغییرات مبین این است که با افزایش تعداد گره‌ها (در محدوده حافظه رایانه) تغییرات مشخصات جریان رفته رفته کاهش یافته است. همچنین عدم وابستگی نتایج به هندسه و توزیع گره‌ها از نقطه نظر قابلیت اطمینان به برنامه، مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که مشخصات این رژیم جریانی قبلاً توسط دیگران به دست آمده و موجود است. لذا بهترین راه آزمون صحت برنامه، مقایسه مشخصات جریان در این رژیم است که به شرح ذیل ارائه می‌شود.

جدایش جریان از روی کره در رینولدز  $20$  شروع می‌شود و یک گردابه چنبره مانند کوچک در پشت کره تشکیل می‌شود. در اعداد رینولدز بین  $20$  تا تقریباً  $210$  جریان پایدار و متقارن است و گردابه‌ها دارای تشابه هندسی هستند. محاسبات انجام شده برای اعداد رینولدز نمونه یعنی  $50, 100, 150$  و  $200$  به خوبی با نتایج مگاروی و بی‌شاب [۲] و با نتایج عددی ناتاراجان و اکیوس [۴] و تومبولدز [۳] مطابقت دارد.

در شکل (۴) بردارهای سرعت و چند خط جریان نمونه در صفحه  $(x,z)$  برای رینولدزهای نمونه نمایش داده شده است. در این اشکال جهت جریان از چپ به راست است. در این شکلها دیده می‌شود که خطوط جریان از سطح کره در زاویه  $\theta_s$  جدا شده اند ( $\theta_s$ ، زاویه جدایش، سنجیده شده از نقطه سکون جلو است) و مجدداً در نقطه  $X_{wake}$  در امتداد محور جریان به هم رسیده‌اند و در نتیجه یک حباب کامل را تشکیل داده‌اند مرکز

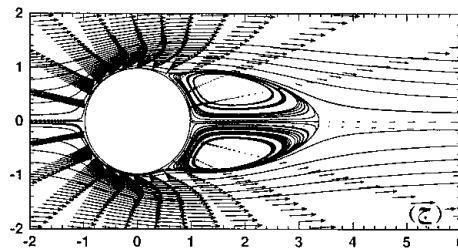
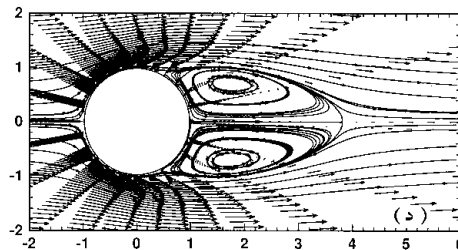
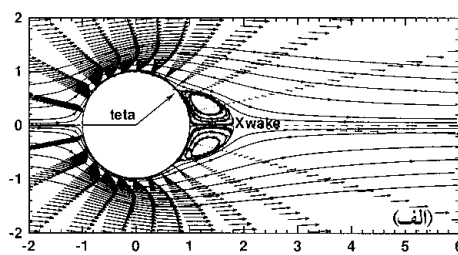
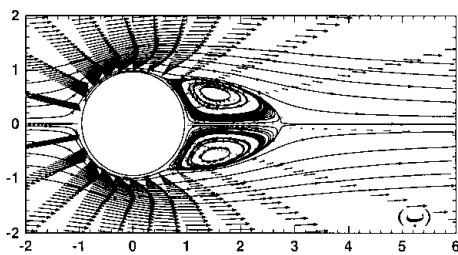
جدول ۱

ابعاد	۳۱×۳۱×۳۱	۴۱×۴۱×۴۱	۵۱×۵۱×۴۱	۳۱×۶۱×۶۱
ضریب دراگ (CD)	۱/۰۷۴۹۰۲	۱/۰۹۱۴۴۴	۱/۰۹۲۱۱	۱/۰۹۲۴۲
نسبت طول گردابه به قطر کره	۰/۸۰۴۳	۰/۸۷۰۶۲	۰/۹۳۱۶	۰/۹۳۳۵
زاویه جدایش برحسب درجه	۱۲۶/۰	۱۲۶/۰	۱۲۶/۰	۱۲۶/۰



شکل ۳- حوزه شبکه بندی شده حول کره: (الف) تصویر در صفحه (X-Y)، (ب) تصویر در صفحه (Y-Z)،

(ج) شکل شماتیک و دستگاههای مختصات



شکل ۴- بردارهای سرعت و خطوط جریان متقارن عبوری از روی کره: (الف)  $Re=50$ ، (ب)  $Re=100$ ، (ج)  $Re=150$  و

(د)  $Re=200$

گریز از مرکز به هم می‌خورد و لذا در مرکز گردابه افست فشار نسبی پدید خواهد آمد و دایره‌ها بیانیگر این مطلب هستند. تکامل تدریجی میدان چرخش نیز هنگام افزایش عدد رینولدز در شکل (۹) مشاهده می‌شود و نازک شدن لایه چرخش بر روی سطح کره و افزایش دامنه چرخش در پایین دست جریان با افزایش عدد رینولدز کاملاً مشهود است.

### ب) جریان حول کره در رینولدزهای ۲۱۰ تا ۲۷۰

در رینولدز ۲۱۱ تحلیل عددی میدان جریان، دیگر تقارن محوری را نمایش نمی‌دهد. اما جریان هنوز پایدار باقی می‌ماند. پایداری زمانی این رژیم در  $\Delta t$  های مختلف بررسی و تأیید شده است و تحلیل عددی حاضر پایداری این رژیم را تأیید می‌کند. با وجود عدم تقارن محوری می‌توان دید که، جریان هنوز دارای یک صفحه تقارن است. محل و موقعیت صفحه تقارن به طور طبیعی و آزادانه شکل می‌گیرد و تغییر محل این صفحه، توسط شیب حل عددی ناشی از جهت جارو شدن در Solver صورت می‌پذیرد و اساساً به علت حضور غیرفیزیکی مرزهای عددی در جهت دوران یا تقارن هندسی، صفحه جریان متقارن بر صفحه  $\xi = \xi_{\max}$  یا همان صفحه  $(x, y)$  قرار می‌گیرد مثلاً در مقاله حاضر در زاویه  $348^\circ$  درجه واقع شده است. به همین علت، اطلاعات میدان جریان محاسبه شده در صفحه  $348^\circ$  درجه به اندازه  $12^\circ$  درجه چرخیده و در صفحه  $(x, y)$  ارائه شده‌اند.

آغاز از بین رفتن تقارن محوری در شکل (۱۰) نشان داده شده است که در آن ضریب برا (نیروی جانبی)  $C_L$  در برابر اعداد رینولدز رسم شده است. در صفحه  $(x, y)$  که میدان جریان نسبت به آن متقارن است نیروی جانبی به دلخواه در امتداد محور  $y$  قرار داده می‌شود و اگر با  $F_y$  نمایش یابد آن گاه ضریب برا (نیروی جانبی) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left( \frac{\pi D^2}{4} \right)} \quad (18)$$

حلقه‌های هم مرکز گردابه با  $(X_v, Y_v)$  مشخص شده است که در آن سرعت صفر است.  $X_v$  و  $Y_v$  از مبدأ مختصات کارترین نصب شده در مرکز کره سنجیده شده است.

برای تمام اعداد رینولدز بین ۲۰ تا ۲۱۰ ساختمان جریان از لحاظ هندسی متشابه‌اند و فقط در محل جدایش  $\theta_s$  و طول گردابه  $X_{wake}$  با یکدیگر متفاوت‌اند.

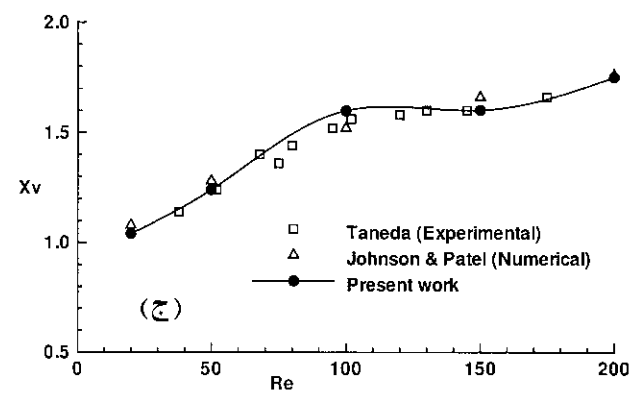
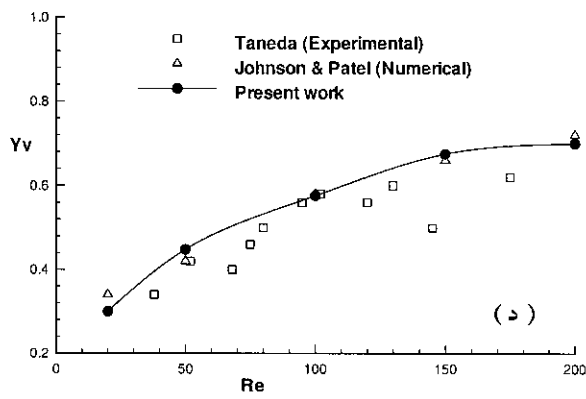
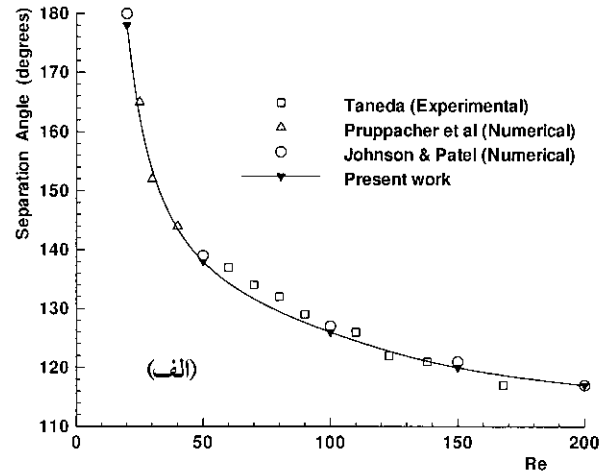
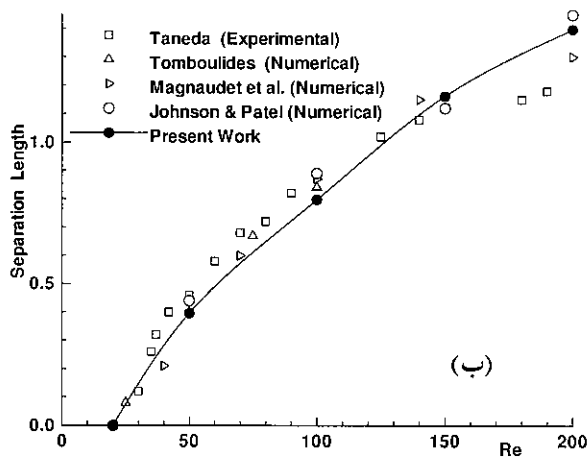
اگر نتایج عددی پروپاچر، لی کلایر و هامیلیک [۱۲] و تومبولدز [۳] و مگ نادت و ریورو و فایبر [۱۳] و نتایج تجربی تاندا [۱] برای مقایسه انتخاب شوند، در شکل (۵) می‌توان به خوبی انطباق بین نتایج را در مقادیر  $\theta_s$  و  $X_{wake}$  و  $(X_v, Y_v)$  ملاحظه کرد تنها انحراف مهم در زاویه جدایش تاندا است که در رینولدزهای بالاتر، تا ۲۰٪ خطا دارد. مقایسه بیشتر با نتایج تجربی می‌تواند توسط اندازه‌گیری ضریب پسا انجام شود. اگر

$$C_D = F_x / \left[ \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left( \frac{1}{4} \pi D^2 \right) \right]$$

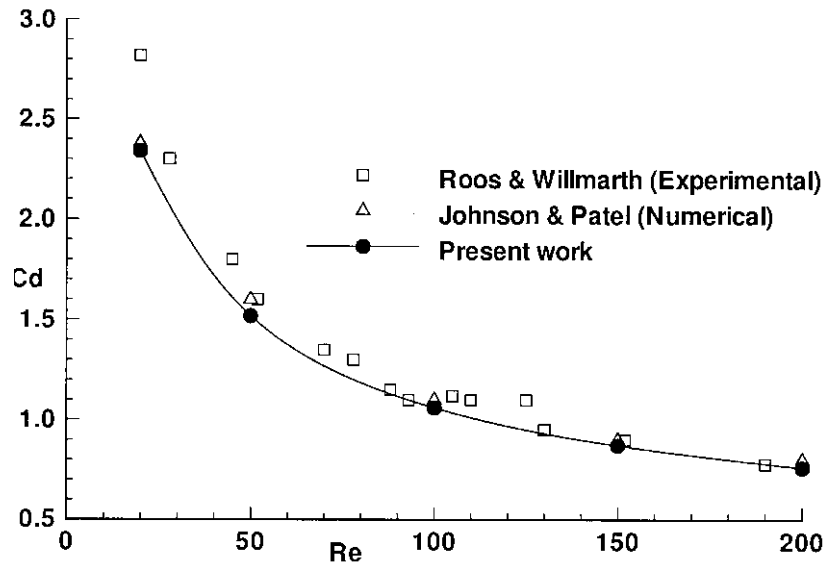
باشد که در آن  $F_x$  نیروی هم جهت با جریان است می‌توان در شکل (۶) نتایج حاصله را با نتایج روس و ویل ماس [۱۴] مقایسه کرد و انطباق خوب آنها را مشاهده کرد. در شکل (۷) می‌توان مشخصه‌های جریان در صفحه  $(y, z)$  را مشاهده کرد که در این محدوده از رینولدزها متشابه هستند. در شکل (۷-ج) و (۷-د) تقارن کامل میدان سرعت و فشار مشهود است.

در شکل (۸) کانتورهای فشار در صفحه  $(x, z)$  نمایش داده شده‌اند. در رابطه با این شکل قابل توجه است که تا کمتر از رینولدز ۲۰۰ هیچ منطقه فشار کمینه‌ای در صفحه تقارن بالا وجود ندارد. اما در شکل (د)، برای رینولدز ۲۰۰ می‌توان دید که دایره‌های بسته‌ای در منطقه گردابه به وجود آمده‌اند که بیانیگر فشار کمینه هستند. علت وجود این فشار کمینه به عدم توازن دو نیرو بر می‌گردد. در اعداد رینولدز کمتر از ۲۰۰ نیروی گریز از مرکز ناشی از چرخش ذرات سیال در گردابه باید توسط نیروی لزجت به عنوان نیروی مقابله کننده با گرادیان فشار شعاعی موازنه شده باشد، لذا منطقه فشار کمینه وجود ندارد اما در اعداد رینولدز بالاتر از ۲۰۰ این توازن به نفع نیروی

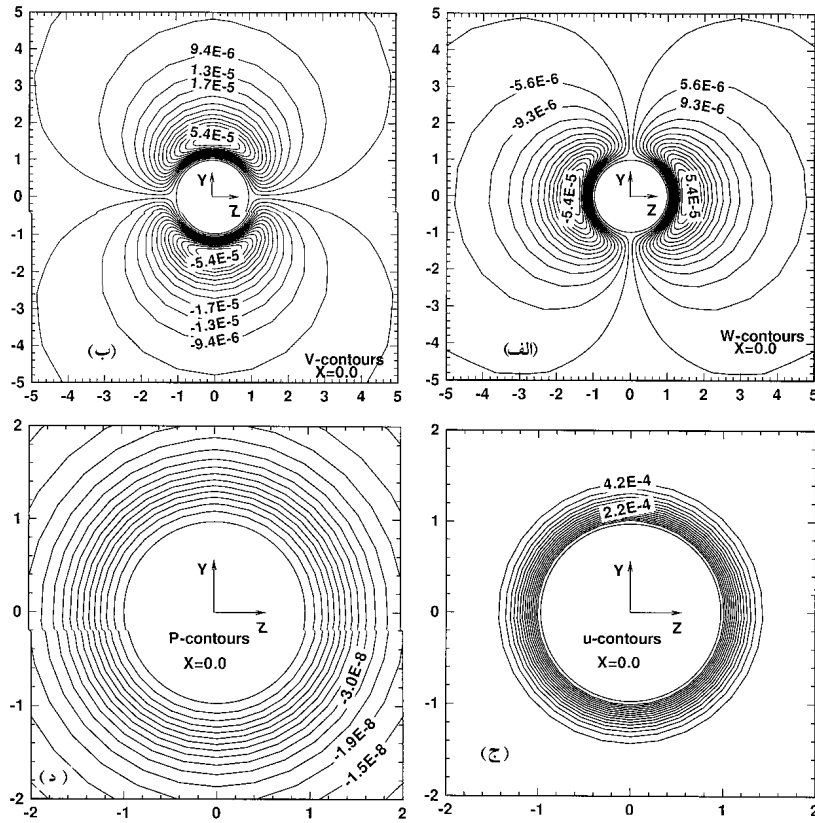




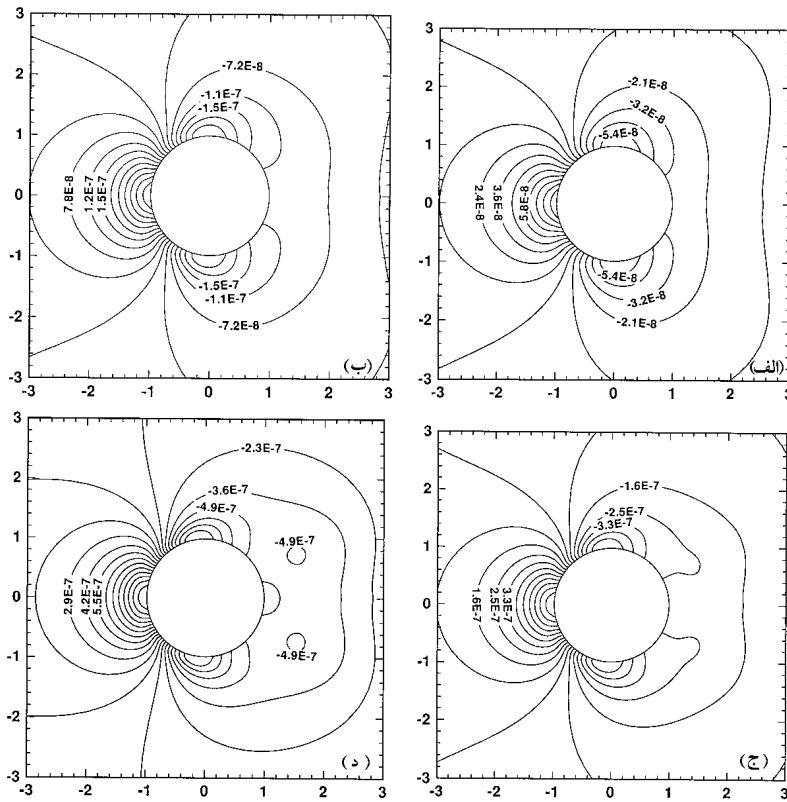
شکل ۵- مشخصات هندسه جریان: (الف) زاویه جدایش  $\theta_s$ ، (ب) طول گردابه  $X_{wake}$ ، (ج) موقعیت  $X_v$  گردابه، (د) موقعیت  $Y_v$  گردابه



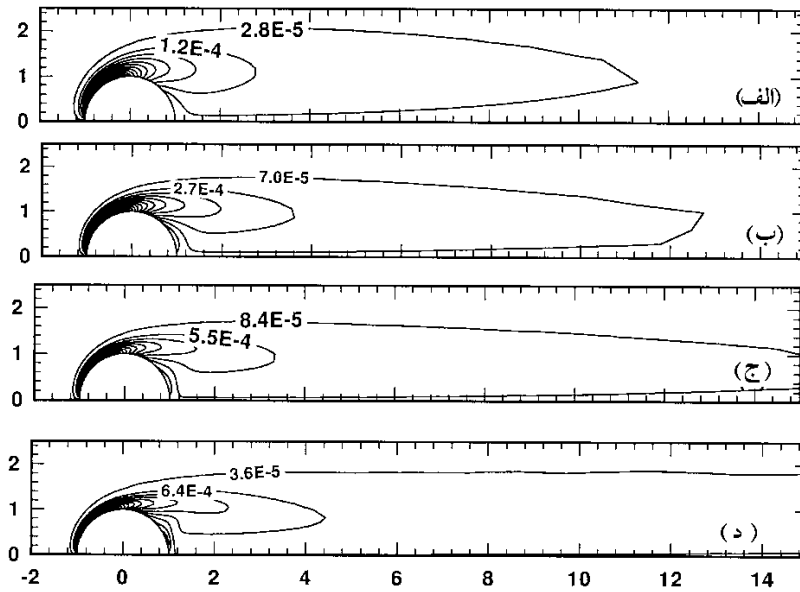
شکل ۶- مقایسه ضریب پسا  $C_D$



شکل ۷- کانتورهای مشابه در صفحه (Y-Z) برای رینولدزهای ۲۰-۲۱۰: (الف) کانتور W، (ب) کانتور v، (ج) کانتور u و (د) کانتور p



شکل ۸- کانتورهای فشار در رژیم متقارن: (الف) Re=50، (ب) Re=100، (ج) Re=150 و (د) Re=200

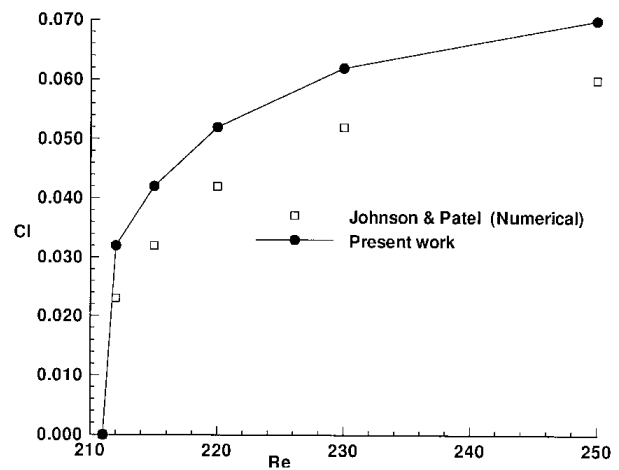


شکل ۹- کانتورهای چرخش در رژیم متقارن: (الف)  $Re=50$ ، (ب)  $Re=100$ ، (ج)  $Re=150$  و (د)  $Re=200$

گزارش می‌شود چرا که انحراف از حالت تقارن کاملاً مشهود است. وقتی رینولدز از ۲۷۰ بیشتر می‌شود مشاهده شده است که جریان ناپایدار است.

در شکل (۱۱) حضور یک صفحه مسبب تقارن در جریان دیده می‌شود. در این شکل خطوط جریان متشکل از بردارهای سرعت تصویر شده در یک صفحه به ترتیب در صفحات  $(x,z)$  و  $(x,y)$  نمایش داده شده‌اند. در شکل (۱۱-الف) واضح است که میدان جریان توسط صفحه  $(x,y)$  به دو قسمت متساوی تقسیم شده است لذا صفحه  $(x,y)$  ایجاد کننده تقارن است. لازم به ذکر است که در شکل (۱۱-الف) مؤلفه‌های سرعت خارج از صفحه نیز وجود دارند. بنابراین خطوط جریان در این صفحه خطوط سه‌بعدی واقعی نیستند اما در شکل (۱۱-ب) که صفحه  $(x,y)$  را نشان می‌دهد و میدان جریان نسبت به آن متقارن است، به جز در دو نقطه، هیچ مؤلفه سرعت خارج از صفحه‌ای وجود ندارد و مسیر حرکت ذرات در این حالت خطوط جریان واقعی نیستند.

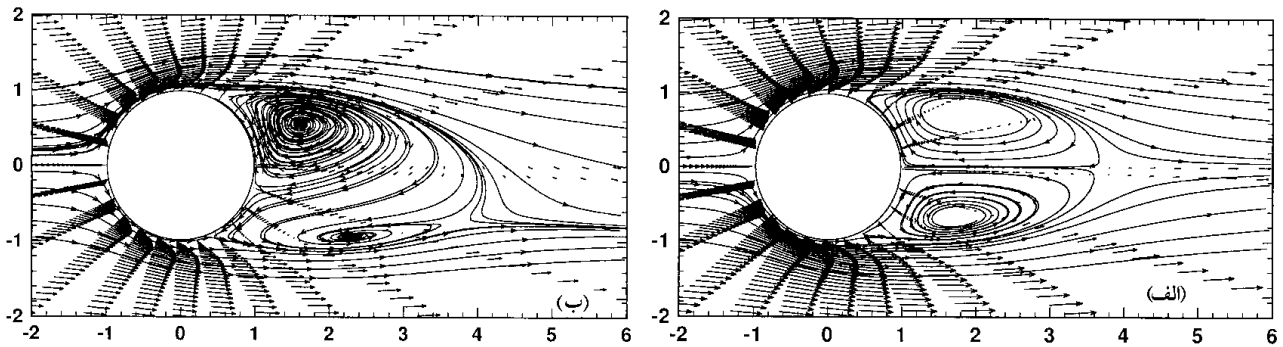
در شکل (۱۱-ب) دیده می‌شود که گردابه‌ها به یک طرف کشیده شده‌اند. همچنین اختلاف اندازه گردابه‌های بالا و پایین بیانگر ثابت نبودن این اندازه در جهت دوران  $\phi$  (جهت سوم



شکل ۱۰- ضریب نیروی جانبی  $C_L$

مقدار  $C_L$  برای جریان متقارن طبیعتاً صفر است اما برای رژیم حاضر صفر نخواهد بود به طور مثال در رینولدز ۲۱۱ مقدار آن تقریباً  $0.037217$  و در رینولدز ۲۵۰ برابر  $0.070775$  است. محدوده جریان نامتقارن پایدار به طور تجربی بین رینولدزهای ۲۱۰ تا ۲۷۰ گزارش شده است و نتایج مگاریوی و بی‌شاپ [۲] و ناکامورا [۱۵] و تومبولیدز [۳] مویید این موضوع است.

نتایج مربوط به تمام اعداد رینولدز در این رژیم ذاتاً مشابهت هندسی دارند و لذا در اینجا تنها نتایج رینولدز ۲۵۰



شکل ۱۱- خطوط جریان حاصل از بردارهای سرعت در  $Re=250$ : (الف) صفحه  $(x-z)$ ، (ب) صفحه  $(x-y)$

این اختلاف فشار بین دو کانون، باعث ایجاد گرادیان فشار روی مراکز گردابه‌های امتداد  $\phi$  می‌شود و لذا یک جریان در امتداد محور خمیده مراکز گردابه‌ها ایجاد می‌شود. حضور جریان یاد شده باعث بر هم خوردن تقارن محوری می‌شود این عمل در رینولدز تقریباً ۲۱۱ شروع می‌شود و یک افت فشار کلی در مرکز گردابه‌ها اتفاق می‌افتد.

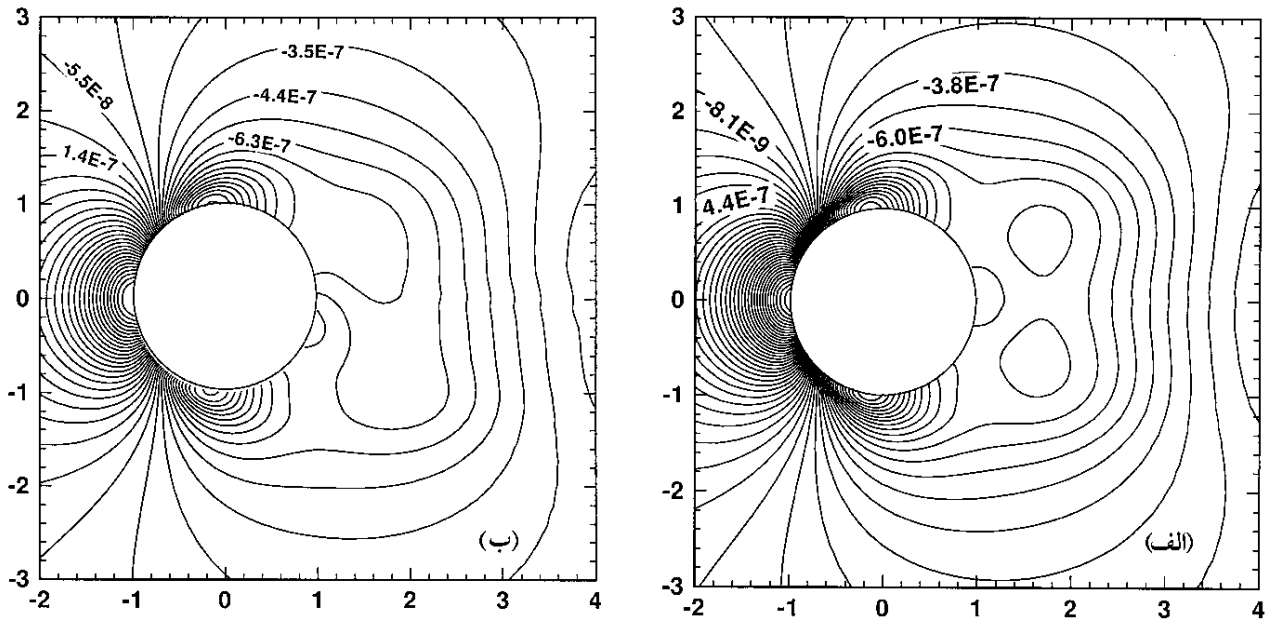
بنابراین واضح است که ناپایداری جریان متقارن محوری مربوط به تولید یک رینگ فشار ضعیف در مراکز گردابه‌ها به علت حضور شتاب شعاعی است. این رینگ فشار ضعیف بستر بسیار مناسبی است تا در صورت حضور اغتشاشاتی در جریان اصلی، موجب بروز یک گرادیان فشار در امتداد دوران  $\phi$  داخل همین رینگ شود و به عبارت دیگر رینگ فشار ضعیف زمینه را برای دخالت اثر اغتشاشات جریان فراهم می‌آورد و در نهایت موجب بر هم خوردن تقارن هندسی جریان می‌شود. سمت پرفشار گردابه، تشکیل ماریچ داخل رونده را می‌دهد و سمت کم فشار گردابه، یک ماریچ خارج رونده را هنگامی که سیال از داخل کانون خودش تخلیه می‌شود تشکیل می‌دهد.

برای مشاهده مسیر حرکت سه‌بعدی ذره، خط جریان سه بعدی یک ذره در شکل (۱۳) رسم شده است. از شکل (۱۳-ب) واضح است که سیالی که از بالادست جریان می‌آید وارد کانون چرخش تحتانی گردابه می‌شود و در جهت پادساعتگرد چرخیده و به شکل یک ماریچ درونی عمود بر صفحه  $(x,y)$  از آن صفحه خارج می‌شود درست مانند این است که بلعیده شده باشد. سپس از طریق یک مسیر ماریچ به

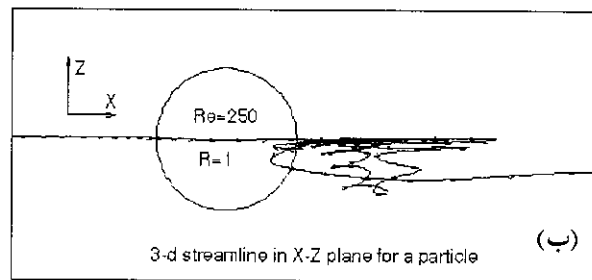
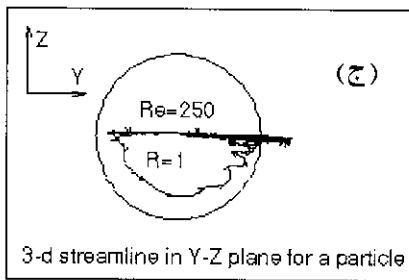
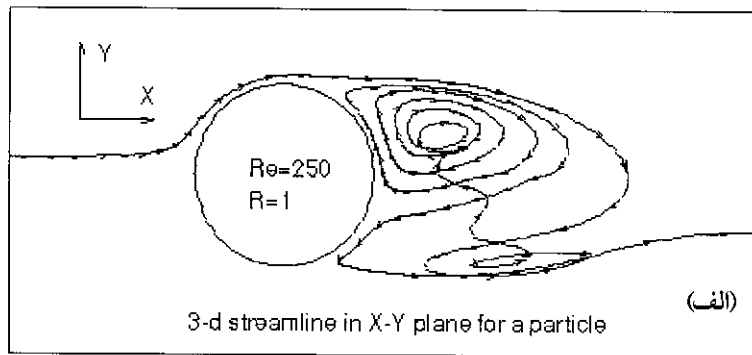
مختصات منحنی‌الخط کروی که حول امتداد جریان اصلی دوران می‌کند) است به علاوه گردابه‌ها یک حباب کامل را تشکیل نداده‌اند و برخلاف حالت رژیم متقارن، سیال در درون گردابه حبس نشده است بلکه در اینجا، کانون چرخش تحتانی کاملاً از جریان بالادست تغذیه می‌کند و کانون چرخش فوقانی ذرات سیال را از مرکز خود به سمت بیرون تخلیه می‌کند. البته پس از اینکه این ذرات سیال را حول کانون چرخش تحتانی، یک نیمه تابی داد آن گاه به پایین دست جریان تحویل می‌دهد.

لزوم برقراری اصل بقای جرم ایجاب می‌کند که سیال از کانون چرخش تحتانی خارج شده باشد. همچنین باید سیال به کانون چرخش فوقانی وارد شده باشد. لذا به علت برقراری اصل پیوستگی باید یک جریان از کانون تحتانی به سمت کانون فوقانی سرازیر شده باشد به طوری که سیال از یکی به دیگری مستقیماً منتقل شود. مسیر این انتقال در صفحه  $(x,y)$  نیست بلکه سیال از مراکز گردابه‌های موجود در امتداد  $\phi$  عبور کرده و با طی یک مسیر ماریچ خود را به کانون فوقانی می‌رساند.

در شکل (۱۲) کانتورهای فشار برای صفحات  $(x,z)$  و  $(x,y)$  نشان داده شده‌اند. میدان فشار در صفحه  $(x,z)$  کاملاً متقارن و شبیه کانتور فشار در رینولدز ۲۰۰ است. گرچه فشار کمینه موجود در مرکز گردابه کمتر از مقدار مربوط به رینولدز ۲۰۰ است. چون که شتاب جانب مرکز گردابه در رینولدز ۲۵۰ بیشتر از رینولدز ۲۰۰ است. کانتورهای فشار در صفحه  $(x,y)$  متقارن نیستند و فشار کمینه در کانون چرخش فوقانی کمتر از فشار کمینه در کانون چرخش تحتانی است. قابل توجه است که



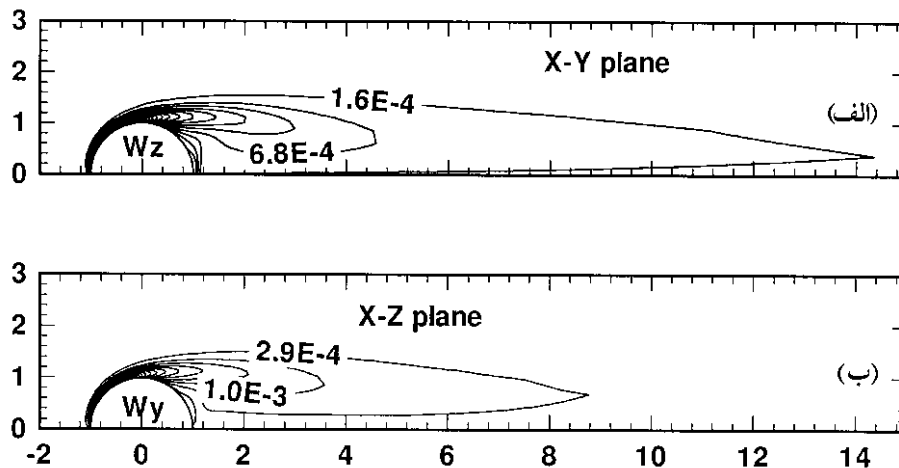
شکل ۱۲- کانتورهای فشار در  $Re=250$ : (الف) صفحه  $(x-z)$ ، (ب) صفحه  $(x-y)$



شکل ۱۳- مسیر حرکت سه بعدی در یک ذره در رینولدز ۲۵۰: (الف) در صفحه  $(x-y)$ ، (ب) در صفحه  $(x-z)$ ، (ج) در صفحه  $(y-z)$

کانون فوقانی سرانجام به پایین دست جریان می پیوندد. درشکلهای (۱۳-ب) و (۱۳-ج) حرکت بیرون از صفحه و ساختمان جریان مشاهده می شود. دیده می شود که جریان چگونه از کانون تحتانی به کانون فوقانی منتقل می شود

کانون چرخش فوقانی تزریق می شود با این تفاوت که در حین تزریق جهت چرخش آن عوض شده و در جهت حرکت عقربه های ساعت چرخیده و به شکل مارپیچ بیرونی مجدداً وارد صفحه  $(x,y)$  می شود. آن گاه پس از چرخش در



شکل ۱۴- کانتورهای چرخش در  $Re=250$ : (الف)  $w_z$  در صفحه  $(x-y)$ ، (ب)  $w_y$  در صفحه  $(x-z)$

۲- استفاده از مؤلفه‌های سرعت کارترین به جای مؤلفه‌های سرعت کوواریانت یا کانترآواریانت و همچنین به کارگیری روش حجم محدود با آرایش مرتب شده متغیرها موجب کاهش شدید حجم محاسبات لازم به ازای هر گره شده است، به طوری که تحلیل مسائلی نظیر جریان حول کره که نیازمند گره‌های زیاد است میسر شده است.

۳- حوزه تحدیدشده انتخابی باعث شده است که با تعداد گره کمتری (حدود یک چهارم مقدار در نظر گرفته شده توسط جانسون و پاتل) بتوان مسئله را تقریباً با همان دقت تحلیل کرد.

۴- نتایج به دست آمده از جریان خارجی حول یک کره در رینولدزهای پایین (۲۱۰-۲۷۰) حاکی از این است که در رژیم مورد بررسی، اگرچه جریان پایدار است اما عدم تقارن پدید آمده در صفحات متعامد به خوبی قابل مشاهده است و مرحله از بین رفتن تقارن هندسی خطوط جریان در رینولدز ۲۱۱ شروع می‌شود.

همچنین از این شکل آشکار می‌شود که سیال اطراف گردابه چگونه به سمت پایین دست جریان از طریق دو دنباله در طرفین صفحه ایجادکننده تقارن جاری می‌شود. در شکل (۱۴) کانتورهای چرخش  $w_z$  در صفحه  $(x,y)$  و  $w_y$  در صفحه  $(x,z)$  نشان داده شده‌اند و می‌توان نفوذ چرخش در صفحات متعامد که در این رینولدز برابر نیستند را مشاهده کرد [۱۶].

## ۱۰- نتیجه‌گیری

با توجه به بررسیهای انجام شده در این پژوهش می‌توان نتیجه گرفت که

- ۱- مختصات منطبق بر مرز و روش به کار رفته در این برنامه باعث عمومی شدن برنامه شده است. به طوری که می‌توان تقریباً هر جسمی با هر شکلی را (تا جایی که حافظه رایانه اجازه می‌دهد) تحلیل کرد.

## واژه نامه

- |                  |                     |                               |
|------------------|---------------------|-------------------------------|
| 1. collocated    | 3. wake             | 5. pseudo-time stepping       |
| 2. instabilities | 4. spectral element | 6. covariant or contravariant |

1. Taneda, S., "Experimental Investigation of the Wake Behind a Sphere at Low Reynolds Numbers," *J. Phys. Sco. Japan*, No. 11, pp. 1104-1108, 1956.
  2. Magarvey, R. H., and Bishop, R. L., "Transition Ranges for Three-Dimensional Wakes," *Can. J. Phys.*, No. 39, pp. 1418-1422, 1961.
  3. Tomboulides, A. G., "Direct and Large-Eddy Simulation of Wake Flows: Flow Past a Sphere," Ph.D. Thesis, Princeton University, 1993.
  4. Natarajan, R., and Acrivos, A., "The Instability of the Steady Flow Past Spheres and Disks," *J. Fluid Mech.*, Vol. 254, pp. 233-344, 1993.
  5. Johnson, T. A., and Patel, V. C., "Flow Past a Sphere Up to a Reynolds Number of 300," *J. Fluid Mech.*, Vol. 378, pp. 19-70, 1999.
  6. Imai, W., Rubin, M. D., and Kremle, E., *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1982.
  7. Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw Hill, Washington DC, 1980.
  8. Rhie, C. M., and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA J.*, Vol. 2, pp. 1527-1532, 1983.
  9. Van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. ii. Monotonocity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme," *J. Comp. Phys.*, Vol. 14, pp. 361-370, 1974.
  10. Farhanieh, B., "Introduction to Tensor Calculus and General Coordinate System," Publ. PB-91/13-SE, Dept. of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1991.
  11. Van Doormal, J. P., and Raithby, G. D., Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147-163, 1984.
  12. Pruppacher, H. R., Le clair, B. P., and Hamiliec, A. E., "Some Relations Between Drag and Flow Pattern of Viscous Flow Past a Sphere and a Cylinder at Low and Intermediate Reynolds Numbers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 44, No. 781, 1970.
  13. Magnaudet, J., Rivero, M., and Fabre, J., "Accelerated Flows Past a Rigid Sphere or a Spherical Bubble. Part 1. Steady Straining Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 284, pp. 97-135, 1995.
  14. Roos, F. W., and Willmarth, W. W., "Some Experimental Results on Sphere and Disk Drag," *AIAA J.*, pp. 285-291, 1971.
  15. Nakamura, I., "Steady Wake Behind a Sphere," *Phys. Fluids*, Vol. 19, pp. 5-8, 1976.
۱۶. میربزرگی، س.ع.، "تحلیل عددی جریانهای سه بعدی داخلی و خارجی به روش مختصات منطبق بر مرز،" پایان نامه کارشناسی ارشد گروه مهندسی مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۸.