

## حل جریان پتانسیل تراکم ناپذیر سه بعدی در مجاری با مقاطع مستطیلی

محمدسعید سعیدی\* - عباس مشیری\*\*

### خلاصه

مسئلهٔ جریان پتانسیل تراکم ناپذیر سه بعدی در مجاری با مقطع مستطیلی با متد اختلاف محدود به دو روش حل شده است. در روش اول از یک شبکهٔ متعامد استفاده شده و در روش دوم از یک شبکهٔ منطبق بر بدنه بهره گرفته شده و مسئله در فضای انتقال یافته که در آن شبکه به یک شبکهٔ متعامد تبدیل شده، حل شده است. مقایسهٔ نتایج نشان می‌دهند که روش دوم از دقت بیشتری برخوردار بوده و جهت طراحی نازل‌های با مقاطع مستطیلی مناسب‌تر است.

### ۱ - مقدمه

جهت طراحی نازل‌ها مورل<sup>۱</sup> [۱] یک روش سیستماتیک ارائه داده است که بر مبنای حل جریان پتانسیل تقارن محوری در نازل‌های با مقاطع دایره‌ای استوار است. وی برای طراحی نازل‌های با مقاطع مربعی از همین نتایج و با تعریف یک قطر معادل استفاده کرده است. متأسفانه استفاده از این نتایج برای نازل‌هایی با مقطع مستطیلی بدلیل حضور جریان‌های ثانویه، با خطا همراه خواهد بود. قاعدتاً برای اینگونه نازل‌ها باید جریان پتانسیل سه بعدی را حل کرده سپس با استفاده از نتایج آن، روش مورل را اعمال کرد.

\* استادیار دانشکدهٔ مکانیک - دانشگاه صنعتی اصفهان

\*\* فارغ التحصیل کارشناسی ارشد - دانشکدهٔ مکانیک - دانشگاه صنعتی اصفهان

I. Morel

جریان پتانسیل تراکم ناپذیر در این نوع از نازلها توسط داوین<sup>۱</sup> و همکاران [۲] با استفاده از یک شبکه<sup>۲</sup> متعامد در مختصات دکارتی حل شده است. در این روش بدلیل اینکه تعداد گره‌های هر مقطع با کوچکتر شدن سطح مقطع کم می‌شود، جهت حصول دقت کافی بایند شبکه‌ای با تعداد زیادی گره بکاربرد. جیمسون<sup>۳</sup> [۳] روشی جهت حل جریان خارجی با استفاده از یک شبکه<sup>۴</sup> منطبق بر بدنه ارائه داده است. در این روش دستگاه مختصات دکارتی توسط یک انتقال موضعی به دستگاه جدیدی انتقال پیدا می‌کند که در آن هر سلول حجم معیار به شکل یک مکعب در می‌آید. این روش چنانچه بر جریان داخل نازل اعمال شود، بنظر می‌رسد نقص روش داوین را نداشته ولی زمان محاسباتی بیشتری نیاز داشته باشد.

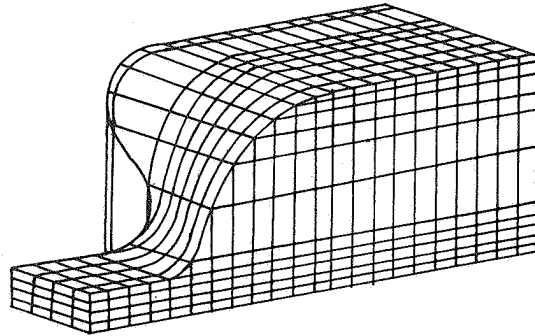
پاسخ به این سؤال که جهت طراحی نازل کدام روش از دقت بیشتری برخوردار بوده و مناسبتر است، هدف این مقاله قرار گرفت. برای این منظور، مسئله<sup>۵</sup> جریان پتانسیل تراکم ناپذیر در داخل نازلها با مقطع مستطیل شکل توسط هر دو روش با متد اختلاف محدود حل شد.

۲- حل جریان پتانسیل با استفاده از شبکه<sup>۶</sup> متعامد در دستگاه دکارتی شبکه<sup>۷</sup> انتخابی در شکل (۱) نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود شبکه به گونه‌ای ساخته شده که محل تلاقی خطوط شبکه با جدارها را گره‌ها تشکیل می‌دهند. جهت سهولت، فاصله<sup>۸</sup> بین گره‌ها در امتداد جریان یکسان در نظر گرفته شده و همچنین بدلیل وجود دو صفحه<sup>۹</sup> تقارن در امتداد جریان، مسئله برای یک چهارم کانال حل شده است. با سطوح تقارن مانند سطوح صلب برخورد شده است.

---

1. Dawine

2. Jameson



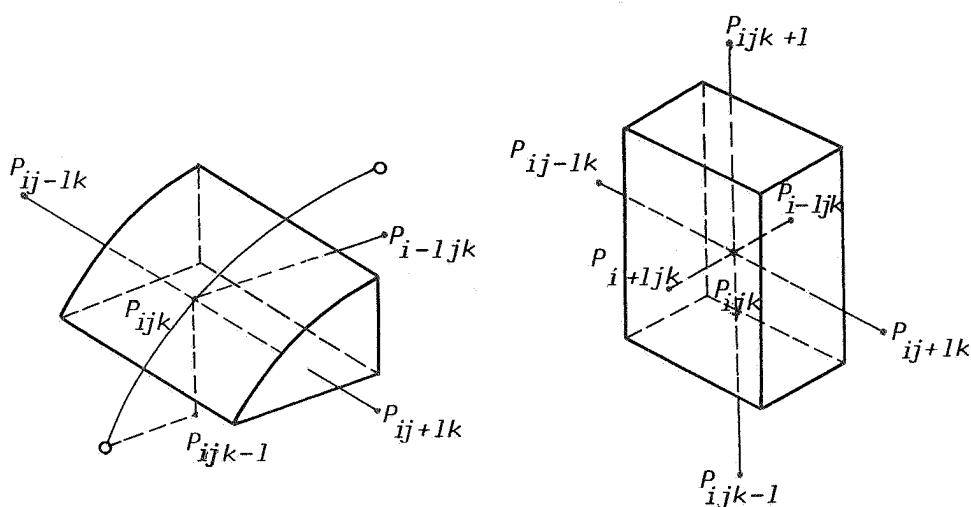
شکل ۱ - شبکه انتخابی

در ورودی و خروجی، دو کانال با سطح مقطع یکنواخت به نازل اضافه شده است. وجود این دو قسمت باعث می شود که اعمال شرایط مرزی پتانسیل سرعت یکنواخت در مقاطع ورودی و خروجی نتوانند تاثیر در جریان داخل نازل وارد سازند. حول هر گره یک سلول در نظر گرفته و بقاء جرم را برای این حجم معیار اعمال می کنیم. جریان پتانسیل و تراکم ناپذیر فرض شده و با جایگزینی  $\vec{v} = \nabla\phi$  و با استفاده از تفاوت محدود مرکزی برای مشتق های پتانسیل سرعت،  $\phi$ ، بقاء جرم منجر به معادله کلی زیر می شود [۴]:

$$\begin{aligned}
 & a_1 \phi_{i-1jk} + a_2 \phi_{i+1jk} + a_3 \phi_{ij-1k} + a_4 \phi_{ij+1k} + a_5 \phi_{ijk-1} \\
 & + a_6 \phi_{ijk+1} + a_7 \phi_{ijk} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

ضرایب  $a_1$  تا  $a_7$  ضرایب هندسی هستند که با معلوم بودن مختصات گره ها قابل محاسبه هستند. در مجموع ۳۴ نوع نقطه در این مسئله قابل

تشخیص است که هر یک بیان ریاضی متفاوتی برای  $a_1$  تا  $a_7$  دارند. در شکل‌های (۲ و ۳) حجم معیار انتخابی به ترتیب برای یک گره



شکل ۳- حجم معیار گره مرزی

شکل ۲- حجم معیار گره داخلی

داخلی و یک گره مرزی نشان داده شده است. در اعمال بقاء جرم برای گره‌های مرزی، دبی عبوری از سطوح صلب مساوی صفر منظور شده است. در مقطع ورودی همه  $\phi$  ها مساوی صفر و در مقطع خروجی مساوی یک انتخاب شده اند. که معادل عبور یک دبی جرمی مشخص از نازل است.

۳- حل جریان پتانسیل با استفاده از شبکه منطبق بر بدنه ضعف شبکه<sup>۶</sup> روش قبل در این است که با کوچکتر شدن سطح مقطع تعداد گره‌ها نیز کاهش می‌یابد. و این در حالی است که گزاردان پتانسیل سرعت افزایش می‌یابد و لذا باعث پائین آمدن دقت روش

می شود . بعلاوه مورب بودن مؤلفه‌های سرعت نسبت به سطوح جداره مزید بر علت می شود . همچنین بدلیل اینکه در مراحل بعدی بررسی، امکان ایجاد شوک در جریان گذرا در داخل نازل مورد نظر است ، روشی انتخاب شد که بسادگی بتواند این قابلیت را پیدا کند : لذا علاوه بر استفاده از شبکه<sup>۴</sup> منطبق بر بدنه ، دستگاه ثابت (xyz) با انتقال موضعی به دستگاه (ξηζ) تبدیل شد . در شکل (۴) یک مقطع طولی از شبکه نشان داده شده است . شبکه بگونه‌ای ساخته شده که اندازه<sup>۵</sup> اضلاع هریک از سلولهای شبکه بهم نزدیک باشند .

### ۱-۳ روش انتقال

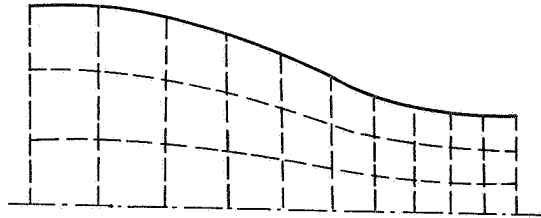
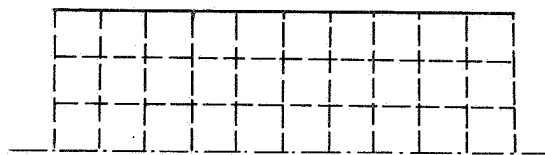
با انتخاب توابع انتقال به صورت زیر، هر سلول  $ijk$  در دستگاه  $xyz$  به یک مکعب به ضلع واحد در دستگاه  $\xi\eta\zeta$  تبدیل می شود. در شکل (۵) تبدیل یافته<sup>۶</sup> شکل (۴) آورده شده است .

$$x = \sum_{i=1}^8 N_{i x} \quad , \quad y = \sum_{i=1}^8 N_{i y} \quad , \quad z = \sum_{i=1}^8 N_{i z} \quad (2)$$

که در آن

$$N_i = \left( \frac{1}{2} \pm \xi \right) \left( \frac{1}{2} \pm \eta \right) \left( \frac{1}{2} \pm \zeta \right) , i = 1/\dots/8$$

$$-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq \zeta \leq \frac{1}{2} \quad (3)$$

شکل ۴- شبکه در دستگاه  $xyz$ 

شکل ۵- شبکه تبدیل یافته

با این انتخاب، هر راس از سلول  $ijk$  بر یکی از رئوس مکعب و مرکز حجم سلول بر مرکز مکعب ( $\xi = \eta = \zeta = 0$ ) منطبق می شود. از معادلات انتقال (۲)، ماتریس ژاکوبین،  $H$ ، برای هر سلول بدست می آید:

$$H = \begin{bmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} & x_{\zeta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} & y_{\zeta} \\ z_{\xi} & z_{\eta} & z_{\zeta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

که در آن بعنوان نمونه مشتق های  $x$  بر حسب مختصات رئوس سلول  $ijk$  بصورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} x_{\xi} &= (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - x_8) / 4 \\ x_{\eta} &= (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8) / 4 \\ x_{\zeta} &= (-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) / 4 \end{aligned} \quad (5)$$

شکل بقائی معادله پیوستگی در اثر انتقال حفظ می شود...  
 اگر  $U$  و  $V, W$  معرف مؤلفه های میدان سرعت در دستگاه  $xyz$  و  
 $U, V, W$  معرف سرعت های غیرهمنواخت در دستگاه  $\xi\eta\zeta$  (به ترتیب  
 در امتداد محورهای  $\xi/\eta/\zeta$ ) باشند، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho h U) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho h V) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho h W) = 0 \quad (7)$$

که در آن  $h$  دترمینان ماتریس  $H$  بوده و  $U, V, W$  توسط رابطه  
 زیر بیان می شوند:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\eta \\ \phi_\zeta \end{bmatrix}; \quad G = [H^T H]^{-1} \quad (8)$$

از آنجا که در این مقاله جریان پتانسیل تراکم ناپذیر مورد نظر است،  
 از این مرحله به بعد  $\rho$  را در معادلات وارد نمی سازیم. با فرض  
 تغییرات خطی برای  $\phi$  و سرعت های غیرهمنواخت در داخل سلول داریم:

$$\phi = \sum_{i=1}^8 N_i \phi_i \quad (9)$$

$$hU = \sum_{i=1}^8 N_i (hU)_i, \quad hV = \sum_{i=1}^8 N_i (hV)_i, \quad (10)$$

$$hW = \sum_{i=1}^8 N_i (hW)_i$$

که در آن منظور از  $\phi_i$  مقدار  $\phi$  در راه  $i$ ام مکعب  $ijk$  است و همینطور برای مقادیری مثل  $(hu)_i$  بدین ترتیب می توان مشتقهای  $hu$ ،  $hv$  و  $hw$  نسبت به متغیرهای  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\zeta$  را از روابطی مشابه روابط (۵) بدست آورده و در معادله (۷) جایگزین ساخت. بعنوان نمونه:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (hu) \right]_{ijk} = \sigma_{.25} [ (hu)_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}^{-(hu)}_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} + (hu)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} ] \quad (11)$$

$$- (hu)_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} + (hu)_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} - (hu)_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} + (hu)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} ]$$

حال چنانچه در معادله بدست آمده به جای  $U$ ،  $V$  و  $W$  مقادیر آنها را از طریق رابطه (۸) جایگزین کرده و سپس مشتقهای  $\phi_\xi$ ،  $\phi_\eta$ ،  $\phi_\zeta$  را از روابطی مشابه (۵) بر حسب مقادیر  $\phi_i$  قرار دهیم، نهایتاً برای هرگره  $ijk$  به معادله‌ای مانند رابطه زیر می رسیم [۴]:

$$\begin{aligned} & a \phi_{1 i-1j-1k-1} + a \phi_{2 i-1j+1k-1} + a \phi_{3 i+1j+1k-1} + a \phi_{4 i+1j-1k-1} \\ & + a \phi_{5 i-1j-1k+1} + a \phi_{6 i-1j+1k+1} \\ & + a \phi_{7 i+1j+1k+1} + a \phi_{8 i+1j-1k+1} + a \phi_{9 i-1j-1k} + a \phi_{10 i-1j+1k} \\ & + a \phi_{11 i+1j+1k} + a \phi_{12 i+1j-1k} + a \phi_{13 i-1jk-1} + a \phi_{14 i-1jk+1} \\ & + a \phi_{15 i+1jk-1} + a \phi_{16 i+1jk+1} + a \phi_{17 ij+1k-1} + a \phi_{18 ij+1k+1} \end{aligned}$$



$$\begin{array}{cccc}
 +a \phi & +a \phi & +a \phi & +a \phi \\
 19 \ ij-1k+1 & 20 \ ij-1k-1 & 21 \ i-1jk & 22 \ ij+1k \\
 +a \phi & +a \phi & +a \phi & +a \phi \\
 23 \ i+1jk & 24 \ ij-1k & 25 \ ijk+1 & 26 \ ijk-1 \\
 +a \phi & = 0 & & \\
 27 \ ijk & & & 
 \end{array}$$

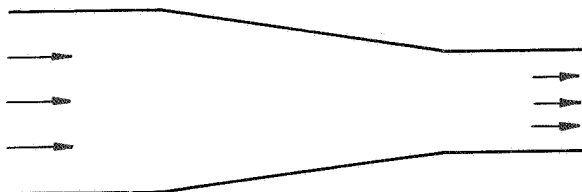
(۱۲)

در رابطه فوق ضرایب  $a_1$  تا  $a_{27}$  توابعی از  $h$  و عناصر  $G$  هستند که نهایتاً به مختصات رئوس شبکه مربوط می شوند. برای هر سلول باید ضرایب را ساخت. ملاحظه می شود مقدار پتانسیل سرعت در گره  $ijk$  ام که یک گره داخلی است به مقدار پتانسیل سرعت در ۲۶ گره اطراف خود مربوط می شود. این ۲۶ گره تمامی گره‌هایی هستند که روی مکعبی به ضلع دو به مرکز  $ijk$  قرار دارند. بدین ترتیب دقت نتایج بیشتر شده و بعلاوه انتقال اطلاعات سریعتر و جامع‌تر صورت می گیرد که خود موجب افزایش رشد همگرایی می شود.

در حل مسئله جمعاً "نه نوع گره قابل تشخیص است که برای هر نوع معادله اختلاف محدود به صورت رابطه (۱۲) است ولیکن شکل توابع  $a_1$  تا  $a_{27}$  متفاوت خواهند بود. در روی جداره‌ها دبی جرمی مساوی صفر قرار داده شد.

## ۲ - ارائه محاسبات و نتیجه گیری

چون هدف مقایسه نتایج حاصل از دوروش بود، نازلی با هندسه ساده مورد استفاده قرار گرفت. این نازل از دو قسمت با مقطع ثابت در ورودی و خروجی و یک قسمت همگرا با شیب ثابت تشکیل شده است. در شکل شماره (۶) شمائی از این نازل در صفحه قائم نشان داده شده است.



شکل ۶ - شمای نازل در صفحه قائم

مجموعه معادلات اختلاف محدود توسط روش گاوس - زایدل حل شدند. نتایج حاصل از حل روش شبکه متعامد برای نازلی با نسبت سطح مقطع ورودی به خروجی  $4/2$  در شکل شماره ۶ (۷) آورده شده است. در این مسئله تعداد گره‌های طولی ۱۴، شبکه مقطع ورودی  $15 \times 17$ ، شبکه مقطع خروجی  $8 \times 10$  و تولرانس همگرایی  $10^{-5} = \epsilon$  انتخاب شدند. با انتخاب ضریب همگرایی مساوی  $1/25$ ، پس از ۸۰۰ بار سعی و خطا، جواب همگرا بدست آمد. اختلاف دبی جرمی ورودی و خروجی حدود ۳۰٪ شد و نشان می‌داد باید از تعداد بیشتری گره استفاده شود. به منظور بالا بردن دقت این روش، توسط زیر برنامه‌های در هر تکرار، پتانسیل سرعت جدید با فیدبک گرفتن از نسبت دبی جرمی هر مقطع به دبی جرمی متوسط اصلاح شد و بدین ترتیب اختلاف فوق به ۷٪ تقلیل یافت.

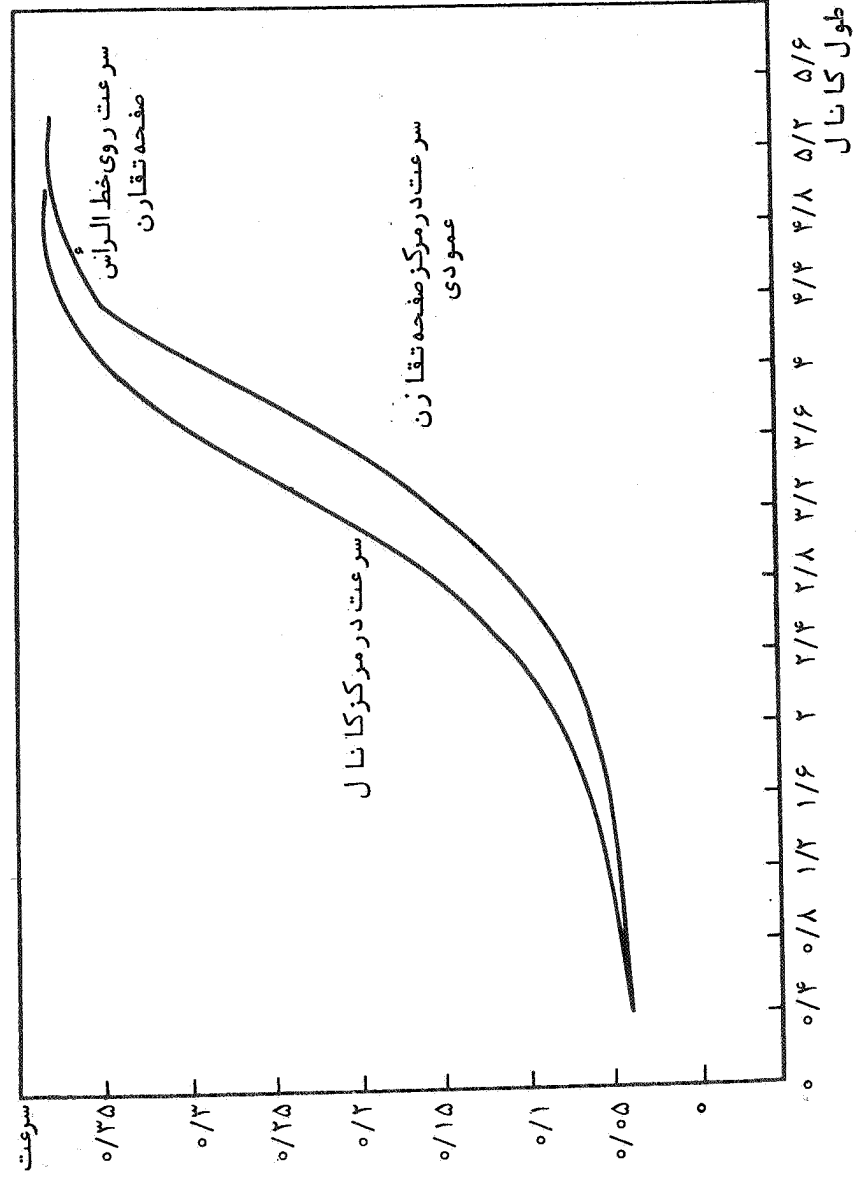
در روش شبکه منطبق بر بدنه، بدلیل محدودیت حافظه میکرو کامپیوتر، شبکه‌ای با مقطع مربعی و حداکثر به ابعاد  $5 \times 5 \times 10$  مورد استفاده قرار گرفت. برای نسبت تراکم  $1/2$  و تولرانس همگرایی  $10^{-6}$  و ضریب همگرایی مساوی  $0/7$ ، پس از ۵۹۸ تکرار جواب همگرا بدست آمد که نتیجه آن در شکل شماره ۸ (۸) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، توزیع سرعت، یک مینیمم نسبی در ورودی و یک ماکزیمم نسبی در خروجی قسمت همگرا را نشان می‌دهد که یک روند

قابل انتظار بوده و مطابق با نتایج مراجع [۱] و [۲] است در صورتیکه چنین روندی در شکل (۷) مشاهده نمی‌شود. بعلاوه در این حالت اختلاف دبی جرمی ورودی و خروجی نازل بدون اعمال زیربرنامه اصلاح پتانسیل سرعت ۳٪ شد که نشان دهنده دقت بالای این روش است. همین مسئله توسط روش شبکه متعامد حل شد که مشخصات آن در جدول شماره (۱) آورده شده است. پس از ۴۷۴ بار سعی و خطا جواب

جدول (۱) - مقایسه دوروش با هم

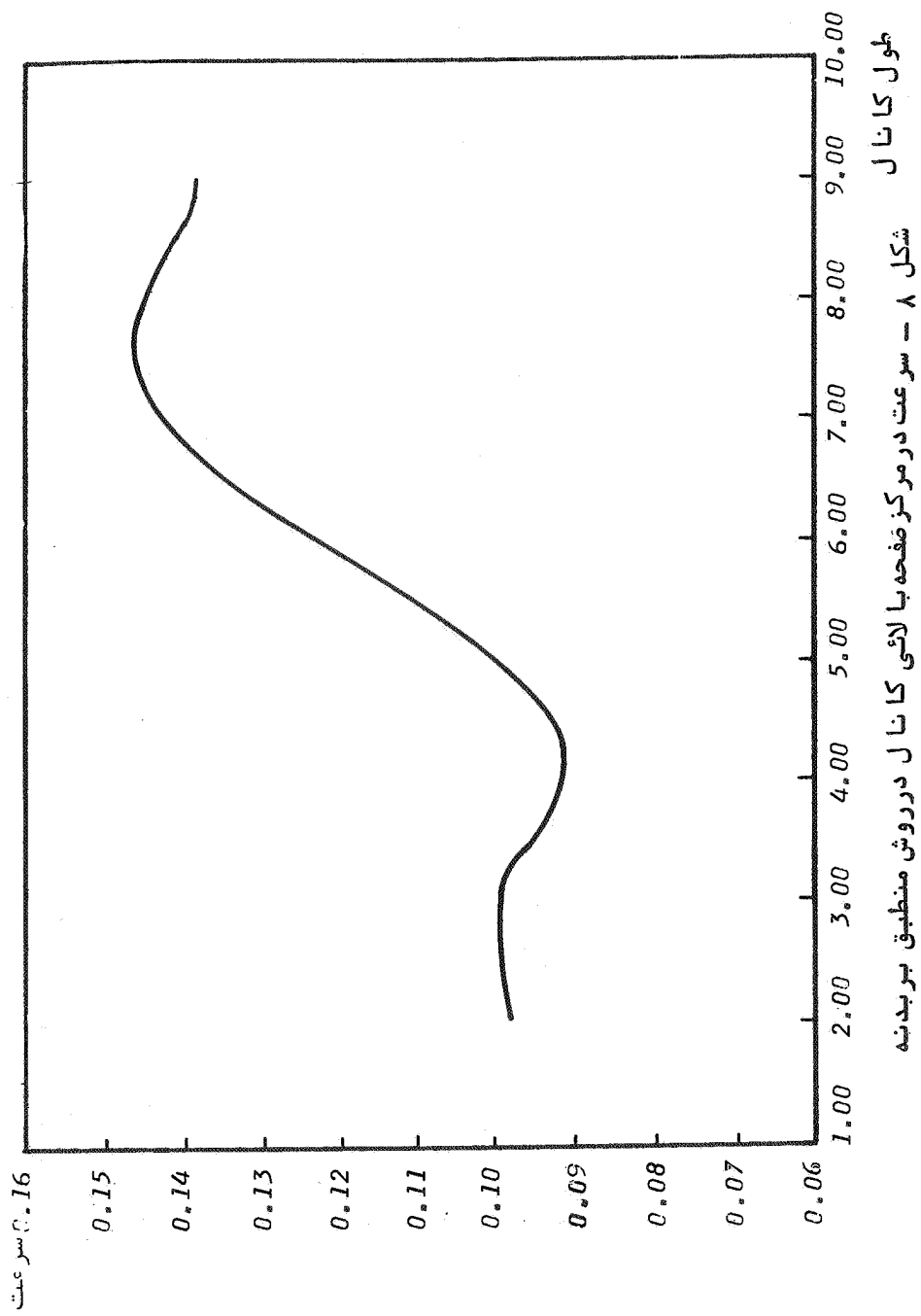
مقایسه دوروش	روش شبکه متعامد	روش شبکه منطبق بر بدنه
نسبت سطح مقطع ورودی به خروجی	۱/۲۷	۱/۲۷
ضریب همگرایی	۱/۲۵	۰/۷
تعداد مقاطع طولی	۱۰	۱۰
تعداد دگره‌ها در مقطع آخر درجهت x	۵	۵
تعداد دگره‌ها در مقطع آخر درجهت y	۵	۵
تولرانس	$10^{-6}$	$10^{-6}$
تعداد نقاط شبکه	۴۴۱	۲۵۰

استقلال



شکل ۷ - سرعت در خط الرأس و مرکز کانال در روش شبکه متعامد

حل جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر...



شکل ۸ - سرعت در مرکز صفحه با لاتی کانال در روش منطبق بر بدنه طول کانال

همگرایی دست‌آمد ولی بدلیل اینکه شبکه از تعداد گره کافی برخوردار نبود ، نتایج بدست‌آمده روند معقولی را نشان نمی‌دادند. زمان اجرای برنامه کامپیوتری برای هر دور روش در یک حدود بود . در مجموع مقایسه اجراهای فوق نشان می‌دهد برای مسائل مشابه در عین حال که زمان اجرای برنامه برای هر دور روش در یک حدود است ولیکن روش دوم از دقت بیشتری برخوردار است و چنانچه نازل توسط شبکه‌ای با تعداد گره‌های کافی معرفی شود ، می‌توان از نتایج حاصله در طراحی نازل‌های با مقطع مستطیلی سود جست .

مراجع

۴- مشیری ، عباس . حل جریان پتانسیل سه‌بعدی در مجاری مقطع مستطیلی شکل به روش عددی ، رساله کارشناسی ارشد- دانشکده مکانیک ، دانشگاه صنعتی اصفهان آبان ۱۳۶۸.

1. Morel , T., " Comprehensive Design of Axisymmetric Wind Tunnel Contractions", *Journal of Fluid Engineering*, June 1975.
2. Dowine , J. J. and Jordinson , R. and Barnes F. H., " On the Design of Three Dimensional Wind Tunnel Contractions", *Aeronautical Journal*, Aug/sept 1984.
3. Steinhoff , J. and Jameson , A., " Multiple Solutions of the Transonic Potential Flow Equation ", *AIAA Journal*, November 1982.