

# تعیین سرعت ناپایداری دینامیکی بال بدون انحراف در جریان زیرصوت با منظور کردن اثرات تراکم پذیری

رامین قاسمی اصل\* و بهزاد قدیری\*\*

بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

(دریافت مقاله: ۸۳/۱۰/۳۰ - دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۷/۲۹)

**چکیده** - در این مقاله معادلات حرکت یک بال الاستیک با دو درجه آزادی (خمش و پیچش) با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج شده است. نیروها و ممانهای آیرودینامیکی با فرض جریان غیردائم پتانسیل و تراکم ناپذیر در جریان زیر صوت توسط نظریه نوارهای باریک به دست آمده و سپس اثرات تراکم پذیری به آنها اعمال شده است. تغییر مکانهای بال، ناشی از خمش و پیچش بوده که برای تغییر مکانهای جابه‌جایی خمش و زاویه‌ای پیچش از روش مودهای فرضی بهره گرفته شده است. معادلات آیروالاستیکی با برنامه رایانه‌ای تدوین شده از طریق مقادیر ویژه و روش V-g حل شده‌اند. نتایج حاصل از آزمایشات انجام شده روی یک سری از بالها با روش محاسباتی ارائه شده مقایسه شده که تطبیق مناسبی بین آنها با یکدیگر وجود دارد.

واژگان کلیدی: ناپایداری دینامیکی بال، فلاتر، آیروالاستیسته، مودهای فرضی، روش V-g

## Determination of Dynamic Instability Speed of an Unsweep Wing in Subsonic Flow Including Compressibility Effects

R. Ghasemi Asl, and B. Ghadiri

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University

**Abstract** In this paper, the equation of motion of an elastic 2 DoF wing model has been derived using Lagrange's method. The aerodynamic loads on the wing were calculated via the Strip-Theory and the effect of compressibility was included. Wing deflections due to bending and twist motions were determined using the Assume-Mode method. The aeroelastic equations were solved numerically using the V-g method. The results obtained for different types of wings were in good agreement with experimental data.

\*\* - استادیار

\* - دکترای مهندسی مکانیک

فهرست علائم

|   |            |  |               |
|---|------------|--|---------------|
| عدد ماخ فلاتر حاصل از آزمایش تجربی            | $M_e$      | فاصله بی بعد شده بین محور الاستیکی و نصف وتر،      | a             |
| عدد ماخ فلاتر حاصل از روش مقاله               | $M_f$      | مولفه حقیقی مقدار ویژه                             |               |
| ماتریس اینرسی                                 | [M]        | موقعیت مرکز آیرودینامیکی                           | $aC_n$        |
| تعداد درجات آزادی سیستم                       | n          | مرکز آیرودینامیکی                                  | AC            |
| مختصات عمومی مستقل                            | $q_i$      | نصف وتر، مولفه موهومی مقدار ویژه                   | b             |
| مولفه جریان منظم پایینی                       | Q          | وتر در هر مقطع از بال                              | C             |
| نیروهای اعمال شده به سیستم                    | $Q_i$      | مرکز ثقل   | CG            |
| طول بال                                       | S          | تابع تئودرسون                                      | $C(k)$        |
| انرژی جنبشی بال                               | T          | ضرایب ثابت توابع شکل خمش و پیچش                    | $C_1, C_2$    |
| لبه فرار                                      | TE         | شیب ضریب نیروی برا                                 | $C_{l\alpha}$ |
| انرژی پتانسیل بال                             | U          | نیروی برا در یک مقطع بال                           | dC            |
| سرعت جریان هوا                                | V          | ممان آیرودینامیکی در یک مقطع بال                   | dM            |
| سرعت فلاتر حاصل از آزمایش                     | $V_e$      | فاصله بی بعد شده بین صفر و یک برای موقعیت          | e             |
| سرعت فلاتر محاسباتی                           | $V_f$      | محور الاستیکی                                      |               |
| فاصله بی بعد شده بین محور الاستیکی و مرکز ثقل | $x_\alpha$ | محور الاستیکی                                      | EA            |
| فاصله از ریشه بال                             | y          | ضریب صلبیت سازه‌ای بال                             | EI            |
| محورهای دستگاه مختصات                         | Y,Z        | فرکانس فلاتر حاصل از روش مقاله                     | $f_f$         |
| ماتریس تغییر مکان خطی و زاویه‌ای              | Z          | فاصله بی بعد شده بین صفر و یک برای موقعیت مرکز ثقل | g             |
| کار مجازی                                     | $\Delta W$ | ضریب صلبیت پیچشی بال                               | GJ            |
| طول بی بعد شده بال                            | $\eta$     | خمش بال در هر فاصله y از ریشه بال                  | h             |
| پیچش بال در هر فاصله y از ریشه بال            | $\theta$   | مختصه مستقل خمش متناظر با $\psi_1$                 | $h_1$         |
| مختصه مستقل پیچش متناظر با $\phi_1$           | $\theta_1$ | تعداد درجات آزادی سیستم، $\sqrt{-1}$               | i             |
| مقدار ویژه                                    | $\lambda$  | ممان اینرسی قطبی بر واحد طول                       | $I_p$         |
| دانسیته هوا                                   | $\rho$     | عدد فرکانس بی بعد شده                              | k             |
| مود فرضی برای خمش                             | $\psi_1$   | ماتریس سختی سازه‌ای                                | [k]           |
| مود فرضی برای پیچش                            | $\phi_1$   | نیروی برآی بال                                     | L             |
| فرکانس زاویه‌ای                               | $\omega$   | لبه حمله   | LE            |
| بالانویس ها:                                  |            | جرم در واحد طول                                    | m             |
| مشتق مکانی                                    | '          | نصف وتر در هر مقطع بال                             | mC            |
| مشتق زمانی                                    | °          | ممان آیرودینامیکی بال حول محور الاستیکی            | M             |

سازه هواپیما در موضوع دینامیک پرواز تحت تاثیر نیروها و بارهای آیرودینامیکی، تغییر شکل داده و این امر باعث تغییر بارهای آیرودینامیکی می‌شود. هر چه میزان الاستیسیته و انعطاف پذیری سازه هواپیما خصوصا سازه بال بیشتر باشد، تغییر شکل خارجی سطوح و در نتیجه تغییر بارهای آیرودینامیکی افزایش می‌یابد و پدیده واگرایی، نوسانات شدید و کنترل معکوس را پدید می‌آورد [۱]. نوع خیلی خطرناک ارتعاشات خود تحریک فلاتر نامیده می‌شود. این ارتعاشات از طریق بالانس نیروهای آیرودینامیکی، الاستیکی و اینرسی مؤثر بر سازه، در جریان هوا به دست می‌آیند. برخی انحرافات تصادفی از حالت تعادل ارتعاشاتی حاصل می‌شوند که توسط انرژی جریان حفظ شده، و می‌توانند با تخریب سازه بال افزایش یابند. هر چند در اغلب هواپیماهای قدیمی با اقدامات و تدابیر نسبتا ساده مثل بالانس جرمی سطح کنترل و انتخاب صلبیت لازم سطح بالابرنده در برابر پیچش، در اکثر موارد موفق شده اند امنیت هواپیما را در برابر پدیده فلاتر تامین کنند، اما برای هواپیماهای مدرن امروزی پدیده فلاتر به مراتب پیچیده‌تر شده است. لذا در این رابطه تحلیل آیروالاستیسیته سازه در مرحله طراحی اولیه هواپیمای جدید بسیار مهم است [۲].

اولین بررسی منسجم برای بال در سال ۱۹۳۴ توسط تئودورسون<sup>۱</sup> برای پدیده فلاتر با کمک آیرودینامیک غیردائم تحلیلی در جریان سیال پتانسیل تراکم ناپذیر زیرصوت برای بالواره نوسانی دو و سه درجه آزادی صورت پذیرفته است [۳]. در زمینه برآورد ضرایب آیرودینامیکی بالواره نوسانی علاوه بر تئودورسون، اریکسون<sup>۲</sup> و ردینگ<sup>۳</sup>، کارتا<sup>۴</sup> و هاریس<sup>۵</sup> نیز فعالیتهائی داشته‌اند. اریکسون و ردینگ یک نظریه شبه دائم را تشریح کرده‌اند که اثرات رفتار نوسانی در یک زمان مجزای واقع در گذشته، متمرکز شده و اثرات جریان شتاب یافته (ناشی از پیچش) توسط یک تأخیر زمانی معادل بیان می‌شود [۴]. کارتا تعمیم نتایج تجربی پیچش نوسانی سینوسی مربوط به بالواره NACA0012 را پیشنهاد کرد [۵]. وی فرض کرده که

ضرایب نیروی وارد بر بالواره را می‌توان برحسب توابعی از زوایای حمله، سرعت و شتاب زاویه‌ای بیان کرد. در روش تقریبی هاریس هر چند که به صورت نیمه تجربی ارائه شده، اما همبستگی خوبی با نتایج تجربی مربوط به مقاطع دارد که در حقیقت بسط معادلات تئودورسون است [۶].

در دهه اخیر بررسی آیروالاستیسیته بالواره<sup>۶</sup> تحت تاثیر نیروهای آیرودینامیکی غیردائم توسط معادلات تئودورسون بر مبنای نوسانات در چرخه محدود<sup>۷</sup> مورد توجه بوده که در محاسبه نیروهای آیرودینامیکی غیردائم از معادلات تحلیلی تئودورسون [۳] استفاده شده است [۷، ۸ و ۹]. پرایس<sup>۸</sup> یک بالواره دو درجه آزادی (خمش و پیچش) را با حرکت آزاد در جهت گام<sup>۹</sup> به صورت یک مسئله غیرخطی در جریان سیال تراکم ناپذیر تحلیل کرده است. رفتار غیرخطی بالواره مربوط به رفتار سختی سازه‌ای بالواره تحت تاثیر زاویه حمله است. این اثر در دو محدوده زاویه حمله، خطی بوده اما حد فاصل آنها مقدار ثابتی است که در نهایت این موضوع، رفتار غیرخطی را برای سختی سازه‌ای در بردارد [۷]. هر چند مسئله به سه ناحیه خطی قابل تفکیک بوده که با حل معادلات دینامیکی به صورت انتگرالی در حوزه زمانی به صورت عددی، مرز ناپایداری دینامیکی بال استخراج شده است. در سازه‌ای مشابه سیستم غیرخطی پرایس، با منظور کردن یک فنر غیرخطی روی بالواره و با کمک معادلات تئودورسون نسبت به حل معادلات برای سیستم دو درجه آزادی (خمش و پیچش) به منظور جلوگیری از وقوع فلاتر تحت تاثیر پاسخهای غیرخطی سیستم اقدام شده است [۸]. در تحلیل بالواره دو درجه آزادی با کمک آیرودینامیک غیردائم و معادلات تئودورسون برای تحلیل سرعت فلاتر، فرمولبندی معادلات به صورت اعداد مختلط ارائه شده است [۹]. این معادلات با کمک عدد فرکانس بی بعد شده (k) به عنوان مسئله مقدار ویژه مطرح شده و با ارتباط این معادلات با کدهای طراحی سازه‌ای، زمینه‌ای را برای حل همزمان معادلات ارائه می‌کند. در تعیین مرز ناپایداری بال همگام با روشهای تحلیلی روشهای عددی هم بسط و گسترش

دلیل وجود همزمان حرکت پیچشی و خمشی در بال است. در این مقاله برای بررسی پدیده فلاتر، فرض شده بال مورد نظر دارای دو درجه آزادی (خمش و پیچش) بوده و به صورت تیر یک سر درگیر با اتصال صلب به بدنه است که طول وتر بال از ریشه تا نوک تغییر کرده و محور الاستیک به صورت پیوسته است. در این حالت جابه‌جایی بال با دو مولفه خمش و پیچش توصیف می‌شود. یعنی بال حین جابه‌جایی تاب برنمی‌دارد و شکل وتر بال تغییر نمی‌کند. همچنین جریان سیال تراکم‌پذیر زیر صوت بوده و معادله حاکم جریان پتانسیل غیردائم در محدوده رفتار خطی برای اغتشاشات کوچک است.

تحت فرضیات ارائه شده می‌توان در یک مقطع بال که در شکل (۱) نشان داده شده نسبت به نوشتن معادلات آیروالاستیکی بال مشخص شده در شکل (۲) در جریان سیال تراکم‌ناپذیر زیر صوت اقدام کرد.

معادله دینامیکی بال حول محور الاستیکی بدون در نظر گرفتن استهلاك سازه‌ای بیان می‌شود. با این شرایط معادله لاگرانژ برای بال به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

برای یک تیر یک سر درگیر که تحت تأثیر خمش و پیچش است انرژی جنبشی و پتانسیل به صورتهای زیر نوشته می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^s [m(\dot{h} + b x_\alpha \dot{\theta})^2 + I_p \dot{\theta}^2] dy \quad (2)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^s \left[ EI \left( \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)^2 + GJ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3)$$

برای محاسبه سرعت فلاتر از روش موده‌های فرضی استفاده شده که در این جا از یک مود برای خمش و پیچش استفاده شده است:

$$h = h_1 \Psi_1 \quad (4)$$

$$\theta = \theta_1 \Phi_1 \quad (5)$$

با کمک پارامتر بی‌بعد  $\eta = \frac{y}{s}$ ، و معادلات (۲) و (۳) سمت چپ معادله لاگرانژ به دست می‌آید.

$$[M] \ddot{Z} + [k] Z = Q_i \quad (6)$$

که در آن مولفه برداری  $Z$  و ماتریسهای  $M$  و  $K$  به صورت

یافته‌اند. روشهای عددی مولفه‌های آیرودینامیکی و سازه‌ای بال را در حوزه زمانی مورد مطالعه قرار می‌دهد. هر چند در دهه اخیر عمدتاً هر دو روش مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰]. ضمن اینکه در موضوعات تعیین سطوح کنترلی مناسب برای بال هواپیما بهره‌گیری از معادلات تئودورسون نیز مورد توجه بوده است [۱۱].

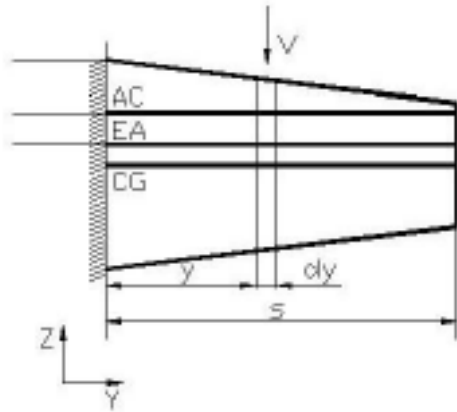
برای محاسبه سرعت فلاتر بال هواپیما بر مبنای جریان غیر دائم برای تحلیل ناپایداری دینامیکی بال از طریق بسط اطلاعات موجود برای بالواره با کمک نظریه نوارهای باریک از روشهای توسعه یافته نیز بهره گرفته شده است [۱۲ - ۱۴].

هرچند با بررسی به عمل آمده بین نتایج تجربی و محاسباتی متعدد در تعیین میزان سرعت فلاتر بال، متاخرین عنوان کرده‌اند که مرتبه خطا در محاسبه سرعت فلاتر برای حالت تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر (معادلات تئودورسون) به

صورت  $\frac{1}{4} (\sqrt{1-M^2})$  است [۱۵ و ۱۶]. در چنین حالتی اگر با یک بررسی علمی بتوان نسبت به اعمال اثرات تراکم‌پذیری در معادلات تئودورسون اقدام کرد، می‌توان یک ابزار مناسب را برای برآورد سرعت فلاتر بال مهیا کرد. لذا در این مقاله سعی شده نسبت به تعیین سرعت فلاتر بال بدون انحراف<sup>۱</sup> با دو درجه آزادی (خمش و پیچش) با استفاده از آیرودینامیک غیر دائم در جریان زیرصوت با اعمال اثرات تراکم‌پذیری و با فرض پیوستگی بال از نظریه نوارهای باریک و روش موده‌های فرضی بدون حضور استهلاك سازه‌ای گام برداشته شود.

## ۲- نظریه

هرگاه بال در معرض جریان هوا قرار گیرد در سرتهای کم جریان هوا، ارتعاش حاصله در بال میرا می‌شود. با افزایش سرعت جریان، ارتعاش ایجاد شده میرا نشده و بر دامنه آن افزوده می‌شود. اگر سرعت جریان هوا به حدی برسد که ارتعاش ایجاد شده در بال کاملاً میرا نشود و هر لحظه، به دامنه آن اضافه شود، به علت نوسانات به وجود آمده، پدیده شکست بال اتفاق می‌افتد. این پدیده فلاتر نامیده می‌شود [۱۷]. فلاتر به



شکل ۲- نمای عمودی بال

بال به صورت یک سری نوارهای باریک به عرض  $dy$  در نظر گرفته شده و هر کدام یک از این نوارها به طور مستقل به صورت یک بالواره منظور می‌شوند. نیروی برا و ممان حاصل از هر یک نوارها از معادلات تئودورسون [۳] به دست آمده و سپس باهم جمع می‌شوند تا نیروی برا و ممان وارده به بال به دست آیند. مقدار  $Q_1$  بدین نحو در معادله لاگرانژ جایگزین می‌شود. نیروی برا و ممان آیرودینامیکی در جریان سیال تراکم‌ناپذیر زیر صوت برای یک بالواره از معادلات تئودورسون به صورت زیر بیان می‌شود:

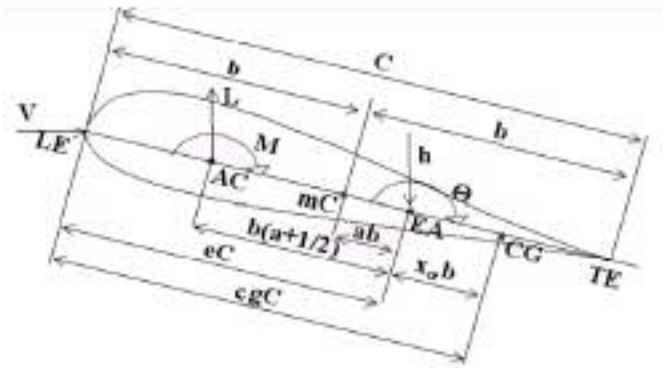
$$dL = \pi \rho b^2 [\ddot{h} + V\dot{\theta} - b\ddot{\theta}] + 2\pi \rho V C(k) [\dot{h} + V\dot{\theta} + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\theta}] \quad (10)$$

$$dM = \pi \rho b^2 [ba\ddot{h} - Vb(\frac{1}{2} - a)\dot{\theta} - b^2(\frac{1}{8} + a^2)\ddot{\theta}] + 2\pi \rho V b^2 (a + \frac{1}{2}) C(k) [\dot{h} + V\dot{\theta} + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\theta}] \quad (11)$$

$$C(k) = F(k) + iG(k), \quad k = \frac{\omega b}{V} \quad (12)$$

در معادله (۱۰) مقدار مثبت نیروی برا به سمت بالا و  $C(k)$  تابع تئودورسون بوده که  $F$  به صورت فیزیکی بیانگر مولفه کاهنده نیروی برا به علت نوسان بوده،  $iG$  بیانگر تأخیر فاز بین حرکت نوسانی بالواره و نیروهای آیرودینامیکی حاصله بوده و  $\omega$  بیانگر فرکانس نوسان بالواره است [۳].

به طور کلی در معادله تئودورسون ضرایب نیروی برا و ممان آیرودینامیکی برای جریان روی مقاطع مختلف بال به



شکل ۱- نماد گذاری مقطع بال در راستای وتر

زیر است :

$$\underline{Z} = [h_1 \quad \theta_1] \quad (7)$$

$$[M] = S \int_0^1 m \begin{bmatrix} \Psi_1^2 & bx_\alpha \Phi_1 \Psi_1 \\ bx_\alpha \Phi_1 \Psi_1 & (\frac{I_p}{m} + b^2 x_\alpha^2) \Phi_1^2 \end{bmatrix} d\eta \quad (8)$$

$$[k] = \frac{1}{S} \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{EI}{S^2} \Psi_1'^2 & 0 \\ 0 & GJ \Phi_1'^2 \end{bmatrix} d\eta \quad (9)$$

در معادلات فوق مقادیر  $m$ ,  $I_p$ ,  $GJ$ ,  $EI$  از ریشه تا نوک بال تابعی از  $\eta$  بوده که بر حسب آن تغییر می‌کنند. سمت راست معادله (۱) اثر نیروهای خارجی اعمال شده به بال است. در این مقاله نیروهای آیرودینامیکی ناشی از جریان هوا روی بال به صورت نیروی برا و ممان آیرودینامیکی مورد توجه است که از نظریه نوارهای باریک برای محاسبه آنها بهره گرفته می‌شود. نظریه مذکور یک روش تقریبی است که در آن کاربرد، برای جریان دوبعدی (بالواره بال نامحدود) نتایج معلوم شده‌ای را برای محاسبه نیروهای آیرودینامیکی، روی یک سطح دارای نیروی برا در یک بال نامحدود اعمال می‌کند. ضرورت این تقریب ملحوظ کردن موقعیت هر نوار در طول بال است. مشخصه بال، یکنواختی آن در طول بال است. همچنین فرض می‌شود نیروی برا در هر نوار در طول بال فقط وابسته به جریان منظم پایینی<sup>۱۱</sup> مربوط به خود است که از یک نظری آیرودینامیک دو بعدی گرفته می‌شود و از اثرات جریان منظم پایینی هر یک از نوارهای دیگر مستقل شده است [۱ و ۱۸]. لذا

$$\frac{C_{L\alpha}}{2\pi} b \quad (16)$$

هر گاه موقعیت مرکز آیرودینامیکی  $aC_n$  اختیاری فرض شود شرط مرزی جریان منظم پایینی در نقطه‌ای به شرح زیر اعمال خواهد شد. بدین نحو معادله (۱۶) عوض می‌شود:

$$b\left(\frac{C_{L\alpha}}{2\pi} + aC_n\right) \quad (17)$$

که به فاصله انتهای وتر بال تا نقطه میانی آن اشاره دارد. این موارد در شکل‌های (۳) و (۴) برای حالت تراکم پذیر و تراکم ناپذیر نشان داده شده است. بنا به شکل‌های مذکور و معادلات فوق برای مولفه  $b\left(\frac{1}{2}-a\right)$  در عبارت  $Q$  مربوط به معادله (۱۵) از عبارت تصحیح شده زیر استفاده خواهد شد.

$$b\left(\frac{1}{2}-a\right) \rightarrow b\left(\frac{C_{L\alpha}}{2\pi} + aC_n - a\right) \quad (18)$$

و

$$Q = \dot{h} + V \theta + b\left(\frac{C_{L\alpha}}{2\pi} + aC_n - a\right)\dot{\theta} \quad (19)$$

مولفه غیر چرخشی نیروی برا و ممان آیرودینامیکی یک اثر جرم مجازی بوده که در مقایسه با مولفه جریان چرخشی کوچک است. البته این شرایط در فرکانسهای زیاد قابل صرف نظر کردن نیست. لذا برای پدیده با فرکانسهای کم و متوسط می‌توان گفت که اثرات آن در مقایسه با مولفه جریان چرخشی کم است [۲۰]. بنابراین این مولفه جزء کوچکی از نیروی برا و ممان آیرودینامیکی است. تئودورسون نشان داده که اثر متوجه اثرات جرم مجازی از این جریان غیر چرخشی فقط به سرعت عمودی روی سطح بال وابسته بوده و به سرعت جریان آزاد بستگی ندارد [۳]. در فرکانسهای کم و متوسط سرعت عمودی روی سطح بال در مقایسه با سرعت جریان آزاد کوچک است. پس برای بالهایی که با لبه جریان زیر صوت هستند اثرات هر نوع تراکم پذیری روی مرتبه جریان غیر چرخشی ناچیز است. بنابراین بهره‌گیری از مولفه جریان غیر چرخشی نیروی برا و ممان آیرودینامیکی مربوطه به صورت تراکم ناپذیر در محاسبات جریان تراکم پذیر خطای بسیار اندکی را تحت شرایط عنوان شده دربرخواهد داشت. در این حالت شکل

صورت دو مولفه نسبت به محور الاستیکی مشتمل بر یک جریان غیر چرخشی و یک جریان چرخشی بوده که جریان غیر چرخشی شبه دو بعدی و جریان چرخشی که چرخش در آن توسط مولفه سرعت جریان آزاد نسبت به محور الاستیکی در پیوستگی و اتصال با جریان منظم پایینی (گردابها) و در راستای خطوط وتری عمود بر راستای محور الاستیکی، پایدار و تثبیت شده، تشکیل شده است. به عبارتی جریان چرخشی از جریان آزاد و نیز اثرات جریان منظم پایینی (گردابها) نسبت به محور الاستیکی که عمود بر خطوط وتری است، متاثر است. با در نظر گرفتن شیب ضریب نیروی برا  $C_{L\alpha}$  و مرکز آیرودینامیکی  $aC_n$  برای نیروی برآی مقاطع بال و ممان مربوطه نسبت به اعمال اثرات تراکم پذیری اقدام خواهد شد. معادلات (۱۰) و (۱۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

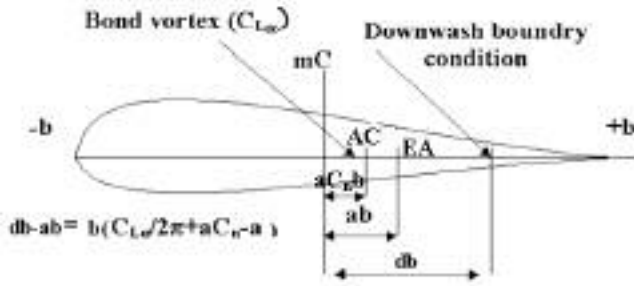
$$dL = \text{Noncircularity} + 2\pi\rho V b C(k) Q(\text{Circulatory}) \quad (13)$$

$$dM = \text{Noncircularity} + 2\pi\rho V b^2 \left(\frac{1}{2} + a\right) C(k) Q(\text{Circulatory}) \quad (14)$$

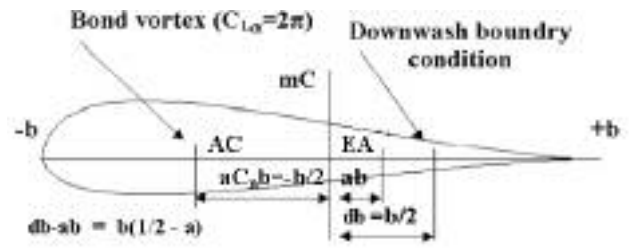
$$Q = \dot{h} + V\theta + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\theta} \quad (15)$$

$Q$  در معادله (۱۵) مولفه جریان منظم پایینی است که توسط تئودورسون معرفی شده است.

با تفکیک معادلات مذکور به دو مولفه چرخشی و غیر چرخشی هر کدام یک از مولفه‌ها به طور مستقل بررسی می‌شود. برای مولفه چرخشی می‌توان گفت که موقعیت مرکز آیرودینامیکی از لبه حمله متغیر بوده و در حالت جریان پایدار و دائم به صورت حاصل تقسیم  $\frac{C_{M\alpha}}{C_l}$  است، که از لبه حمله محاسبه می‌شود. مبنای معادلات تئودورسون معادلات کلاسیک دو بعدی جریان تراکم ناپذیر است که شیب منحنی نیروی برا آن  $2\pi$  و مرکز آیرودینامیکی آن در یک چهارم وتر از لبه حمله است. فاصله مابین بسته ورتکس<sup>۱۲</sup> (یک چهارم وتر) و نقطه‌ای که شرط مرزی جریان منظم پایینی (سه چهارم وتر) به آن اعمال می‌شود برابر  $b$  است. برای یک  $C_{L\alpha}$  اختیاری این فاصله به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:



شکل ۴ - حالت تراکم پذیر با نماد مرجع [۳]



شکل ۳ - حالت تراکم ناپذیر با نماد مرجع [۳]

$$Q_{12} = \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^1 \left\{ -2\pi S b a^2 k^2 \phi_1 - \frac{4\pi}{\sqrt{1-M^2}} S b C(k) \phi_1 - i \left( \frac{4\pi}{\sqrt{1-M^2}} S b \left( \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} - \frac{1}{2} - a \right) k C(k) \phi_1 + 2\pi s b k \phi_1 \right) \right\} d\eta \quad (29)$$

$$Q_{21} = \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^1 \left\{ -2\pi S b a k^2 \psi_1 + i \left( \frac{4\pi}{\sqrt{1-M^2}} S b \left( \frac{1}{2} + a \right) k C(k) \psi_1 \right) \right\} d\eta \quad (30)$$

$$Q_{22} = \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^1 \left\{ 2\pi S b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) k^2 \phi_1 + \frac{4\pi}{\sqrt{1-M^2}} S b^2 \left( \frac{1}{2} + a \right) C(k) \phi_1 + i \left( \frac{4\pi}{\sqrt{1-M^2}} S b^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} - \frac{1}{2} - a \right) \left( \frac{1}{2} + a \right) k C(k) \phi_1 - 2\pi S b^2 \left( \frac{1}{2} - a \right) k \phi_1 \right) \right\} d\eta \quad (31)$$

تحت شرایط عنوان شده معادله کلی آیروداستیکی سیستم با منظور کردن یک ماتریس سختی مختلط مجازی، برای بهره‌گیری از روش حل V-g با کمک روش مقادیر ویژه در حوزه فرکانسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left\{ -\omega^2 [M] + (1 + ig) [K] - \frac{1}{2} \rho V^2 [Q] \right\} \underline{Z} = 0 \quad (32)$$

هرگاه داشته باشیم:

$$\lambda = a + ib = \frac{1 + ig}{V^2} \quad (33)$$

معادله (۳۲) به صورت یک مسئله مقدار ویژه در می‌آید:

جدید معادلات نیروی برا و ممان آیرودینامیکی برای بالواره نوسانی در جریان تراکم پذیر زیرصوت به صورت زیر است:

$$dL = C_{L\alpha} \rho V b C(k) Q + \text{Noncirculatory} \quad (20)$$

$$dM = C_{L\alpha} \rho V b^2 \left( \frac{1}{2} + a \right) C(k) Q + \text{Noncirculatory} \quad (21)$$

برای محاسبه مقادیر  $C_{L\alpha}$  و  $aC_n$  در این تحقیق از نظریه آیرودینامیک دوبعدی دائم بهره گرفته شده است [۲۱].

$$C_{L\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-M^2}}, \quad aC_n = -\frac{1}{2} \quad (22)$$

بدین ترتیب نیرو (L) و ممان آیرودینامیکی (M) در طول بال محاسبه می‌شود.

$$L = -S \int_0^1 dL d\eta \quad (23)$$

$$M = S \int_0^1 dM d\eta \quad (24)$$

چنانچه قانون کار مجازی برای محاسبه  $Q_i$  به کار رود با کمک معادلات (۴) و (۵) می‌توان مولفه‌های  $Q_i$  را به دست آورد:

$$\Delta W = L \delta h + M \delta \theta \quad (25)$$

$$Q_i = \frac{\partial \Delta W}{\partial \delta q_i} \quad (26)$$

لذا مولفه‌های ماتریس Q با فرض هارمونیک بودن سیستم می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\underline{Z} = Z_0 e^{i\omega t}, \quad \dot{\underline{Z}} = i\omega \underline{Z}, \quad \ddot{\underline{Z}} = -\omega^2 \underline{Z} \quad (27)$$

و

$$Q_{11} = \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^1 \left\{ 2\pi S k^2 \psi_1 - i \left( \frac{4\pi}{\sqrt{1-M^2}} S k C(k) \psi_1 \right) \right\} d\eta \quad (28)$$

با افزایش دانسیته جریان، اثرات نیروها و ممانهای آیرودینامیکی بیشتر شده لذا مولفه‌های ماتریس [Q] وزن بیشتری پیدا کرد و بدین ترتیب در سرعت‌های کمتری مرز ناپایداری دینامیکی خواهیم داشت. در شکل (۹) مقادیر عدد فرکانس بی بعد شده بر حسب عدد ماخ جریان آزاد برای بال 91-2 رسم شده است مقادیر سرعت فلاتر و عدد ماخ جریان برای بالهای مورد آزمایش و روش حاضر که در جدول (۲) ارائه شده نزدیک به هم هستند.

#### ۴- بحث

در این مقاله برای محاسبه مرز ناپایداری دینامیکی (فلاتر) یک بال هواپیما ضمن در نظر گرفتن مکانیک محیط پیوسته با استفاده از جریان زیرصوت که به نحوی اثرات تراکم پذیری در آن اعمال شده و با کمک معادلات لاگرانژ و سیستم دو درجه آزادی (خمش - پیچش)، معادله دینامیکی بال بدست آمده و در حوزه فرکانسی از روش مقادیر ویژه توسط روش V-g برای محاسبه سرعت فلاتر بهره گرفته شده است.

در تعیین نیروهای آیرودینامیکی از تئوری نوارهای باریک استفاده شده که یک روش تقریبی بوده و در آن از اثر القایی جریان منظم پایینی صرف نظر می‌شود. اثر فوق بیشتر در حالتی که نسبت منظری کم و عدد فرکانس بی بعد شده کوچک است خود را نشان می‌دهد [۱]. لذا در مدل ارائه شده بخشی از خطاها به مواردی مثل فرضیات موجود در معادلات تئودورسون (صفحه تخت نوسان کننده)، اثر جریان القایی مربوط به تقریب روش نظری نوارهای باریک که البته در این مبحث بنا به توضیح داده شده و شرایط مسئله (نسبت منظری نسبتا بالا) سهم آن کم است، و تقریب موجود در محاسبات مولفه‌های سازه‌ای از جمله عوامل ایجاد خطا هستند. با مقایسه نتایج حاصله و نتایج تجربی مشخص می‌شود که مرتبه خطا بنابه شرایط نزدیک بین مدل ریاضی و شرایط تجربی زیاد نبوده و یکی از علل مهم آن یکنواخت بودن بال است که لازمه تئوری نوارهای باریک است. لذا بنا به موارد عنوان شده در این مقاله،

$$\begin{aligned} \lambda[K] - [S]Z = 0 \\ [S] = \left\{ \frac{k^2}{b^2} [M] + \frac{1}{2} \rho [Q] \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

در روش حل V-g برای معادله (۳۴) به ازای مقادیر مختلف k نمودار V برحسب g رسم شده و به ازای g=0 سرعت ناپایداری دینامیکی (فلاتر) تعیین می‌شود ضمن اینکه مقادیر V و g از معادله (۳۳) به ازای  $\lambda$  معین قابل محاسبه است:

$$V = \sqrt{\frac{1}{a}} \quad \text{و} \quad g = V^2 b \quad (35)$$

مودهای فرضی  $\psi_1$  و  $\phi_1$  برای خمش و پیچش از حل معادلات تیر به صورت زیر حاصل شده است:

$$\psi_1 = C_1 \left\{ \frac{\sinh \beta_1 + \sin \beta_1}{\cosh \beta_1 + \cos \beta_1} (\cos \beta_1 \eta - \cosh \beta_1 \eta) + \frac{\sinh \beta_1 \eta - \sin \beta_1 \eta}{\sinh \beta_1 \eta - \sin \beta_1 \eta} \right\} \quad (36)$$

$$\phi_1 = C_2 \sin \beta_2 \eta \quad (37)$$

در معادلات ذکر شده  $C_1$  و  $C_2$  ضرایب ثابت و  $\beta_1 = 0.5969\pi$  و  $\beta_2 = \pi/2$  است.

#### ۳- نتایج

نتایج حاصل از آزمایش تجربی صورت پذیرفته [۲۲] برای تعدادی از بالها با مقطع NACA16-010 که مشخصات آنها در جدول (۱) ارائه شده با نتایج حاصل از حل معادله (۳۴) با روش V-g برای سرعت فلاتر بالها مورد مقایسه قرار گرفته است. در جدول (۲)،  $V_e$  سرعت فلاتر حاصل از آزمایش،  $V_f$  سرعت فلاتر حاصل از روش حاضر،  $M_e$  عدد ماخ حاصل از آزمایش و  $M_f$  عدد ماخ حاصل از روش حاضر است. در شکل (۵) مقادیر V و g برای بال 91-2-4 رسم شده که مقادیر فوق به ازای مقادیر معینی از k بوده که بر مبنای نتایج حاصل از محاسبه مقادیر ویژه  $\lambda$  به دست آمده و به ازای g برابر با صفر سرعت فلاتر را نشان می‌دهد. در شکل‌های (۶) و (۷) مقادیر فرکانس فلاتر برحسب g و فرکانس فلاتر برحسب سرعت برای دو مقدار ویژه به ازای مقادیر مختلف k برای همان بال نشان داده شده است. در شکل (۸) سرعت فلاتر برحسب دانسیته جریان برای بال 91-2 رسم شده است. ملاحظه می‌شود

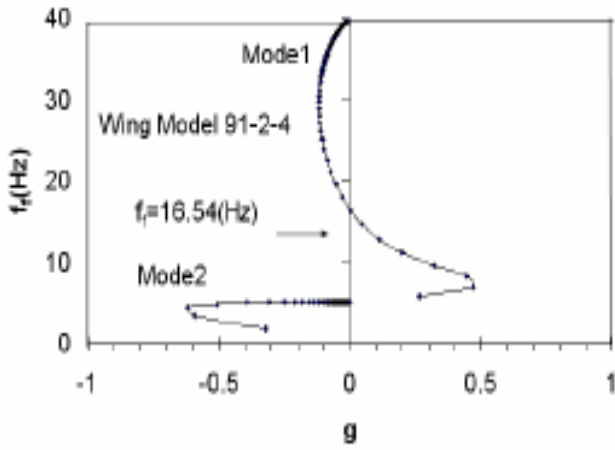


جدول ۱- مشخصات چند بال مورد آزمایش [۱۹]

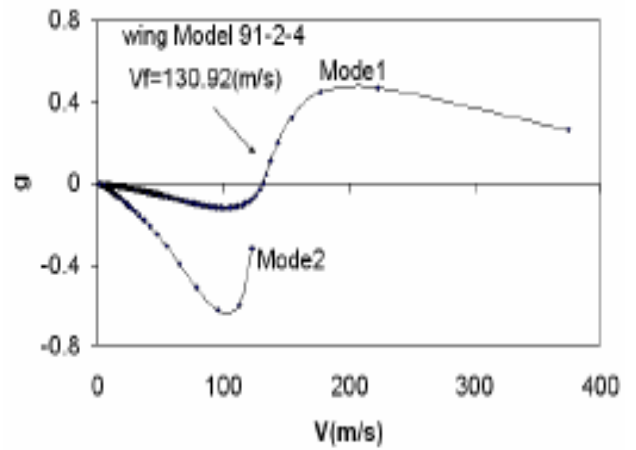
| مدل    | ضریب صلبیت<br>پیچشی بال<br>(Nm <sup>2</sup> ) | ضریب صلبیت<br>خمشی بال<br>(Nm <sup>2</sup> ) | طول بال<br>(m) | وتر در هر<br>مقطع بال<br>(m) | cg*100 | e*100 | ممان اینرسی<br>قطبی بر واحد<br>(kgm <sup>2</sup> /m) | جرم در<br>واحد طول<br>(kg/m) | دانسیته هوا<br>(kg/m <sup>3</sup> ) | ردیف |
|--------|---|--|----------------|------------------------------|--------|-------|--|------------------------------|-------------------------------------|------|
| ۴۰a-۱  | ۱۰/۱۵   | ۱۵   | ۰/۶۲۹۹         | ۰/۱۰۱۶                       | ۴۶     | ۴۰    | ۰/۰۰۰۲۴  | ۰/۳۳۹                        | ۱/۱۴۴۲                              | ۱    |
| ۴۰a-۲  | ۱۰/۱۵   | ۱۵   | ۰/۶۲۹۹         | ۰/۱۰۱۶                       | ۴۶     | ۴۰    | ۰/۰۰۰۲۴  | ۰/۳۳۸                        | ۱/۷۲۱۴                              | ۲    |
| ۴۰a-۳  | ۱۰/۱۵   | ۱۵   | ۰/۶۲۹۹         | ۰/۱۰۱۶                       | ۴۶     | ۴۰    | ۰/۰۰۰۲۴  | ۰/۳۳۹                        | ۱/۱۰۸۱                              | ۳    |
| ۴۰a-۴  | ۱۰/۱۵   | ۱۵   | ۰/۶۲۹۹         | ۰/۱۰۱۶                       | ۴۶     | ۴۰    | ۰/۰۰۰۲۴  | ۰/۳۳۸                        | ۰/۵۵۶۶                              | ۴    |
| ۴۰b    | ۱۰/۶۴   | ۱۴/۴   | ۰/۶۲۹۹         | ۰/۱۰۱۶                       | ۴۹     | ۴۰    | ۰/۰۰۰۲۶  | ۰/۳۳۸                        | ۱/۱۷۵۱                              | ۵    |
| ۴۰۰    | ۶/۵۳۶   | ۱۲/۵   | ۰/۶۲۹۹         | ۰/۱۰۱۶                       | ۴۶     | ۳۸/۵  | ۰/۰۰۰۲۵  | ۰/۳۳۹                        | ۴/۷۸۲۹                              | ۶    |
| ۴۰d    | ۹/۵۴۶   | ۱۴/۵   | ۰/۶۲۹۹         | ۰/۱۰۱۶                       | ۴۸     | ۳۸/۵  | ۰/۰۰۰۲۳  | ۰/۳۲                         | ۰/۴۹۹۴                              | ۷    |
| ۹۱-۲-۱ | ۱۱۸/۱   | ۳۱۰  | ۱/۲۱۹۲         | ۰/۲۰۳۲                       | ۴۱     | ۴۳/۸  | ۰/۰۰۳۰۸  | ۱/۶۶۶                        | ۱/۲۳۱۸                              | ۸    |
| ۹۱-۲-۲ | ۱۱۸/۱   | ۳۱۰  | ۱/۲۱۹۲         | ۰/۲۰۳۲                       | ۴۱     | ۴۳/۸  | ۰/۰۰۳۰۸  | ۱/۶۶۶                        | ۰/۹۱۲۳                              | ۹    |
| ۹۱-۲-۳ | ۱۱۸/۱   | ۳۱۰  | ۱/۲۱۹۲         | ۰/۲۰۳۲                       | ۴۱     | ۴۳/۸  | ۰/۰۰۳۱   | ۱/۶۷۵                        | ۴/۰۳۵۶                              | ۱۰   |
| ۹۱-۲-۴ | ۱۱۸/۱   | ۳۱۰  | ۱/۲۱۹۲         | ۰/۲۰۳۲                       | ۴۱     | ۴۳/۸  | ۰/۰۰۳۱   | ۱/۶۷۶                        | ۰/۵۴۱۲                              | ۱۱   |

جدول ۲ - مقایسه نتایج تجربی [۱۹] و روش حاضر

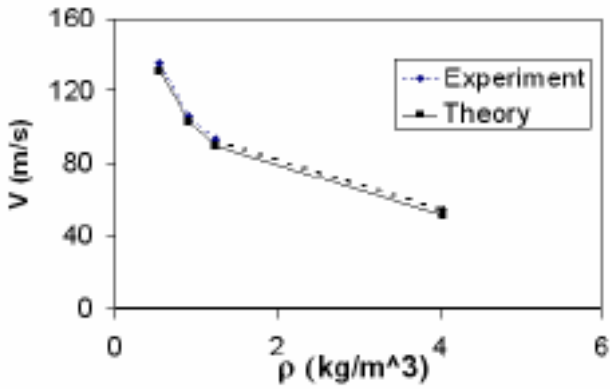
| مدل    | نتایج تجربی       |                | روش حاضر سیال تراکم پذیر |                  | ردیف |
|--------|-------------------|----------------|--------------------------|------------------|------|
|        | سرعت فلاتر آزمایش | عدد ماخ آزمایش | سرعت فلاتر محاسباتی      | عدد ماخ محاسباتی |      |
| ۴۰a-۱  | ۸۴                | ۰/۲۴           | ۸۹                       | ۰/۲۵۴            | ۱    |
| ۴۰a-۲  | ۶۹/۲۵۸۳           | ۰/۴۵           | ۶۷/۴۵                    | ۰/۴۴             | ۲    |
| ۴۰a-۳  | ۷۶/۸۵۴۳           | ۰/۵            | ۸۳/۷۱                    | ۰/۵۴۴            | ۳    |
| ۴۰a-۴  | ۱۰۴/۵۵۸           | ۰/۶۵           | ۱۱۱/۷۴                   | ۰/۶۹۴            | ۴    |
| ۴۰b    | ۷۹/۵۳۵۳           | ۰/۲۳           | ۸۴/۱۸                    | ۰/۲۴۳            | ۵    |
| ۴۰۰    | ۳۳/۶۴۶۱           | ۰/۲۳           | ۳۶/۵۹                    | ۰/۲۵             | ۶    |
| ۴۰d    | ۹۸/۷۴۸۹           | ۰/۶۸           | ۹۶/۲۲                    | ۰/۶۵۷            | ۷    |
| ۹۱-۲-۱ | ۹۲/۹۴۰۱           | ۰/۲۸           | ۸۹/۸                     | ۰/۲۷             | ۸    |
| ۹۱-۲-۲ | ۱۰۶/۷۹۲           | ۰/۳۲           | ۱۰۳/۰۷                   | ۰/۳۰۸            | ۹    |
| ۹۱-۲-۳ | ۵۴/۵۱             | ۰/۳۳           | ۵۱/۵۹                    | ۰/۳۱۳            | ۱۰   |
| ۹۱-۲-۴ | ۱۳۵/۳۸۹           | ۰/۴            | ۱۳۰/۹۲                   | ۰/۳۸۶            | ۱۱   |



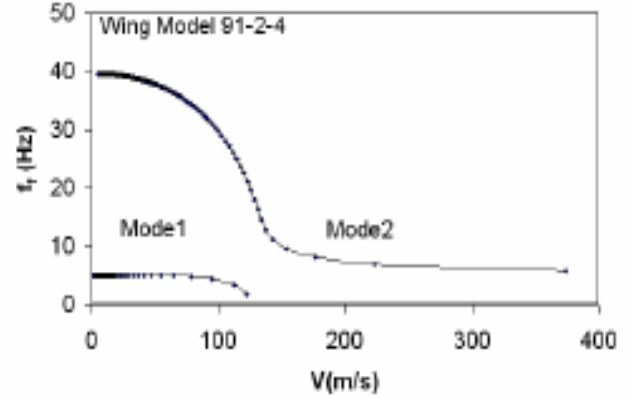
شکل ۶ - فرکانس بر حسب  $g$  برای بال سری 91-4 حاصل از آزمایش تجربی [۲۲] و روش حاضر



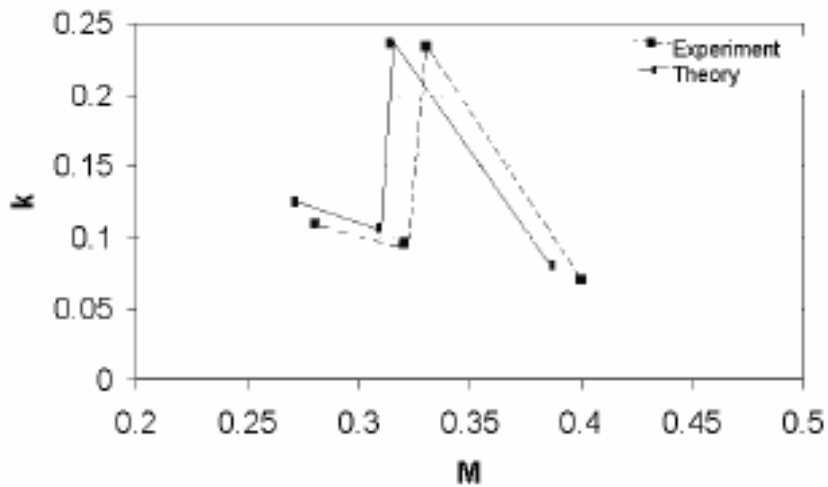
شکل ۵ - سرعت بر حسب  $g$  برای بال سری 91-2-4 آزمایش تجربی [۲۲] و روش حاضر



شکل ۸ - سرعت بر حسب دانسیته برای بال 91-2-4



شکل ۷ - سرعت بر حسب فرکانس برای بال سری 91-2-4 حاصل از آزمایش تجربی [۲۲] و روش حاضر



شکل ۹ - عدد فرکانس بی بعد حسب ماخ برای بال 91-2-4

شرایطی که بتوان آن را به صورت پیوسته از لحاظ دینامیکی در نظر گرفت می توان در مباحث طراحی و مرور طراحی اولیه از روش فوق در جریان زیر صوت تراکم پذیر برای نسبت منظری بالای بال به عنوان یک ابزار سریع در محدوده خطاهای عنوان شده برای محاسبه سرعت ناپایداری دینامیکی بال استفاده کرد.

می توان پیش بینی کرد مدل ریاضی تحت شرایط مذکور تطابق مناسبی با مدل فیزیکی برقرار کند.

با توجه به اینکه در بحث آیروالاستیسیته بال سرعت فلاتر از اهمیت بیشتری برخوردار است و معمولاً هدف اصلی طراح بال جلوگیری از رسیدن سرعت هواپیما یا جسم پرنده به سرعت فلاتر است، چنانچه بال با سازه فلزی در

## واژه نامه

- |               |                            |                 |
|---------------|----------------------------|-----------------|
| 1. Theodorsen | 5. Harris                  | 9. pitch        |
| 2. Ericsson   | 6. airfoil                 | 10. no sweep    |
| 3. Reding     | 7. limit cycle oscillation | 11. downwash    |
| 4. Carta      | 8. Price                   | 12. bond vortex |

## مراجع

1. Fung, Y.C., *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, Dover Pub. Inc., 1993.
2. Garrick, L.E., and Reed, W.H., "Historical Development of Aircraft Flutter," *Journal of Aircraft*, vol. 18, No. 11, 1981.
3. Theodorsen, T., "General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter," NACA TR-496, 1935.
4. Ericson, L.E., and Reding, J.P., "Unsteady Aircraft Stall Lockheed Missile and Space Company," NASA CR-66787, 1968.
5. Carta, F.O., and et.al., "Analytical Study of Helicopter Rotor Stall Flutter," Presented at the 26<sup>th</sup> Annual Natinal Forum of the American Helicopter Society, 1970.
6. Harris, F.D., Tarzanin, F.J., and Fisher, R.K., "Rotor High Speed Performance Theory vs Test," *Journal of American Helicopter Society*, vol. 15, no. 3, 1970.
7. Price, S.Y., and et al., "Postinstability Behavior of a Two-Dimensional Airfoil with a Structural Nonlinearity," *Journal of Aircraft*, Vol.31, pp. 1395-1401. No.6, Nov. 1994.
8. O'Neil, T., and Strganac, T.W. "Aeroelastic Response of a Rigid Wing Supported by Nonlinear Springs," *Journal of Aircraft*, Vol.35, No.4, pp.616-622. July-Aug. 1998.
9. Starossek, U., "Complex Notation in Flutter Analysis," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 124, No. 8, pp. 975-977. Aug. 1998.
10. Kolonay, R., and et al, "A Computational Study for Biological Flapping Wing Flutter," Transactions of the Aeronatical and Astronautical Society of the Republic of China, Vol.32, No.4, pp.265-279, 2000.
11. Block, J.J., and Strganac, T.W., "Applied Active Control for a Nonlinear Aeroelastic Structure," <http://aerounix.tamu.edu/aeroel/papers/block-98jgcd.pdf>
12. Van Zyl, L.H., "Divergence and Flutter Equation," *Proceeding of the International Forum on Aeroelasticity and structural Dynamic*, Asociacion de Ingenieros Aeronauticos de Espana Vol. II, pp. 401-412. 2001.
13. Edwards, J.W., and Wieseman, C.D., "Flutter and Divergence Analysis Using the Generalized Aeroelastic Analysis Method," IFASD, Jun. 2003.
14. Borglund, D., "Upper Band Flutter Speed Estimation Using the  $\mu$ -k Method," *Journal of Aircraft*, Vol.42, No.2, pp. 557-557. 2005.
15. Bisplinghoff, R.L., and et al, *Aeroelasticity*, Addition-Wesley, 1956.
16. Garrick, L.E., "Bending-Torsion Flutter Calculation Modified by Subsonic Compresibility Corrections," NACA TR-836, 1946.
17. Belevins, R.D., *Flow-Induced Vibration*, Van Norstrand Reinhold, 1990.
18. Dowell, E.H., and et al, *A Modern Course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic Pub., 1989.
19. Jones, R.T., "The Unsteady Lift of a Wing of Finite Aspect ratio," TR-681, 1959.
20. Theodorsen, T., and Garrick, L.E., "A Theoretical Experimental Investigation of the Flutter Problem," NACA TR-685, 1940.
21. Anderson, J.D., *Fundamental of aerodynamic*, McGraw-Hill Company, 1984.
22. Barmby, J.G., and et al, "Study of Effects of Sweep on the flutter of Cantilever Wing," NACA TN-2121 1950.