مدل موجودی (Q,r) با تقاضای احتمالی با احتساب دقیق تعداد سیکلهای موجودی

مسعود ربانی*
گروه مهندسی صنایع، دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

(دریافت مقاله: ۷۹/۸/۲۸ – دریافت نسخه نهایی: ۸۱/۲/۱۰)

چکیده – در اکثر مدلهای کنترل موجودی در حالت احتمالی، همچون مدلهای مرور دائم[1] و دوره‌ای[2] فرض می‌شود که مدت کمبود موجودی در یک سیکل، کاملاً کوچک است. لذا آن را حذف کرده و متوسط تعداد سیکلها در یک سال را با کمک رابطهٔ D/Q که D متوسط تقاضای سالانه و Q مقدار سفارش است، تخمین می‌زنند. این فرض، مسئله را ساده می‌کند. ولی برای وقتی که هزینه‌های فروش از دست رفته[3] و پس افت[4] کوچک باشند، واقع بینانه نیست. در این مقاله به جای فرض مزبور، مدت کمبود موجودی در محاسبه طول سیکل موجودی منظور می‌شود و تأثیر این موضوع در یک سیستم موجودی مرور دائم بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی : کنترل موجودی، تقاضای احتمالی، مرور دائم، سیکل موجودی

(Q,r) Stochastic Demand Inventory Model With Exact Number of Cycles

M. Rabbani
Faculty of Engineering, University of Tehran

Abstract: ***In most stochastic inventory models, such as continuous review models and periodic review models, it has been assumed that the stockout period during a cycle is small enough to be neglected so that the average number of cycles per year can be approximated as D/Q, where D is the average annual demand and Q is the order quantity. This assumption makes the problem more tactable, but it should not be adopted when the backorder and lost sales penalty costs are relatively small. In this paper, considering a continuous review inventory model, we relax the above assumption and we explicitly take into account the stockout period when computing the expected cycle length. Further, we consider the effect of using exact number of cycles rather than using approximate number of cycles in a continuous review inventory model.***

Keywords: *Inventory control, Stochastic demand, Continuous review, Inventory cycle*

---

* – استادیار

۱- مقدمه

در مدلهای سیستم موجودی مرور دائم، سطح موجودی هر یک از اقلام مرتباً کنترل می‌شود. این سیستم برای کنترل موجودی اقلام مهم (اقلام کلاس A) به کار می‌رود. مدل (Q,r) در مجموعه مدلهای سیستم موجودی مرور دائم، به عنوان یک مدل اساسی محسوب می‌شود. در این مدل چنانچه موقعیت موجودی[۵] به مقدار r برسد، مقداری به اندازۀ Q سفارش داده می‌شود [۱و۲]. در صورت کسری موجودی، دو حالت در اکثر مدلها مورد توجه قرار می‌گیرند. در حالت اول فرض می‌شود که تمام تقاضاها در مدت فقدان موجودی، منتظر می‌مانند و به محض دریافت موجودی به تقاضاهای مزبور پاسخ داده می‌شود (پس‌افت). در حالت دوم تقاضاها در مدت فقدان موجودی منتظر نمی‌مانند (فروش از دست رفته). در مدلهای واقع بینانه‌تر موجودی، کسری مانند $\beta(0\leq\beta\leq1)$ از تقاضا را به صورت پس افت و کسر دیگر $(1\text{-}\beta)$ از تقاضا را به صورت فروش از دست رفته منظور می‌کنند. مدلهای موجودی که ترکیبی از پس افت و فروش از دست رفته را در نظر گرفته‌اند، توسط برخی محققان بررسی شده‌اند [۳-۵]. همچنین مونتگمری و همکاران روشی را در حالت قطعی برای مسئلۀ مزبور پیشنهاد کرده‌اند [۶]. از سوی دیگر مون و گالیگو ترکیب دو حالت کمبود موجودی را در قبال توابع توزیع احتمال مختلف ارزیابی کرده‌اند [۷]. توجه به هر دو حالت پس‌افت و فروش از دست رفته، فرم واقع‌بینانه‌ای را برای مدلهای کنترل موجودی ایجاد می‌کند. یکی از مشخصه‌های کلیدی در مدلهای کنترل موجودی فاصله زمانی مابین اعمال سفارش و دریافت سفار (مدت تحویل[۶]) است، زیرا طی مدت مزبور سیستم احتمالاً با کسری موجودی مواجه خواهد شد. در مدلهای سیستم موجودی مرور دائم، نظیر مدل (Q,r) در محاسبۀ نقطۀ سفارش (r)، مقدار سفارش و موجوی اطمینان[۷] به گونه‌ای عمل می‌شود که سطح خدمت مطلوب سیستم رعایت شود و خط مواجهه با کمبود موجودی با این دیدگاه محاسبه می‌شود. در تمامی مدلهای سیستم موجودی مرور دائم، فاصلۀ زمانی که سیستم با کمبود مواجه می‌شود کاملاً کوچک فرض شده و در محاسبات منظور نمی‌شود. با توجه به حوزۀ به کارگیری مدلهای این سیستم (اقلام کلاس A) محاسبۀ فاصله زمانی فقدان موجودی در یک سیکل موجودی می‌تواند از اهمیت خاصی برای مدیریت موجودی برخوردار باشد. در مقالۀ حاضر علاوه بر در نظر گرفتن هر دو حالت کمبود پس‌افت و روش از دست رفته در مدل (Q,r)، مدت فقدان موجودی در سیکل موجودی نیز در محاسبات مدل مزبور در نظر گرفته می‌شود. همچنین اختلاف بین روشهای رایج و مقاله تبیین شده است.

۲- بررسی مدل موجودی (Q,r) با احتساب دقیق سیکل موجودی

چنانچه تقاضا در مدت تحویل با یک تابع توزیع احتمال پیوسته و با میانگین μ تعریف شود، امید ریاضی کمبود در انتهای یک سیکل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\eta(x)=\int_{r}^{\infty}(x-r)f(x)dx \qquad (۱)$$

مقدار هزینه در مدل (Q,r) با در نظر گرفتن هر دو حالت پس افت و فروش از دست رفته و با فرض حذف مدت کمبود در سیکلهای موجودی و بر مبنای مقاله هدلی-ویتین [۸] به صورت زیر ارائه می‌شود. چنانچه مقادیر $\bar{s}$ و $\bar{S}$ به ترتیب حداقل و حداکثر موجودی مورد انتظار در یک سیکل باشند می‌توان نوشت:

$$\bar{s}=r-\left[\mu-(1-\beta)\eta(r)\right] \qquad (۲)$$

$$\bar{S}=Q+\bar{s}=Q+r-\mu+(1-\beta)\eta(r) \qquad (۳)$$

$$\text{متوسط موجودی}=\frac{Q}{2}+r-\mu+(1-\beta)\eta(r) \qquad (٤)$$

لذا هزینۀ کل سالیانه به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$C_A(Q,r)=\frac{A\cdot D}{Q}+h\left(\frac{Q}{2}+r-\mu+(1-\beta)\eta(r)\right)+\frac{\left[\Pi+\Pi\cdot(1-\beta)\right]D}{Q}\eta(r) \qquad (۵)$$

و یا

$$C_A(Q,r)=\frac{A\cdot D}{Q}+h\left(\frac{Q}{2}+r-\mu\right)+\left[h(1-\beta)+\right.$$

$$\frac{[\Pi+\Pi_{\circ}(1-\beta)]D}{Q}\Bigg]\eta(r) \tag{٦}$$

اگر $\beta=1$ باشد، فقط حالت پس‌افت و اگر $\beta=0$ باشد، فقط حالت فروش از دست رفته را خواهیم داشت. در این مدل موقعیت موجودی دائماً کنترل می‌شود و سیاست مدل مبتنی بر سفارش Q واحد در هنگامی است که موقعیت موجودی (موجودی در دست به علاوه سفارش در راه منهای مقدار کمبود پس‌افت) کمتر از نقطهٔ سفارش r باشد.

با مشتق‌گیری از معادلهٔ (٦) نسبت به Q و r معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$Q=\sqrt{\frac{2D\{A+[\Pi+\Pi_{\circ}(1-\beta)]\eta(r)\}}{h}} \tag{٧}$$

$$1-F(r)=\frac{hQ}{hQ(1-\beta)+D[\Pi+\Pi_{\circ}(1-\beta)]} \tag{٨}$$

کاملاً مشخص است در صورت محاسبه Q و r (به صورت توأم) از معادلات (٧) و (٨)، شکلی محدب برای $C_A(Q,r)$ مشاهده می‌شود. در یک مدل (Q,r) که هر دو وضعیت پس‌افت و فروش از دست رفته را در نظر می‌گیرد، مفروضات به شرح زیر وجود دارد:

١- هزینهٔ خرید یک واحد، ثابت و مستقل از مقدار سفارش است.

٢- هزینهٔ کمبود وابسته به زمان نیست.

٣- نقطهٔ سفارش (r)، وابسته به موقعیت موجودی، بزرگ‌تر یا کوچکتر از متوسط مقدار تقاضا در مدت تحویل است.

٤- مدت فقدان موجودی در یک سیکل به قدری کوچک است که می‌توان آن را حذف و متوسط تعداد سیکلها در یکسال به صورت D/Q محاسبه می‌شود.

٥- در طول مدت فقدان موجودی، به اندازه کسر β از تقاضا، پس‌افت و کسر دیگر (1-β) از آن به صورت فروش از دست رفته خواهد بود.

مفروضات فوق را در فعالیتهای تحقیقاتی ذکر شده و همچنین در مقالهٔ هدلی و ویتن [٨] می‌توان مشاهده کرد. چنانچه فرض (٤) کنار گذاشته شود، می‌بایستی تابع هزینه متمایزی از (٦) تعریف کرد. مقدار مورد انتظار پس‌افت در هر سیکل $\beta\eta(r)$ و مقدار مورد انتظار تقاضای از دست رفته در هر سیکل $(1-\beta)\eta(r)$ است. چون مقدار کل تقاضای مورد انتظار در هر سیکل $Q+(1-\beta)\eta(r)$ است، لذا مدت مورد انتظار یک سیکل عبارت است از:

$$T=\frac{Q+(1-\beta)\eta(r)}{D} \tag{٩}$$

در اکثر مدلهای احتمالی فرض می‌شود که متوسط تعداد سیکلها در هر سال D/Q است. در حالی که تعداد دقیق سیکلهای موجودی در هر سال $D/Q+(1-\beta)\eta(r)$ است. در محاسبهٔ هزینهٔ نگهداری موجودی در رابطهٔ (٦)، مقادیر موجودی در ابتدا و انتهای سیکل مورد توجه قرار می‌گیرند. یعنی $Q+r-\mu+(1-\beta)\eta(r)$ و $(r-\mu)+(1-\beta)\eta(r)$ ولی چنانچه مدت فقدان موجودی در یک سیکل ناچیز فرض نشود، لازم است هزینهٔ نگهداری مجدداً محاسبه شود. کیم و پارک [٥] هزینهٔ نگهداری موجودی را با در نظر گرفتن دو حالت زیر محاسبه کردند:

١- موجودی، تمام تقاضا را در مدت تحویل تأمین کند.

٢- موجودی قبل از رسیدن سفارش جدید به اتمام برسد.

در این مقاله با توجه به تعداد دقیق سیکلها در یک سال و با استفاده از محاسبهٔ هزینهٔ نگهداری موجودی به روش کیم و پارک [٥] می‌توان هزینهٔ مورد انتظار سالیانهٔ سیستم موجودی را به صورت زیر محاسبه کرد:

سیکل موجودی دارای دو حالت مطابق شکل زیر خواهد بود:

١- در سیکل موجودی با کمبود مواجه نشویم.

٢- در سیکل موجودی با کمبود مواجه شویم.

مدت زمان مورد انتظار از زمان دریافت سفارش تا رسیدن به نقطهٔ سفارش مجدد (r) برابر است با T-L، بنابراین مساحت قسمت A1 برابر است با:

$$\frac{1}{2}(T-L)(\overline{S}+r)=\left[\frac{Q-\mu+(1-\beta)\eta(r)}{2}\right]\Big[Q+2r-\mu+(1-\beta)\eta(r)\Big] \tag{١٠}$$

در معادلهٔ (۱۰)، L مدت تحویل و T مدت سیکل موجودی است. برای محاسبهٔ قسمت A_1 خواهیم داشت:

A_2 مساحت =

$$\frac{L}{2}E\big[\{r+(r-x)\}\big]=\frac{L}{2}\int_0^r (2r-x)f(x)dx \qquad (۱۱)$$

همچنین برای محاسبه A_3 ، با توجه به آنکه $t_h=rL/x$ است، داریم:

A_3 مساحت =

$$\frac{r}{2}E(t_h)=\frac{L}{2}\int_r^\infty \frac{r^2}{x}f(x)dx \qquad (۱۲)$$

(۱۳) مقدار مورد انتظار موجودی در دست در هر سیکل $=A_1+A_2+A_3$

مقدار مورد انتظار موجودی در دست در هر سیکل =

$$\left[\frac{Q-\mu+(1-\beta)\eta(r)}{2}\right]\big[Q+2r-\mu+(1-\beta)\eta(r)\big]+$$

$$\frac{\mu}{2D}\int_0^r (2r-x)f(x)dx+\frac{\mu}{2D}\int_r^\infty \frac{r^2}{x}f(x)dx \qquad (۱۴)$$

برای محاسبهٔ هزینهٔ نگهداری سالیانه، لازم است معادلهٔ (۱٤) در h/T ضرب شود.

$$\text{هزینهٔ نگهداری سالیانه}=h\left[\frac{Q}{2}+\frac{1}{2}(1-\beta)\eta(r)+r-\mu\right]+$$

$$\frac{h\mu}{2\big[Q+(1-\beta)\eta(r)\big]}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx \qquad (۱۵)$$

با توجه به مقدار هزینهٔ کمبود سالیانه و هزینهٔ سفارش‌دهی سالیانه، هزینه به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$C_{CM}(Q,r)=\frac{A\cdot D}{Q+(1-\beta)\eta(r)}+h\left[\frac{Q+(1-\beta)\eta(r)}{2}+r-\mu\right]+$$

$$\frac{h\mu}{2\big[Q+(1-\beta)\eta(r)\big]}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx+\frac{\big[\Pi+\Pi_0(1-\beta)\big]D}{Q+(1-\beta)\eta(r)}\eta(r)$$

(۱٦)

$C_{CM}(Q,r)$ محدب نیست. با استفاده از تغییر متغیر به شرح زیر مسئله را می‌توان ساده‌تر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix}R\\ r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q+(1-\beta)\eta(r)\\ r\end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

قاعدهٔ ۱- چنانچه K تابعی از (Q,r) باشد و طبق تعریف:

$$K(Q,r)=K\big[R-(1-\beta)\eta(r),r\big]=K(R,r) \qquad (۱۸)$$

اگر

$$\hat{K}(R^*,r^*)\le \hat{K}(R,r) \qquad \forall R\times r\in R^2$$

پس:

$$K(Q^*,r^*)=K\Big[R^*-(1-\beta)\eta(r^*),r^*\Big]\le K(Q,r)$$

$$\forall Q\times r\in R^2 \qquad (۱۹)$$

اثبات: با توجه به آنکه تبدیل (۱۷) حالت یک به یک دارد لذا

$$\begin{bmatrix}Q\\ r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R-(1-\beta)\eta(r)\\ r\end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

$$\begin{bmatrix}Q^*\\ r^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R^*-(1-\beta)\eta(r^*)\\ r^*\end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

بنابراین در مورد تابعی مانند K می‌توان نوشت:

$$K(Q^*,r^*)=K\Big[R^*-(1-\beta)\eta(r^*),r^*\Big]=\hat{K}(R^*,r^*)\le$$

$$\hat{K}(R,r)=K\big[R-(1-\beta)\eta(r),r\big]=K(Q,r) \quad \forall Q\times r\in R^2$$

(۲۲)

اینک می‌توان با استفاده از تبدیل ارائه شده، مجدداً تابع C_{CM} را به صورت زیر نوشت:

$$\hat{C}_{CM}(R,r)=\frac{AD}{R}+h\left[\frac{R}{2}+r-\mu\right]+\frac{h\mu}{2R}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx$$

$$+\frac{\big[\Pi+\Pi_0(1-\beta)\big]D}{R}\eta(r) \qquad (۲۳)$$

تابع $\hat{C}_{CM}(R,r)$ را می‌توان به سه قسمت تفکیک کرد:

$$\hat{C}^1_{CM}(R,r)=\frac{AD}{R}+h\left[\frac{R}{2}+r-\mu\right] \qquad (۲٤)$$

$$\hat{C}^2_{CM}(R,r)=\frac{h\mu}{2R}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx \qquad (۲۵)$$

$$\hat{C}^3_{CM}(R,r)=\frac{\big[\Pi+\Pi_0(1-\beta)\big]D}{R}\eta(r) \qquad (۲٦)$$

تحدب $\hat{C}^1_{CM}(R,r)$ واضح است. تحدب $\hat{C}^3_{CM}(R,r)$ در مقاله کیم و پارک [۵] ارائه شده است. تحذب $\hat{C}^2_{CM}(R,r)$ در پیوست اثبات شده است. به این ترتیب $\hat{C}_{CM}(R,r)$ جمع سه تابع محدب است بنابراین محدب است. از معادلهٔ (۲۳) نسبت به R و r مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \hat{C}_{CM}(R,r)}{\partial R}=\frac{AD}{R^2}+\frac{h}{2}-\frac{h\mu}{2R^2}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx-$$

$$\frac{\big[\Pi+\Pi_0(1-\beta)\big]D}{R^2}\eta(r)=0 \qquad (۲۷)$$

$$\frac{\partial \hat{C}_{CM}(R,r)}{\partial r} = h - \frac{h\mu}{R}\int_r^{\infty}(1-\frac{r}{x})f(x)dx - \frac{\left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)\right]D}{R^2}\left[1-F(r)\right] = 0 \qquad (۲۸)$$

با ساده کردن معادلات فوق معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$R = \sqrt{\frac{2\left\{AD + \frac{1}{2}h\mu\int_r^{\infty}\frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx + \left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)D\eta(r)\right]\right\}}{h}} \qquad (۲۹)$$

$$\left[1-F(r)\right]\left\{h\mu + \left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)\right]D\right\} = Rh + h\mu\int_r^{\infty}\frac{r}{x}f(x)dx \qquad (۳۰)$$

۳- الگوریتم محاسبهٔ مقادیر بهینهٔ متغیرها و بررسی همگرایی

به منظور تعیین مقادیر بهینهٔ R^* و r^* که تابع $\hat{C}_{CM}(R,r)$ را حداقل کند، از قاعدهٔ تصمیم‌گیری همزمان [۲] به شرح زیر می‌توان استفاده کرد:

۱- تخمین اولیه برای R را مقدار $R = \sqrt{2DA/h}$ قرار دهید. این مقدار را R_1 بنامید.

۲- با استفاده از معادلهٔ (۲۰) و با $R=R_1$ مقدار r_1 را بیابید. این مقدار را r_1 بنامید.

۳- با استفاده از معادلهٔ (۱۹) و با $r=r_1$ مقدار R_2 را بیابید.

٤- قدم دوم را با $R=R_2$ تکرار کنید و مراحل حل را ادامه دهید.

همگرایی در مرحلهٔ iام که $R_i=R_{i-1}$ و $r_i=r_{i-1}$ شود، حاصل می‌شود.

با استفاده از رسم منحنیهای (۲۹) و (۳۰) نشان داده می‌شود که الگوریم فوق همگراست. از معادلهٔ (۳۰) ملاحظه می‌شود که:

اگر $r=0$ نتیجه می‌شود $R = \overline{R} = \frac{h\mu + \left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)\right]D}{h}$

اگر $r=\infty$ نتیجه می‌شود $R=0$

لذا با توجه به معادلهٔ (۳۰) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = -f(r)\left\{h\mu + \left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)\right]D\right\} - h\mu\int_r^{\infty}\frac{1}{x}f(x)dx +$$

$$h\mu f(r) = -f(r)\left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)\right]D - h\mu\int_r^{\infty}\frac{1}{x}f(x)dx < 0 \qquad (۳۱)$$

همچنین در مورد معادلهٔ (۲۹)

اگر $r=0$ نتیجه می‌شود.

$$R = \hat{R} = \sqrt{\frac{2\left\{AD + \frac{1}{2}h\mu^2 + \left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)\right]D\mu\right\}}{h}}$$

اگر $r=\infty$ نتیجه می‌شود

$$R = R_1 = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

حال از معادلهٔ (۲۹) مشتق‌گیری نسبت به r داریم:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = -\left\{\mu\int_r^{\infty}\frac{x-r}{x}f(x)d(x) + \frac{1}{h}\left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)\right]D\left[1-F(r)\right]\right\}0$$

$$\left\{\frac{2AD + h\mu\int_r^{\infty}\frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx + 2\left[\Pi + \Pi_{\circ}(1-\beta)D\eta(r)\right]}{h}\right\}^{\frac{1}{2}} < 0 \qquad (۳۲)$$

در این زمینه منحنیهای مربوط به دو معادلهٔ (۲۹) و (۳۰) در شکل (۲) رسم شده‌اند. با توجه به معادلات (۳۱) و (۳۲) ملاحظه می‌شود که این منحنیها نزولی‌اند و در صورت وجود جواب، تقاطع دو منحنی، همگرایی الگوریتم ارائه شده به R^* و r^* مشخص می‌شود.

٤- مثال عددی

برای ارائهٔ تصویری از الگوریتم ارائه شده در این مقاله، ابتدا یک مثال عددی ارائه می‌شود.

مثال ۱- اطلاعات مسئله به شرح زیر است:

$A=70$ تومان برای هر سفارش $\mu=38$ واحد

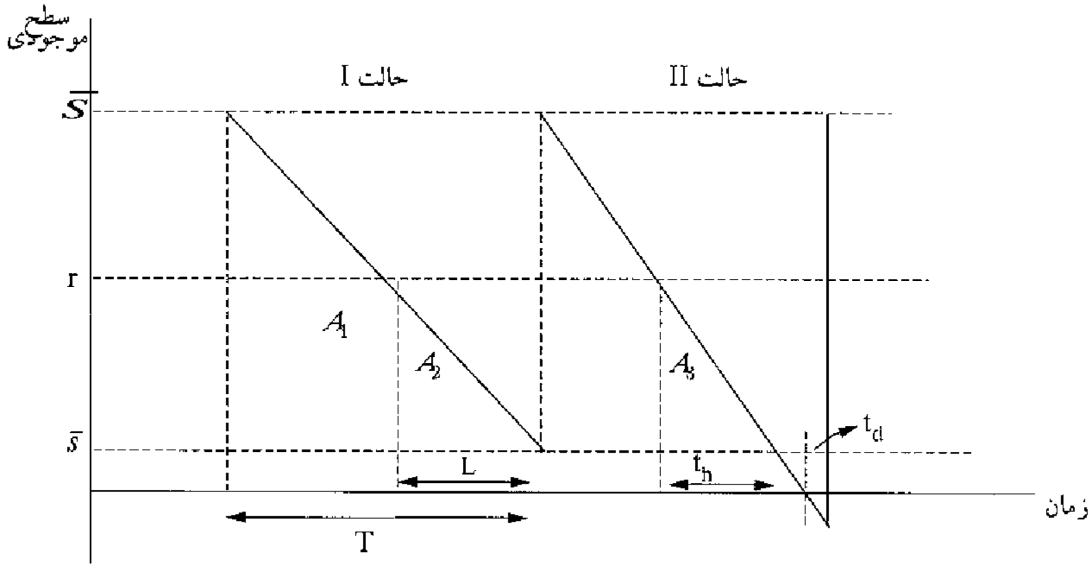
$D=275$ واحد در هر سال $\delta=4$ واحد

$\Pi=1.9$ تومان به ازای هر واحد کمبود

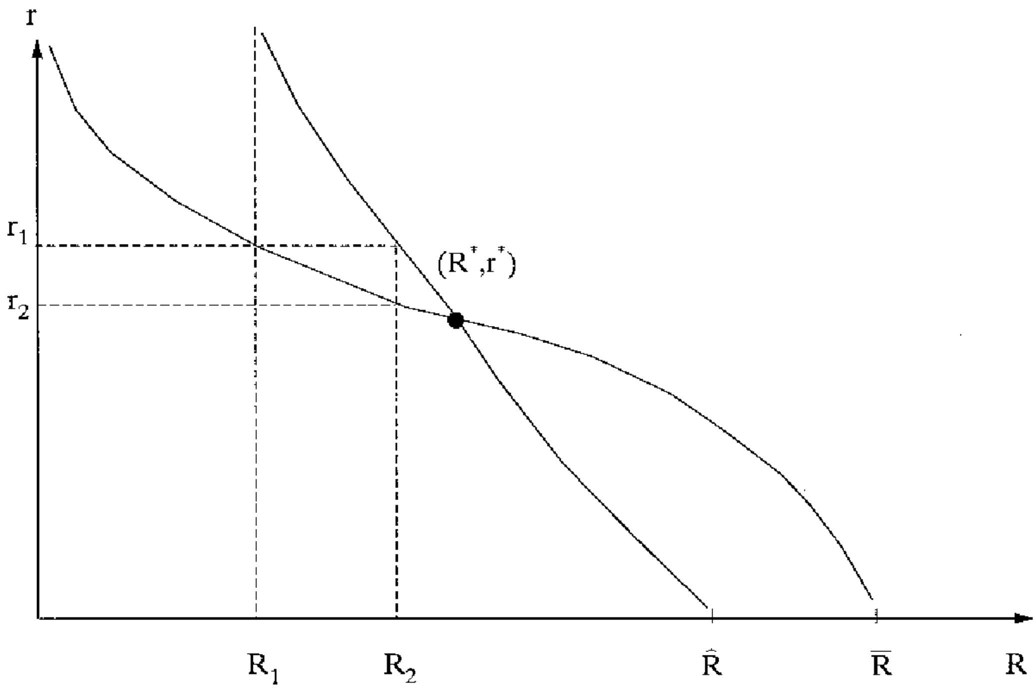
$\Pi_0=4.5$ تومان به ازای هر واحد فروش از دست رفته

$h=1.9$ تومان به ازای هر واحد در هر سال

تقاضا در مدت تحویل دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۸



شکل ۱- وضعیتهای سیکل موجودی



شکل ۲- منحنیهای مربوط به معادلات (۲۹) و (۳۰)

واحد و انحراف معیار ٤ واحد است. در جدول (۱) مقادیر بهینه در مدل (Q,r) برای مسئلهٔ اخیر و به ازای مقادیر مختلف β ارائه شده است. به عنوان مثال، در ازای مقدار $\beta=0.5$ و با توجه به الگوریتم ارائه شده مقادیر بهینه به ترتیب $R^{CM}=1542.69$ و $r^{CM}=378.62$ محاسبه شده است.

همان گونه که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار β، مقدار R^{CM} افزایش می‌یابد ولی مقدار r^{CM} (نقطهٔ سفارش در وضعیت مقدار دقیق تعداد سیکلهای موجودی) کاهش می‌یابد. این حالت با توجه به شکل (۱) نیز قابل دستیابی است. از طرف دیگر اختلاف $C_A(Q,r)$ با $\hat{C}_{CM}$ (هزینهٔ سالیانه با مقادیر R و

جدول ۱- نتایج و مقادیر بهینه در مدل (Q,r) در ازای مقادیر β در مثال (۱)

β	Q^*	r^*	R^{CM}	r^{CM}	$C_A(Q^*,r^*)$	$\hat{C}_{CM}$	$C_A(Q^{CM},r^{CM})$
۰	۴۹/۳۴	۱۷/۳۲	۴۹/۶۱	۱۷/۱۶	۱۱۴/۰۶	۱۱۳/۶۳	۱۱۴/۱۲
۰/۵	۵۰/۰۹	۱۶/۹۴	۵۰/۲۱	۱۶/۸۴	۱۱۱/۵۴	۱۱۱/۲۱	۱۱۱/۵۶
۰/۸	۵۱/۸۳	۱۴/۲۶	۵۱/۹۲	۱۳/۹۵	۱۰۷/۳۳	۱۰۶/۹۸	۱۰۷/۳۴
۱	۵۳/۲۴	۱۱/۹۳	۵۳/۴۸	۱۱/۹۳	۱۰۲/۰۷	۱۰۲/۰۷	۱۰۲/۰۷

و $C_A(Q^{CM},r^{CM})$ (هزینهٔ سالیانه با مقدار Q و r که بـا توجـه به مقدار دقیق سیکلها محاسبه می‌شود) در بررسی نتایج حـاصل از الگوریتم جدید قابل توجه است. در ازای $\beta=0.5$

$$(Q^*,r^*)=(50.09,16.94)$$
$$(R^{CM},r^{CM})=(50.21,16.84)$$
$$C_A(Q^*,r^*)=111.54$$
$$\hat{C}_{CM}(R^{CM},r^{CM})=111.21$$

مقدار هزینهٔ استفاده از $\left[R^{CM}-(1-\beta)\eta(r^{CM}),r^{CM}\right]$ بـا محاسبهٔ دقیق سیکل موجودی به جای (Q^*,r^*) در مدل کلاسیک (Q,r) که مدت سیکل موجــودی بـه صـورت تقریبـی محاسـبه می‌شود عبارت است از:

$$C_A\left(R^{CM}-(1-\beta)\eta(r^{CM}),r^{CM}\right)-C_A(Q^*,r^*)=$$
$$111.56-111.54=0.02$$

از طرفی می‌توان مدل تقریبی را بــا مقـادیر Q و r کـه از مقالـهٔ حاضر حاصل می‌شود، به کار بست. مقدار $C_A(Q^{CM},r^{CM})$ مقدار هزینهٔ کل سالیانه در حالت اخیر است. در ادامه مثال دیگری کـه از مقالـهٔ کیـم و پـارک [۵] اخـذ شـده، ارائـه می‌شـود. تحلیـل حساسیت نسبت به β و σ در این مثال ارزیابی می‌شوند.

مثال ۲- اطلاعات یک مدل موجودی (Q,r) به صورت زیر ارائه شده‌اند:

$D=200$ واحد در سال

$A=50$ تومان برای هر سفارش

$h=1$ تومان در ازای هر واحد در سال

$n=4$ تومان در ازای هر واحد کمبود

$\Pi_0=3$ تومان در ازای هر واحد فروش از دست رفته

تقاضا در مدت تحویــل دارای توزیـع نرمـال بـا میـانگین ۵۰ و انحراف معیار ۲۰ واحد است.

تفسیر نتایج مندرج در جدول (۲) همــانند مثـال اول مسـیر است. از سوی دیگر در بسیاری مســائل فـرض $\beta=0.5$ رعـایت می‌شود. این فرض به معنــای آن اسـت کـه در صـورت فقـدان موجودی، ۵۰ درصد از مقدار کمبود به صـورت پس‌افـت و ۵۰ درصد به صورت فروش از دست رفتـه خواهـد بـود. همچنیـن تحلیل حساسیت مدل نسبت به مقدار انحــراف معیـار σ کـاملاً قابل توجه است.

با افزایش مقدار σ مقدار Q در مــدل کلاسـیک و همچنیـن مقدار R^{CM} در مدل مقالهٔ حاضر افزایش می‌یابد. افزایـش اخیر، تأثیر فزاینده‌ای نیز در مقدار هزینه سالیانه ایجاد می‌کند.

بررسی تأثیرات مقدار β در مــدل (Q,r) نـیز حـائز اهمیـت است. برخی مدیران سیستمهای موجودی علاقه‌مندند که تمـامی مقدار کسری موجودی را به عنوان پس‌افت (مقادیر کمبــود کـه بعداً تأمین خواهند شد) منظور کنند. در حالی که تحلیـل چنیـن سیاستی از دیدگاه هزینه‌های سیستم می‌بایســتی مـورد ارزیـابی قرار گیرد. در این راستا در شکل (۳)، مقدار هزینهٔ کــل در ازای مقادیر مختلف β برای حالتی که تعداد سیکلهای موجودی دقیقاً محاسبه شده‌اند، ارائه شده است. همچنین هزینــه ســالیانه بـرای حالت $\beta=1$ نیز مشاهده می‌شود.

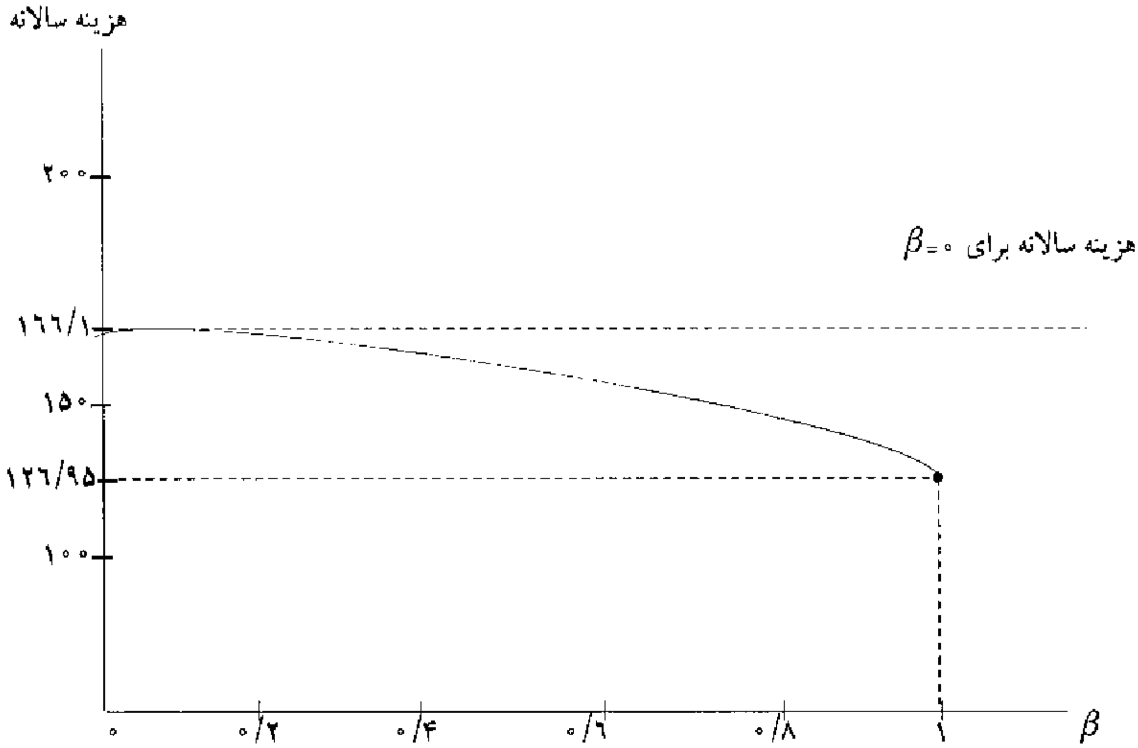
بنابراین در مدل ارائه شده تغییرات β در ازای مقـادیر کمـتر از ۰/۵ عملاً تغییرات شدیدی در هزینهٔ سالیانه ایجــاد نمی‌کنـد. ولــی تغیــیرات β در ازای مقــادیر بیشــتر از ۰/۵ تغیــیرات کاملاًمحسوسی در هزینه سالیانه ایجاد می‌کند. لـذا فـرض $\beta=1$

جدول ۲- نتایج و مقادیر بهینه در مدل **(Q,r)** در ازای مقادیر β در مثال (۲)

β	Q^*	r^*	R^{CM}	r^{CM}	$C_A(Q^*,r^*)$	$\hat{C}_{CM}(R^{CM},r^{CM}$
۰	۱۵۱	۶۳	۱۵۳/۵	۶۲/۸	۱۶۷	۱۶۶/۱
۰/۲	۱۵۱	۶۰	۱۵۱/۷	۶۰/۶	۱۶۴	۱۶۲/۸
۰/۵	۱۵۳	۵۱	۱۵۳/۶	۵۰/۹	۱۵۸	۱۵۷/۶
۰/۸	۱۵۹	۳۲	۱۵۹/۸	۳۱/۸	۱۴۵	۱۴۴/۹
۱	۱۶۳	۱۴	۱۶۳/۳	۱۴	۱۲۷	۱۲۶/۹۵

جدول ۳- تحلیل حساسیت در مثال (۲) در ازای مقادیر **β=0.5** و تغییرات σ

σ	Q^*	r^*	R^{CM}	r^{CM}	$C_A(Q^*,r^*)$	$\hat{C}_{CM}(R^{CM},r^{CM})$
۰	۱۴۱	۵۰	۱۴۲/۶	۴۹	۱۴۱	۱۴۰/۱
۱۰	۱۴۷	۵۱	۱۴۸/۱	۵۰/۷	۱۴۹	۱۴۸
۲۰	۱۵۳	۵۱	۱۵۳/۶	۵۰/۹	۱۵۸	۱۵۷/۶
۳۰	۱۵۹	۵۱	۱۶۰/۴	۵۱	۱۶۶	۱۶۵/۵
۴۰	۱۶۷	۵۰	۱۶۷/۲	۵۰	۱۷۵	۱۷۴



شکل ۳- تغییرات هزینهٔ سالیانه در مدل **(Q,r)** در ازای مقادیر β با محاسبهٔ دقیق تعداد سیکلهای موجودی

بدون توجه به تغییرات حاصل در هزینهٔ سالیانهٔ سیاست معقولی به نظر نمی‌رسد.

٤- نتیجه‌گیری

در این مقاله در محاسبهٔ هزینه برای مدل موجودی (Q,r) تعداد دقیق سیکلهای موجودی در نظر گرفته شده است. برای مدل موجودی ترکیبی (Q,r)، با در نظر گرفتن هر دو حالت کمبود یعنی حالت پس‌افت و فروش از دست رفته، یک الگوریتم برای محاسبهٔ مقادیر بهینه مقدار سفارش و نقطهٔ سفارش ایجاد و همگرایی آن بررسی شده است. همچنین در قالب مثالهای ارائه شده، نمونه‌های عددی و تحلیلهای حساسیت مدل بررسی شد. لزوم توجه به تدوین سیاست بهینه برای حالتهای احتمالی کمبود و تأثیر این سیاست بر هزینهٔ کل نشان داده شد. بدیهی است محاسبهٔ دقیق تعداد سیکلهای موجودی به عبارت دیگر درج مدت فقدان موجودی در مدت زمان سیکل موجودی در مدلهای سیستم مرور دوره‌ای به عنوان یک زمینهٔ مناسب تحقیقاتی در تداوم مقاله حاضر می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

واژه نامه

1. continuous review models
2. periodic review models
3. lost sales penalty cost
4. backorder penalty cost
5. inventory position
6. lead time
7. safety stock
8. hessian

مراجع

1. Tersine, Richard J., *Principles of Inventory and Materials Management,* Fourth Ed., Prentice-Hall inc., 1994.
2. Silver, Edward A., and Peterson, Rein, *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning,* Second Ed; John Wiley and Sons inc., 1985.
3. Oral, M., "Improved Implementation of Inventory Control Models through Equivalent Formulations," *Journal of Operations Management,* Vol. 1, No. 4, pp. 173-181, 1981.
4. Waters, C. D., *Inventory Control and Management,* John Wiley and Sons inc., 1992.
5. Kim, Dae H., and Park, K. S., "(Q,r) Inventory Model with a Mixture of Lost Sales and Time-Weighted Backorders," *Journal of the Operational Research Society,* Vol. 36, No. 3, pp. 231-238, 1985.
6. Montgomery, D., Bazaraa, M., and Keswani, A., "Inventory Models with a Mixture of Backorders and Lost Sales," *Naval Research Logistics Quarterly,* Vol. 20, pp. 255-263, 1973.
7. Moon, L., and Gallego, G., "Distribution Free Procedure for Some Inventory Models," *Journal of the Operational Research Society,* Vol. 45, pp. 651-658, 1994.
8. Hadley, G., and Whitin, M., *Analysis of Inventory System,* prentice-Hall, inc, 1973.
9. Das, C., "(Q,r) Inventory Models with Time-Weighted Backorders, *Journal of the Operational Research Society,* Vol. 34, pp. 401-412, 1983.

پیوست الف- اثبات تحدب تابع $\hat{C}_{CM}(R,r)$

همان گونه در مقاله اشاره شد تابع $\hat{C}_{CM}(R,r)$ را می‌توان به سه قسمت تفکیک کرد. تحدب دو قسمت از تابع مزبور با توجه به منابع اشاره شده، مشخص شد. در این پیوست تحدب تابع $\hat{C}^2_{CM}(R,r)=\frac{h\mu}{2R}\int_r^{\infty}\frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx$ بررسی می‌شود.

$$\frac{\partial^2\hat{C}^2_{CM}}{\partial R^2}=\frac{h\mu}{R^3}\int_r^{\infty}\frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx\geq 0$$

$$\frac{\partial^2\hat{C}^2_{CM}}{\partial r^2}=\frac{h\mu}{R}\int_r^{\infty}f(x)/dx\geq 0$$

همچنین دترمینان ماتریس هشین $|H|$ به صورت زیر خواهد بود:

$$|H|=\partial^2\hat{C}^2_{CM}/\partial R^2\cdot\partial^2\hat{C}^2_{CM}/\partial r^2-\left(\partial^2\hat{C}^2_{CM}/\partial Rr\right)^2$$

$$=\left[h\mu/R^2\right]^2\cdot\left\{\int_r^{\infty}\left[(x-r)^2/x\right]f(x)dx\int_r^{\infty}f(x)/xdx-\left[\int_r^{\infty}[(x-r)/x]f(x)dx\right]^2\right\}$$

با استفاده از نامساوی شوارتز که توسط داس [۹] در مقاله‌ای در زمینهٔ کنترل موجودی به کار گرفته شد مشاهده می‌شود که:

$$\left[\int_a^b fgdx\right]\leq\left(\int_a^b f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

چنانچه:

$$f=\left\{\left[(x-r)^2/x\right]f(x)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$g=\left[f(x)/x\right]^{\frac{1}{2}}$$

رابطهٔ $\left[\int_a^b fgdx\right]\geq 0$ خواهد شد. بنابراین $|H|\geq 0$ خواهد بود و لذا تحدب $\hat{C}^2_{CM}(R,r)$ ثابت می‌شود.