

## یک روش مرتبه دوم در شبیه سازی انفجار در زیر آب

احمد رضا پیشه‌ور اصفهانی\* و محمد رضا توکلی نژاد\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۱/۸/۷ - دریافت نسخه نهایی: ۸۳/۴/۲۵)

**چکیده** - در این مقاله یک روش عددی برای بررسی پدیده انفجار در زیر آب ارائه می‌شود. این روش عددی تعمیمی از روش گودونف در مسائل دینامیک گاز است که به محیطهای چند سیالی اعمال می‌شود. این روش با استفاده از محدود کننده های شیب از دقت مرتبه دوم مکانی است. همچنین برای بررسی محیط دو فازی در روی شبکه اولیری از یک روش دنبال کننده سطح جدایش (فرانت تراکینگ) استفاده شده است. نتایج حاصل از این تحقیق توانایی بسیار خوب این روش در پیش بینی پدیده‌های مشاهده شده در مسئله انفجار در زیر آب را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: مسئله ریمن، انفجار در زیر آب، روش گودونف، روش فرانت تراکینگ، محدوده کننده شار

## A Second Order Accurate Method in Simulating Underwater Explosion

A. R. Pischevar Isfahani and M. R. Tavakoli Nejad

Department of Mechanical Engineering Isfahan University of Technology , Isfahan,Iran

**Abstract:** *In this paper, a numerical scheme is proposed for the multi-fluid compressible flows. This method is applied to the problem of underwater explosion. The proposed scheme is basically the extension of Godunov method in gas dynamic problems to the multfluid environments and is second-order accurate in space. In this method, also, the problem of artificial mixing of two different phases on Eulerian grids is prevented by a front tracking technique. The numerical results of this study are in very good agreement with previous numerical and experimental results.*

**Keywords:** *Rieman problem, Underwater explosion, Godunov scheme, Front tracking, Slope limiter*

در بررسی پدیده انفجار در زیر آب مشخص شده است که پس از شروع انفجار بر اثر واکنش شیمیایی پدید آمده مواد بسیار گرم گازی در فشار و دمای بالا در محل انفجار تولید می‌شود. بدیهی است که در چنین شرایطی حباب گاز تولید شده در داخل آب نمی‌تواند بدون تاثیر بر محیط اطراف به صورت پایدار باقی بماند. این حباب همراه با انبساط شروع به حرکت به سمت سطح آزاد آب بر اثر نیروی بویانسی می‌کند. با انبساط حباب گازی فشار داخل حباب شروع به کاهش کرده تا جایی که فشار داخل حباب با فشار محیط اطراف یکسان شود. در این حالت حرکت انبساطی حباب بر اثر اینرسی حرکتی موجود متوقف نشده و حباب همچنان به انبساط خود ادامه می‌دهد تا جایی که اینرسی حرکتی آن به صفر برسد. در این حالت فشار داخلی حباب از فشار محیط اطراف خود کمتر شده و شروع به منقبض شدن می‌کند. این حرکت انبساط و انقباض همراه با حرکت حباب به سمت بالا تا زمان رسیدن حباب گازی به سطح آب ادامه می‌یابد.

از طرف دیگر در اثر اختلاف فشار بسیار زیاد در دو طرف سطح تماس حباب با محیط اطراف یک موج ضربه‌ای نسبتاً قوی در محیط مایع انتشار می‌یابد. همچنین در پدیده انفجار در زیر آب به دلیل اندر کنش امواج بوجود آمده با سطوح جامد و یا سطح تماس بین محیط مایع و گاز، ممکن است فشار سیال مایع تا حد فشار بخار پایین آمده به طوری که در بعضی از نواحی پدیده کاویتاسیون نیز در مسئله ظاهر شود. از این رو برای به دست آوردن یک مدل ریاضی نزدیک به فیزیک مسئله روش عددی باید بتواند پدیده‌های فوق الذکر را در هر سه محیط گاز، آب و خلاء مدل کند.

این پدیده در تعدادی از مطالعات قبلی مورد بررسی قرار گرفته است. بر اساس تئوری انتشار موج ضربه‌ای با استفاده از حل معادله مشخصه‌ها اولین نتایج توسط کرک وود-بتا<sup>۱</sup> در سال ۱۹۴۲ ارائه شد. تئوری فوق پیش بینی کرد که منحنی فشار-زمان در یک نقطه به صورت نمایی افت می‌کند و

حداکثر فشار به صورت نمایی با جرم و فاصله از مرکز ماده منفجره متناسب است [۱]. در همان سال پنی - داسگوتا<sup>۲</sup> به ارائه روشی بر مبنای انتگرال گیری از معادله ریمان در فواصل دور از ماده منفجره پرداختند و به نتایجی مشابه نتایج قبلی رسیدند [۲]. شاید بتوان مهمترین کار در این زمینه را به کار انجام شده توسط کول<sup>۳</sup> در سال ۱۹۶۵ مربوط دانست که به بررسی انفجار در زیر آب به صورت تئوری و آزمایشگاهی برای ماده منفجره کروی و استوانه‌ای پرداخت و شاید بتوان نتایج آزمایشگاهی او را اولین نتایج تجربی در این زمینه دانست که در بسیاری از کارهای بعدی به آن اشاره شده است [۳]. این در حالی است که بعد از دهه ۷۰ میلادی بیشتر کارها بر روی شبیه سازی عددی این پدیده متمرکز شده است. در سال ۱۹۸۱ فلورس<sup>۴</sup> با استفاده از روش عددی گلیم<sup>۵</sup> به بررسی مراحل ابتدایی پدیده انفجار در آبهای کم عمق پرداخت و موفق به ارائه یک روش مرتبه اول برای پیش بینی حرکت یک بعدی امواج حاصل از انفجار شد [۴]. بر پایه کارهای انجام شده قبلی، تانگ<sup>۶</sup> مبادرت به ارائه یک روش لاگرانژی با عنوان E-MUSCL کرد که یک روش مرتبه دوم بوده و قابلیت پیش بینی نواحی خلاء را دارد [۵].

در مقاله حاضر برای شبیه‌سازی پدیده انفجار در زیر آب و پیش بینی امواج ضربه‌ای و انبساطی و سطح تماس ایجاد شده بین حباب گاز حاصل از انفجار و محیط آب از یک روش عددی مبتنی بر حل مسئله ریمان<sup>۷</sup> در سه محیط آب - گاز و خلاء استفاده می‌شود. این روش بر خلاف روش پیشنهادی در مرجع [۵] توسط تانگ بر روی شبکه‌های اویلری قابل اعمال است. مشکل عمده در استفاده از شبکه اویلری در مسایل چند سیالی از این واقعیت سر چشمه می‌گیرد که بعد از گذشت یک گام زمانی با سلولی در محاسبات مواجه خواهیم شد که در آن اختلاط غیر واقعی بین دو سیال با فازهای متفاوت انجام می‌شود. این مسئله نهایتاً منجر به محاسبه غیر واقعی پارامترهایی نظیر فشار و سرعت صوت در این سلولها خواهد شد. از این رو برای جلوگیری از اختلاط غیر واقعی در

یکی از مشکلات عمده در بررسی پدیده انفجار در زیر آب نامعین بودن معادلات حالت گازهای حاصل از انفجار و سیال پیرامون آن است. با این وجود در مورد مخلوط گازهای قابل احتراق در اولین تقریب می توان رفتار گازهای حاصل از انفجار را ایده آل فرض کرد. از طرف دیگر معادله حالت مناسبی که تاکنون برای آب پیشنهاد شده است معادله تیت<sup>۱۰</sup> است [۱۰]. برای یکسان سازی محاسبات در هر دو محیط از معادله گاز سخت شده در اینجا استفاده می شود:

$$e = \frac{p + \alpha B}{\alpha - 1} + \frac{\rho u^2}{2} \quad (4)$$

که در آن برای گاز  $B = 0$  و مقدار  $\alpha = \gamma$  و برای آب  $B = 3311 \text{ bar}$  و مقدار  $\alpha = 7$  در نظر گرفته می شود که  $\gamma$  ضریب حرارت مخصوص گاز مورد نظر و مقدار ثابتی است.

### ۳- حل عددی

در این روش عددی ابتدا به حل مسئله ریمان در هر مرز سلولی در دیدگاه لاگرانژی می پردازیم و پس از تعیین الگوی امواج ساطع شده از هر مرز سلولی جواب به دست آمده را در یک فاصله زمانی کوچک در مختصات اویلری تصویر می کنیم. این روش بسیار به روش به کار برده شده توسط گودونف در معادلات دینامیک گاز شبیه است.

در این حالت با انتگرال گیری از معادله (۱) با صرف نظر از جمله چشمه در فاصله مکانی  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  و گام زمانی  $[t^n, t^{n+1}]$  داریم:

$$\bar{Q}_j^{n+1} = \bar{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (\hat{F}_{j+1/2} - \hat{F}_{j-1/2}) \quad (5)$$

$\bar{Q}_j^n$  متوسط مقدار سلول در زمان  $t^n$  است و  $\hat{F}_{j+1/2}$  مقدار شار عددی است که توسط معادله زیر تعریف می شود.

$$\hat{F}_{j+1/2} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} F[U(x_{j+1/2}, t)] dt \quad (6)$$

به کارگیری روش گودونف<sup>۱۱</sup> استاندارد در سه قدم متمایز زیر انجام می شود (هر چند در عمل قدمهای ۲ و ۳ معمولاً با یکدیگر ادغام می شوند).

۱- بازسازی جواب در لحظه  $t^n$ : در قدم اول با استفاده از

سلولهایی که حاوی سطح تماس بین دو محیط گاز و مایع هستند از یک روش دنبال کننده سطح جدایش با عنوان فرانت تراکینگ<sup>۱۲</sup> استفاده می شود. مشکل دیگر استفاده از دیدگاه اویلری نحوه مدل سازی پدیده کاویتاسیون است. در این بررسی از یک مدل ساده شده برای این مسئله استفاده شده است که نتایج نسبتاً رضایت بخشی ارائه می کند. در ادامه ابتدا معادلات حاکم و نحوه گسسته سازی آنها مورد بررسی قرار می گیرند. سپس نتایج به دست آمده از این روش برای چند مسئله نمونه ارائه می شود.

### ۲- معادلات حاکم

با توجه به سرعت بسیار زیاد امواج انفجاری، زمان مشخصه های نفوذ مولکولی نظیر لزجت نسبت به زمان مشخصه های مربوط به واکنش انفجاری و گاز دینامیکی بسیار کوچک است و لذا در معادلات ناویر استوکس از جملات مربوط به لزجت می توان با یک تقریب قابل قبول صرف نظر کرد و معادلات حاکم بر مسئله انفجار در زیر آب را معادلات اویلر در نظر گرفت. صحت این ساده سازی به وسیله مطالعات متعدد از جمله مطالعات کلارک<sup>۹</sup> و همکاران تایید شده است [۶]. معادله حاکم برای جریان یک بعدی غیر لزج و بدون انتقال حرارت در فرم بقایی به صورت:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (1)$$

بیان می شود که در این معادله:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad F(Q) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e+p)u \end{bmatrix} \quad (2)$$

در مختصات دکارتی جمله چشمه صفر در نظر گرفته می شود و در دستگاه کروی این جمله عبارت است از:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{2\rho u}{r} \\ \frac{r}{2\rho u^2} \\ \frac{r}{2u(e+p)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

برای حل معادلات فوق علاوه بر معادلات بقای جرم، ممتوم و انرژی نیاز به معادلات حالت برای گاز و آب نیز وجود دارد.

توزیع خطی تکه‌ای استفاده شود:

$$Q^n(x, t^n) = \bar{Q}_j^n + \frac{x - x_j}{2} S_j^n \quad x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \quad (9)$$

شرط لازم برای داشتن الگوریتم مرتبه دوم این است که شیبهای  $S_j^n$  به طور موضعی از اختلافهای طرف چپ و راست متوسط گیری وزنی شوند

$$S_j^n = Q_x(x, t^n) + O(\Delta x). \quad (10)$$

از طرف دیگر به منظور اجتناب از نوسانات غیرواقعی نیاز به وارد نمودن قیدی بر روی مقدار شیب در هر سلول توسط تابع محدود کننده خواهیم داشت. در اینجا اگر تابع مین مود<sup>۱۳</sup> به صورت زیر تعریف شود:

$$S_j(a_j, b_j) = \min\text{-mod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{if } |a| \leq |b|, ab \geq 0 \\ b & \text{if } |a| \geq |b|, ab > 0 \\ 0 & \text{if } ab < 0 \end{cases} \quad (11)$$

یک کلاس عمومی از تابع شیب  $S$  به وسیله معادله زیر داده می‌شود

$$S_k(a_j, b_j) = \text{Sgn}(a_j) \cdot \max \quad (12)$$

$\left\{ \left| \min\text{-mod}(ka_j, b_j) \right|, \left| \min\text{-mod}(a_j, kb_j) \right| \right\}$  برای  $1 \leq k \leq 2$  و  $a_j$  و  $b_j$  مشخص کننده تفاضلهای چپ و راست هستند.

$$a_j = \frac{\bar{Q}_{j+1}^n - \bar{Q}_j^n}{\Delta x}, \quad b_j = \frac{\bar{Q}_j^n - \bar{Q}_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (13)$$

همچنین یک محدود کننده دیگر به نام محدود کننده شیب با اختلاف مرکزی یکنوا<sup>۱۴</sup> شده توسط ون لیر ارائه شده است:

$$S_j(a_j, b_j) = \min\text{-mod} \left[ \frac{a_j + b_j}{2}, 2 \min\text{-mod}(a_j, b_j) \right] \quad (14)$$

این روش به طور یکسان در محیط گاز و مایع با معادلات حالت متناظر به کار برده می‌شود. با این وجود باید توجه داشت که پس از تکرار اول با سلولی در مرز مشترک دو سیال مواجه خواهیم شد که داخل آن مخلوطی از آب و گاز وجود دارد. اختلاط غیر واقعی گاز و آب در یک سلول باعث می‌شود که نتوانیم فشار و سرعت صوت را به صورت صحیح در سلول مورد نظر محاسبه کنیم. در این حل عددی از یک روش دنبال

مقادیر متوسط سلولی یک تابع تغییرات تکه‌ای ثابت در هر سلول به عنوان شرایط اولیه در نظر گرفته می‌شود.

۲- حل قوانین بقاء به صورت دقیق با شرایط اولیه بالا در هر سلول در یک گام زمانی کوچک  $t^n < t < t^{n+1}$  (حل مسئله ریمان) به عبارت دیگر پس از محاسبه مقادیر چگالی، سرعت و فشار در طرف چپ و راست مرز مشترک هر سلول لازم است که با حل یک مسئله ریمان پس از تعیین الگوی امواج مقدار متغیرهای ابتدایی را بر روی سطح سلول برای فاصله زمانی کوچک تعیین کنیم. این متغیرها را با بالا نویس ستاره مشخص می‌کنیم. بنابراین برای تابع فلاکس عددی خواهیم داشت:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \rho^* u^* \\ \rho^* u^{*2} + p^* \\ u^* (e^* + p^*) \end{bmatrix} \quad (15)$$

که در این رابطه  $\rho^*, u^*, p^*$  به ترتیب مقادیر چگالی، سرعت و فشار بر روی مرز مشترک هر سلول است که از حل مسئله ریمان در هر مرز سلولی به دست آمده است. اکنون اگر اندازه گام زمانی  $\Delta t$  به مقدار زیر محدود شود

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |F'(Q)|_{\max} \leq 1 \quad (16)$$

که  $|F'(Q)|_{\max}$  مقدار سرعت سریعترین مشخصه در کل میدان است در این صورت تابع فلاکس گودونف در فاصله زمانی  $t^n < t < t^{n+1}$  ثابت باقی می‌ماند. این شرط بدین معنی است که موج ساطع شده از یک سطح سلولی به سطح سلولی مجاور نخواهد رسید.

۳- متوسط گیری از متغیرها در زمان  $t^{n+1}$  به منظور تعیین  $\bar{Q}_j^{n+1}$  توسط معادله (۶).

روش عددی گودونف یک روش یکنوای مرتبه اول بوده و دارای رفتار استهلاکی است. ون - لیر<sup>۱۲</sup> مشاهده کرد اگر از یک نمایش دقیقتر برای بازسازی جواب در قدم اول روش گودونف استفاده شود امکان به دست آوردن دقت مرتبه دوم در فضا در روش گودونف نیز وجود دارد [۷]. در واقع روش (MUSCL) ون - لیر پیشنهاد می‌کند که به جای استفاده از یک تابع تکه‌ای ثابت در هر سلول در قدم اول روش گودونف می‌توانیم از یک

#### ۴- مسئله ریمان در سه محیط آب - گاز و خلاء

همان طور که ذکر شد در روش عددی پیشنهادی در این مقاله از حل مسئله ریمان در هر سطح سلولی استفاده می‌کنیم. بر اساس اینکه شرایط اولیه در دو طرف چپ و راست یک سطح سلولی چگونه باشد (گاز، آب یا خلاء) حل مسئله ریمان در چهار دسته زیر طبقه بندی می‌شود.

(الف): گاز-گاز: در این حالت در هر دو سمت چپ و راست سطح سلول گاز قرار گرفته است که بسته به شرایط اولیه گاز امکان ایجاد پنج الگوی امواج مختلف وجود دارد. در صورتی که رابطه

$$u_r - u_l < \frac{2}{\gamma - 1} |c_{gl} + c_{gr}| \quad (17)$$

برقرار باشد حل مسئله ریمان در این حالت (گاز-گاز) منجر به ایجاد چهار حالت یکنواخت می‌شود که توسط سه موج متمرکز (از چپ به راست)، موج ضربه‌ای یا فن انبساطی، سطح تماس و موج ضربه‌ای یا فن انبساطی از هم مجزا شده‌اند. در صورتی که رابطه فوق برقرار نباشد یک ناحیه خلاء در محیط پدید می‌آید که بررسیها نشان می‌دهد این ناحیه خلاء بین دو فن انبساطی واقع می‌شود و حل مسئله ریمان منجر به ایجاد یک فن انبساطی، یک ناحیه خلاء و یک فن انبساطی در محیط گازی خواهد شد. در معادله (۱۷)  $c_g$  سرعت انتشار موج آکوستیک در محیط گازی است و برای یک گاز کامل از معادله

$$c_g = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (18)$$

داده می‌شود.

(ب): آب-آب: در این حالت در هر دو سمت سطح سلول آب قرار گرفته است. در این حالت نیز اگر معادله

$$u_r - u_l < \frac{2}{\alpha - 1} (c_{wl} + c_{wr}) - \frac{4}{\alpha - 1} c_{wo} \quad (19)$$

(زیر نویس 0 به شرایط خلاء مربوط است و  $C_{wo}$  سرعت صوت در مایع با فشار صفر است.) برقرار باشد حل مسئله ریمان منجر به ایجاد سه حالت پایدار شده که توسط یک موج ضربه‌ای یا فن انبساطی، یک حالت یکنواخت و یک موج

کننده سطح جدایش با عنوان فرانت تراکینگ برای این سلول خاص استفاده شده است. نکته قابل ذکر در مورد روش فرانت تراکینگ این است که در این جا سلولی که در آن مخلوط آب و گاز وجود دارد به دو سلول کوچکتر تقسیم شده است و فرض می‌شود در هر یک از این سلولهای کوچکتر فقط آب و یا گاز وجود دارد، شکل (۱). با توجه به اینکه در حل مسئله ریمان خواص سیال فقط در روی سطح سلول تعیین می‌شود، لازم است فرض شود که سطح تماس سلول آب و گاز در یک مکان ثابت قرار نگرفته و با سرعت سطح تماس حرکت کند. این مسئله منجر به این حقیقت می‌شود که شار سیال عبوری از سطح تماس در این حالت صفر شده و این دو سلول فقط در سطح خود به مبادله نیروی فشاری و انجام کار می‌پردازند و از اختلاط غیر واقعی گاز و آب جلوگیری می‌شود. لذا معادله حاکم در این سلول که عملاً به دو سلول کوچک که در حال تغییر اندازه نیز هستند به صورت:

$$\bar{Q}_i^{n+1} \Delta x_i^{n+1} = \bar{Q}_i^n \Delta x_i^n + (F_i^* - \hat{F}_i) \Delta t \quad (15)$$

است که در این معادله  $F^*$  شار عبوری از سطح تماس است که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$F^* = \begin{bmatrix} 0 \\ p^* \\ p^* u^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

یکی از مشکلترین مسایل در شبیه‌سازی جریانهای چند سیالی پیش بینی نواحی کاویتاسیون و خلاء است. در این تحقیق برای تعیین محدوده ناحیه خلاء فرض می‌شود که در صورتی که فشار در یک سلول از یک حد داده شده کمتر شود آن سلول در شرایط خلاء قرار دارد و از بخار تشکیل شده در آن صرف نظر می‌شود. این حد در اغلب محاسبات صفر در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر برای محاسبه تابع شار بر روی سطوح سلولها حل کننده ریمان باید امکان اتفاق افتادن کاویتاسیون و خلاء را در الگوی امواج ایجاد شده منظور کند. این مسئله در قسمت بعد به صورت مبسوط مورد بررسی قرار می‌گیرد.

خلأء، یک سطح تماس، یک ناحیه با فشار صفر و یک موج ضربه‌ای یا فن انبساطی داخل محیط آب خواهیم داشت. اگر فشار اولیه در ناحیه آب بزرگتر از صفر باشد یک فن انبساطی در آب پدید می‌آید و اگر فشار اولیه در ناحیه آب کوچکتر از صفر باشد باعث ایجاد یک موج ضربه‌ای در محیط آب می‌شود. توجه شود که در اینجا فرض می‌شود که آب می‌تواند کشش را نیز تا حدی تحمل کند (یعنی فشار آن به زیر صفر برسد).

(د): گاز یا آب - خلأء: در این حالت در یک سمت خلأء و در سمت دیگر گاز یا آب وجود دارد. در حالتی که خلأء در آب اتفاق می‌افتد بسته به شرایط اولیه امکان وقوع دو حالت است. اگر فشار اولیه در ناحیه آب بزرگتر از صفر باشد یک فن انبساطی در آب پدید می‌آید و اگر فشار اولیه در آب کوچکتر از صفر باشد (ستون آب در حالت کشش باشد) یک موج ضربه‌ای در آب به وجود می‌آید و پس از آن یک ناحیه با فشار صفر و یک سطح تماس خواهیم داشت. در حالتی که خلأء در محیط گازی اتفاق می‌افتد فقط با یک فن انبساطی در محیط گازی مواجه خواهیم بود.

## ۵- حل مسئله ریمان

متاسفانه هیچ راه حل تحلیلی بسته برای حل مسئله ریمان وجود ندارد و باید از یک روش تکراری برای تعیین الگوی امواج و شرایط ثابت بین آنها استفاده نمود. در اینجا فرض می‌شود که سیال در طرف راست محور  $x$  ها در شرایط  $r$  و در طرف چپ محور  $x$  ها در شرایط  $l$  قرار دارد. همچنین در ابتدا فرض می‌شود که حالت خلأء اتفاق نمی‌افتد. در این صورت اگر امواج منتشر شده به سمت راست ( $r$ ) و یا چپ ( $l$ ) از نوع امواج ضربه‌ای باشد از معادلات هوگونیوت خواهیم داشت:

$$\pm W(\rho_s - \rho^*) + (\rho^* u^* - \rho_s u_s) = 0 \quad (22)$$

$$\rho_s(\pm W - u_s)(u^* - u_s) + (p^* - p_s) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{(\pm W - u^*)^2}{2} - \frac{(\pm W - u_s)^2}{2} + (h^* - h_s) = 0 \quad (24)$$

در اینجا علامت ستاره مربوط به شرایط در بعد از موج ضربه‌ای

Gas	Gas	Gas	Water	Water	Water
Gas	Gas	Gas	Gas	Water	Water
Gas	Gas	Gas	Gas	Water	Water
Gas	Gas	Gas	Gas	Water	Water

شکل ۱ - نحوه حرکت سطح تماس داخل یک سلول

ضربه‌ای یا فن انبساطی از هم مجزا شده است. در این حالت نیز در صورتی که رابطه فوق برقرار نباشد امکان حضور ناحیه خلأء وجود دارد که در این صورت امکان وقوع چهار حالت وجود دارد که توسط سه موج متمرکز به ترتیب یک موج ضربه‌ای یا فن انبساطی، یک ناحیه با فشار صفر، یک ناحیه خلأء، یک ناحیه با فشار صفر و یک موج ضربه‌ای یا فن انبساطی از هم مجزا شده‌اند. در رابطه (۱۹)  $C_w$  سرعت صوت در محیط آب است و از معادله

$$c_w = \sqrt{\frac{\alpha(p+b)}{\rho}} \quad (20)$$

به دست می‌آید.

(ج): گاز-آب: در این حالت در سمت چپ گاز و در سمت راست آب وجود دارد. در صورتی که معادله

$$u_r - u_l < \frac{2}{\gamma - 1} c_{gl} + \frac{2}{\alpha - 1} (c_{wr} + c_{wo}) \quad (21)$$

برقرار باشد در این صورت چهار حالت یکنواخت خواهیم داشت که توسط سه موج متمرکز به ترتیب، یک موج ضربه‌ای یا فن انبساطی، یک سطح تماس و یک موج ضربه‌ای یا فن انبساطی از هم جدا می‌شوند. اگر رابطه فوق برقرار نباشد امکان ایجاد ناحیه خلأء در محیط وجود دارد. در صورت ایجاد ناحیه خلأء یک فن انبساطی داخل محیط گاز، یک ناحیه

در صورتی که در جواب خلاء اتفاق افتد، این حالت توسط یک موج انبساطی به شرایط چپ و راست ارتباط می‌یابد. توجه شود که در اینجا فرض می‌کنیم که ستون آب تحمل کشش را ندارد ولی آب می‌تواند در فشار  $p_v$  و دانسیته متناظر با آن وجود داشته باشد. در این صورت برای شرایط خلاء در محیط آب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u^* - u_s &= \pm \frac{2c_s}{\alpha - 1} \left( \frac{c_0}{c_s} - 1 \right) \\ p^* &= p_v \\ \rho^* &= \rho_0 \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن  $\rho_0$  دانسیته آب در فشار صفر و  $c_0$  سرعت انتشار صوت در فشار صفر در آب است. برای محیط گاز داریم:

$$\begin{aligned} u^* - u_s &= \pm \frac{2c_s}{\gamma - 1} \\ p^* &= 0, \quad \rho^* = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

با حذف  $u^*$  از معادله (30) داریم:

$$-f^-(u_l, p_l, p^*) + f^+(u_l, p_r, p^*) - (u_l - u_r) = 0 \quad (34)$$

تعریف می‌کنیم:

$$F_1(p) = -f^-(u_l, p_l, p) + f^+(u_r, p_r, p) - (u_l - u_r) \quad (35)$$

بنابراین حل معادله ریمان متناظر با به دست آوردن ریشه معادله  $F_1(p)$  است. در اینجا از روش تکراری نیوتن استفاده می‌کنیم.

بنابر این باید مشتق تابع  $f^\pm$  را بر حسب  $P$  به دست آوریم:

$$\frac{df^\pm}{dp} = \begin{cases} \pm \frac{1}{c_s} \left( \frac{P+B}{p_s+B} \right)^{-(\alpha-1)/2\alpha} & p_v < p \leq p_s \\ \frac{W(\pm W - 2u_s) \pm c_s^2}{2\rho_s W(\pm W - u_s)^2} & p > p_s \end{cases} \quad (36)$$

در این صورت الگوریتم تکرار عبارت است از:

$$P^{n+1} = P^n - \left( \frac{F_1(P)}{dF_1(P)/dP} \right)^n \quad (37)$$

برای تخمین اولیه  $p^{(0)}$  می‌توان از معادله زیر استفاده نمود:

$$p^{(0)} = \frac{p_l c_r + p_r c_l + (u_l - u_r) c_l c_r}{c_l + c_r} \quad (38)$$

همگرایی این روش از مرتبه دوم است. با تعیین فشار  $P^*$  در روی سطح تماس از روش تکراری فوق می‌توان الگوی امواج و بنابراین نوع و قدرت آنها را تعیین کرد.

است. زیر نویس  $s$  برای حالت  $r$  یا  $l$  است و  $\pm W$  سرعت موج ضربه ای را در محیط آب و یا گاز است و  $\pm$  اشاره به جهت حرکت موج به سمت چپ و یا راست دارد. بنابر این در حالت وجود موج ضربه ای داریم:

$$u^* - u_s = \frac{p^* - p_s}{\rho_s (\pm W - u_s)} \quad (25)$$

با ترکیب سه معادله فوق و استفاده از معادلات حالت می‌توان سرعت انتشار موج ضربه ای را به صورت زیر به دست آورد:

$$W = c_s \sqrt{[(\alpha+1)(p^* + B) + (\alpha-1)(p_s + B)] / 2\alpha(p_s + B)} \quad (26)$$

در اینجا برای انتشار موج در محیط آب  $B = 331 \text{ lbar}$  و  $\alpha = 7$  و در محیط گاز  $B = 0$  و  $\alpha = \gamma$  است. در صورتی که شرایط چپ و راست منجر به ایجاد یک موج انبساطی شود چون تغییر ناپذیر ریمان معادلات حاکم در طول مشخصه‌ها ثابت‌اند خواهیم داشت:

$$u^* \pm \left( - \int \frac{c}{\rho} dp \right)^* = u_s \pm \left( - \int \frac{c}{\rho} dp \right)_s \quad (27)$$

که در آن  $c$  سرعت صوت در محیط است. برای یک موج انبساطی با استفاده از معادله (27) و معادله آیزنروویک

$$\frac{P^* + B}{\rho^{*\alpha}} = \frac{P_s + B}{\rho_s^\alpha} \quad (28)$$

به دست می‌آوریم:

$$u^* - u_s = \pm \frac{2c_s}{\alpha - 1} \left( \left( \frac{P^* + B}{\rho_s + B} \right)^{(\alpha-1)/2\alpha} - 1 \right) \quad (29)$$

با ترکیب معادلات (27) و (29) خواهیم داشت:

$$u^* - u_s = f^\pm(u_s, p_s, p^*) \quad (30)$$

که

$$f^\pm(u_s, p_s, p^*) = \begin{cases} \pm \frac{2c_s}{\alpha - 1} \left( \left( \frac{P^* + B}{p_s + B} \right)^{(\alpha-1)/2\alpha} - 1 \right) & p_v < p^* \leq p_s \\ \frac{P^* - p_s}{\rho_s (\pm W - u_s)} & p^* > p_s \end{cases} \quad (31)$$

## ۶- نتایج

در این حالت دو موج انبساطی در دو محیط انتشار می‌یابد. به علاوه یک ناحیه خلاء در مجاورت سطح تماس دو محیط تشکیل می‌شود. مقایسه نتایج به دست آمده برای این مثال و نتایج روش لاگرانژی و حل دقیق در شکل (۳) نمایش داده شده است. ناحیه خلاء در گاز و ناحیه مایع با فشار صفر در این شکل تطابق بسیار خوبی با نتایج حل دقیق و نتایج روش لاگرانژی دارد. بنابراین روش به کار گرفته شده می‌تواند نواحی خلاء و کاویتاسیون را تا حد معقولی مدل‌سازی کند.

### ۶-۲- لوله ضربه آبی

لوله ضربه آبی یک لوله فولادی است که از دو طرف مسدود شده است. در هر طرف لوله یک حسگر برای اندازه‌گیری فشارناشی از انفجار قرار داده می‌شود. در این لوله ماده منفجره در یک انتها و آب در قسمت دیگر لوله قرار می‌گیرد. در اثر انفجار موج ضربه ای ایجاد شده در لوله منتشر شده و با انتهای لوله و سطح تماس بین دو محیط گاز و مایع در انتهای دیگر اندر کنش خواهد کرد. در اینجا فرض می‌شود که ماده منفجره به صورت آبی به یک توده گاز پر فشار هم حجم تبدیل می‌شود و از فرایند احتراق صرف نظر می‌شود. انتظار می‌رود که فشار در انتهای لوله به مانند انعکاس موج ضربه‌ای از روی یک دیوار در داخل هوا هنگامی که موج به انتهای لوله می‌رسد ناگهان افزایش یافته و سپس با گذشت زمان به صورت آرام کاهش یابد. در این مثال قسمت عمده ای از فضای لوله توسط آب و قسمت محدودی از آن توسط گاز اشغال شده است. برای شبیه سازی این فرایند سلولهایی که در محیط گاز قرار دارند دارای فاصله یکسان بوده در صورتی که سلولهای واقع در محیط مایع با یک نسبت ثابت بزرگ می‌شوند. تعداد کل سلولها ۱۰۰ عدد است که از این تعداد ۴ سلول در محیط گاز و ۹۶ سلول در محیط آب واقع می‌شوند. شرایط اولیه دانسیته، سرعت و فشار به ترتیب به صورت زیر است:

$$Q_{t=0} = \begin{cases} (70.735, 0, 100692985.3) & 0 \leq x < L_1 \\ (1000, 0, 101325) & L_1 \leq x \leq L_2 \end{cases}$$

برای نشان دادن کارایی روش عددی ارائه شده در این مقاله در این قسمت به بررسی سه مثال مختلف پرداخته می‌شود. در مثال اول نتایج عددی این روش برای دو مسئله استاندارد ریمان در محیط گاز-مایع که توسط دیگر محققان برای تصدیق نتایج عددی استفاده شده است ارائه می‌شود. مثال دوم به بررسی جریان ایجاد شده در یک لوله ضربه آبی اختصاص دارد. هدف از ارائه این مثال بررسی توانایی این روش عددی در پیش بینی نواحی خلاء در جریان است. در انتها این روش در شبیه سازی انفجار کروی در زیر آب به کار گرفته می‌شود.

### ۶-۱- مسئله ریمان در سه محیط آب-گاز-خلأ

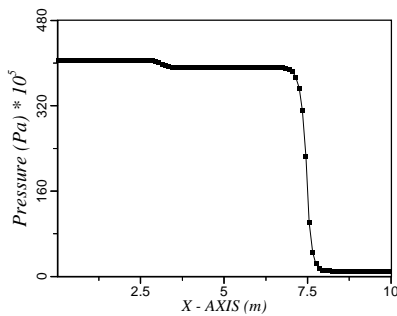
در این قسمت کارایی روش پیشنهادی با بررسی دو مثال لوله ضربه دو فازی مورد تصدیق قرار می‌گیرد. در این مورد آب و گاز در شرایط اولیه متفاوت در لحظه  $t = 0$  در دو طرف لوله قرار گرفته‌اند. با گذشت زمان سطح تماس بین دو فاز حرکت کرده و امواج ضربه‌ای و انبساطی در دو محیط منتشر می‌شوند. بسته به شرایط اولیه در دو طرف سطح تماس امکان وقوع خلاء با توجه به روابط ارائه شده در قسمت قبل تعیین می‌شود. در این محاسبات از صد سلول محاسباتی که به صورت یکنواخت در دو محیط توزیع شده‌اند استفاده شده است. شرایط اولیه برای مثال اول به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$U_{t=0} = \begin{cases} (50, 8, 4053000) & x < 5 \\ (1000, 41282, 5, 1013250) & x > 5 \end{cases}$$

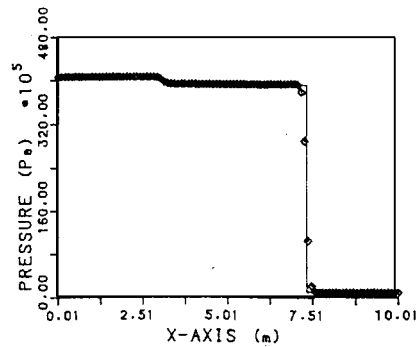
این شرایط اولیه متناظر با انتشار یک موج ضربه‌ای در محیط آب و یک موج انبساطی در محیط گاز است. در شکل (۲) نتایج به دست آمده از این حل عددی با نتایج روش لاگرانژی تانگ و حل دقیق (خطوط پر در شکل الف)) مقایسه می‌شود. همان طور که از این شکل مشخص است محل امواج با دقت خوبی محاسبه شده و قدرت تفکیک روش پیشنهادی هم مرتبه با روش لاگرانژی است. در مثال دوم شرایط اولیه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$U_{t=0} = \begin{cases} (20, -1000, 5066250) & x < 5 \\ (1002.23517, 1000, 5066250) & x > 5 \end{cases}$$





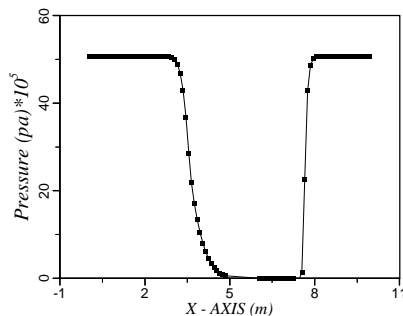
(ب)



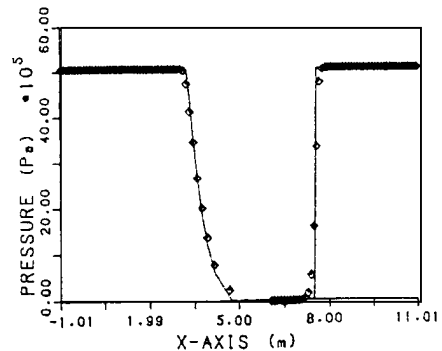
(الف)

شکل ۲ - توزیع فشار در لحظه  $t = 0.00151$  sec برای مسئله ریمان اول

الف- روش لاگرانژی [Tang] ب- روش حاضر با محدود کننده [min\_mod]



(ب)



(الف)

شکل ۳ - توزیع فشار در لحظه  $t = 0.00101$  sec برای مسئله ریمان دوم

الف- روش لاگرانژی [Tang] ب- محدود کننده [min\_mod]

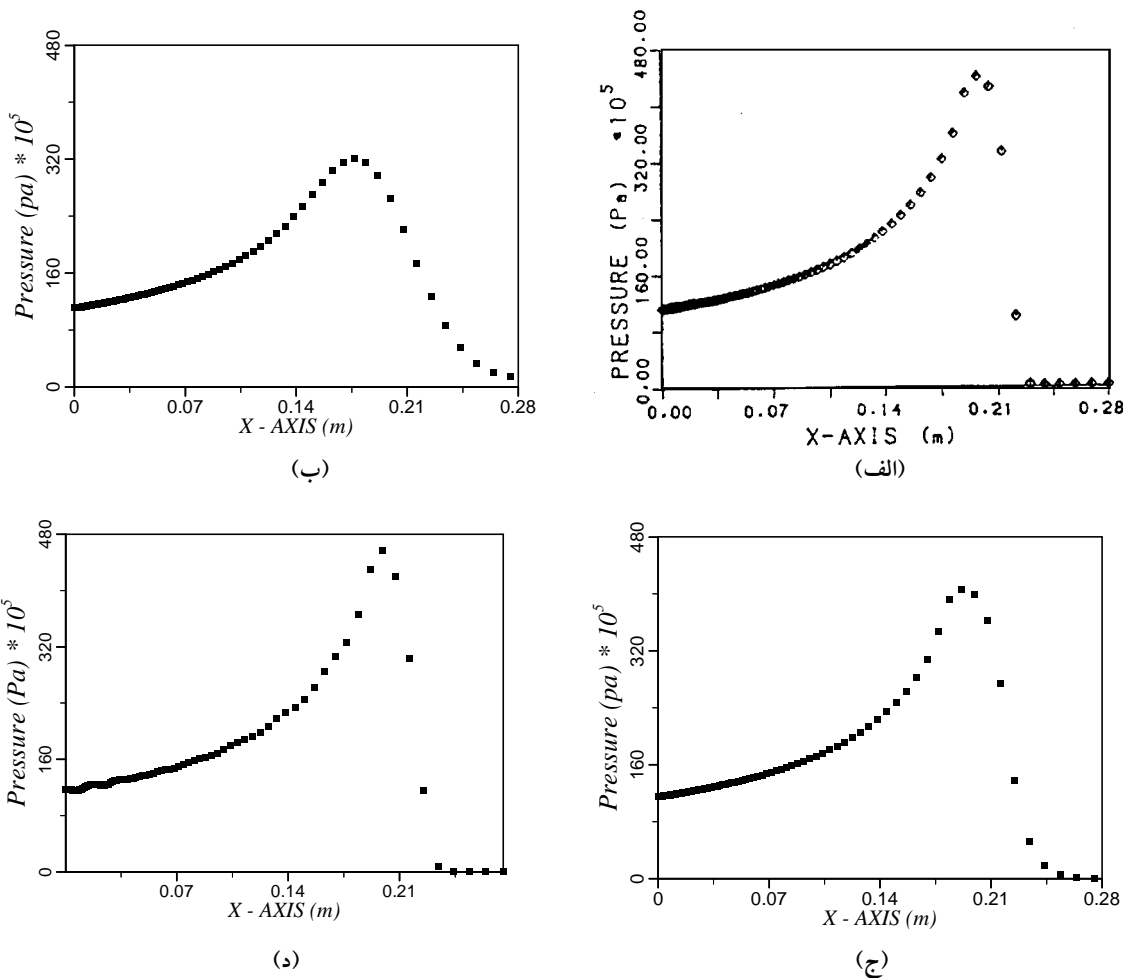
را علی‌رغم کم بودن تعداد سلولها در محیط گاز بخوبی نمایش می‌دهد. همچنین بهبود قدرت تفکیک ناپیوستگی با افزایش مرتبه دقت به خوبی در این شکل مشهود است.

شکل (۵) فشار در انتهای لوله ضربه در قسمت آب را بر حسب زمان نشان می‌دهد. اولین پالس فشار هنگام رسیدن موج ضربه‌ای به انتهای لوله پدید می‌آید. پس از برگشتن موج از انتهای لوله فشار کاهش می‌یابد و با رسیدن دوباره موج ضربه به انتهای لوله پالس دوم فشار پدید می‌آید و این حرکت تا از بین رفتن کامل موج ضربه‌ای ادامه می‌یابد. جالب توجه است که در فاصله‌های زمانی معین انتهای راست در شرایط خلاء قرار می‌گیرد. این فواصل برای روش لاگرانژی تانگ و روش به کار گرفته شده تقریباً یکسان است. نواحی خلاء ایجاد شده

که  $L_1 = 0.001$  و  $L_2 = 0.275$  در نظر گرفته می‌شود. همچنین  $\gamma = 2$  در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در دو انتها به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x=0 & \quad u=0 \\ x=L_2 & \quad u=0 \end{aligned}$$

در شکل (۴) نتایج به دست آمده از روش لاگرانژی تانگ نشان داده شده است همچنین نتایج حاصل از روش عددی حاضر با استفاده از دو محدود کننده مختلف برای مقایسه در این شکل ارائه می‌شود. در این اشکال فشار در طول لوله در لحظه  $t = 0.00013$  پس از انفجار نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است بر خلاف روش لاگرانژی روش حاضر با استفاده از تابع محدود کننده ون-لیر اندرکنش امواج منعکس شده از انتهای لوله در قسمت گاز و سطح تماس



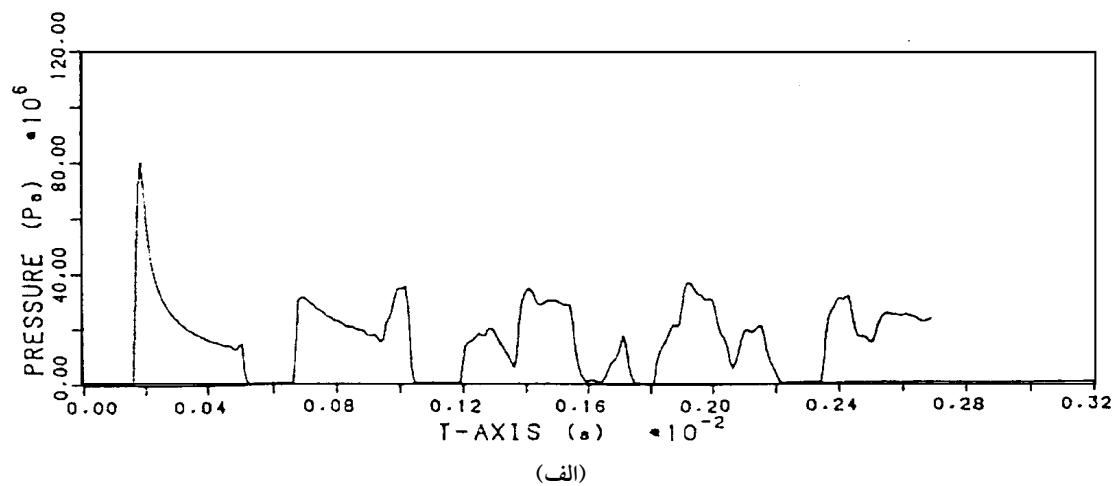
شکل ۴ - توزیع فشار در طول لوله در لحظه  $t = 0.00013$  الف- روش لاگرانژی تانگ ب: روش حاضر با مرتبه اول ج- روش حاضر با محدود کننده مین مود د- روش حاضر با محدود کننده ون لیر

دست آمده با برخی نتایج موجود خواهیم پرداخت. در این بررسی نیز مثل حالت‌های قبل به حل مسئله ریمان در هر مرز سلولی ولی این بار در مختصات کروی پرداخته می‌شود زیرا امواج پدید آمده در این حالت کروی‌اند. بنابراین در این بررسی وجود یک حل کننده ریمان برای حالت کروی اجتناب ناپذیر است. با این وجود چنین حل کننده‌ای تاکنون ارائه نشده است. همان طور که در بخش معادلات حاکم اشاره شد حل معادله حاکم در دستگاه کروی باعث ایجاد جمله چشمه در معادلات خواهد شد که حل دستگاه معادلات را با مشکل مواجه خواهد کرد. در اینجا جملات چشمه به کمک روش تقسیم اپراتورها [7] به حل عددی یک بعدی قبل اضافه می‌شوند. برای

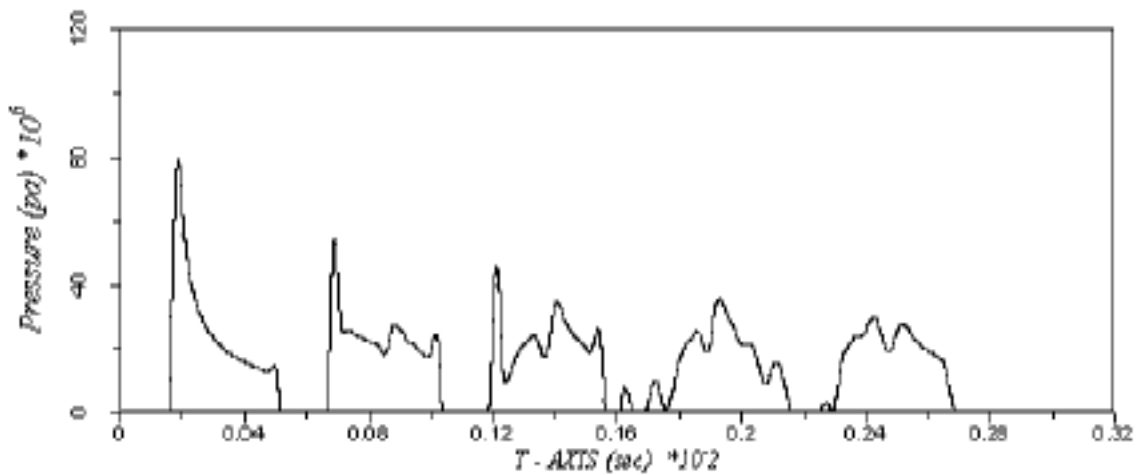
نسبت به زمان در طول لوله ضربه برای هر دو روش در شکل (۶) مقایسه شده است. اختلاف بین نتایج روش لاگرانژی و روش اویلری حاضر می‌تواند در اثر مدل به کار رفته برای نواحی کاویتاسیون باشد. شکل (۷) محل سطح تماس بین دو محیط و موقعیت موج ضربهای را بر حسب زمان نشان می‌دهد. همان گونه که مشاهده می‌شود این دو مکان در هر سه شکل کاملاً یکسان است.

### ۳-۶- انفجار در زیر آب

در این قسمت با استفاده از روش اشاره شده در بخشهای قبلی به بررسی مسئله انفجار در زیر آب و مقایسه نتایج به



(الف)



(ب)

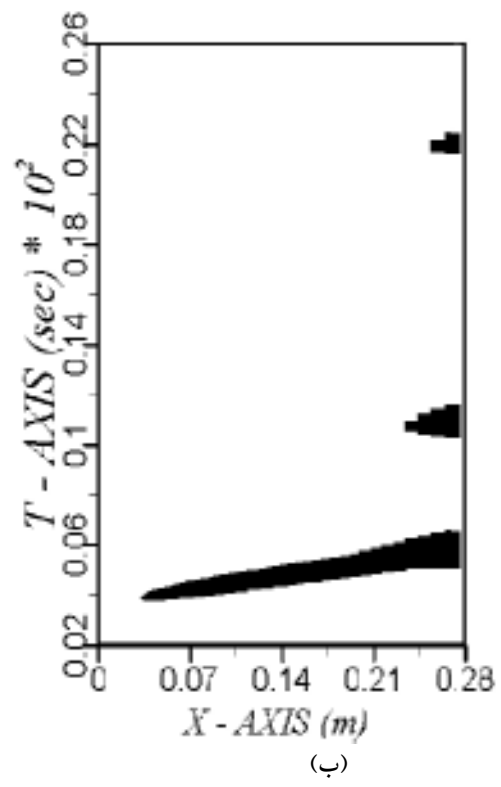
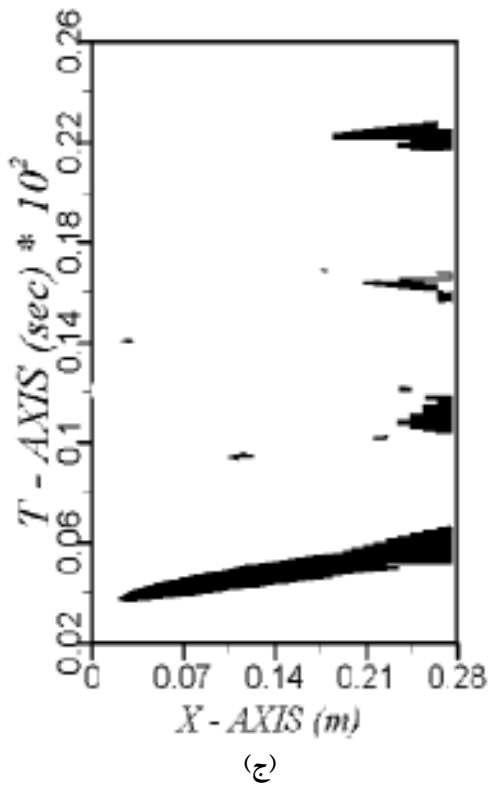
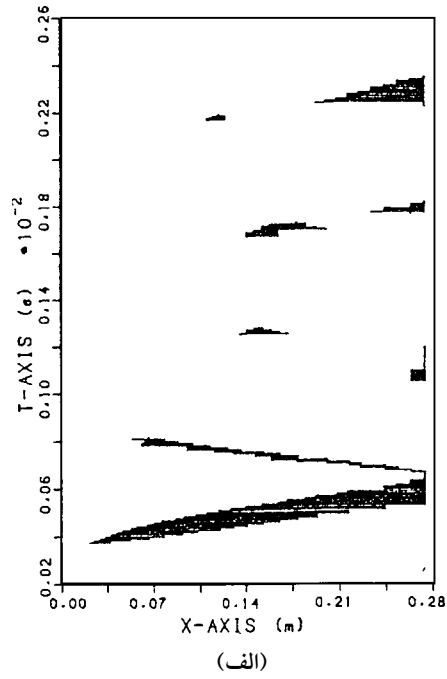
شکل ۵ - فشار در انتهای لوله ضربه بر حسب زمان الف- روش لاگرازی تانگ ب- روش حاضر با محدود کننده ون لیر

است و متناظر با شرایط در نظر گرفته شده در مرجع [۹] است. برای مقایسه نتایج حل عددی حاضر با نتایج قبلی متغیرهای سرعت و چگالی به صورت بدون بعد نشان داده شده‌اند. برای بدون بعد کردن سرعت از نسبت سرعت به سرعت صوت درون مایع  $c_0 = 1647 \text{ m/sec}$  استفاده می‌شود و برای بی بعد کردن چگالی از نسبت چگالی به چگالی اولیه مایع

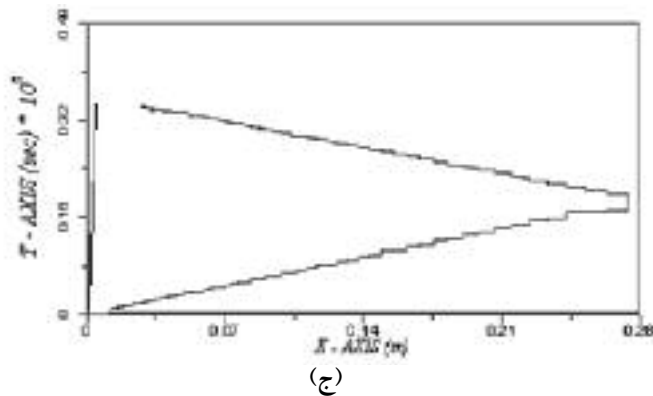
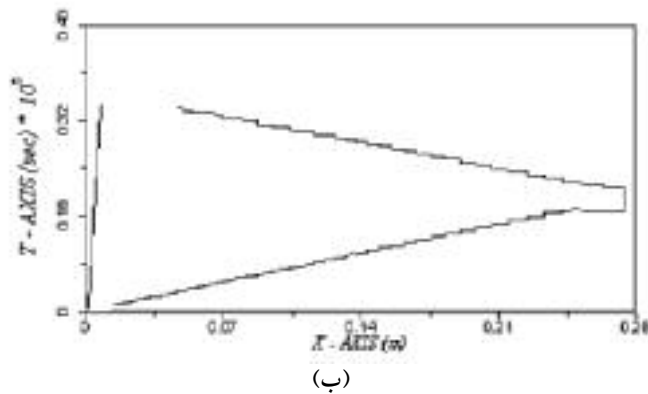
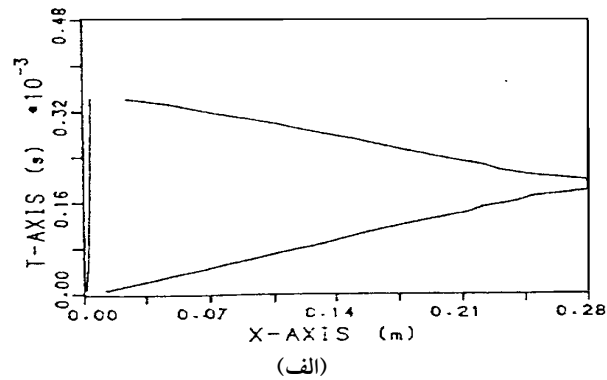
$$\rho_0 = 1007 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

در صورت استفاده از معادله حالت تیت ضرایب  $B = 4921.154 \text{ bar}$  و  $\alpha = 5.5$  برای سیال پیرامون حباب گاز استفاده می‌شود. در اینجا نیز نتایج حاصل از کار انجام شده و

شبیه‌سازی این فرآیند سلولهایی که در محیط گاز قرار دارند دارای فاصله یکسان بوده در صورتی که سلولهای واقع در محیط آب با یک نسبت ثابت بزرگ می‌شوند. تعداد کل سلولها ۲۰۰۰ عدد است که از این تعداد ۱۰۰۰ عدد در محیط گاز و بقیه در محیط آب واقع می‌شوند. در مطالعه‌ای که در این مقاله صورت گرفته گاز در شرایط اولیه در فشار  $P_0$  و دمای  $T_0$  با شعاع کروی  $R_0$  است که توسط یک غشای کروی از مایع در فشار اتمسفر جدا شده است. توجه شود که در اینجا نیز فرض می‌شود انفجار به صورت آنی است و فرآیند احتراق در نظر گرفته نمی‌شود. شرایط اولیه گاز و مایع در جدول (۱) داده شده



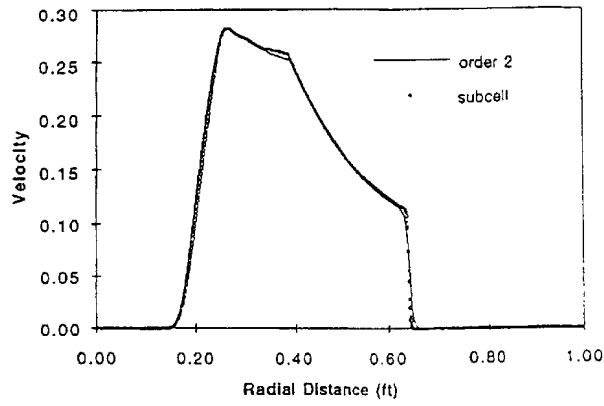
شکل ۶ - نواحی خلاء ایجاد شده در طول زمان در لوله ضربه  
 الف- روش لاگراژی تانگ ب- روش حاضر با محدود کننده مین مود ج- روش حاضر با محدود کننده ون لیر



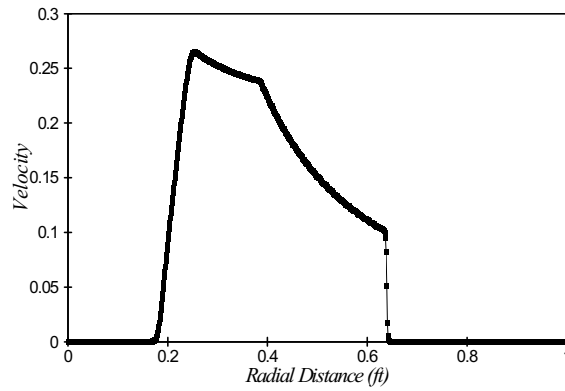
شکل ۷- موقعیت سطح تماس (خط سمت چپ) و موقعیت موج ضربه‌ای (خط سمت راست)  
الف- روش لاگرانژی تانگ ب- روش حاضر با محدود کننده مین مود ج- روش حاضر با محدود کننده ون لیر

جدول ۱- شرایط اولیه در انفجار زیر آب

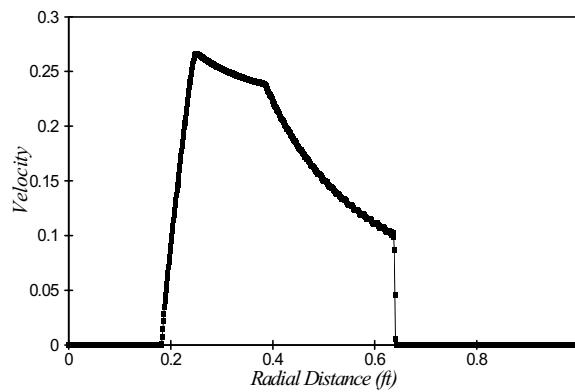
$R_0 = 0.3 \text{ m}$	شعاع ماده منفجره
$P_g = 9000 \text{ atm}$	فشار اولیه گاز
$U_g = 0 \text{ m/sec}$	سرعت اولیه گاز
$\rho_g = 1270 \text{ kg/m}^3$	چگالی اولیه گاز
$T_g = 2500 \text{ K}$	دمای اولیه گاز
$\gamma = 1.4$	نسبت گرمای ویژه
$P_1 = 1 \text{ atm}$	فشار اولیه مایع
$U_1 = 0 \text{ m/sec}$	سرعت اولیه مایع
$\rho_1 = 1007 \text{ kg/m}^3$	چگالی اولیه مایع



(الف)

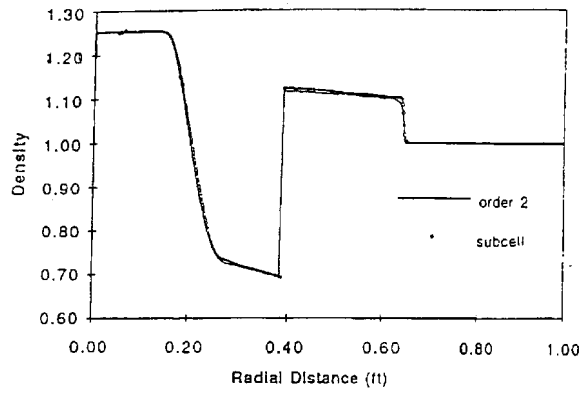


(ب)

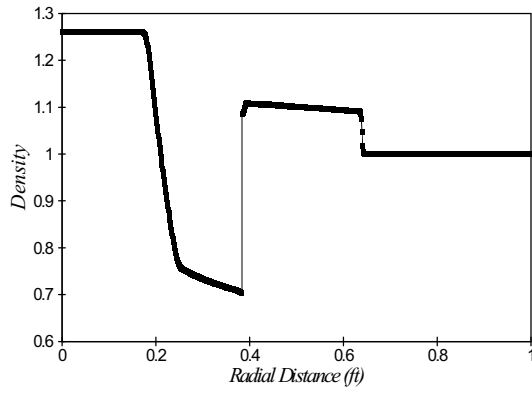


(ج)

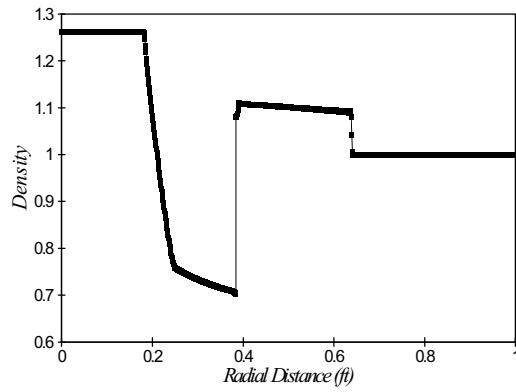
شکل ۸ - توزیع سرعت در نقاط مختلف سیال در لحظه  $t = 45.5 \mu\text{sec}$  پس از شروع انفجار  
 الف- کار انجام شده توسط چن و کوکچی ب- روش حاضر با محدود کننده مین مودج- روش حاضر با محدود کننده ون لیر



(الف)



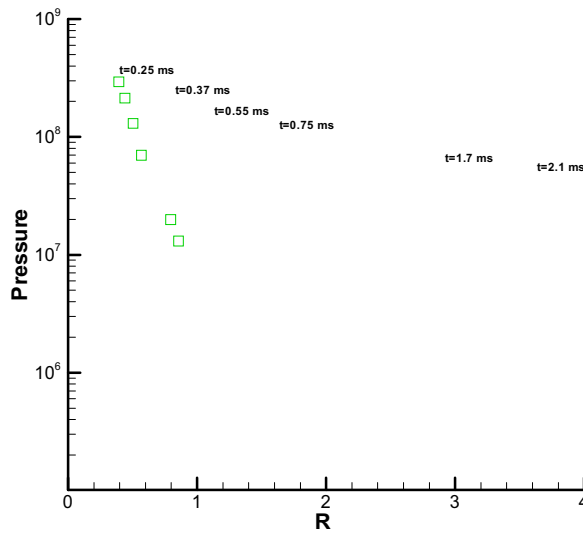
(ب)



(ج)

شکل ۹ - توزیع چگالی در نقاط مختلف سیال در لحظه  $t = 45.5 \mu\text{sec}$

الف- کار انجام شده توسط چن و کوکچی ب- روش حاضر با محدود کننده مین مود ج- روش حاضر با محدود کننده ون لیر



شکل ۱۰- فاز اندرکنش بین موج ضربه‌ای و سطح تماس دو محیط در لحظات اولیه انفجار کروی در زیر آب  
علامت مربع موقعیت سطح تماس را در زمانهای مشخص شده نمایش می‌دهد

در گاز منتشر می‌شود ( $t = 1.7\text{ms}$ ). این فرایند با رشد حباب به دفعات تکرار شده و در هر اندرکنش امواج ضعیفتری در فصل مشترک دو سیال ایجاد می‌شود.

#### ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش عددی برای بررسی جریانهای چند سیالی تراکم پذیر بر روی شبکه‌های اویلری ابداع شد. توانایی این روش در بررسی انتشار امواج ضربه‌ای و انبساطی در محیطهای چند سیالی با ارائه چند مثال نشان داده شد. مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج دیگران توانایی و قدرت تفکیک این روش را نسبت به روشهای قبلی نشان می‌دهد. همچنین این روش قادر به پیش بینی امکان ایجاد نواحی خلاء در اثر پدیده کاویتاسیون با تقریب قابل قبول است. با توجه به اینکه در این روش معادلات در دو محیط مجزا حل می‌شوند قابلیت تعمیم این متد به حالت‌های چند بعدی چندان دور از انتظار نیست و تحت بررسی است.

نتایج حاصل از روش مرتبه دوم چن [۹]<sup>۱۰</sup> و روش زیر سلولی کوکچی [۱۰]<sup>۱۶</sup> برای مقایسه در شکل‌های (۸) و (۹) در لحظه  $t = 45.5\mu\text{sec}$  آورده شده است. همان طور که در این شکلها دیده می‌شود توزیع سرعت و چگالی در همه شکلها با همدیگر سازگارند ولی روش حاضر با قدرت تفکیک بهتری توانسته است موج ضربه‌ای را تسخیر کند.

رخدادهای فیزیکی بعدی این پدیده در شکل (۱۰) نشان داده شده است. همان طور که از شکل مشخص است این فرایند با انتشار یک موج ضربه‌ای به محیط مایع و یک موج انبساطی در حباب شروع می‌شود. موج انبساطی از مرکز حباب منعکس شده و به سمت سطح تماس دو محیط مجدداً حرکت میکند ( $t = 0.37\text{ms}$ ). در اثر اندرکنش با سطح تماس این موج انبساطی به صورت یک موج تراکمی منعکس شده که در نهایت به صورت یک موج ضربه‌ای در حباب منتشر می‌شود ( $t = 0.55\text{ms}$ ). این موج ضربه‌ای از مرکز حباب منعکس شده و با سطح تماس دو محیط اندرکنش می‌کند. در اثر این اندرکنش یک موج ضربه‌ای ثانویه در آب و موج ضربه‌ای دیگر



1. Kirkwood – Bethe
2. Penney-Dasgupta
3. Cole
4. Flores
5. Glimm
6. Tang
7. Riemann problem
8. front tracking

9. Clark
10. Tait
11. Godunov
12. Van – leer
13. min – mod
14. monotonized central difference
15. Chen
16. Cocchi

## مراجع

1. Kirkwood, J. G., and Bethe, H. A., "Basic propagation theory," *OSRD.*, pp. 588-595, 1942.
2. Penny, W. G. and Dasgupta, H. K., British Report, RC-333, 1942.
3. Cole, R. H., *Underwater explosion*, Princeton University press, Princeton, 1965
4. Flores, J., and Holt, M., "Underwater Explosion in Shallow Water," *J.Comput. phys.*, Vol. 44, pp. 377-384, 1981.
5. Tang, H. S. , and Huang, D., "A Second - Order Accurate Capturing Scheme for 1 D Inviscid Flows of Gas and Water with Vacuum Zones," *J. Comp. Phys.*, Vol. 128, pp.301-318, 1996.
6. Clark,J. F., Kassoy, D., and Rand Riley, N., "On the Direct Initiation of a Plane Detonation Wave," *Proc.R.Soc.London.A*, Vol.408, pp.129-148, 1986.
7. Van Leer, B., "A second order method for investigation shock waves," *J. Comput.Phys*, Vol. 32, pp. 101-110, 1979.
8. R.J. Leveque. Numerical Method for Conservation Laws, Birkhauser-Verlag, 1990.
9. Chen, T. J., and Cooke, C. K., "A new averaging scheme for the Riemann problem in pure water", *Math1 Comp. Modelling*, Vol. 25, No. 3, pp.25-36, 1997.
- 10.Cocchi, J.P.,Saurel, R., "A Riemann Problem Based Method for the Resolution of Compressible Multimaterial Flows," *J.Computational Physics*, No.137, pp.265-298, 1997.