

## میدانهای تنش و پتانسیل الکتریکی در سیلندره‌های پیزوالکتریک

علی قربان پور آرائی<sup>\*</sup>، سعید گلابی<sup>\*</sup> و مریم ستوده<sup>\*\*</sup>

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

(دریافت مقاله: ۸۴/۹/۱۳ - دریافت نسخه نهایی: ۸۶/۶/۲۷)

چکیده - مواد پیزوالکتریک<sup>۱</sup> تحت تغییر شکل از خود میدان الکتریکی تولید می‌کنند و تحت میدان الکتریکی نیز تغییر شکل می‌دهند. به‌خاطر طبیعت دو گانه مواد پیزوالکتریک، این گونه مواد کاربردهای وسیعی در تجهیزات الکتریکی و الکتریکی - مکانیکی مانند عملگرها<sup>۲</sup>، حسگرها<sup>۳</sup> و سازه‌ها دارند. در این مقاله یک سیلندر تو خالی از جنس پیزوالکتریک غیرایزوتروپیک<sup>۴</sup> که در جهت شعاعی پلاریزه شده است مانند PZT\_4 (تیتانات زیرکونیم سرب<sup>۵</sup>) یا BaTiO<sub>3</sub> (تیتانات باریم<sup>۶</sup>) تحت بارگذاری‌های فشار داخلی، فشار خارجی، اختلاف پتانسیل ثابت بین سطوح داخلی و خارجی سیلندر و یا ترکیبی از آنها در نظر گرفته می‌شود. الکترودهای وصل شده به سطوح داخلی و خارجی سیلندر ایجاد اختلاف پتانسیل الکتریکی در ضخامت آن می‌کنند. معادلات تعادل حاکم در دستگاه مختصات قطبی تشکیل یک سیستم کوپله شده از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم بر حسب جابه‌جایی شعاعی و میدان پتانسیل الکتریکی را می‌دهند. این معادلات دیفرانسیل به‌صورت تحلیلی و برای هفت شرایط مرزی حل شده‌اند. نمودار توزیع تنشها و پتانسیل الکتریکی در سرتاسر سطح مقطع سیلندر برای دو ماده پیزوسرامیک PZT\_4 و BaTiO<sub>3</sub> و هفت حالت بارگذاری رسم و بحث شده است.

واژگان کلیدی: مواد هوشمند<sup>۷</sup>، سیلندر پیزوالکتریک، تنش شعاعی، تنش محیطی، پتانسیل الکتریکی

## Stress Fields and Electric Potential in Piezoelectric Cylinders

A. Ghorbanpour, S. Golabi, and M. Sotoudeh

Department of Mechanical Engineering, University of Kashan

**Abstract:** Piezoelectric materials produce an electric field by deformation and deform when subjected to an electric field. The coupling nature of piezoelectric materials has acquired wide applications in electro-mechanical and electric devices, including actuators, sensors, and structures. This paper explores a hollow circular cylinder composed of a radially polarized cylindrically anisotropic piezoelectric material, e.g., PZT\_4 (a lead zirconium titanate) or BaTiO<sub>3</sub> (barium titanate) under internal or external pressure and a constant potential difference between its inner and outer surfaces or a combination of these loadings. Electrodes

\*\* - کارشناس مکانیک

\* - استادیار

attached to the inner and outer surfaces of the cylinder induce the potential difference. The governing equilibrium equations in polar form are shown to reduce to a coupled system of second-order ordinary differential equations for the radial displacement and electric potential field. These differential equations are analytically solved and, by considering seven different sets of boundary conditions, an analytic solution method is developed for boundary-value problems. The stress and electric potential distributions in the cylinder are discussed in detail for the two piezoceramics PZT<sub>4</sub> and BaTiO<sub>3</sub>.

**Keywords:** Smart materials, Piezoelectric cylinder, Radial stress, Hoop stress, Electric potential.

## ۱- مقدمه

در چهار دهه اخیر با مطالعه و تحقیق روی مواد پیزوالکتریک، تکنولوژی سازه‌های هوشمند پیشرفته‌های زیادی داشته است. کارهای بنیادی و اصلی را محققان مراجع [۱-۴] در این زمینه انجام داده‌اند. تجهیزات پیزوالکتریک مانند میکروفونها، ضبط صوتها و غیره‌اند. تحقیقات اخیر بر روی بهبود تجهیزات موجود و تبدیل آنها به سازه‌های هوشمند متمرکز شده است. وسایل پیزوالکتریک به‌عنوان عملگر در واکنش به تغییر در میدان الکتریکی، در آنها کرنش مکانیکی به‌وجود می‌آید. نمونه چنین کاربردی از آنها در سیمهای پانتوگراف مربوط به لکوموتیوهای برقی است [۵]. نمونه دیگر کاربرد آنها به‌عنوان حسگر است که در پاسخ به اعمال کرنش مکانیکی سیگنالهای الکتریکی تولید می‌کنند. حسگرهای پیزوالکتریک در مهندسی راه و ساختمان به‌عنوان کنترل کننده سلامت ساختمانها استفاده می‌شوند که با اعمال کرنش مکانیکی بر آنها یک شارژ الکتریکی<sup>۸</sup> در آنها به‌وجود می‌آید که باعث شروع به‌کار حسگرها در سازه‌ها می‌شود. مواد پیزوالکتریک چند کریستالی در طول فرایند قطبی شدن که شامل گرما دادن تا دمای بالا تحت تأثیر میدان الکتریکی، تولید می‌شوند [۶]. درون این مواد دو قطبیهایی به‌وجود می‌آیند که چیده شدن آنها تصادفی‌اند و با اعمال یک ولتاژ، نیروهای الکتریکی باعث هم جهت شدن دو قطبیها با جهت میدان الکتریکی می‌شوند و در نتیجه باعث کرنش مکانیکی در پیزوالکتریک می‌شوند.

آدلمن و همکارانش [۷] سیلندرهایی توخالی از جنس پیزوالکتریک که قابل پلاریزه شعاعی‌اند را مورد تحقیق قرار داده و هدف آنها تحلیل دینامیکی مسئله بوده است.

راجاپاکس و همکارانش [۸] سیلندر توخالی پیزوالکتریک

تحت بارالکترومکانیکی را مورد تحقیق قرار دادند. آنها با استفاده از سریهای فوریه - بسط شامل توابع بسط از نوع اول و دوم، معادلات حاکم را حل کردند.

حلهای دقیق برای سیلندر پیزوالکتریک تو پر توسط ویسی و چائو [۹] تحت بارهای مختلف ارائه شد.

وانگ و همکارش [۱۰] انتشار موج در سیلندر کوپله پیزوالکتریک تحت اثرات برش عرضی و اینرسی دورانی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها یک تحلیل ریاضی کاملی از حل انتشار موج در این نوع سیلندرها ارائه کردند. نتایج با توجه به نتایج حاصل از حلهای کلاسیک یک سیلندر از جنس فلز تأیید می‌شوند.

دای و همکارش [۱۱] روش تحلیلی برای حل پاسخ گذرای ترموالکتروالاستیک در ساختارهای پیزوالکتریک توخالی تحت شوک گرمایی، بار مکانیکی ناگهانی و تحریک الکتریکی ارائه دادند. آنها با استفاده از تبدیلهای هنکل، لاپلاس و معکوس توانستند حل دقیقی برای پاسخهای گذرای جابه‌جایی، تنشها، جابه‌جایی الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در سازه‌های پیزوالکتریک توخالی به‌دست آورند.

هان و همکارش [۱۲] شکست یک سیلندر پیزوالکتریک که دارای ترکهای دایره‌ای که به‌طور منظم در آن قرار گرفته‌اند را مورد تحقیق قرار دادند. توزیع تنش و ضریب شدت تنش را تحت شرایط بارگذاری گرمایی گذرا و الکترومکانیک برای سیلندر مذکور به‌دست آوردند.

در این مقاله، سیلندر پیزوالکتریک از جنس پیزوالکتریک غیر ایزوتروپیک PZT<sub>4</sub> و BaTiO<sub>3</sub> که قابل پلاریزه شعاعی‌اند، ساخته شده است. سیلندر تحت فشار یکنواخت داخلی، فشار یکنواخت خارجی، اختلاف پتانسیل ثابت بین دو سطوح داخلی و خارجی آن و یا ترکیبی از آنها قرار می‌گیرد.

(PZT\_4) و تیتانات باریم (BaTiO<sub>3</sub>) است، که کاربرد وسیعی در سازه‌های هوشمند و سازه‌های صنعتی دارند [۶ و ۱۳].

### ۳- نظریه سیلندر پیزوالکتریک تحت بارهای مکانیکی و الکتریکی

یک سیلندر توخالی با مقطع دایره‌ای به شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$  مطابق شکل (۱) در نظر گرفته و تحت بارگذاریهای الکتریکی و مکانیکی قرار داده می‌شود. طول سیلندر به اندازه کافی بزرگ بوده تا بتوان از اثرات سطوح انتهایی آن صرف نظر کرد.

در غیاب نیروهای حجمی معادلات تعادل برای تنشها و جابه‌جایی الکتریکی عبارت‌اند از [۱۴]:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dD_r}{dr} + \frac{1}{r}D_r = 0 \quad (7)$$

در معادله (۷)،  $D_r$  مولفه شعاعی بردار جابه‌جایی الکتریکی است. معادلات (۳) و (۴) را می‌توان برای سیلندر از جنس ارتوتروپیک که در جهت شعاعی پلاریزه شده است، به صورت زیر نوشت [۱۴]:

$$\sigma_{rr} = c_{33}\epsilon_r + c_{13}\epsilon_\theta - e_{33}E_r \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = c_{13}\epsilon_r + c_{11}\epsilon_\theta - e_{31}E_r$$

$$D_r = e_{31}\epsilon_\theta + e_{33}\epsilon_r + \epsilon_{33} E_r$$

که در آن:

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (9)$$

و

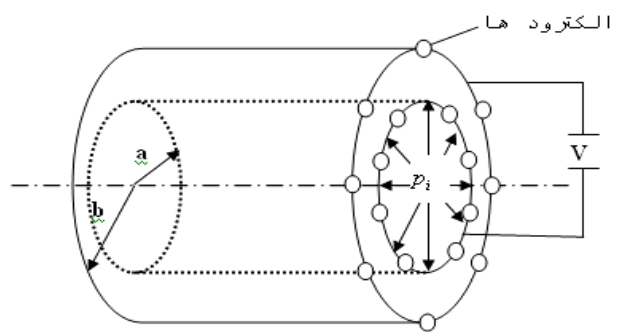
$$E_r = -\frac{d\phi}{dr} \quad (10)$$

که  $u_r = u_r(r)$  و  $\phi = \phi(r)$  به ترتیب جابه‌جایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی‌اند. با جای‌گذاری  $\epsilon_r$ ،  $\epsilon_\theta$  و  $E_r$  از معادلات (۹) و (۱۰) در معادلات (۸) آن‌گاه:

$$\sigma_{rr} = c_{33} \frac{du_r}{dr} + c_{13} \frac{u_r}{r} - e_{33} \frac{d\phi}{dr}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = c_{13} \frac{du_r}{dr} + c_{11} \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{d\phi}{dr} \quad (11)$$

$$D_r = e_{31} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{du_r}{dr} - \epsilon_{33} \frac{d\phi}{dr}$$



شکل ۱- سیلندر توخالی تحت فشار داخلی و اعمال ولتاژ

### ۲- معادلات اساسی حاکم

معادلات حاکم برای ماده جامد پیزوالکتریک همگن و غیر ایزوتروپیک را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۵]:

$$\epsilon_i = s_{ij}\sigma_j + d_{mi}E_m \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (1)$$

$$D_m = d_{mi}\sigma_i + \epsilon_{mk}^T E_k \quad m, k = 1, \dots, 3 \quad (2)$$

در معادلات فوق  $\epsilon_i$ ،  $\sigma_i$  تنش و کرنش مکانیکی و  $s_{ij}$  نرمی الاستیکی<sup>۹</sup> اند.  $D_m$  بردار جابه‌جایی الکتریکی<sup>۱۰</sup> و  $E_m$  میدان الکتریکی است.  $d_{mi}$  مدول پیزوالکتریک است و واحد آن کولمب بر نیوتن (C/N) است که به اثرات الکتریکی و مکانیکی بستگی دارد.  $\epsilon_{mk}^T$  به ثابتهای نفوذپذیری دی الکتریکی<sup>۱۱</sup> در تنش ثابت اشاره دارد و واحد آن فاراد بر متر (F/m) است. شکل معکوس معادلات حاکم را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱]:

$$\sigma_i = c_{ij}\epsilon_j - e_{mi}E_m \quad (3)$$

$$D_m = e_{mi}\epsilon_i + \epsilon_{mk}^S E_m \quad (4)$$

در معادلات فوق  $e_{mi}$  معرف مدول پیزوالکتریک<sup>۱۲</sup> با واحد  $(C/m^2)$  است که جایگزین  $d_{mi}$  شده است و سفتی الاستیک<sup>۱۳</sup>  $c_{ij}$ ، جایگزین نرمی الاستیک  $s_{ij}$  شده است.  $\epsilon_{mk}^S$  ثابتهای نفوذپذیری دی الکتریک در کرنش ثابت است و واحد آن (F/m) است. میدان الکتریکی برحسب پتانسیل الکتریکی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E = -\nabla\phi \quad (5)$$

در این مقاله مطالعه ما روی دو ماده تیتانات زیرکونیم سرب

$$\alpha = \frac{\bar{E}_\theta}{\bar{E}_r} \quad (20)$$

$\bar{E}_\theta, \bar{E}_r$  معرف مدول یانگ در جهات شعاعی و محیطی است. برای ماده الاستیک ارتوتروپیک محیطی  $\alpha > 1$  و برای ماده ارتوتروپیک شعاعی  $\alpha < 1$  می‌باشد.

برای سیلندر توخالی با  $a \leq r \leq b$  پارامترهای بدون بعد زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho = \frac{r}{a} \quad (21)$$

و

$$\eta = \frac{b}{a} \quad (22)$$

بنابراین  $1 \leq \rho \leq \eta$  است و معادلات (۱۲) و (۱۳) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} - \alpha u + \rho^2 \frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + \rho(1-\beta) \frac{d\Phi}{d\rho} = 0 \quad (23)$$

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho(1+\beta) \frac{du}{d\rho} - \gamma \rho^2 \frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} - \rho \gamma \frac{d\Phi}{d\rho} = 0 \quad (24)$$

که  $u = u(\rho)$  و  $\Phi = \Phi(\rho)$  است. معادلات (۲۳) و (۲۴) یک سیستم کوپله شده از معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم بر حسب  $u = u(\rho)$  و  $\Phi = \Phi(\rho)$  هستند. معادلات فوق از نوع معادلات کوشی - اوپلر است و با جاگذاری  $\rho = e^t$ ، معادلات حاکم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u'' - \alpha u + \Phi'' - \beta \Phi' = 0 \quad (25)$$

$$u'' + \beta u' - \gamma \Phi'' = 0$$

علامت پریم در معادلات فوق اشاره به مشتق نسبت به  $t$  دارد. برای دکوپله کردن معادلات (۲۵) به یک معادله دیفرانسیل از مرتبه چهار بر حسب  $u$  یا  $\Phi$  از اوپراتور مشتق‌گیری  $D$ ، استفاده کرده و آن‌گاه معادلات (۲۵) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$(D^2 - \alpha)u + (D^2 - \beta D)\Phi = 0 \quad (26)$$

$$(D^2 + \beta D)u - \gamma D^2 \Phi = 0$$

اوپراتور  $D$  و  $D^2$  به ترتیب یکبار و دو بار مشتق‌گیری نسبت به  $t$  اند. از اولین معادله (۲۶):

$$u = \left( \frac{\beta D - D^2}{D^2 - \alpha} \right) \Phi \quad (27)$$

که  $c_{11}, c_{13}, c_{33}$  ثابتهای الاستیک،  $e_{31}$  و  $e_{33}$  پیزوالکتریک اند.  $\epsilon_{33}$  نفوذ پذیری دی الکتریک در کرنش ثابت است که اندیس  $s$  از بالای آن حذف شده است.

با قراردادن تنش شعاعی، تنش محیطی و بردار جابه‌جایی الکتریکی از معادلات (۱۱) در معادلات (۶) و (۷) معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$r^2 c_{33} \frac{d^2 u}{dr^2} + r c_{33} \frac{du}{dr} - c_{11} u + r^2 e_{33} \frac{d^2 \phi}{dr^2} + r(e_{33} - e_{31}) \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (12)$$

$$r^2 e_{33} \frac{d^2 u}{dr^2} + r(e_{33} + e_{31}) \frac{du}{dr} - r^2 \epsilon_{33} \frac{d^2 \phi}{dr^2} - r \epsilon_{33} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (13)$$

در معادلات فوق برای سادگی اندیس  $u$  حذف شده است. دو معادله (۱۲) و (۱۳) تشکیل یک سیستم کوپله شده از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بر حسب  $u$  و  $\phi$  را می‌دهند. معادلات (۱۲) و (۱۳) را به ترتیب بر  $c_{33}$  و  $e_{33}$  تقسیم کرده و با تعاریف زیر:

$$\frac{c_{11}}{c_{33}} = \alpha \quad (14)$$

$$\frac{e_{31}}{e_{33}} = \beta \quad (15)$$

$$\frac{c_{33} \epsilon_{33}}{e_{33}^2} = \gamma \quad (16)$$

و تعریف یک تابع جدید پتانسیل به صورت زیر:

$$\Phi = \frac{e_{33}}{c_{33}} \phi \quad (17)$$

معادلات (۱۲) و (۱۳) به صورت بدون بعد زیر به دست می‌آیند:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - \alpha u + r^2 \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + r(1-\beta) \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (18)$$

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r(1+\beta) \frac{du}{dr} - r^2 \gamma \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - r \gamma \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (19)$$

ثابتهای  $\alpha, \beta, \gamma$  پارامترهای بدون بعد هستند. ضریب بدون بعد  $\alpha$  فقط به ثابتهای الاستیک و  $\beta$  فقط به ثابتهای پیزوالکتریک بستگی دارند. ولی  $\gamma$  شامل ثابتهای مکانیکی، پیزوالکتریک و نفوذپذیری است. ثابت  $\alpha$  را می‌توان به صورت زیر هم تعریف کرد [۱۵]:

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}} = A(\rho^{\omega_1 - 1} \left( \frac{\beta\omega_1^2 + \delta\beta\omega_1 - \delta\omega_1^2 - \alpha\omega_1}{\omega_1^2 - \alpha} \right)) \frac{1}{a} + B(\rho^{\omega_2 - 1} \left( \frac{\beta\omega_2^2 + \delta\beta\omega_2 - \delta\omega_2^2 - \alpha\omega_2}{\omega_2^2 - \alpha} \right)) \frac{1}{a} \quad (38)$$

$$+ C(\rho^{-1} \left( 1 - \frac{\delta\beta}{\alpha} \right)) \frac{1}{a}$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{c_{33}} = A(\rho^{\omega_1 - 1} \left( \frac{\delta\beta\omega_1^2 - \delta\omega_1^3 - \alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3}{\omega_1^2 - \alpha} \right)) \frac{1}{a} \quad (39)$$

$$+ B(\rho^{\omega_2 - 1} \left( \frac{\delta\beta\omega_2^2 - \delta\omega_2^3 - \alpha\omega_2^2 + \beta\omega_2^3}{\omega_2^2 - \alpha} \right)) \frac{1}{a}$$

برای سهولت تابع پتانسیل به صورت بدون بعد زیر بیان می شود:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{a} \quad (40)$$

بنابراین معادله (۳۴) به شکل زیر نوشته می شود:

$$\Phi_1 = A\rho^{\omega_1} \frac{1}{a} + B\rho^{\omega_2} \frac{1}{a} + C \ln \rho \frac{1}{a} + D \frac{1}{a} \quad (41)$$

#### ۴- حالات مختلف بارگذاری (شرایط مرزی)

۱- سیلندر تحت فشار یکنواخت داخلی بوده و اختلاف پتانسیل الکتریکی در سطوح داخلی و خارجی آن صفر است. در این حالت سیلندر به عنوان حسگر عمل می کند.

۲- هیچ گونه بار مکانیکی اعمال نمی شود و با قرار دادن الکترودهایی روی سطوح داخلی و خارجی سیلندر، اختلاف پتانسیل الکتریکی یکنواختی بین سطوح داخلی و خارجی سیلندر به وجود می آید [۱۴]. در این حالت سیلندر به عنوان عملگر عمل می کند. برای راحتی، پتانسیل روی سطح داخلی سیلندر را غیر صفر و پتانسیل روی سطح خارجی آن صفر در نظر گرفته شده است.

۳- سیلندر تحت فشار یکنواخت داخلی و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو سطح داخلی و خارجی آن است. این حالت ترکیب دو حالت ۱ و ۲ است.

۴- سیلندر تحت فشار یکنواخت خارجی و اختلاف پتانسیل الکتریکی صفر بین دو سطوح داخلی و خارجی آن است.

۵- سیلندر تحت فشار یکنواخت داخلی، فشار یکنواخت

به دست می آید و با جاگذاری  $u$  در رابطه دوم (۲۶) و حل آن:

$$-(\gamma^2 + 1)D^4 + (\beta^2 - \alpha\gamma)D^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \\ D_3 = +\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{1 + \gamma}} \\ D_4 = -\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{1 + \gamma}} \end{cases} \quad (28)$$

آن گاه:

$$\Phi(t) = Ae^{\omega_1 t} + Be^{\omega_2 t} + Ct + D \quad (29)$$

$$u(t) = \frac{(\beta\omega_1 - \omega_1^2)}{\omega_1^2 - \alpha} Ae^{\omega_1 t} + \frac{(\beta\omega_2 - \omega_2^2)}{\omega_2^2 - \alpha} Be^{\omega_2 t} - \frac{\beta}{\alpha} C \quad (30)$$

که در معادلات فوق:

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha\gamma}{1 + \gamma}} \quad (31)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\omega_1^2 - \alpha = \omega_2^2 - \alpha = \frac{\beta^2 - \alpha}{1 + \gamma} \quad (32)$$

$\beta^2 \neq \alpha$  فرض می شود.

با توجه به اینکه  $t = \ln \rho$  است، جواب معادلات (۲۳) و (۲۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u(\rho) = \frac{(\beta\omega_1 - \omega_1^2)}{\omega_1^2 - \alpha} A\rho^{\omega_1} + \frac{(\beta\omega_2 - \omega_2^2)}{\omega_2^2 - \alpha} B\rho^{\omega_2} - \frac{\beta}{\alpha} C \quad (33)$$

$$\Phi(\rho) = A\rho^{\omega_1} + B\rho^{\omega_2} + C \ln \rho + D \quad (34)$$

$A, B, C, D$  ثابتهای دلخواه هستند. با توجه به معادلات (۱۱) و (۱۷) تنشهای بدون بعد به صورت زیر به دست می آیند:

$$\frac{\sigma_{rr} a}{c_{33}} = \frac{du}{d\rho} + \delta \frac{u}{\rho} + \frac{d\Phi}{d\rho} \quad (35)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta} a}{c_{33}} = \delta \frac{du}{d\rho} + \alpha \frac{u}{\rho} + \beta \frac{d\Phi}{d\rho} \quad (36)$$

پارامتر بدون بعد  $\delta$  که فقط به ثابتهای الاستیک بستگی دارد، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta = \frac{c_{13}}{c_{33}} \quad (37)$$

با جاگذاری  $u(\rho)$  و  $\Phi(\rho)$  از معادلات (۳۳) و (۳۴) در معادلات (۳۵) و (۳۶) آن گاه تنشهای بدون بعد به صورت زیر به دست می آیند:

$P_0 = 1$ ،  $P_1 = 1$  و  $\bar{\Phi} = 1$  در نظر گرفته شده و از این به بعد شرایط مرزی به صورت زیر بیان می شوند:

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = -1, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = 0, \Phi_1(1) = 0, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۱} \quad (49)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = 0, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = 0, \Phi_1(1) = 1, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۲} \quad (50)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = -1, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = 0, \Phi_1(1) = 1, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۳} \quad (51)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = 0, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = -1, \Phi_1(1) = 0, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۴} \quad (52)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = -1, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = -1, \Phi_1(1) = 0, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۵} \quad (53)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = 0, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = -1, \Phi_1(1) = 1, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۶} \quad (54)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = -1, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = -1, \Phi_1(1) = 1, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۷} \quad (55)$$

با قراردادن مقادیر مرزی در معادلات (۳۸)، (۳۹) و (۴۱) برای هر یک از حالت‌های بارگذاری ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ سیستم معادلات جبری خطی برای ثابت‌های A، B، C و D به صورت زیر نوشته می شود:

$$M a_n = b_n \quad n = 1, \dots, 7 \quad (56)$$

ماتریس  $M_{4 \times 4}$  بر حسب بردارهای ستونی به شکل

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \quad \text{بیان می شود که در آن:} \quad (57)$$

$$m_1 = \begin{bmatrix} \frac{\beta\omega_1^2 + \delta\beta\omega_1 - \delta\omega_1^2 - \alpha\omega_1}{\omega_1^2 - \alpha} \\ \eta^{\omega_1 - 1} \frac{\beta\omega_1^2 + \delta\beta\omega_1 - \delta\omega_1^2 - \alpha\omega_1}{\omega_1^2 - \alpha} \\ 1 \\ \eta^{\omega_1} \end{bmatrix} \quad (57)$$

خارجی و اختلاف پتانسیل الکتریکی صفر بین دو سطوح داخلی و خارجی آن است.

۶- سیلندر تحت فشار یکنواخت خارجی و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو سطوح داخلی و خارجی آن قرار دارد. این حالت ترکیب دو حالت ۲ و ۴ است.

۷- سیلندر تحت فشار یکنواخت داخلی، فشار یکنواخت خارجی و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو سطوح داخلی و خارجی آن است. این حالت ترکیب دو حالت ۱ و ۶ است. شرایط مرزی فوق را می توان به صورت هفت حالت بارگذاری زیر نوشت:

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = -P_i, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = 0, \Phi_1(1) = 0, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۱} \quad (42)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = 0, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = 0, \Phi_1(1) = \bar{\Phi}, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۲} \quad (43)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = -P_i, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = 0, \Phi_1(1) = \bar{\Phi}, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۳} \quad (44)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = 0, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = -P_o, \Phi_1(1) = 0, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۴} \quad (45)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = -P_i, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = -P_o, \Phi_1(1) = 0, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۵} \quad (46)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = 0, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = -P_o, \Phi_1(1) = \bar{\Phi}, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۶} \quad (47)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(1) = -P_i, \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}(\eta) = -P_o, \Phi_1(1) = \bar{\Phi}, \Phi_1(\eta) = 0 \quad \text{حالت ۷} \quad (48)$$

ثابت‌های  $P_0$ ،  $P_i$  و  $\bar{\Phi}$  به ترتیب فشار خارجی بدون بعد، فشار داخلی بدون بعد و پتانسیل بدون بعد بوده و برای راحتی

جدول ۲- مقادیر پارامترهای بدون بعد

	PZT_4	BaTiO <sub>3</sub>
$\alpha$	۱/۱۴۷۸	۱/۰۳
$\beta$	-۰/۲۹۰۸	-۰/۰۲۵
$\gamma$	۳/۳۶۰۷	۵/۳۲
$\delta$	۰/۶۵	۰/۴۵

با استفاده از روش کرامر ثابتهای A, B, C, D را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$A_n = \frac{|M_{1n}|}{|M|} \quad B_n = \frac{|M_{2n}|}{|M|} \quad (63)$$

$$C_n = \frac{|M_{3n}|}{|M|} \quad D_n = \frac{|M_{4n}|}{|M|}$$

که در معادلات فوق:

$$M_{1n} = [b_n \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4] \quad (64)$$

$$M_{2n} = [m_1 \quad b_n \quad m_3 \quad m_4] \quad (65)$$

$$M_{3n} = [m_1 \quad m_2 \quad b_n \quad m_4] \quad (66)$$

$$M_{4n} = [m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad b_n] \quad (67)$$

معادلات جبری و تحلیلی مربوط به محاسبه A, B, C, D و بسیار پیچیده است، به همین دلیل در این مقاله برای دو ماده PZT\_4 و BaTiO<sub>3</sub> که کاربرد صنعتی دارند و با کمک نرم افزارهای مطلب و اکسل به حل عددی آنها برای هفت شرط مرزی که قبلاً بیان شد، پرداخته شده است.

## ۵- نتایج و بحث روی نمودارهای توزیع تنشها و

### پتانسیل الکتریکی

نتایج به صورت نمودارهای تنش و پتانسیل الکتریکی در سطح مقطع سیلندر توخالی ارائه می‌شود. جنس سیلندر را از ماده پیزوالکتریک PZT\_4 و BaTiO<sub>3</sub> که دارای کاربرد صنعتی‌اند، در نظر گرفته شده است. ثابتهای الکتریکی و مکانیکی دو ماده مذکور در جدول (۱) آورده شده است [۱۶، ۲]. در جدول (۲) پارامترهای بدون بعد  $\delta, \gamma, \beta, \alpha$  آورده شده است [۱۶].

جدول ۱- ثابتهای مکانیکی و الکتریکی مواد PZT\_4 و BaTiO<sub>3</sub>

	PZT_4	BaTiO <sub>3</sub>
$c_{33}$	$115 \times 10^9$ Pa	$146 \times 10^9$ Pa
$c_{11}$	$132 \times 10^9$	$150 \times 10^9$ Pa
$c_{12}$	$73/3 \times 10^9$	$66 \times 10^9$ Pa
$e_{31}$	$-4/1C/m^2$	$-4/35C/m^2$
$e_{33}$	$14/1C/m^2$	$17/5C/m^2$
$\epsilon_{33}$	$5/841 \times 10^{-9}$	$11/5 \times 10^{-9}$ F/m

$$m_2 = \begin{bmatrix} \frac{\beta\omega_2^2 + \delta\beta\omega_2 - \delta\omega_2^2 - \alpha\omega_2}{\omega_2^2 - \alpha} \\ \eta^{\omega_1 - 1} \frac{\beta\omega_2^2 + \delta\beta\omega_2 - \delta\omega_2^2 - \alpha\omega_2}{\omega_2^2 - \alpha} \\ 1 \\ \eta^{\omega_2} \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$m_3 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta\beta}{\alpha} \\ \eta^{-1} \left( 1 - \frac{\delta\beta}{\alpha} \right) \\ 0 \\ \ln \eta \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$m_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

هر حالت از شرایط مرزی به صورت بردار ستونی در سمت راست معادله (۵۶) مشخص می‌شود. بنابراین  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$  که به ترتیب مربوط به حالت‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ بارگذاری‌اند، به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$b_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_7 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین  $Ma_n = b_n \quad n = 1, \dots, 7$  و

$$a_n = \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} \quad (62)$$

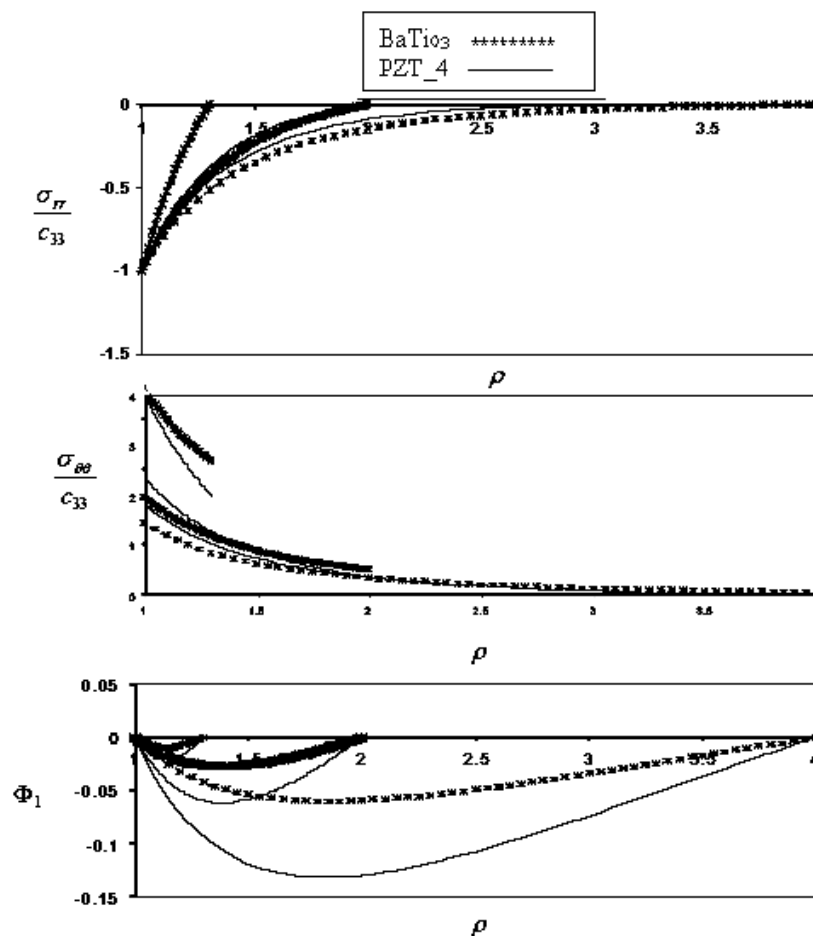
جدول ۳- مقادیر ثابتهای A، B، C و D برای ماده PZT<sub>4</sub> در حالات مختلف بارگذاری

بارگذاری	$\eta$	A	B	C	D
حالت اول	۱/۳	-۰/۰۷۲۱	۳/۰۹۲۹	۲/۶۸۰۵	-۳/۰۲۰۸
	۲	-۰/۰۴۵۶	۱/۶۴۵۵	۱/۲۰۷۱	-۱/۵۹۹۹
	۴	-۰/۰۲۱۴	۱/۱۹۴۵	۰/۶۷۳۲	-۱/۱۷۳۱
حالت دوم	۱/۳	۰/۹۰۶۷	-۵/۸۶۹۳	-۹/۷۲۹۵	۵/۹۶۲۷
	۲	۰/۲۵۵۴	-۲/۴۹۰۳	-۳/۵۲۰۵	۳/۲۳۴۸
	۴	۰/۰۶۹۸	-۱/۳۱۶۲	-۱/۵۵۴۵	۲/۲۴۶۴
حالت سوم	۱/۳	۰/۸۳۴۶	-۲/۷۷۶۴	-۷/۰۴۹	۲/۹۴۱۹
	۲	۰/۲۰۹۸	-۰/۸۴۴۸	-۲/۳۱۳۳	۱/۶۳۴۹
	۴	۰/۰۴۸۵	-۰/۱۲۱۷	-۰/۸۸۱۳	۱/۰۷۳۳
حالت چهارم	۱/۳	-۰/۰۷۳۳	-۲/۹۳۹۵	-۲/۳۹۴۴	۳/۰۱۲۸
	۲	-۰/۱۰۰۱	-۱/۴۲۶۳	-۰/۸۵۱۴	۱/۵۲۶۴
	۴	-۰/۱۲۳۷	-۰/۸۳۵۷	-۰/۱۹۷۴	۰/۹۵۹۴
حالت پنجم	۱/۳	-۰/۱۴۵۴	۰/۱۵۳۴	۰/۲۸۶۱	-۰/۰۰۸
	۲	-۰/۱۴۵۷	۰/۲۱۹۲	۰/۳۴۸۷	-۰/۰۷۳۵
	۴	-۰/۱۴۵۱	۰/۳۵۸۸	۰/۴۷۵۸	-۰/۲۱۳۸
حالت ششم	۱/۳	۰/۸۳۳۴	-۸/۸۰۸۹	-۱۲/۱۲۳۹	۸/۹۷۵۴
	۲	۰/۱۵۵۳	-۳/۹۱۶۶	-۴/۳۷۸۹	۴/۷۶۱۳
	۴	-۰/۰۵۳۸	-۲/۱۵۱۹	-۱/۷۵۱۹	۳/۲۰۵۷
حالت هفتم	۱/۳	۰/۷۶۱۳	-۵/۷۱۵۹	-۹/۴۴۳۴	۵/۹۵۴۶
	۲	۰/۱۰۹۷	-۲/۲۷۱۱	-۳/۱۷۱۸	۳/۱۶۱۳
	۴	-۰/۰۷۵۲	-۰/۹۵۷۴	-۱/۰۷۸۷	۲/۰۳۲۶

جدول ۴- مقادیر ثابتهای A، B، C و D برای ماده BaTiO<sub>3</sub> در حالات مختلف بارگذاری

بارگذاری	$\eta$	A	B	C	D
حالت اول	۱/۳	۰/۰۴۸۳	۱/۳۱۳۱	۱/۰۳۸۹	-۱/۳۶۱۴
	۲	-۸/۵۶×۱۰ <sup>-۴</sup>	۰/۷۰۹۱	۰/۴۸۹۶	-۰/۷۰۸۲
	۴	-۰/۰۰۵۹	۰/۵۴۰۹	۰/۲۹۴۹	-۰/۵۳۵
حالت دوم	۱/۳	۰/۶۳۹۹	-۳/۰۲۰۴	-۶/۹۹۸۴	۳/۳۸۰۵
	۲	۰/۱۸۴۹	-۱/۳۰۶۷	-۲/۵۸۶۶	۲/۱۲۱۸
	۴	۰/۰۵۴	-۰/۷۲۹۶	-۱/۲۰۷۶	۱/۶۷۵۶
حالت سوم	۱/۳	۰/۶۸۸۲	-۱/۷۰۷۳	-۵/۹۵۹۵	۲/۰۱۹۱
	۲	۱/۸۴×۱۰ <sup>-۱</sup>	-۰/۵۹۷۶	-۲/۰۹۷	۱/۴۱۳۵
	۴	۰/۰۴۸۱	-۰/۱۸۸۷	-۰/۹۱۲۷	۱/۱۴۰۶
حالت چهارم	۱/۳	-۰/۱۵۸	-۱/۲۵۷۴	-۰/۸۷۶۲	۱/۴۱۵۴
	۲	-۱/۱۰×۱۰ <sup>-۱</sup>	-۰/۶۲۷۶	-۰/۲۸۷۱	۰/۷۳۷۷
	۴	-۰/۱۰۷۲	-۰/۳۹۷۸	-۰/۰۰۲۸	۰/۵۰۵
حالت پنجم	۱/۳	-۰/۱۰۹۷	۰/۰۵۵۷	۰/۱۶۲۷	۰/۰۵۴۱
	۲	-۱/۱۱×۱۰ <sup>-۱</sup>	۰/۰۸۱۵	۰/۲۰۲۵	۰/۰۲۹۵
	۴	-۰/۱۱۳	۰/۱۴۳۱	۰/۲۹۲۱	-۰/۰۳۰۱
حالت ششم	۱/۳	۰/۴۸۱۸	۰/۴۸۱۸	-۷/۸۷۴۷	۴/۷۹۵۹
	۲	۷/۴۸×۱۰ <sup>-۱</sup>	-۱/۹۳۴۳	-۲/۸۷۳۷	۲/۸۵۹۵
	۴	-۰/۰۵۳۲	-۱/۱۲۷۴	-۱/۲۱۰۳	۲/۱۸۰۶
حالت هفتم	۱/۳	۰/۵۳۰۱	-۲/۹۶۴۷	-۶/۸۳۵۷	۳/۴۳۴۵
	۲	۷/۳۹×۱۰ <sup>-۱</sup>	-۱/۲۲۵۲	-۲/۳۸۴۱	۲/۱۵۱۳
	۴	-۰/۰۵۹۱	-۰/۵۸۶۵	-۰/۹۱۵۵	۱/۶۴۵۶





شکل ۲ - حالت اول بارگذاری، اعمال فشار داخلی برای نسبت‌های شعاع  $\eta = 1.3, 2, 4$

ابتدا با استفاده از نرم افزار مطلب، مقادیر ثابت‌های A، B، C و D را برای هفت حالت بارگذاری محاسبه و در جداول (۳) و (۴) لیست نموده، سپس به کمک نرم افزار اکسل برای مقادیر متفاوت  $\eta = 1.3, 2, 4$  نمودارهای تنش شعاعی بدون بعد، تنش محیطی بدون بعد و پتانسیل بدون بعد را بر حسب شعاع بدون بعد  $\rho$ ، که  $1 \leq \rho \leq \eta$  است، ترسیم می‌شوند.

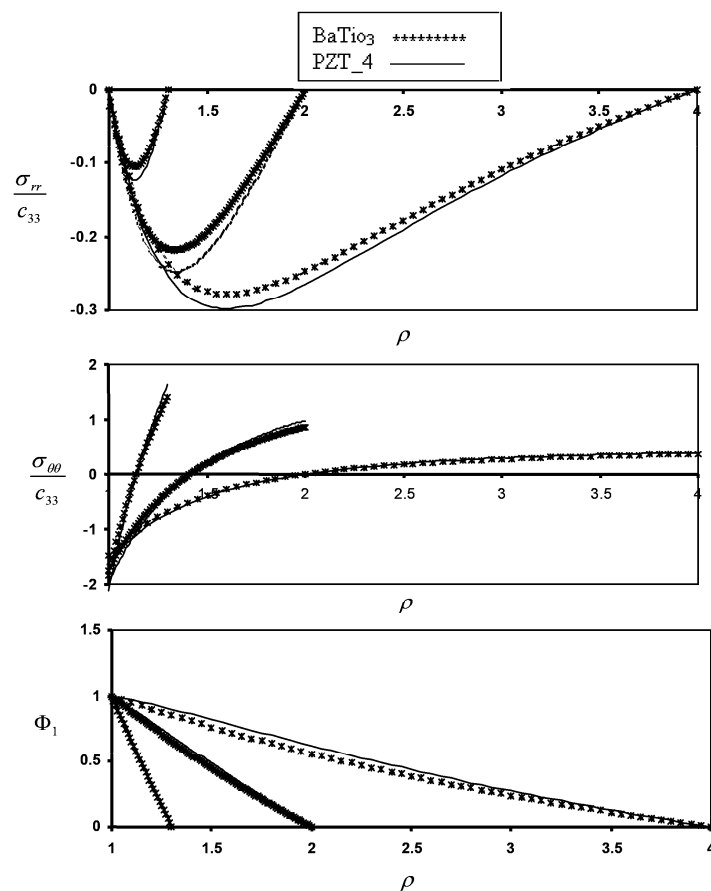
شکل‌های (۲) نتایج مربوط به اولین حالت بارگذاری که سیلندر فقط تحت فشار داخلی است را نشان می‌دهند. اولین شکل منحنیهای توزیع تنش فشاری شعاعی بدون بعد را نشان می‌دهد که منحنیهای توزیع تنش شعاعی به طور پیوسته از سطح داخلی سیلندر از مقدار صفر می‌روند و در سطح خارجی به مقدار  $\eta$  می‌رسند. تغییرات منحنی تنشهای شعاعی برای دو ماده پیزوالکتریک یکسان‌اند. دومین شکل (۲) منحنیهای توزیع تنش کششی محیطی است که از شعاع داخل به سمت شعاع خارجی کاهش می‌یابند و مقدار آنها در شعاع خارجی برای مقادیر بزرگ نسبت شعاع  $\eta$ ، به سمت صفر میل می‌کنند. در صورت وجود ترکهای شعاعی در سطح داخلی سیلندر وجود تنشهای محیطی کششی در آن سطح، باعث رشد ترک می‌شود.

سومین شکل (۲) منحنیهای پتانسیل الکتریکی بدون بعد را نشان می‌دهد. اگرچه شرایط مرزی ایجاب می‌کند که اثرات الکتریکی روی سطوح داخلی و خارجی سیلندر صفر باشد، اما

شکل‌های (۲) نتایج مربوط به اولین حالت بارگذاری که سیلندر فقط تحت فشار داخلی است را نشان می‌دهند. اولین شکل منحنیهای توزیع تنش فشاری شعاعی بدون بعد را نشان می‌دهد که منحنیهای توزیع تنش شعاعی به طور پیوسته از سطح داخلی سیلندر از مقدار صفر می‌روند و در سطح خارجی به مقدار  $\eta$  می‌رسند. تغییرات منحنی تنشهای شعاعی برای دو ماده پیزوالکتریک یکسان‌اند. دومین شکل (۲) منحنیهای توزیع تنش کششی محیطی است که از شعاع داخل به سمت شعاع خارجی کاهش می‌یابند و مقدار آنها در شعاع خارجی برای مقادیر بزرگ نسبت شعاع  $\eta$ ، به سمت صفر میل می‌کنند. در صورت وجود ترکهای شعاعی در سطح داخلی سیلندر وجود تنشهای محیطی کششی در آن سطح، باعث رشد ترک می‌شود.

#### ۵-۱- حالت اول بارگذاری

شکل‌های (۲) نتایج مربوط به اولین حالت بارگذاری که سیلندر فقط تحت فشار داخلی است را نشان می‌دهند. اولین شکل منحنیهای توزیع تنش فشاری شعاعی بدون بعد را نشان می‌دهد که منحنیهای توزیع تنش شعاعی به طور پیوسته از سطح داخلی سیلندر از مقدار صفر می‌روند و در سطح خارجی به مقدار  $\eta$  می‌رسند. تغییرات منحنی تنشهای شعاعی برای دو ماده پیزوالکتریک یکسان‌اند. دومین شکل (۲) منحنیهای توزیع تنش کششی محیطی است که از شعاع داخل به سمت شعاع خارجی کاهش می‌یابند و مقدار آنها در شعاع خارجی برای مقادیر بزرگ نسبت شعاع  $\eta$ ، به سمت صفر میل می‌کنند. در صورت وجود ترکهای شعاعی در سطح داخلی سیلندر وجود تنشهای محیطی کششی در آن سطح، باعث رشد ترک می‌شود.



شکل ۳- حالت دوم بارگذاری، اعمال پتانسیل الکتریکی بین سطوح داخلی و خارجی سیلندر برای نسبت‌های شعاع  $\eta = 1.3, 2, 4$

نشان می‌دهد، منحنیها در نقطه‌ای از ضخامت سیلندر دارای یک مقدار مینیمم‌اند. هنگامی که  $\eta = 1.3$  است، محل مینیمم تنش شعاعی حدوداً در وسط ضخامت سیلندر است. با افزایش نسبت تنش  $\eta$ ، محل مینیمم مقدار تنش شعاعی به سمت سطح داخلی سیلندر حرکت می‌کند و در سمت راست نقطه مینیمم شیب منحنی کاهش می‌یابد.

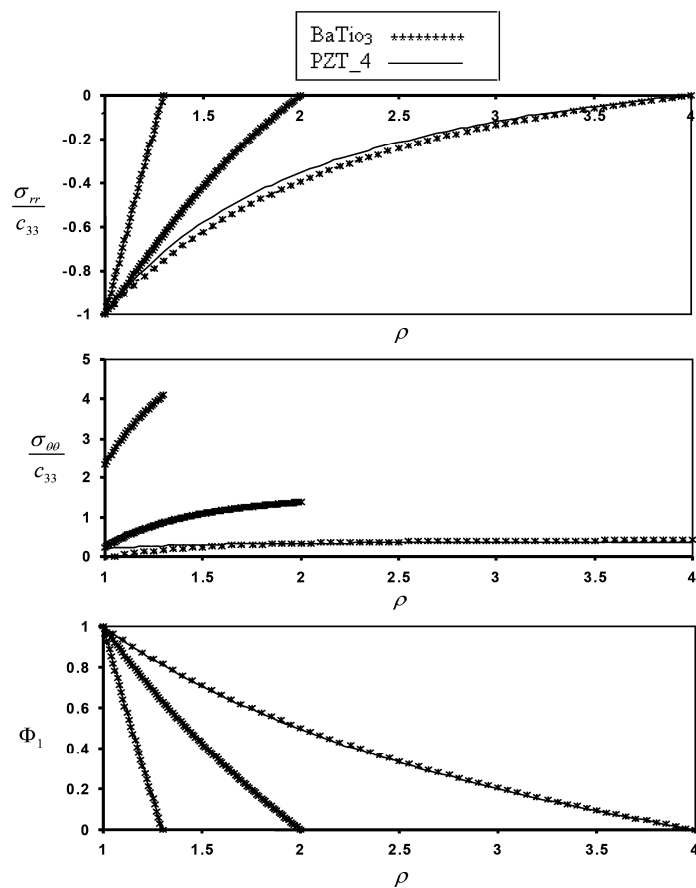
دومین شکل (۳) منحنیهای توزیع تنش محیطی بدون بعد را نشان می‌دهد. برخلاف حالت ۱ که سیلندر فقط تحت فشار داخلی است و برای نسبت‌های مختلف شعاع  $\eta$ ، توزیع تنشهای محیطی کششی بوده و با افزایش شعاع به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد، ولی در این حالت بارگذاری برای  $\eta$ های مختلف توزیع تنشهای محیطی در مقدار صفر تغییر علامت می‌دهد. یعنی در قسمت بیرونی سطح مقطع سیلندر تنشهای محیطی

در بین این دو سطح اثرات الکتریکی موجود است. هر چه نسبت شعاع  $\eta$ ، افزایش یابد محل مینیمم پتانسیل الکتریکی به سمت سطح داخلی سیلندر حرکت می‌کند. همچنین از این شکل مشاهده می‌شود که در پیزوالکتریک PZT\_4 پتانسیل الکتریکی بیشتری نسبت به پیزوالکتریک BaTiO<sub>3</sub> ایجاد می‌شود.

## ۲-۵- حالت دوم بارگذاری

شکل (۳) منحنیهای توزیع تنشهای بدون بعد شعاعی، تنشهای بدون بعد محیطی و پتانسیل الکتریکی بدون بعد در جداره سیلندر تحت بارگذاری الکتریکی را نشان می‌دهد. سطح داخلی سیلندر دارای پتانسیل بدون بعد ۱ و سطح خارجی آن دارای پتانسیل صفر است.

اولین شکل (۳) منحنیهای توزیع تنش شعاعی فشاری را



شکل ۴- حالت سوم بارگذاری، اعمال فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی برای  $\eta = 1, 2, 3, 4$

شکل مشاهده می‌شود که منحنیهای توزیع تنشهای شعاعی، تنشهای محیطی و پتانسیل الکتریکی بدون بعد برای دو ماده پیزوالکتریک با نسبتهای مختلف شعاع  $\eta$ ، بر هم منطبق‌اند و برای نسبتهای بالای شعاع مثلاً برای  $\eta = 4$  یک اختلاف جزئی وجود دارد.

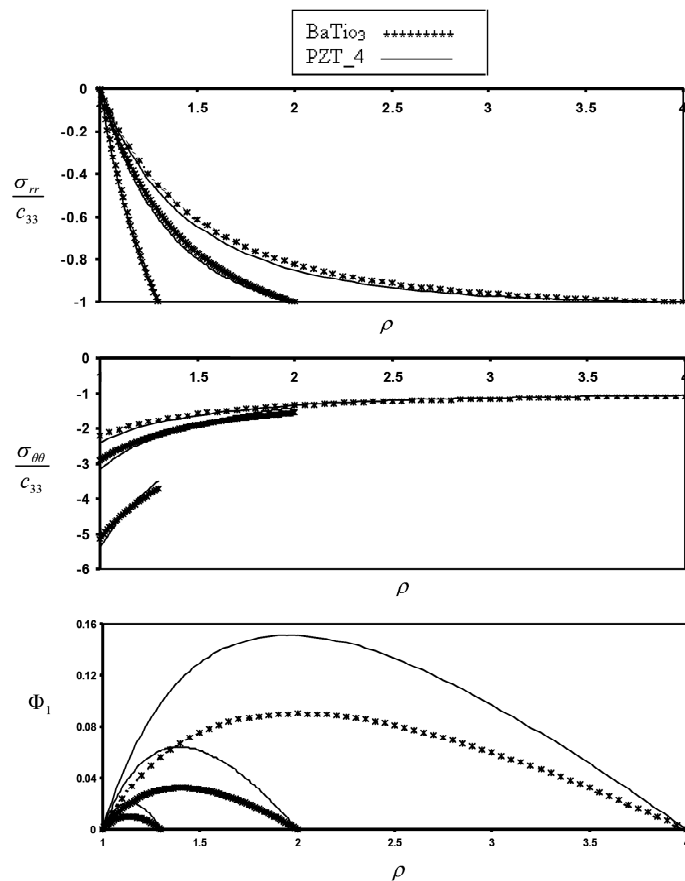
#### ۴-۵- حالت چهارم بارگذاری

شکل (۵) نتایج چهارمین حالت بارگذاری را که سیلندر فقط تحت فشار یکنواخت خارجی است، نشان می‌دهد. اولین شکل (۵) منحنی توزیع تنشهای شعاعی بدون بعد را که در سرتاسر ضخامت سیلندر فشاری‌اند را نشان می‌دهد. این تنشها به طور پیوسته از مقدار صفر در سطح داخلی تا به مقدار 1- در سطح خارجی می‌رسند. تغییرات توزیع تنشهای شعاعی در دو پیزوالکتریک یکسان است. منحنی توزیع تنش شعاعی در

کششی و در قسمت دیگر از سطح مقطع آن تنشهای محیطی فشاری‌اند. از شکل (۳) مشاهده می‌شود که تنش محیطی تقریباً در شعاعی از سطح مقطع سیلندر صفر می‌شود که در آن شعاع، تنش شعاعی مینیمم است. سومین شکل (۳) منحنیهای پتانسیل الکتریکی بدون بعد را نشان می‌دهد که بین مقدار 1 در سطح داخلی تا صفر در سطح خارجی سیلندر به صورت خطی تغییر می‌کنند. همچنین از شکل ملاحظه می‌شود که مقادیر پتانسیل مربوط به PZT\_4 بیشتر از مقادیر مربوط به  $BaTiO_3$  است.

#### ۳-۵- حالت سوم بارگذاری

شکل (۴) حالت سوم بارگذاری را نشان می‌دهد که ترکیب حالت اول و دوم است. یعنی ترکیب شکلهای (۲) و (۳) است. در این حالت سیلندر تحت فشار داخلی و بار الکتریکی است. از این



شکل ۵- حالت چهارم بارگذاری، اعمال فشار خارجی برای نسبت‌های شعاع  $\eta = 1, 2, 3, 4$

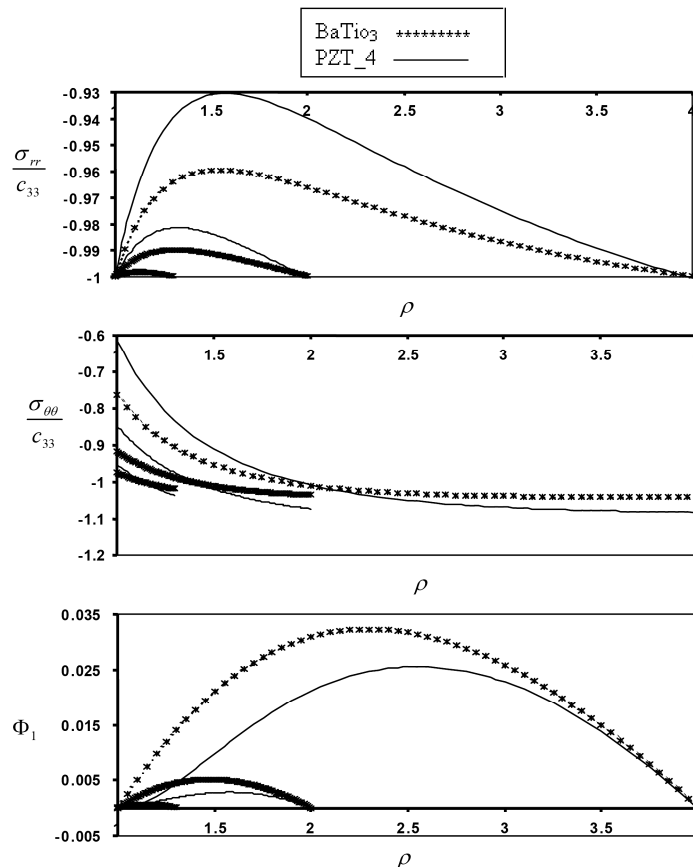
مشاهده می‌شود که منحنیهای پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای از ضخامت سیلندر دارای مقدار ماکزیمم‌اند و با افزایش نسبت شعاع  $\eta$ ، محل ماکزیمم پتانسیل به سمت سطح داخلی سیلندر حرکت می‌کند. همچنین در پیزوالکتریک PZT\_4 نسبت به پیزوالکتریک BaTiO<sub>3</sub> پتانسیل الکتریکی بیشتری ایجاد می‌شود. از شکل‌های (۲) و (۵) مشاهده می‌شود که تمام منحنیهای توزیع تنش بدون بعد و پتانسیل بدون بعد در جداره سیلندر مربوط به حالت اول و حالت چهارم بارگذاری نسبت به محور افقی  $\rho$ ، برای دو ماده پیزوالکتریک، قرینه یکدیگرند.

#### ۵-۵- حالت پنجم بارگذاری

شکل (۶) منحنیهای توزیع تنشهای شعاعی و محیطی بدون بعد و پتانسیل بدون بعد را برای حالت بارگذاری که سیلندر تحت ترکیبی از فشار داخلی و فشار خارجی است را نشان

این حالت بارگذاری نسبت به محور افقی  $\rho$ ، قرینه منحنی توزیع تنشهای شعاعی مربوط به حالت اول بارگذاری‌اند. دومین شکل (۵) منحنیهای توزیع تنشهای محیطی را نشان می‌دهد که در سرتاسر ضخامت سیلندر فشاری‌اند. با افزایش نسبت شعاع  $\eta$ ، مقدار تنش محیطی پتانسیل الکتریکی برای دو ماده پیزوالکتریک کاهش می‌یابد. نکته جالب این است که منحنیهای مربوط به دو ماده پیزوالکتریک تقریباً در وسط ضخامت سیلندر یکدیگر را قطع می‌کنند. برای نسبت‌های مختلف شعاع  $\eta$ ، مقادیر تنشهای محیطی مربوط به BaTiO<sub>3</sub> در شعاع داخلی مقداری کمتر از مقادیر مربوط به PZT\_4 است اما در شعاع خارجی اندکی بیشتر است.

سومین شکل (۵) منحنیهای پتانسیل الکتریکی بدون بعد را نشان می‌دهد. اگرچه شرایط مرزی ایجاب می‌کند که اثرات الکتریکی روی هر دو سطوح داخلی و خارجی صفر باشد، اما در بین این دو سطح اثرات الکتریکی موجود است. از این شکل



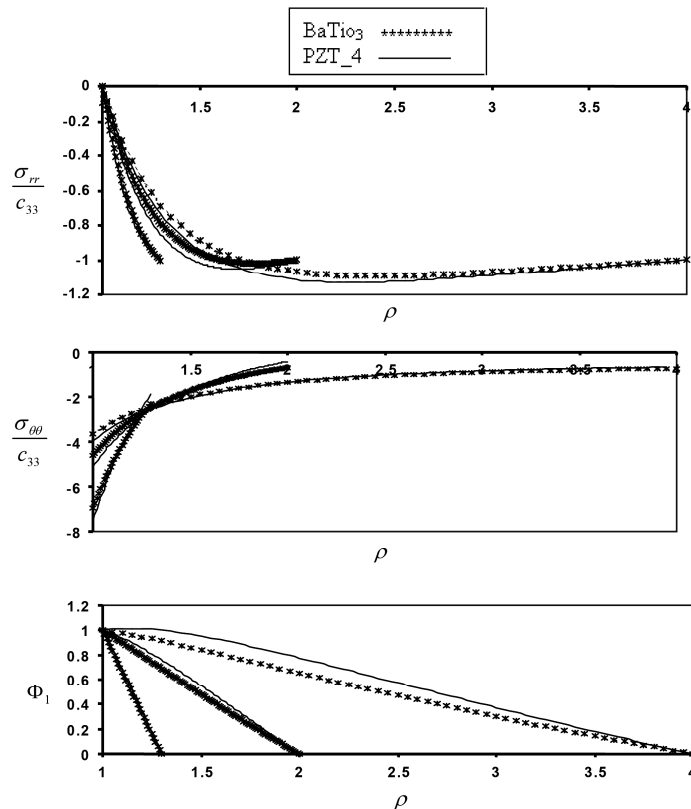
شکل ۶- حالت پنجم بارگذاری برای نسبت‌های شعاع  $\eta = 1, 3, 2, 4$

سیلندر کمتر از مقدار تنش محیطی برای پیزوالکتریک  $\text{BaTiO}_3$  است ولی در سطح خارجی سیلندر عکس این حالت اتفاق می‌افتد. از شکل ملاحظه می‌شود که منحنیهای توزیع تنشهای محیطی مربوط به دو پیزوالکتریک یکدیگر را در نقطه‌ای تقریباً در وسط ضخامت سیلندر را قطع می‌کنند و با افزایش  $\eta$  محل نقطه تقاطع به سطح داخلی سیلندر نزدیکتر می‌شود.

سومین شکل (۶) منحنیهای پتانسیل الکتریکی بدون بعد را نشان می‌دهد. پتانسیل الکتریکی در سطوح داخلی و خارجی سیلندر صفر است. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود به رغم عدم اعمال بار الکتریکی، در ضخامت سیلندر پتانسیل ایجاد می‌شود و محل ماکزیمم آن تقریباً در وسط ضخامت سیلندر جایی است که منحنیهای توزیع تنشهای محیطی مربوط به دو ماده پیزوالکتریک یکدیگر را قطع می‌کنند. با افزایش  $\eta$  مقدار پتانسیل الکتریکی ایجاد شده در ضخامت سیلندر افزایش می‌یابد

می‌دهد. همان‌گونه که از اولین شکل (۶) مشاهده می‌شود منحنی تنش شعاعی بدون بعد از ۱- در سطح داخلی سیلندر شروع شده و تقریباً در وسط ضخامت سیلندر به ماکزیمم رسیده و سپس کاهش یافته و در سطح خارجی سیلندر مجدداً به ۱- می‌رسد. بنابراین توزیع تنشهای شعاعی در سرتاسر ضخامت سیلندر فشاری‌اند. با افزایش  $\eta$ ، ماکزیمم منحنیها کاهش یافته و محل آن به سمت سطح داخلی سیلندر حرکت می‌کند. برای نسبت‌های مختلف شعاع  $\eta$ ، مقادیر تنش شعاعی بدون بعد مربوط به پیزوالکتریک  $\text{BaTiO}_3$  همواره بزرگتر از مقادیر آن برای پیزوالکتریک PZT\_4 است.

دومین شکل (۶) منحنیهای توزیع تنشهای محیطی که در سرتاسر ضخامت سیلندر فشاری‌اند را نشان می‌دهد. مقدار این تنشها در سطح داخلی سیلندر با افزایش  $\eta$  کاهش می‌یابد. مقدار تنش محیطی برای پیزوالکتریک PZT\_4 در سطح داخلی



شکل ۷- حالت ششم بارگذاری، اعمال پتانسیل الکتریکی و فشار خارجی برای  $\eta = 1, 3, 2, 4$

به  $\text{BaTiO}_3$  همواره کمتر از PZT\_4 قرار دارد. دومین شکل توزیع تنشهای محیطی بدون بعد فشاری را نشان می‌دهد. از شکل مشاهده می‌شود که در شعاع داخلی مقدار تنشهای محیطی برای نسبتهای مختلف شعاع در ماده  $\text{BaTiO}_3$  اندکی کمتر از ماده PZT\_4 است، اما در شعاع خارجی عکس این حالت اتفاق می‌افتد.

سومین شکل منحنی پتانسیل الکتریکی بدون بعد را نشان می‌دهد که مقدار آن در سطح داخلی سیلندر از یک شروع شده و به مقدار صفر در سطح خارجی آن می‌رسد. با افزایش نسبت شعاعها منحنیهای دو ماده از یکدیگر فاصله می‌گیرند و با افزایش شعاع این اختلاف کاهش یافته و نهایتاً در سطح خارجی سیلندر به مقدار صفر می‌رسند.

#### ۷-۵- حالت هفتم بارگذاری

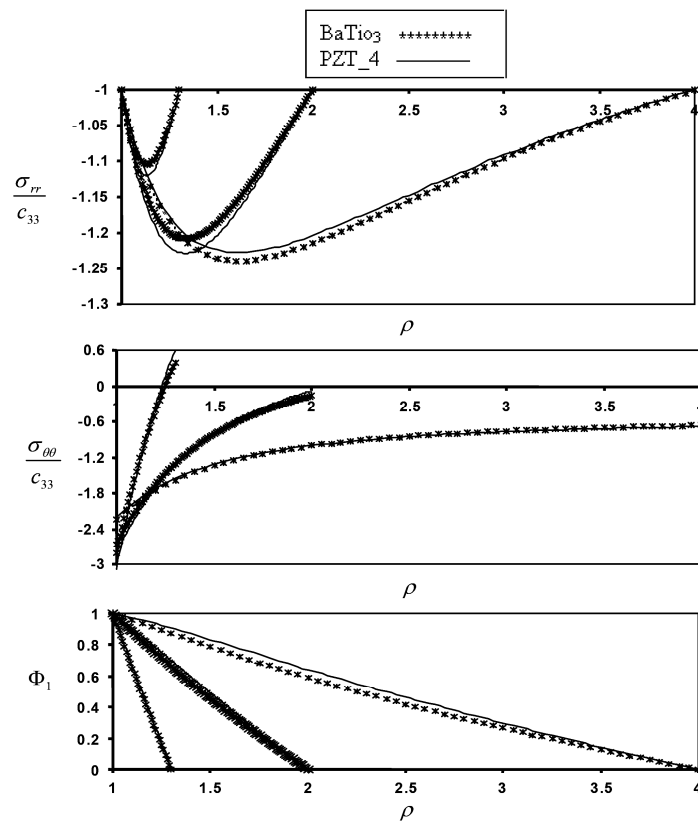
شکل (۸) نتایج مربوط به آخرین حالت بارگذاری که

و مقدار پتانسیل الکتریکی ایجاد شده در جداره سیلندر برای پیزوالکتریک  $\text{BaTiO}_3$  بیشتر از پیزوالکتریک PZT\_4 است.

#### ۵-۶- حالت ششم بارگذاری

شکل (۷) منحنیهای توزیع تنشها و پتانسیل الکتریکی را برای ششمین حالت بارگذاری که سیلندر تحت فشار یکنواخت خارجی و میدان یکنواخت الکتریکی است را نشان می‌دهد. این حالت ترکیبی از حالت دوم و چهارم بارگذاری است.

اولین شکل منحنیهای توزیع تنشهای بدون بعد شعاعی را برای دو ماده پیزوالکتریک نشان می‌دهد. تنش شعاعی در سرتاسر ضخامت سیلندر فشاری بوده و مقدار آن در سطح داخلی سیلندر از صفر شروع شده و به مقدار ۱- در سطح خارجی آن می‌رسد. برای نسبتهای بالای شعاع مثلاً  $\eta = 4$  در محدوده‌ای از ضخامت سیلندر مقدار تنش فشاری از یک بیشتر می‌شود، اما در نهایت در  $\eta = \rho$  مقدار آن یک می‌شود. مقادیر تنش بی بعد فشاری مربوط



شکل ۸- حالت هفتم بارگذاری، اعمال همزمان فشار خارجی، فشار داخلی و بار الکتریکی برای  $\eta = 1, 3, 2, 4$

تقریباً بر هم منطبق اند. پتانسیل از مقدار یک در سطح داخلی تا صفر در سطح خارجی به طور خطی و پیوسته کاهش می یابد.

#### ۶- نتیجه گیری

الف- در این تحقیق نشان داده شد که در مسائل با شکل هندسی متقارن مانند سیلندرهایی پیزوالکتریک که در جهت شعاعی پلاریزه می شوند، می توان اثرات الکتریکی و مکانیکی را به صورت مجزا مورد بررسی قرار داد.

ب- نمودارهای توزیع تنشهای بدون بعد و پتانسیل الکتریکی بدون بعد برای هفت حالت بارگذاری برای سیلندر پیزوالکتریک از جنس  $\text{BaTiO}_3$  و PZT\_4 که کاربرد فراوانی در صنعت دارند، رسم و بحث شده اند.

ج- روش تحلیلی که در این مقاله ارائه شد را می توان برای تمام سیلندرهایی از جنس مواد پیزوالکتریک که قابل پلاریزه شعاعی اند، تعمیم داد.

سیلندر تحت فشار یکنواخت داخلی، فشار یکنواخت خارجی و میدان یکنواخت الکتریکی است را نشان می دهد. از اولین شکل منحنیهای توزیع تنشهای شعاعی مشاهده می شود که تنشهای شعاعی فشاری بوده و نقطه مینیمم منحنی تقریباً در وسط ضخامت سیلندر است و با افزایش  $\eta$  به سمت سطح داخلی سیلندر حرکت می کند.

دومین شکل (۸) نمودارهای توزیع تنش محیطی بدون بعد را برای دو پیزوالکتریک نشان می دهد. منحنیها به ازای نسبتهای مختلف شعاع  $\eta$ ، برای دو جنس برهم منطبق بوده و به ازای  $\eta = 2, 4$  توزیع تنش محیطی در سرتاسر ضخامت سیلندر فشاری ولی به ازای  $\eta = 1.3$  در نقطه ای از ضخامت سیلندر تنش محیطی صفر و با افزایش شعاع برای دو پیزوالکتریک تغییر علامت داده و کششی می شود.

در سومین شکل (۸) مشاهده می شود که نمودارهای پتانسیل الکتریکی مربوط به دو پیزوالکتریک به ازای  $\eta$  های مختلف

مقدار تنش محیطی حاصل از بارهای مکانیکی در سطح داخلی سیلندر پیزوالکتریک توسط میدان الکتریکی یکنواخت کاهش می‌یابد. بنابراین با اعمال میدان الکتریکی مناسب می‌توان آن را خنثی کرد و باعث افزایش عمر خستگی سیلندر شد.

د- در حالت اول بارگذاری که سیلندر فقط تحت فشار یکنواخت داخلی قرار دارد، شکل (۲)، توزیع تنشهای محیطی در سطح داخلی سیلندر کششی بوده که محل مناسبی برای رشد ترک شعاعی خستگی است.

ه- کاربردهای صنعتی این مقاله بسیار مهم است، به عنوان مثال

## واژه نامه

- |                              |                       |                                       |
|------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|
| 1. piezoelectric materials   | 6. barium titanate    | 10. electric displacement vector      |
| 2. actuators                 | 7. smart materials    | 11. dielectric permittivity constants |
| 3. sensors                   | 8. electric charge    | 12. piezoelectric modouli             |
| 4. anisotropic               | 9. elastic compliance | 13. elastic stiffness                 |
| 5. a lead zirconium titanate |                       |                                       |

## مراجع

- Berlincourt, D.A., "Piezoelectric Crystals and Ceramics," In: O.E. Mattiat (ed.), *Ultrasonic Transducer Materials*. Plenum Press, New York, pp. 63–124, 1971.
- Berlincourt, D.A., Curran, D.R., and Jaffe, H., "Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers," In: W.P. Mason (ed.), *Physical Acoustics: Principles and Methods*, Academic Press, New York, pp. 169–270, 1964.
- Jaffe, B., Cook Jr, W.R., and Jaffe, H., "Piezoelectric Ceramics," Academic Press, London, 1971.
- Tiersten, H.F., *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press, New York, 1969.
- Jiang, H.W., Schmid, F., Brand, W., and Tomlinson, G.R., "Controlling Pantograph Dynamics Using Smart Technology," In: J. Holnicki-Szulc and J. Rodellar (eds), *Smart Structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 125–132, 1999.
- Gandhi, M.V., and Thompson, B.S., *Smart Materials and Structures*, Chapman and Hall, London, 1992.
- Adelman, N.T., Stavsky, Y., and Segal, E., "Axisymmetric Vibrations of Radially Polarized Piezoelectric Ceramic Cylinders," *J. Sound Vibration*, Vol. 38, pp. 245–254, 1975.
- Rajapakse a, R.K.N.D., Chen a, Y., and Senjuntichai b, T., "Electroelastic Field of a Piezoelectric Annular Finite Cylinder," *International Journal of Solids and Structures* Vol. 42, pp. 3487–3508, 2005.
- Wei, X.X., and Chau, K.T., "Analytic Solution for Finite Transversely Isotropic Circular Cylinders under the Axial Point Load Test," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 128, pp. 209–219, 2002.
- Wang a, Q., and Liew b,c, K.M., "Analysis of Wave Propagation in Piezoelectric Coupled Cylinder Affected by Transverse Shear and Rotary," *Inertia International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 653–6667, 2003.
- Dai, H.L., and Wang, X., "Thermo-Electro-Elastic Transient Responses in Piezoelectric Hollow Structures," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 1151–1171, 2005.
- Han, Jie-Cai, and Wang, Bao-Lin., "Crack Spacing Effect for a Piezoelectric Cylinder under Electro-Mechanical Loading or Transient Heating," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 2126–2145, 2006.
- Kawiecki, G., "Piezogenerated Elastic Waves for Structural Health Monitoring," In: J. Holnicki-Szulc and J. Rodellar (eds), *Smart Structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 133–142, 1999.
- Parton, V.Z., and Kudryavtsev, B.A., *Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*, Translated by E.G. Strel'chenko. Gordon and Breach, New York, 1988.
- Horgan, C.O., and Baxter, S.C., "Effects of Curvilinear Anisotropy on Radially Symmetric Stresses in Anisotropic Linearly Elastic Solids," *J. Elasticity*, Vol. 42, pp. 31–48, 1996.
- Dunn, M.L., and Taya, M., "Electroelastic Field Concentrations in and Around Inhomogeneities in Piezoelectric Solids," *J. Appl. Mech*, Vol. 61, pp. 474–475, 1994.