

تأثیر اصطکاک خشک بر ارتعاشات غیر خطی سیستم انتقال قدرت تک مرحله‌ای ترک‌دار

موسی رضائی* و فرزاد فلاحی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۱۰/۱۶ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۲/۲۷)

چکیده - در صنعت از چرخ‌دنده‌ها به صورت گسترده برای انتقال قدرت و یا تغییر جهت گشتاور انتقالی استفاده می‌شود. کاربرد وسیع سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای، اهمیت طراحی دقیق و نگهداری این سیستم‌ها را بیش از پیش آشکار می‌کند. شناخت سیستم‌ها از طریق مدل کردن و بررسی رفتار آنها و مقایسه با رفتار واقعی حاصل می‌شود. تاکنون مدل‌سازی و تحلیل ارتعاشات غیر خطی سیستم انتقال قدرت چرخ‌دنده‌ای ترک‌دار با لحاظ کردن اثر اصطکاک خشک صورت نگرفته است. هدف از انجام این تحقیق، بررسی ارتعاشات غیر خطی یک جفت چرخ‌دنده ساده درگیر ترک‌دار در حضور خطای انتقال استاتیکی، لقی، سفتی متغیر با زمان دندانه‌ها و اصطکاک خشک بین دندانه‌ها می‌باشد. بدین منظور ابتدا سفتی درگیری متغیر با زمان دندانه‌ها به صورت تحلیلی محاسبه شده و ترک ریشه دندانه با فرض دندانه به صورت یک تیر ترک‌دار یک سر گیردار مدل شده است. معادلات حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن عوامل مذکور استخراج و برای اعمال اثر اصطکاک خشک، معادله حاکم در سه بازه زمانی جدا از هم بازنویسی شده است. در نهایت معادله حاکم با استفاده از روش رانگ-کوتا حل شده و تأثیر اصطکاک خشک و ترک ریشه دندانه بر ارتعاشات غیر خطی سیستم با استفاده از نمودارهای پاسخ فرکانسی و دوشاخگی بررسی شده است.

واژگان کلیدی: چرخ‌دنده ساده، اصطکاک خشک، ترک ریشه دندانه، ارتعاشات غیر خطی، آشوب.

The Effect of Friction on the Nonlinear Vibration of the Cracked One-Stage Power Transmission

M. Rezaee* and F. Fallahi

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz

Abstract: The gear systems are widely used in industry to transmit the power or change the direction of the torque. Due to the extensive usage of the gears, the detailed designing and the subsequent maintenance of these systems are more and more evident. System recognition can be achieved through modeling the system, investigating the system behavior, and comparing the results obtained through the model with the actual system behavior. Up to now, the effect of dry friction has not been taken into account in nonlinear vibration analysis and modeling of a cracked one-stage gear power transmission system. In this paper, the nonlinear vibration of a pair of cracked spur-gear system in presence of dry friction, static transmission error, clearance and time-variant mesh stiffness is investigated. To this end, the time-variant mesh stiffness of an intact tooth is calculated analytically. Then, the tooth root crack is modeled as a cracked cantilever beam. The governing nonlinear equation of motion is extracted accordingly, and in order to consider the effect of dry friction, the governing equation solved by Rung- Kutta method in three separate time spans. Finally, the frequency response and bifurcation diagrams are used to study the effect of the friction and tooth root crack on the nonlinear vibration behavior of the system.

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

Keywords: Spur gear, dry friction, tooth root crack, nonlinear vibration, chaos.

فهرست علائم

لقی بین دندانه‌ها	b	بازوی گشتاور ناشی از اصطکاک خشک بین دندانه‌ها	$a_{p,g}(t)$
مدول الاستیسیته دندانه	E	ضریب میرایی روغن	c
ارتفاع دندانه	h	نیروی اعمالی به دندانه	F
ممان اینرسی پینیون و چرخ دنده	$J_{p,g}$	ممان اینرسی سطح مقطع ریشه دندانه	I
سفتی متغیر با زمان دندانه‌ها	$k(t)$	سفتی درگیری دو دندانه	k_{12}
سفتی بستر دندانه‌ها	k_f	سفتی خمشی دندانه‌ها	k_b
سفتی خمشی موضعی در محل ترک	K_θ	سفتی هرتزین دندانه‌ها	k_h
بازوی گشتاور نیروی اعمالی به دندانه در محل ترک	R	تعداد دندانه‌های پینیون	N_p
گشتاور نیروی اعمالی به دندانه در محل ترک	T	شعاع دایره ریشه	r_{root}
گشتاور خارجی اعمالی به پینیون و چرخ دنده	$T_{p,g}$	زمان	t
عرض دندانه	w	سرعت لغزش دندانه‌ها	V_s
تغییر شکل دندانه ترک دار	δ_c	تغییر شکل دندانه سالم	δ_h
خطای انتقال استاتیکی	$\varepsilon(t)$	تغییر شکل کلی دندانه	δ_T
ضریب پواسون	ν	زاویه فشار	φ
فرکانس طبیعی سیستم خطی شده	ω_n	جابه‌جائی زاویه‌ای ارتعاشی پینیون و چرخ دنده	$\theta_{p,g}$
سرعت زاویه‌ای پینیون	Ω_p	نسبت تماس	Γ
		عمق ترک	a

۱- مقدمه

با توجه به تقاضای روبه رشد سیستم‌های چرخ دنده‌ای سرعت بالا با وزن پایین و قابلیت انتقال توان بالا در صنعت، مدل‌سازی دینامیکی این سیستم‌ها اهمیت زیادی پیدا کرده است. اولین کارهای انجام شده در این زمینه به اوایل قرن هجدهم مربوط می‌شود. از مدل‌های ریاضی متفاوتی برای مدل کردن سیستم‌های چرخ دنده‌ای استفاده شده است که آنها را می‌توان در چهار گروه زیر دسته بندی کرد:

گروه اول مربوط به مدل‌های خطی با سفتی‌های ثابت است. از گوان و هاوسر [۱] در سال ۱۹۸۷ مرور کاملی بر کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات خطی سیستم‌های

چرخ دنده‌ای انجام دادند. آنها انواع مدل‌های استفاده شده را طبقه‌بندی و ویژگی‌های هر یک از مدل‌ها را بیان نمودند. وینیاک و سینگ [۲] از این مدل برای شبیه سازی سیستم انتقال قدرت چند مرحله ای استفاده کردند و پاسخ فرکانسی آن را تحت شرایط مختلف به دست آوردند. در حال حاضر نیز از این نوع مدل‌های ریاضی به منظور به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های چرخ دنده‌ای با فرض بدنه صلب و انعطاف پذیر استفاده می‌شود.

در گروه دوم از مدل‌های خطی با سفتی‌های متغیر با زمان استفاده شده است که در آنها سفتی‌های درگیری و سفتی یاتاقان‌ها به صورت متغیر با زمان مدل شده‌اند. وینیاک و همکاران [۳] برای مدل‌سازی سفتی دندانه‌ها از یک تابع متغیر

با زمان استفاده کردند. از آنجا که درگیری دندان‌ها یک فرآیند تکراری است، سفتی درگیری دندان‌ها را به صورت تابع پریودیک از زمان در نظر گرفتند. فاخ‌فاخ و همکاران [۴] برای مدل‌سازی سفتی دندان از تغییر شکل خمشی دندان و پیچشی شفت استفاده کرده و نتایج خود را با داده‌های عملی اعتبارسنجی نمودند.

محققان در سی سال اخیر به تدریج به این نتیجه رسیده‌اند که باید عواملی مانند لقی بین دندان‌ها را مد نظر قرار داده و در مدل‌هایشان وارد کنند و از مدل‌های غیرخطی برای مدل کردن سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای استفاده کنند. در گروه سوم، لقی درگیری نیز وارد معادلات شده و سفتی درگیری به صورت یک مقدار متوسط در نظر گرفته می‌شود و مدل حاصل، از نوع غیرخطی ثابت نسبت به زمان خواهد بود. کاهرامان و سینگ [۵] از چنین مدلی برای شبیه‌سازی ارتعاشات سیستم انتقال قدرت تک مرحله‌ای استفاده کردند و با استفاده از روش بالانس هارمونیک و روش عددی پاسخ سیستم را به دست آوردند.

در گروه آخر، هر دو عامل لقی درگیری و سفتی متغیر با زمان وارد مدل می‌شوند که معادلات حاصل از نوع غیرخطی متغیر با زمان هستند. وانگ و همکاران [۶] پیشرفت در زمینه دینامیک غیرخطی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای به ویژه رفتار دینامیکی چرخ‌دنده‌ها با در نظر گرفتن لقی و سفتی درگیری متغیر با زمان دندان‌ها را در طی سال‌های ۱۹۷۰ تا ۲۰۰۱ بررسی کرده‌اند. آنها ارتعاشات غیرخطی سیستم‌های انتقال قدرت چرخ‌دنده‌ای را مورد بحث قرار داده و اظهار نموده‌اند که بیشتر کارها روی مسائل دینامیکی مستقیم متمرکز شده است و با توجه به اهمیت ویژه عیب‌یابی، شناسایی بارها و ... باید به مسائل معکوس توجه بیشتری شود. تئودوسیادس و ناتسیاواس [۷] از این مدل برای شبیه‌سازی سیستم انتقال قدرت تک مرحله‌ای استفاده کرده و اثر خطای دندان و گشتاور پیچشی وارده به چرخ‌دنده را در مدل خود در نظر گرفتند. چانگ ژیان و چنگ [۸] با در نظر گرفتن سیستم یک درجه آزادی برای یک

جفت چرخ‌دنده ساده، اثر تعلیق غیرخطی بر رفتار دینامیکی سیستم را بررسی و نمودارهای دوشاخگی را برای پارامترهای ضریب میرایی و فرکانس بی‌بعد رسم کردند. در تحقیق مذکور مناطق آشوبناک به وسیله نمودارهای پوانکاره و فاز و دوشاخگی شناسایی شده است.

اکثر محققین در مدل‌های خود اثر اصطکاک را که موجب غیرخطی شدن معادلات حرکت می‌شود در نظر نگرفته‌اند در حالیکه برای بررسی دقیق تر مسأله، وارد کردن اصطکاک در معادلات لازم است. وایشیا و سینگ [۹] با در نظر گرفتن اصطکاک خشک و خاصیت تناوبی سفتی و میرایی درگیری، معادلات غیرخطی متغیر با زمان حاکم بر سیستم سالم را به دست آوردند. در مقاله مذکور، هر دو مدل خطی و غیرخطی متغیر با زمان مورد مطالعه قرار گرفته و پاسخ سیستم برای دو حالت به دست آمده است. ولکس و سینست [۱۰] بر پایه مدل کلمب یک روش تحلیلی برای سیستم چرخ‌دنده ساده و ماریپچ با در نظر گرفتن تحریک اصطکاک ارائه کردند. مدل‌های استفاده شده در این مقاله برحسب سری فوریه بیان شده‌اند که قابلیت استفاده در تمامی چرخ‌دنده‌های ساده و ماریپچ را دارند. آنها برای نشان دادن سطوح تحریک، کانتورهای مربوطه را رسم کردند که از این نمودارها می‌توان برای تخمین حساسیت سیستم به تحریک اصطکاک و اثر تصحیحات هندسی استفاده کرد. سانگ هه و همکاران [۱۱] در مقاله خود روش جدیدی برای وارد کردن اصطکاک و سفتی درگیری متغیر با زمان در مدل چند درجه آزادی چرخ‌دنده ساده به روش تحلیلی ارائه کردند. آنها برای این منظور ابتدا با استفاده از روش اجزا محدود سفتی درگیری را برای زمان تماس محاسبه کردند و سپس این سفتی را همراه اصطکاک خشک در مدل وارد نمودند. آنها همچنین اثر اصلاحات پروفیل چرخ‌دنده را بر خطای انتقال دینامیکی بررسی و با نتایج داده‌های تجربی اعتبارسنجی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که اصطکاک خشک، خطای انتقال دینامیکی را افزایش می‌دهد. همین

محققین [۱۲] در تحقیق دیگری، چند فرمول برای مدل‌سازی اصطکاک خشک ارائه دادند.

در دهه‌های گذشته مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای اکثراً برای سیستم‌های سالم و به‌منظور بررسی پاسخ دینامیکی آنها انجام می‌گرفت و مسائلی مانند کاربرد مدل‌سازی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای معیوب برای عیب‌یابی مد نظر قرار نگرفته بود. در چند دهه اخیر محققین روی مدل‌های دینامیکی چرخ‌دنده‌ای که شامل عیوبی مانند سایش، گودی، خراشیدگی، ترک و دندان‌شکسته است، کار کرده‌اند. پری و تاندون [۱۳] در مقاله مدل‌های دینامیکی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای دارای عیب را مرور کردند. برای پیش‌بینی ارتعاشات چرخ‌دنده در حضور عیب موضعی دندان‌ها را نشان می‌دهد. چاری و همکاران [۱۴] تاثیر عیوب گودی و شکست دندان‌ها را بر روی کاهش سفتی درگیری دندان‌ها و پاسخ زمانی سیستم بررسی کردند ولی روشی معکوسی برای تمیز بین این عیوب ارائه نکردند. همین محققین [۱۵] در کار دیگری به بررسی تاثیر ترک ریشه دندان‌ها در کاهش سفتی درگیری پرداخته و نشان دادند که وقتی که دندان‌ها معیوب وارد درگیری می‌شود سفتی درگیری به طرز محسوسی کاهش می‌یابد. وو و همکاران [۱۶] با ارائه مدل ۶ درجه آزادی خطی سیستم انتقال قدرت تک‌مرحله‌ای که خطاهای فرایند تولید در آن وارد نشده است به بررسی ترک رشد کننده در ریشه دندان‌ها پرداختند. آنها از شاخص‌های مختلف شناسایی ترک استفاده کردند و مزیت شاخص‌های مذکور در تشخیص ترک را بیان کردند. اندو و همکاران [۱۷] خطای انتقال سیستم چرخ‌دنده‌ای تک‌مرحله‌ای در دو حالت ترک‌دار و دارای گودی را اندازه‌گیری کرده و با استفاده از مفهوم کپستروم و انجام پردازش‌های سیگنال، روشی را برای تشخیص و تمیز دادن این دو عیب ارائه کردند. هووارد و همکاران [۱۸] برای بررسی اثر اصطکاک و ترک ریشه دندان‌ها در غیاب سایر عوامل مؤثر، از یک مدل بسیار ساده دینامیکی برای مدل کردن سیستم انتقال قدرت استفاده کردند. این مدل تنها شامل اثر سفتی متغیر با زمان چرخ‌دنده‌ها بود.

از بررسی تحقیقات پیشین مشخص می‌شود که تاکنون همه عوامل مؤثر در ارتعاشات سیستم‌های انتقال قدرت چرخ‌دنده‌ای ترک‌دار شامل، خطای انتقال استاتیکی، لقی، سفتی متغیر با زمان دندان‌ها و اصطکاک خشک بین دندان‌ها به صورت توأم بررسی نشده است درحالی‌که عوامل مذکور تاثیر توأمی در ارتعاشات یک سیستم واقعی دارند. بنابراین در مقاله حاضر ارتعاشات غیرخطی سیستم انتقال قدرت تک‌مرحله‌ای ترک‌دار با در نظر گرفتن عوامل مذکور مدل‌سازی شده است. برای این منظور ابتدا سفتی درگیری برای یک جفت دندان‌ها درگیر سالم با استفاده از روش تحلیلی معرفی شده در منبع [۱۵] محاسبه و سپس ترک ریشه دندان‌ها با فرض دندان‌ها به صورت تیر ترک‌دار و با اعمال اثر اصطکاک خشک شبیه‌سازی و معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده است. از روش عددی رانگ-کوتا برای حل معادلات استفاده شده است. یکی دیگر از تفاوت‌های مدل به‌کار رفته در مقاله حاضر با مدل‌های مورد استفاده در مطالعات قبلی، نحوه وارد کردن سفتی درگیری در معادلات است. نتایج حاکی از آن است که در نظر گرفتن اصطکاک و ترک موجب تفاوت‌های بارزی در رفتار سیستم می‌شود به‌طوری‌که با اعمال توأم اثر اصطکاک خشک و ترک ریشه دندان‌ها، به‌ازای بازه‌های خاصی از پارامترهای سیستم، امکان ایجاد آشوب وجود دارد درحالی‌که چنین رفتاری در مدل‌های پیشین ظاهر نمی‌شود.

۲- مدل‌سازی

در این بخش ویژگی‌های مدل ریاضی استفاده شده در این مقاله، معرفی شده است. بعد از مدل‌سازی تحلیلی سفتی درگیری دندان‌ها، ترک ریشه دندان‌ها با فرض دندان‌ها به صورت تیر ترک‌دار مدل‌سازی شده است و در نهایت معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده‌اند.

۲-۱- محاسبه تحلیلی سفتی درگیری دندان‌ها

سفتی درگیری دو چرخ‌دنده با تغییر محل تماس دندان‌ها و تعداد دندان‌های درگیر نسبت به زمان تغییر می‌یابد. به‌علاوه، سفتی درگیری تابعی از هندسه دندان‌ها، محل تماس

در رابطه فوق $j\left(\frac{a}{h}\right)$ تابعی از هندسه تیر بوده و به صورت رابطه (۳) محاسبه می‌شود:

$$j\left(\frac{a}{h}\right) = 1/8624\left(\frac{a}{h}\right)^7 - 3/95\left(\frac{a}{h}\right)^8 + 16/375\left(\frac{a}{h}\right)^9 - 37/226\left(\frac{a}{h}\right)^{10} + 76/81\left(\frac{a}{h}\right)^{11} - 126/9\left(\frac{a}{h}\right)^{12} + 172\left(\frac{a}{h}\right)^{13} - 143/97\left(\frac{a}{h}\right)^{14} + 66/56\left(\frac{a}{h}\right)^{15} \quad (3)$$

روابط فوق که برای تیر ترک‌دار به دست آمده‌اند برای دندان‌ها ترک‌دار اعمال می‌شوند. همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده است سفتی خمشی موضعی دندان‌ها ترک‌دار در ریشه دندان‌ها با فنر پیچشی معادل جایگزین می‌شود. ممان اینرسی سطح مقطع ریشه دندان‌ها که در آن ترک وجود دارد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = \frac{1}{12} wh^3 \quad (4)$$

که در آن w پهنای دندان‌ها و h ضخامت دندان‌ها بر روی دایره ریشه دندان‌ها است (شکل ۳).

با داشتن عمق ترک a و ضخامت دندان‌ها h ، ابتدا $j\left(\frac{a}{h}\right)$ محاسبه و سپس K_{θ} محاسبه می‌گردد. تغییر شکل نهایی دندان‌ها در محل اعمال نیرو برابر مجموع تغییر شکل حالت سالم دندان‌ها در محل اعمال نیرو و تغییر شکل ناشی از وجود ترک مدل شده با فنر پیچشی خواهد بود:

$$\delta_T(r) = \delta_h(r) + \delta_c(r) \quad (5)$$

$$\delta_h(r) = \frac{F}{K_h(r)} \quad (6)$$

$$\delta_c(r) = \frac{T}{K_{\theta}} R$$

گشتاور ناشی از نیروی F در محل ترک برابر خواهد بود با:

$$T = RF \cos \varphi \quad (7)$$

که در آن R بازوی گشتاور نیروی F در محل ترک است و از

دندان‌ها، تغییر شکل و اعوجاج دندان‌ها، خطای پروفیل دندان‌ها و عیوب دندان‌های درگیر است. سفتی یک دندان‌ها با استفاده از روش ارائه شده در مرجع [۱۵] و از محاسبه تغییر شکل‌های خمشی، بستر دندان‌ها و هرتزین^۱ دندان‌ها به دست می‌آید. در مدل‌سازی سفتی درگیری از اعوجاج دندان‌ها صرف‌نظر شده است.

اگر اندیس‌های ۱ و ۲ نشان دهنده دو دندان‌ها درگیر باشند، با توجه به یکسان بودن نیروی انتقالی روی هر دو دندان‌ها و سری فرض کردن سفتی‌های دندان‌ها می‌توان سفتی درگیری نهایی را از رابطه (۱) به دست آورد. این سفتی‌ها شامل دو سفتی خمشی به ازای هر یک از دندان‌ها، k_b ، دو سفتی بستر دندان‌ها، k_f ، و سفتی هرتزین دندان‌ها، k_h ، است:

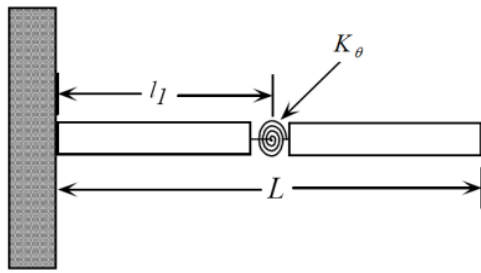
$$k_{12} = \sqrt{\left(\frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{f2}}\right)} \quad (1)$$

۲-۲- مدل‌سازی ترک ریشه دندان‌ها

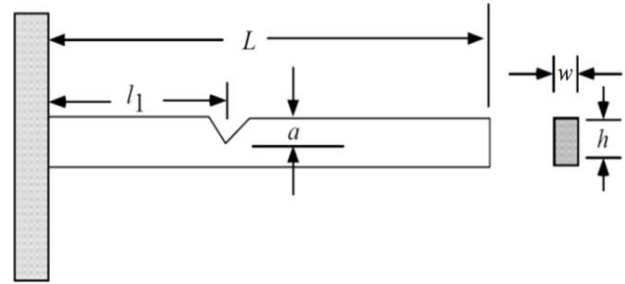
ترک ریشه دندان‌ها معمولاً در نتیجه کم بودن پهنای شعاعی بدنه چرخ‌دنده‌ها، نقص در فرایند تولید فلز چرخ‌دنده‌ها و یا شرایط کاری نامناسب چرخ‌دنده مانند کارکرد تحت بارگذاری‌های اضافی و یا کارکرد در نزدیکی‌های فرکانس‌های تشدید ایجاد می‌شود [۱۹]. اثر ترک در افزایش تغییر شکل خمشی دندان‌ها، δ_b ، ظاهر می‌شود. در این تحقیق برای تقریب، در مدل کردن ترک دندان‌ها از مدل تیر ترک‌دار با مقطع مستطیلی مطابق شکل (۱) که دارای ترک عرضی در مقطعی از تیر از ابتدای آن به فاصله l_1 است، استفاده شده است. در این شکل، a عمق ترک، w عرض تیر و h ارتفاع آن است. فرض اساسی در این مدل‌سازی آن است که هنگام ارتعاش تیر، دهانه ترک همواره باز است.

سفتی خمشی موضعی در محل ترک، K_{θ} ، که تابعی از عمق ترک، مشخصات هندسی و جنس تیر است، به صورت زیر است [۲۰]:

$$K_{\theta} = \frac{EI}{\varphi(1-\nu^2)h} \times \frac{1}{j\left(\frac{a}{h}\right)} \quad (2)$$

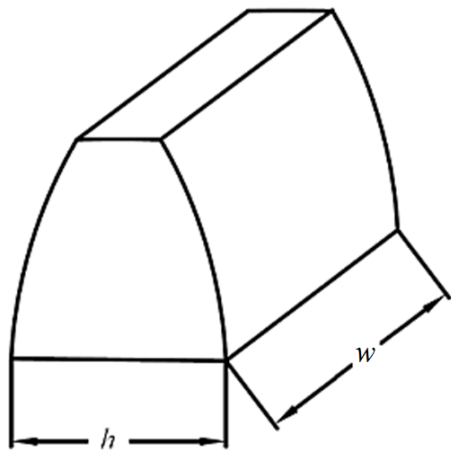


(ب)

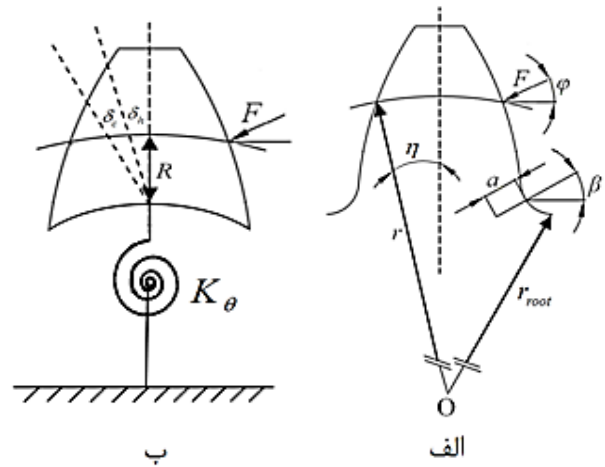


(الف)

شکل ۱- مدل سازی تیر ترک دار با مقطع مستطیلی [۲۰]



شکل ۳- دندانه چرخ دنده سالم



شکل ۲- مدل سازی ترک ریشه دندانه

چرخ دنده ساده درگیر در شکل (۴) نشان داده شده است. اشکالات موجود در پروفیل دندانه به صورت تحریک جابه جایی که خطای انتقال استاتیکی، $\varepsilon(t)$ ، نامیده می شود، مدل شده است. گشتاورهای خارجی T_p و T_g به ترتیب بر روی پینیون و چرخ اعمال می شوند. ممان اینرسی پینیون و چرخ دنده به ترتیب با J_p و J_g نشان داده شده است. $k(t)$ معرف سفتی متغیر با زمان دندانه ها و c معرف ضریب میرایی ناشی از وجود لایه روغن بین دندانه ها و b لقی بین دندانه های درگیر است که به صورت سری با سفتی درگیری مدل شده است.

θ_p و θ_g به ترتیب نشان دهنده جابه جایی زاویه ای ارتعاشی پینیون و چرخ می باشند. لغزش در سطح دندانه باعث ایجاد نیرویی در جهت عمود بر خط عمل^۳ می شود که با محور OLOA در شکل (۴) نشان داده شده است. در حین چرخش

رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$R = r \cos \eta - r_{\text{root}} - b/2 \quad (8)$$

در شکل (۲) مقدار زاویه η و بازوی R نشان داده شده است. b لقی بین دندانه ها و r_{root} شعاع دایره ریشه است. همچنین فرض شده است که ترک تنها بر روی یکی از دندانه های چرخ دنده کوچک (پینیون) قرار دارد. در حالت معیوب، سفتی درگیری برای یک دور دوران کامل پینیون تنها زمانی متفاوت از حالت سالم است که دندانه معیوب وارد درگیری می شود. بیشترین اثر کاهش سفتی درگیری زمانی مشاهده می شود که یک جفت دندانه درگیر باشند و یکی از این دندانه ها، دندانه ترک دار پینیون باشد.

۳-۲- معادلات حاکم بر سیستم

مدل دو درجه آزادی ارتعاشات پیچشی غیرخطی یک جفت

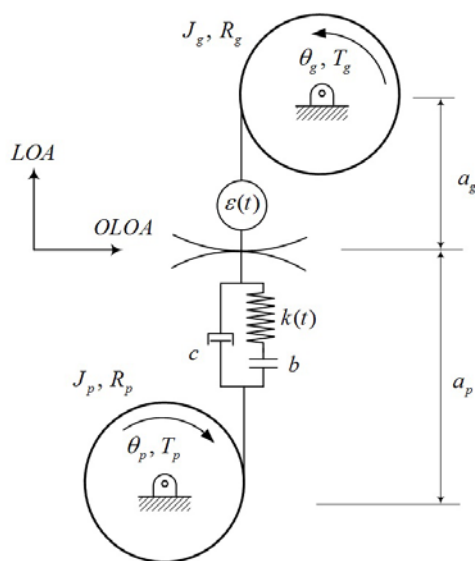
باتاقان‌ها صلب فرض می‌شود.

- ضریب میرایی درگیری ثابت فرض می‌شود.
- ممان اینرسی شفت‌ها و اجزای متصل به آنها به صورت گسسته در محل چرخ‌دنده‌ها در نظر گرفته می‌شود.
- سرعت لغزشی بین سطح دندانه‌های چرخ‌دنده و پینیون که برای پیدا کردن جهت نیروی اصطکاک لازم است بدون در نظر گرفتن اثر نوسانات لحظه‌ای و صرفاً با توجه به سینماتیک چرخ‌دنده‌های درگیر محاسبه شده است.
- تمامی پارامترها به غیر از لقی که متغیر با مکان است، متغیر با زمان در نظر گرفته می‌شوند.

برای سیستم نشان داده شده در شکل (۴) معادلات حرکت پیچشی برای پینیون و چرخ‌دنده را می‌توان به ترتیب به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 & J_p \ddot{\theta}_p + c(\dot{\theta}_p R_p - \dot{\theta}_g R_g - \varepsilon) R_p + \\
 & k(t) f(\theta_p R_p - \theta_g R_g - \varepsilon) R_p = T_p + F_f(N, V_s, \mu) a_p(t) \quad (9) \\
 & J_g \ddot{\theta}_g + c(\dot{\theta}_g R_g - \dot{\theta}_p R_p + \varepsilon) R_g + \\
 & k(t) f(\theta_g R_g - \theta_p R_p + \varepsilon) R_g = -T_g - F_f(N, V_s, \mu) a_g(t)
 \end{aligned}$$

در معادلات بالا جملات دوم در سمت چپ نشان‌دهنده گشتاور حاصل از نیروی میرایی و یسکوز درگیری دندانه‌ها است، جملات سوم گشتاور حاصل از نیروی درگیری دندانه‌ها است که در آن تابع $f(\theta_p R_p - \theta_g R_g - \varepsilon)$ معرف تابع جابه‌جایی غیرخطی در نتیجه وجود لقی بین دندانه‌ها، $F_f(N, V_s, \mu)$ بیانگر نیروی اصطکاک خشک است و T_p و T_g به ترتیب گشتاور شفت ورودی و گشتاور ترمزی روی چرخ‌دنده متحرک هستند. $\varepsilon(t)$ خطای انتقال استاتیکی است و از خطاهای فرایند تولید و همچنین اصلاحات دندانه‌ها ناشی می‌گردد و به صورت تحریک جابه‌جایی در مدل وارد می‌گردد. از آنجا که این سیستم دارای یک مود حرکتی صلب می‌باشد و در آن هیچ نوع انرژی پتانسیلی در سیستم ذخیره نمی‌شود بنابراین می‌توان با تعریف پارامتر جدید $\delta = \theta_p R_p - \theta_g R_g - \varepsilon$ درجه آزادی سیستم را به یک درجه کاهش داد. برای این کار رابطه اول (۹) در $R_p J_g$ و



شکل ۴- مدل دو درجه آزادی ارتعاشات پیچشی غیرخطی دو چرخ‌دنده درگیر

چرخ‌دنده‌ها، نقطه تماس دندانه‌ها بر روی خط عمل که در شکل با محور LOA نشان داده شده است، حرکت می‌کند و باعث تغییر $a_p(t)$ و $a_g(t)$ که به ترتیب نشانگر بازوی گشتاور ناشی از نیروی اصطکاک پینیون و چرخ‌دنده هستند، می‌شود. تغییر مقدار $a_p(t)$ و $a_g(t)$ باعث ایجاد گشتاور متغیر با زمان T_f حول محور چرخ‌دنده‌ها می‌شود. این گشتاور همچنین به ضریب اصطکاک دینامیکی سطوح دندانه‌ها، جهت سرعت لغزش دندانه‌ها، V_s و نیروی عمودی وارد به دندانه درگیر نیز وابسته است. مزیت اصلی مدل ارتعاشی غیرخطی سیستم انتقال قدرت ترک‌دار نشان داده شده در شکل (۴)، مدل‌سازی توأم نیروی اصطکاک خشک و ترک ریشه دندانه به همراه سایر عوامل موثر بر ارتعاشات سیستم می‌باشد که این امر باعث واقع‌بینانه‌تر شدن مدل می‌شود.

در بخش‌های ۱-۲ و ۲-۲ سفتی درگیری دندانه‌ها و ترک ریشه دندانه مدل‌سازی گردید و مدل ریاضی استفاده شده در شکل (۴) معرفی شد. حال با استفاده از قانون دوم نیوتن و با در نظر گرفتن فرض‌های زیر معادلات حرکت سیستم استخراج می‌شوند:

- شفت‌ها، محل اتصال چرخ‌دنده‌ها در روی شفت‌ها و

$$k(t) = k_{\text{mean}} \kappa(\bar{t})$$

$$\omega_n^\gamma = \frac{k_{\text{mean}} J_t}{J_e}$$

$$\begin{aligned} \omega_n^\gamma \ddot{x} + \frac{c \omega_n J_t}{J_e} \dot{x} + \omega_n^\gamma \kappa(\bar{t}) f(x) = \\ \frac{T_e}{b J_e} - \frac{\omega_n^\gamma \ddot{\xi}}{b} + \frac{J_g R_p}{b J_e} F_f(N, V_s, \mu) a_p(\bar{t}) + \\ \frac{J_p R_g}{b J_e} F_f(N, V_s, \mu) a_g(\bar{t}) \end{aligned} \quad (15)$$

با تعریف $\tau = \Omega \bar{t}$ و $f_* = \frac{T_e}{\omega_n^\gamma b J_e}$ و $\gamma \zeta = \frac{c J_t}{\omega_n J_e}$ که در آن $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ رابطه فوق به شکل نهائی زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \Omega^\gamma \ddot{x} + \gamma \zeta \Omega \dot{x} + \kappa(\tau) f(x) = f_* - \frac{\Omega^\gamma \ddot{\xi}}{b} + \\ \frac{J_g R_p}{b J_e \omega_n^\gamma} F_f(N, V_s, \mu) a_p(\tau) + \frac{J_p R_g}{b J_e \omega_n^\gamma} F_f(N, V_s, \mu) a_g(\tau) \end{aligned} \quad (16)$$

با فرض یکسان بودن همه دندانهای چرخ دنده، فرکانس خطای انتقال با فرکانس درگیری دندانه‌ها و هارمونیک‌های بالاتر آن برابر خواهد بود. براساس این فرض، دامنه لقی در طول درگیری دنده‌ها نیز ثابت خواهد بود. خطای انتقال استاتیکی تابعی پیرویدیک با فرکانس اصلی برابر فرکانس درگیری است. بنابراین:

$$\frac{\varepsilon}{b} = \sum_{i=1}^r f_i \cos(i\tau) \quad (17)$$

همان طور که بیان شد نیروی اصطکاک، $F_f(N, V_s, \mu)$ ، تابعی از نیروی عمودی بین دندانه‌ها، سرعت لغزش نسبی بین دندانه‌ها و ضریب اصطکاک دینامیکی می‌باشد. در شکل (5) هندسه درگیری یک جفت چرخ دنده نشان داده شده است. در این شکل چرخ دنده‌ها در حالی که گشتاورهای خارجی T_g و T_p بر آنها اعمال می‌شود با سرعت‌های Ω_p و Ω_g می‌چرخند.

برای اکثر چرخ دنده‌های ساده نسبت تماس، Γ ، بین 1 تا 2 متغیر است. این نسبت نشان می‌دهد که در مدت $\Gamma - 1$ از کل زمان درگیری، دو دندانه از هر چرخ دنده درگیر هستند و در

رابطه دوم (9) در $R_g J_p$ ضرب شده و طرفین معادلات جمع می‌شوند:

$$\begin{aligned} J_p J_g \ddot{\delta} + c \dot{\delta} (R_p^\gamma J_g + R_g^\gamma J_p) + k(t) f(\delta) (R_p^\gamma J_g + R_g^\gamma J_p) = \\ (T_p R_p J_g + T_g R_g J_p) - \\ J_p J_g \ddot{\xi} + J_g R_p F_f(N, V_s, \mu) a_p(t) + \\ J_p R_g F_f(N, V_s, \mu) a_g(t) \end{aligned} \quad (10)$$

با تعریف پارامترهای زیر:

$$J_e = J_p J_g$$

$$J_t = J_p R_g^\gamma + J_g R_p^\gamma$$

$$T_e = J_p R_g T_g + J_g R_p T_p$$

معادله حرکت را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\begin{aligned} J_e \ddot{\delta} + c J_t \dot{\delta} + k(t) J_t f(\delta) = \\ T_e - J_e \ddot{\xi} + J_g R_p F_f(N, V_s, \mu) a_p(t) + \\ J_p R_g F_f(N, V_s, \mu) a_g(t) \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن تابع لقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\delta) = \begin{cases} \delta - b & \delta > b \\ 0 & |\delta| < b \\ \delta + b & \delta < -b \end{cases} \quad (12)$$

با اعمال تغییر متغیر $x = \delta / b$ رابطه (11) به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{c J_t}{J_e} \dot{x} + \frac{k(t) J_t}{J_e} f(x) = \\ \frac{T_e}{b J_e} - \frac{\ddot{\xi}}{b} + \frac{J_g R_p}{b J_e} F_f(N, V_s, \mu) a_p(t) + \\ \frac{J_p R_g}{b J_e} F_f(N, V_s, \mu) a_g(t) \end{aligned} \quad (13)$$

که در رابطه اخیر تابع لقی به شکل ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ 0 & |x| < 1 \\ \bar{x} + 1 & x < -1 \end{cases} \quad (14)$$

با تعریف متغیرهای جدیدی به صورت زیر، رابطه (13) بی‌بعد می‌شود:

$$\bar{t} = \omega_n t$$

$$t_c = \frac{\phi_0}{N_p \Omega_p} \quad (18)$$

$$t_a = t_c (\Gamma - 1) \quad (19)$$

$$t_p = t_c \frac{L_{AP}}{L_{AC}} \quad (20)$$

N_p تعداد دندانه‌های پینیون است و L_{AP} و L_{AC} از روابط زیر محاسبه می‌شوند [۲۱]:

$$L_{AP} = \sqrt{(R_g + m)^2 - R_g^2 \cos^2(\phi) - R_g \sin(\phi)} \quad (21)$$

$$L_{AC} = \pi m \cos(\phi) \quad (22)$$

در روابط بالا R_g شعاع دایره گام چرخ‌دنده، m مدول چرخ‌دنده و ϕ زاویه فشار می‌باشد.

نیروی عمودی بین دندانه‌ها، N ، از رابطه (۲۳) به دست می‌آید:

$$N = \frac{T_p}{R_p} \quad (23)$$

برای بازه زمانی $0 \leq t \leq t_a$ هر دندانه نصف نیروی عمودی بین دندانه‌ها را تحمل می‌کند. بنابراین نیروی وارده بر هر دندانه در این بازه $N_1(t) = N_2(t) = N/2$ خواهد بود. برای بازه $t_a \leq t \leq t_c$ با توجه به اینکه تنها یک جفت دندانه درگیر هستند کل نیروی عمودی توسط یک دندانه تحمل می‌شود، یعنی: $N_1(t) = N, N_2(t) = 0$.

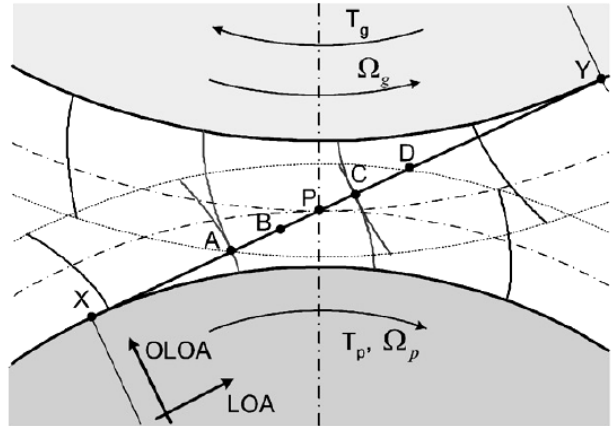
اگر ضریب اصطکاک دینامیکی با μ نشان داده شود، برای بازه زمانی $0 \leq t \leq t_p$ با توجه به اینکه سرعت لغزش بین دندانه‌ها در این بازه در خلاف جهت چرخش چرخ‌دنده‌ها است ضریب اصطکاک دینامیکی $\mu_1 = -\mu$ و در بازه زمانی $t_p \leq t \leq t_c$ این مقدار برابر $\mu_2 = \mu$ خواهد بود. نیروی اصطکاک را می‌توان به صورت رابطه (۲۴) نوشت:

$$F_f = \mu_i [c\bar{x} + k(t)f(\bar{x})] \quad (24)$$

که با بی‌بعد سازی آن با استفاده از متغیرهای تعریف شده در قسمت قبلی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

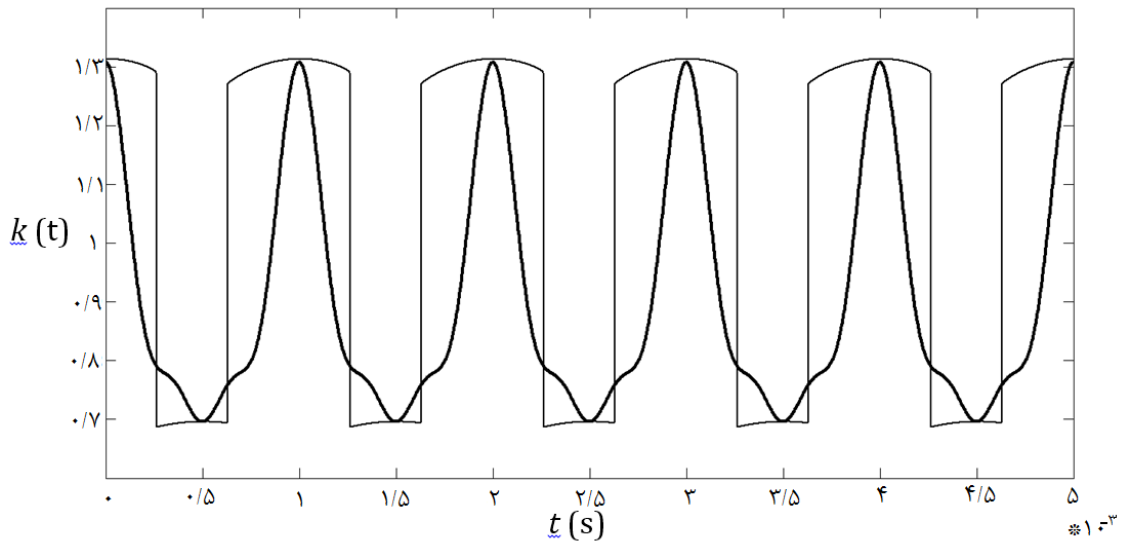
$$F_f = \mu_i b [c\omega_n \Omega \bar{x} + k_{mean} \kappa(\tau)f(x)] \quad (25)$$

برای محاسبه بازوی نیروی اصطکاک از رابطه (۲۶) استفاده می‌شود [۲۱]:



شکل ۵- نمایشی از درگیری دندانه‌ها در چرخ‌دنده ساده [۱۲]

بقیه زمان درگیری، انتقال گشتاور فقط توسط یک جفت دندانه صورت می‌گیرد. در شکل (۵)، $t = 0$ مطابق با زمان آغاز درگیری جفت دندانه اول، (جفت دندانه‌ای که روی خط AC می‌لغزد) در نقطه A در نظر گرفته شده است. در این لحظه جفت دندانه دوم (جفت دندانه‌ای که روی خط CD می‌لغزد) در نقطه C در تماس هستند که به آن نقطه، بالاترین نقطه تماس یک دندانه^۴ می‌گویند. با چرخش چرخ‌دنده‌ها، جفت دندانه اول به پائین‌ترین نقطه تماس یک دندانه^۵ در نقطه B می‌رسد. در این لحظه جفت دندانه دوم از تماس خارج می‌شوند. با فرض توزیع یکنواخت نیرو بین دندانه‌ها نیروی وارد به جفت دندانه اول در این لحظه دو برابر می‌شود. این زمان با t_a نشان داده می‌شود. زمان بحرانی دوم در لحظه t_p اتفاق می‌افتد. در لحظه t_p محل تماس از نقطه گام (نقطه P) عبور می‌کند و جهت سرعت لغزشی بین دندانه پینیون و چرخ‌دنده عوض می‌شود که این امر باعث تغییر جهت نیروی اصطکاک بین دندانه‌ها می‌شود. در نهایت در لحظه t_c (نقطه C) جفت دندانه سوم وارد درگیری می‌شوند و یک چرخه تماس دندانه‌ها تکمیل می‌شود. وابستگی نیروی اصطکاک به سرعت لغزشی موجب غیرخطی شدن عبارت مربوط به اصطکاک در معادله حرکت می‌شود. برای ساده‌تر شدن معادلات حرکت با توجه به هندسه درگیری دندانه‌ها، شکل (۵)، معادله حرکت برای سه بازه زمانی بیان شده بازنویسی می‌شود. زمان‌های مذکور را می‌توان با استفاده از روابط (۱۸) تا (۲۰) محاسبه کرد:



شکل ۶ - سفتی درگیری به دست آمده از روش تحلیلی (خط کم رنگ) و سری فوریه با سه جمله (خط پررنگ)

۳- نتایج

با توجه به اینکه در مرجع [۱۵] سفتی درگیری چرخ دنده محاسبه و اثر وجود ترک بر کاهش سفتی بررسی شده است جهت تأیید صحت نتایج به دست آمده برای سفتی و تأثیر ترک بر آن، از داده‌های مرجع مذکور مطابق جدول (۱) استفاده شده است.

۳-۱- نتایج سفتی درگیری در حالت سالم و معیوب

در اکثر مطالعات انجام شده بر روی ارتعاشات چرخ دنده‌ها سفتی درگیری متغیر با زمان به صورت جملات محدودی از سری فوریه و یا با استفاده روش اجزا محدود منظور شده است. استفاده از سری فوریه با جملات محدود، تقریب نادقیقی از سفتی درگیری را ارائه می‌دهد. نتایج سفتی درگیری حاصل از سری فوریه استفاده شده در مرجع [۲۲] و روش تحلیلی با هم در شکل (۶) مقایسه شده است. همان طور که از شکل مشخص است استفاده از سری فوریه با سه جمله تقریب ضعیفی از سفتی درگیری واقعی می‌باشد.

در مقاله حاضر، سفتی درگیری ابتدا به صورت تحلیلی و با استفاده از روش ارائه شده در مرجع [۱۵] محاسبه شده است.

$$a_p(\tau) = (R_{bp} + R_{bg}) \tan(\alpha) - \sqrt{R_{ag}^2 - R_{bg}^2 + R_{bp} \left(\frac{\Omega_p}{\Omega \omega_n} \tau \right)} \quad (26)$$

$$a_g(\tau) = (R_{bp} + R_{bg}) \tan(\alpha) - \xi_p(\tau)$$

که در این روابط R_{bg} و R_{bp} به ترتیب شعاع دایره مبنای پینیون و چرخ، R_{ag} شعاع دایره ادنوم چرخ دنده و α زاویه فشار می‌باشد.

شکل نهائی معادله حاکم بر سیستم به صورت رابطه (۲۷) قابل بیان است:

$$\Omega^2 \ddot{x} + (\zeta \Omega \dot{x} + \kappa(\tau) f(x)) (\Omega + A s) = f_s - \sum_{l=1}^L (\Omega \omega_n)^l f_l \cos(l\tau) \quad (27)$$

که در آن

$$s = \frac{\mu_s}{J_t} (R_p J_g a_p + R_g J_p a_g) \quad (28)$$

و برای سه بازه زمانی مذکور، داریم:

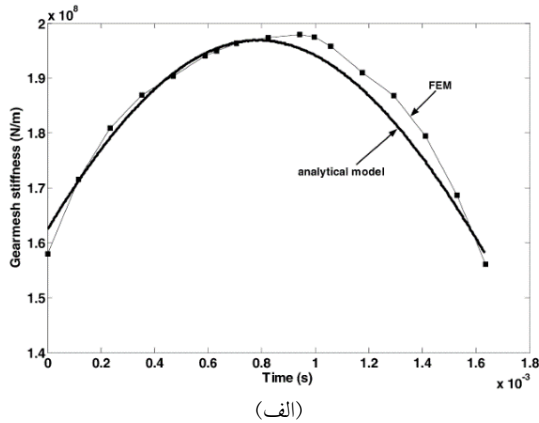
$$A = \begin{cases} -\omega / \Omega, & 0 \leq \tau \leq T_a \\ -1, & T_a < \tau \leq T_p \\ 1, & T_p < \tau \leq T_c \end{cases} \quad (29)$$

$$T_a = t_a \omega_n \Omega, \quad T_p = t_p \omega_n \Omega, \quad T_c = t_c \omega_n \Omega \quad (30)$$

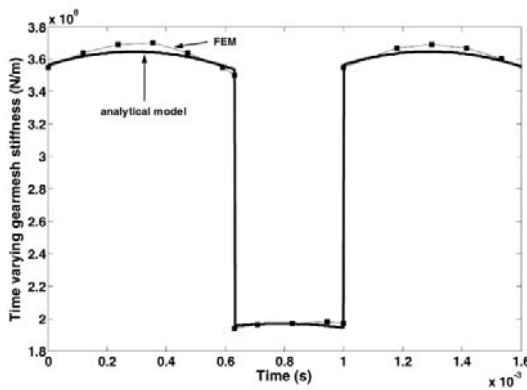
در ادامه، با حل معادله حاکم با استفاده از روش عددی رانگ-کوتا، تأثیر اصطکاک خشک و ترک ریشه دندانه بر پاسخ سیستم غیرخطی بررسی می‌شود.

جدول ۱- مشخصات چرخ‌دنده‌ها [۱۵]

چرخ	پینیون	
۳۰	۲۵	تعداد دندانه
۲	۲	مدول (mm)
۲۰	۲۰	عرض دندانه (mm)
۱/۶۳	۱/۶۳	نسبت تماس
۲۰۰۰	۲۴۰۰	سرعت دورانی (rpm)
۲۰	۲۰	زاویه فشار (deg)
2×10^5	2×10^5	مدول یانگ (MPa)



(الف)



(ب)

شکل ۷- نتایج سفتی درگیری الف) یک جفت دندانه و ب) یک جفت و دو جفت دندانه سالم [۱۵]

از آن روند درگیری به‌طور مشابه ادامه می‌یابد. همان‌طور که از شکل‌های اخیر بر می‌آید سفتی درگیری وقتی دو جفت دندانه درگیرند بیشتر از سفتی درگیری یک جفت دندانه درگیر است.

نتایج به‌دست آمده برای سفتی درگیری کامل یک جفت دندانه در حالت سالم و معیوب به ازای اندازه‌های ترک ۰/۶۶ و ۱ میلی‌متر، در شکل (۱۰) نشان داده شده است. با توجه به شکل، وجود ترک ریشه دندانه در یکی از جفت دندانه درگیر موجب کاهش محسوسی در سفتی درگیری دندانه‌ها می‌شود و هر چه اندازه ترک افزایش می‌یابد، کاهش سفتی محسوس‌تر می‌گردد.

همچنین کاهش سفتی، زمانی که سر دندانه ترک‌دار در حال درگیری است بیشتر از زمانی است که انتهای آن در حال درگیری

در مرجع مذکور، صحت روش تحلیلی از طریق مقایسه نتایج حاصل با نتایج به‌دست آمده از روش اجزا محدود به اثبات رسیده است (شکل (۷)).

در شکل (۸) نتیجه به‌دست آمده برای سفتی درگیری کامل یک جفت دندانه سالم نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است سفتی درگیری تابعی از زمان بوده و برحسب زاویه چرخش چرخ‌دنده‌ها تغییر می‌کند. در نقطه شروع درگیری یک دندانه از پینیون با یک دندانه از چرخ‌دنده، انتهای دندانه پینیون با سر دندانه چرخ‌دنده درگیر است. این درگیری با چرخش پینیون ادامه می‌یابد تا اینکه در انتهای درگیری، سر دندانه پینیون با انتهای دندانه چرخ‌دنده درگیر می‌شود. سفتی درگیری در نزدیکی نقطه گام بیشترین مقدار را دارد.

شکل (۹) سفتی درگیری را برای درگیری با نسبت تماس ۱/۶۳ نشان می‌دهد، که براساس الگوی درگیری به‌ترتیب ابتدا دو جفت دندانه سپس یک جفت و در نهایت دوباره دو جفت دندانه درگیر می‌شوند. با فرض اینکه زمان درگیری دندانه‌ها برابر t_c باشد، در ابتدای درگیری، دو جفت دندانه برای مدت زمان $t_{DT} = (\Gamma - 1)t_c$ ، که در آن Γ نسبت تماس است درگیر می‌شوند تا اینکه جفت دندانه اول از درگیری خارج شوند و تنها یک جفت دندانه درگیر باقی می‌ماند. این یک جفت دندانه برای مدت زمان $t_{ST} = (2 - \Gamma)t_c$ در حالت درگیر باقی می‌ماند تا اینکه جفت دندانه دیگری وارد درگیری گردد. بعد

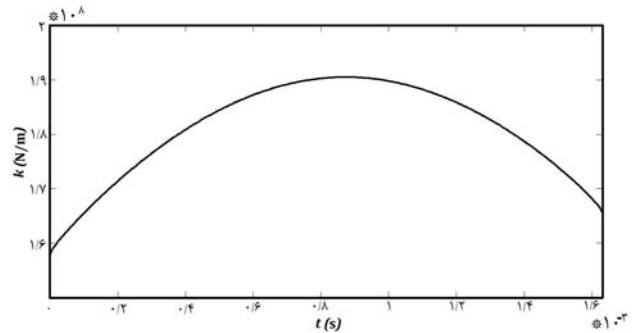
پینیون با یک دندانه ترک‌دار با اندازه‌های ترک به ترتیب با عمق‌های ۰/۶۶ و ۱ میلی‌متر نشان می‌دهد. پینیون دارای ۲۵ دندانه است و فرض شده است که دندانه شماره ۱۶ ترک‌دار باشد. همان‌طور که از شکل‌ها می‌توان مشاهده کرد وجود ترک به‌طور موضعی، در هنگام وارد شدن دندانه ترک‌دار موجب کاهش سفتی درگیری می‌گردد که مطابق با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۵] است.

۲-۳- مطالعه رفتار ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای

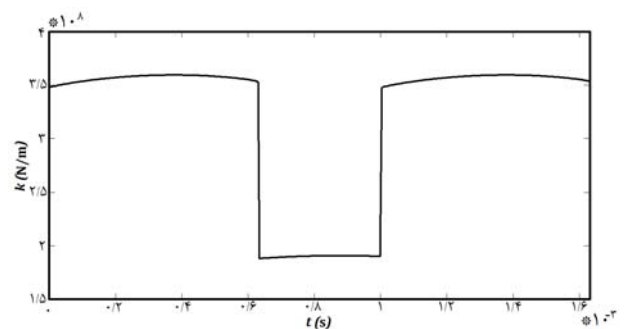
در این بخش ابتدا رفتار ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای سالم و بدون درنظر گرفتن اصطکاک خشک بررسی شده است. سپس در بخش ۲-۲-۳ رفتار ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای سالم با درنظر گرفتن اثر اصطکاک خشک، در بخش ۳-۲-۳ اثر ترک ریشه دندانه بر رفتار ارتعاشی و در نهایت در بخش ۴-۲-۳ حالت کامل مسأله یعنی اثر اصطکاک خشک بر رفتار ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای معیوب بررسی شده است.

۳-۲-۱- سیستم چرخ‌دنده‌ای سالم بدون درنظر گرفتن اصطکاک خشک

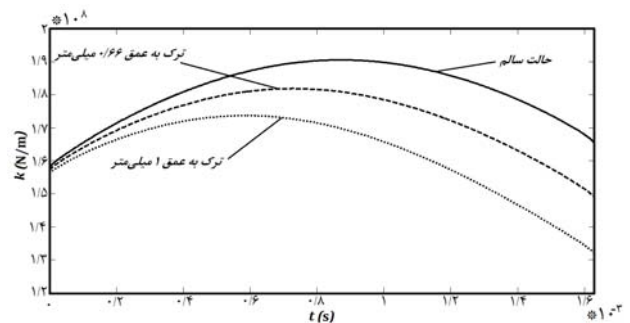
به منظور شناخت دقیق رفتار ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای معیوب در حضور اصطکاک خشک، ابتدا لازم است رفتار سیستم سالم بررسی و سپس تاثیر سایر عوامل مطالعه شود. در شکل (۱۳) پاسخ فرکانسی سیستم سالم در غیاب اصطکاک به ازای ضرایب بی بعد $\zeta = 0.06, f_1 = 0.5, f_2 = 0.8$ رسم شده است. در این شکل می‌توان سه پرش را مشاهده کرد. اولین پرش در نزدیکی فرکانس نسبی $\Omega = 0.45$ رخ داده است. این شکل نشان می‌دهد که بین فرکانس‌های نسبی $\Omega = 0.425$ و $\Omega = 0.45$ احتمال دو پاسخ پایدار برای سیستم وجود دارد و شرایط اولیه تعیین کننده پاسخ نهایی سیستم است. چرخه حدی سیستم در فرکانس نزدیک ۰/۷۷۵ پایداری خود را از دست می‌دهد و به شاخه بالایی با یک چرخه حدی دیگر پرش می‌کند. این امر ناشی از جدایش دندانه‌های درگیر است که در



شکل ۸- سفتی درگیری به دست آمده از روش تحلیلی یک جفت دندانه



شکل ۹- سفتی درگیری برای درگیری یک جفت و دو جفت دندانه سالم



شکل ۱۰- سفتی درگیری کامل یک جفت دندانه در حالت سالم و معیوب با ترک‌هایی به عمق‌های ۰/۶۶ و ۱ میلی‌متر

باشد. شکل (۱۱) نتایج به دست آمده از محاسبات و مقایسه بین سفتی درگیری یک جفت و دو جفت دندانه را در حالت سالم و دو حالت ترک‌دار با ترک‌هایی به عمق‌های ۰/۶۶ و ۱ میلی‌متر نشان می‌دهد. بیشترین کاهش سفتی درگیری زمانی رخ می‌دهد که سر دندانه معیوب با انتهای دندانه سالم درگیر می‌شود.

شکل (۱۲) سفتی درگیری را برای یک دور کامل چرخش

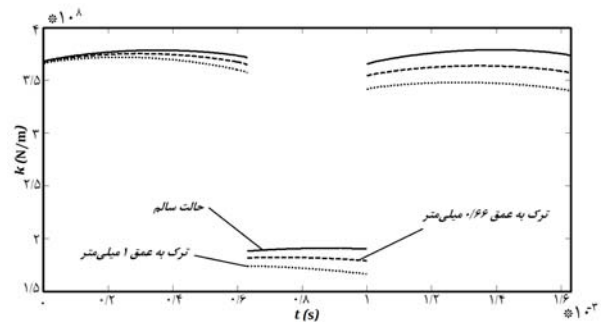
نتیجه آن، سیستم رفتار نرم‌شونده نشان داده و دامنه تغییرات خطای انتقال افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر در این نقطه دوشاخگی، پدیده پرش اتفاق می‌افتد.

در شکل (۱۴) دیاگرام دوشاخگی برحسب فرکانس نسبی برای سیستم سالم و به ازای پارامترهای بی‌بعد $f_1 = 0.5$, $f_2 = 0.8$ و $\zeta = 0.06$ رسم شده است. همانطور که از شکل (۱۴) مشخص است رفتار سیستم به ازای فرکانس‌های بی‌بعد $1/6$ تا 2 از نوع آشوبناک می‌باشد و در این منطقه در نمودار پاسخ فرکانسی نیز چندین پرش وجود دارد.

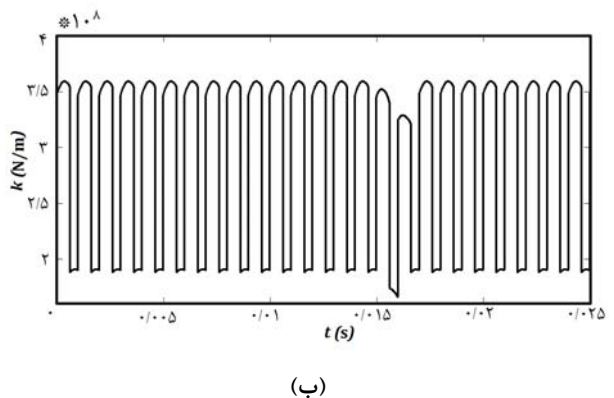
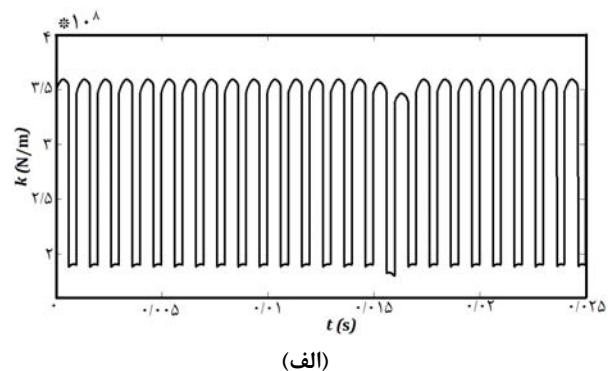
در شکل (۱۵) دیاگرام دوشاخگی برای فرکانس نسبی به ازای پارامترهای بی‌بعد $f_1 = 0.5$, $f_2 = 0.8$ و $\zeta = 0.01$ رسم شده است. هدف از رسم این نمودار بررسی رفتار ارتعاشی سیستم در حالتی است که ضخامت لایه روغن به حداقل مقدار خود می‌رسد. بارزترین اثر کاهش ضریب میرایی بی‌بعد، افزایش بازه‌های آشوبناک پاسخ می‌باشد. همانطور که از شکل‌های (۱۴) و (۱۵) مشخص است کاهش ضریب بی‌بعد میرایی باعث آشوبناک شدن پاسخ سیستم در حوالی فرکانس نسبی $2/4$ شده است. همچنین آغاز ناحیه آشوبناک از فرکانس نسبی 2 به فرکانس $2/2$ منتقل شده است. پاسخ سیستم در حوالی فرکانس $1/3$ با کاهش ضریب میرایی آشوبناک می‌شود و در نهایت می‌توان مشاهده کرد که تعداد پرش‌ها در فرکانس‌های کمتر از واحد، از 4 به 7 افزایش یافته است.

۲-۲-۳- سیستم چرخ‌دنده‌ای سالم با در نظر گرفتن اصطکاک خشک

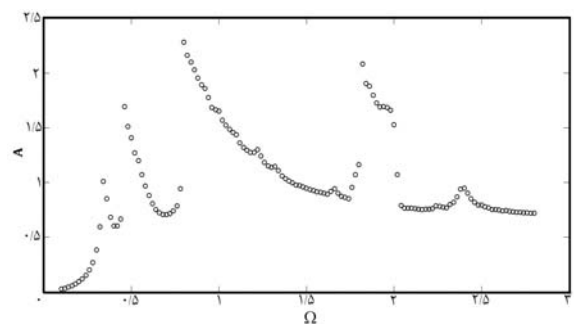
در شکل (۱۶) پاسخ فرکانسی سیستم سالم یکبار برای حالت بدون اصطکاک و بار دیگر با در نظر گرفتن اصطکاک خشک بین دندانه‌ها رسم شده است. در شکل (۱۶-الف) پارامترهای سیستم $f_1 = 0.5$, $f_2 = 0.8$ و $\zeta = 0.06$ در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در نظر گرفتن اصطکاک خشک



شکل ۱۱- سفتی درگیری یک جفت و دو جفت دندانه در حالت سالم و معیوب



شکل ۱۲- سفتی درگیری برای یک دور کامل چرخش پینیون، (الف) با ترک به عمق 0.66 mm و (ب) با ترک به عمق 1 mm



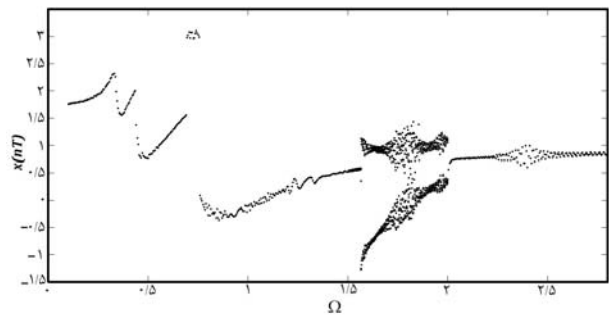
شکل ۱۳- پاسخ فرکانسی سیستم سالم برحسب دامنه ارتعاش

موجب می‌شود تا خطای انتقال دینامیکی در بعضی نواحی کاهش جزئی داشته باشد. در شکل (۱۶-ب) ضریب میرایی بی‌بعد به $0/01$ کاهش یافته تا اثر اصطکاک خشک به صورت کامل مشخص گردد. همانطور که ملاحظه می‌شود علاوه بر اثر کاهش خطای انتقال دینامیکی، در نظر گرفتن اصطکاک موجب پایدار شدن پاسخ در حوالی فرکانس $\Omega = 2/6$ می‌شود و علاوه بر آن، از ایجاد پرش در فرکانس $\Omega = 0/55$ جلوگیری می‌کند. بنابراین تاثیر اصطکاک خشک به‌ازای ضرایب میرایی پائین، بارزتر است و برای ضرایب میرایی بالاتر می‌توان از تاثیر اصطکاک خشک صرف‌نظر کرد.

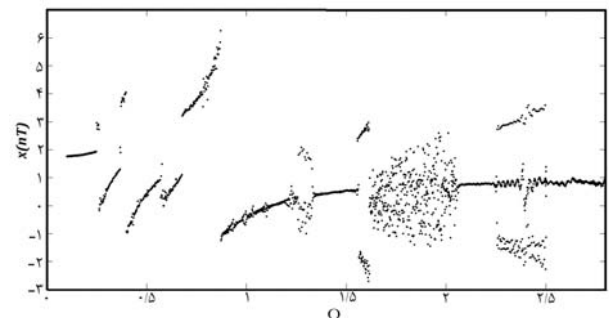
در شکل (۱۷) دیاگرام دوشاخگی برحسب فرکانس نسبی برای پارامترهای بی‌بعد $f_0 = 0/8$, $f_1 = 0/5$ و $\mu = 0/1$ رسم شده است. همانطور که در قسمت قبل نیز بیان شد برای ضرایب میرایی بالا تنها اثر اصطکاک خشک، کاهش جزئی دامنه خطای انتقال دینامیکی می‌باشد ولی با توجه به شکل (۱۷-ب) و مقایسه آن با شکل (۱۵) می‌توان مشاهده کرد که در نظر گرفتن اصطکاک خشک، در حوالی فرکانس $2/4$ تا حدودی از تبدیل حرکت سیستم به حرکت آشوبناک جلوگیری کرده و شروع حرکت آشوبناک را به فرکانس $2/1$ کاهش داده است. همچنین تعداد پرش‌های سیستم برای فرکانس‌های کمتر از واحد به 5 کاهش یافته است.

۳-۳-۳- سیستم چرخ‌دنده‌ای معیوب بدون در نظر گرفتن اصطکاک خشک

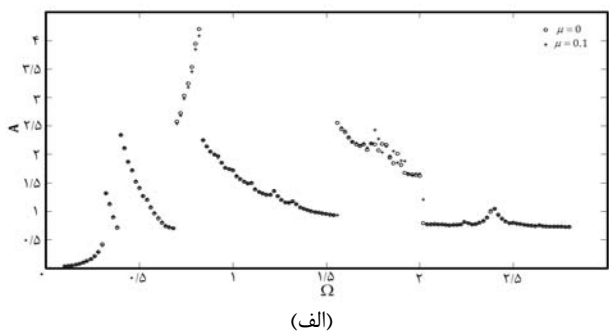
در شکل (۱۸) منحنی پاسخ فرکانسی به ازای ضرایب بی‌بعد $f_0 = 0/8$, $f_1 = 0/5$ و $\zeta = 0/06$ برای دو حالت سالم و معیوب با عمق ترک 1 میلی‌متر و بدون در نظر گرفتن اثر اصطکاک خشک رسم شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است در اکثر نواحی فرکانسی، دامنه حرکت برای حالت ترک‌دار به‌طور جزئی بیشتر از حالت سالم است. این امر ناشی از کاهش موضعی سفتی دندانه معیوب است. وجود ترک در نزدیکی ناحیه فرکانسی $\Omega = 0/8$ موجب برخورد



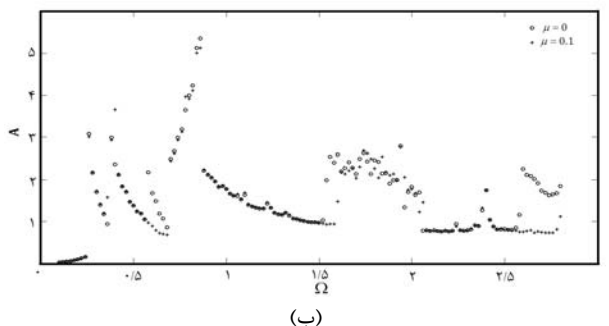
شکل ۱۴- دیاگرام دوشاخگی سیستم سالم برحسب فرکانس بی-بعد ($\zeta = 0/06$)



شکل ۱۵- دیاگرام دوشاخگی سیستم سالم برحسب فرکانس بی-بعد ($\zeta = 0/01$)



(الف)



(ب)

شکل ۱۶- پاسخ فرکانسی سیستم سالم، (الف) به ازای ($\zeta = 0/06$) و (ب) به ازای ($\zeta = 0/01$)

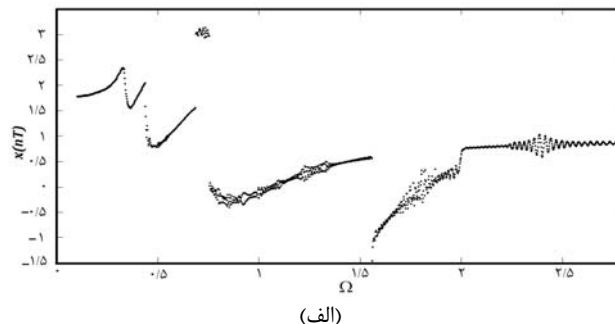
جدایش دندانها را رژیم حرکتی بدون برخورد^۷ است و در آن خطای انتقال دینامیکی، همواره بزرگتر از واحد است، $x_{min} > 1$. پس از جدایش دندانها، رژیم حرکتی به رژیم برخورد یک طرفه^۸ تغییر وضعیت می دهد که در آن $x_{max} > 1$ و $-1 < x_{min} < 1$ می باشد. در بازه های فرکانسی $x_{min} < -1$ و $x_{max} > 1$ ، رژیم حرکت، رژیم حرکتی برخورد دوطرفه^۹ است. این رژیم حرکتی ناشی از برخورد پشت دندانها درگیر به صورت دندان عقبی است. برای توضیح بیشتر این نواحی، پاسخ فرکانسی سیستم معیوب بر حسب حداکثر و حداقل دامنه خطای انتقال دینامیکی در شکل های (۱۹-الف) و (۱۹-ب) رسم شده است. همان طور که در شکل (۱۹-ب) مشخص است وجود ترک موجب برخورد دو طرفه دندانها در نزدیکی دو ناحیه فرکانسی $\Omega = 0/755$ و $\Omega = 1/6$ می شود.

دیاگرام دوشاخگی برای یک جفت چرخ دنده ای که دارای ترکی به عمق یک میلی متر در یکی از دندانهای پینیون است در شکل (۲۰) آورده شده است. برای مقایسه بهتر سیستم سالم و معیوب، از پارامترهای شکل (۱۴) در رسم این نمودار استفاده شده است.

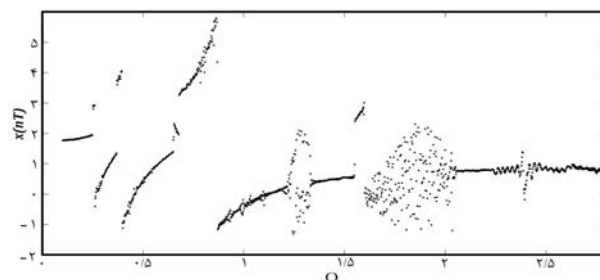
همان طور که از شکل اخیر مشخص است وجود ترک موجب شده است که حرکت آشوبناک سیستم که از فرکانس نسبی ۲ شروع می شود تا حوالی فرکانس ۰/۷ ادامه داشته باشد. همچنین نوسانات پاسخ به ازای فرکانس های پائین تر از ۰/۷ نیز افزایش یافته است. بنابراین وجود ترک ریشه دندانها موجب افزایش احتمال آشوبناک شدن پاسخ سیستم می شود.

۳-۳-۴- سیستم چرخ دنده ای معیوب با در نظر گرفتن اصطکاک خشک

همان طور که در بخش های قبلی بیان شد به ازای ضرائب میرائی بالا می توان از اثر اصطکاک خشک صرف نظر کرد. برای بررسی اثر اصطکاک خشک بر روی سیستم معیوب و برای فراهم شدن امکان مقایسه، در شکل (۲۱) نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $f_1 = 0/5$ ، $f_2 = 0/8$ و $\zeta = 0/01$ برای سیستم معیوب یک بار با

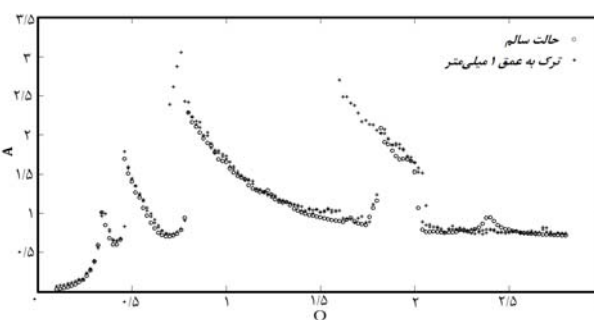


(الف)



(ب)

شکل ۱۷- دیاگرام دوشاخگی بر حسب فرکانس بی بعد با در نظر گرفتن اصطکاک خشک، (الف) به ازای $(\zeta = 0/06)$ و (ب) به ازای $(\zeta = 0/01)$



شکل ۱۸- پاسخ فرکانسی سیستم در دو حالت سالم و معیوب

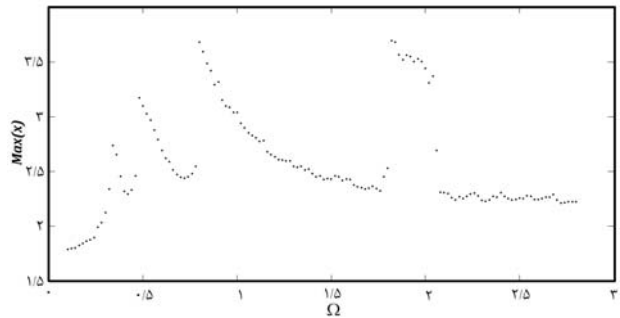
پشت دندانها شده است که این امر ناشی از کاهش سفتی درگیری دندانها و در نتیجه افزایش دامنه نوسانات می باشد. گرچه در حوالی فرکانس $\Omega = 1/7$ که هر دو سیستم سالم و معیوب رفتار آشوبناک از خود نشان می دهند ولی وجود ترک باعث افزایش پراکندگی دامنه ارتعاش در محدوده مذکور می شود و رژیم حرکتی از برخورد یک طرفه به برخورد دوطرفه تغییر می یابد. با توجه به خطای انتقال دینامیکی می توان سه رژیم حرکتی برای ارتعاشات چرخ دنده ها تعریف کرد. تا قبل از

در نظر گرفتن اصطکاک خشک و بار دیگر بدون در نظر گرفتن اصطکاک خشک رسم شده است. همان طور که از این شکل مشخص است وجود اصطکاک خشک تغییر محسوسی در رژیم حرکتی ایجاد نمی‌کند و اثر عمده آن، کاهش جزئی دامنه خطای انتقال دینامیکی در بعضی از فرکانس‌ها است. از مقایسه این شکل با شکل (۱۴) می‌توان مشاهده کرد علاوه بر موارد ذکر شده در بخش ۳-۲-۳ در مورد تاثیر ترک، وجود ترک ریشه دندانچه موجب ایجاد یک پرش در حوالی فرکانس ۲/۶ شده است. در سیستم سالم، اصطکاک خشک موجب از بین رفتن پرش در حوالی فرکانس نسبی ۲/۶، شده است در حالی که در سیستم معیوب، اصطکاک خشک قادر به حذف پرش در محدوده مذکور نشده است.

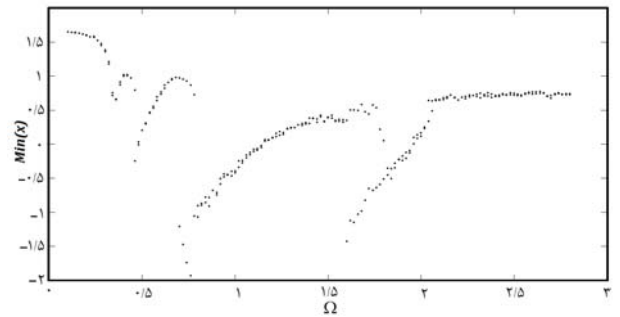
۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق از مدلی برای ارتعاشات پیچشی یک جفت چرخ‌دنده ساده ترک‌دار که اثرات لقی، سفتی متغیر با زمان دندانچه‌ها و اصطکاک خشک در آن لحاظ شده است استفاده گردید. همچنین اثر خطاهای سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای شامل: خطاهای تولید، نصب، خطاهای ناشی از کارکرد سیستم و خطای ناشی از اصلاح دندانچه به صورت پارامتر خطای انتقال استاتیکی در نظر گرفته شد. برای مدل کردن ترک ریشه دندانچه، با انجام اصلاحاتی از مدل تیر ترک‌دار استفاده شده است. سیستم مورد نظر در نهایت به یک سیستم یک درجه آزادی تبدیل شد. مزیت اصلی مدل مورد استفاده در این تحقیق، مدل‌سازی اصطکاک خشک و ترک ریشه دندانچه می‌باشد که موجب واقعی‌تر شدن مدل شده است. اثر اصطکاک خشک و ترک بر روی پاسخ سیستم توسط نمودارهای پاسخ فرکانسی و دوشاخگی بررسی شده است. مهم‌ترین یافته‌های این تحقیق را می‌توان در موارد زیر خلاصه کرد:

- ۱- سفتی درگیری در نزدیکی نقطه گام بیشترین مقدار را دارد.
- ۲- کاهش سفتی، زمانی که سر دندانچه ترک‌دار در حال درگیری است بیشتر از زمانی است که انتهای آن در حال درگیری باشد.

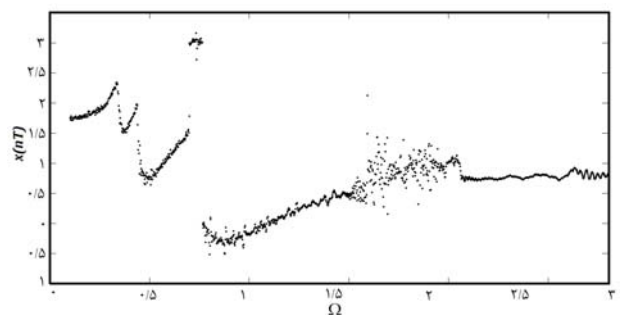


(الف)

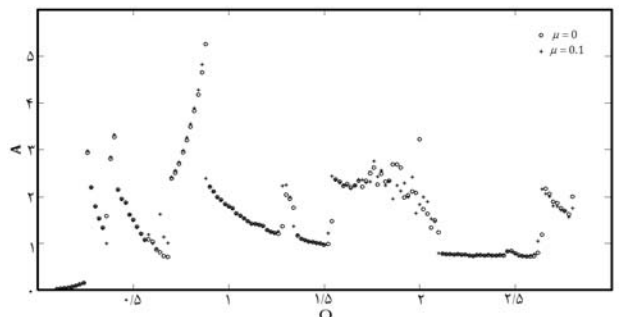


(ب)

شکل ۱۹- پاسخ فرکانسی سیستم معیوب با عمق ترک ۱ میلی‌متر، (الف) بر حسب حداکثر دامنه ارتعاش و (ب) بر حسب حداقل دامنه ارتعاش



شکل ۲۰- دیاگرام دوشاخگی بر حسب فرکانس بی‌بعد برای سیستم معیوب



شکل ۲۱- نمودار پاسخ فرکانسی برای سیستم ترک‌دار با حضور اصطکاک خشک

- ۵- وجود ترک در ریشه دندانه موجب افزایش خطای انتقال دینامیکی می‌شود.
- ۶- وجود ترک در ریشه دندانه موجب تغییر رژیم حرکتی دندانه‌ها شده و احتمال برخورد دو طرفه را افزایش می‌دهد.
- ۷- وجود ترک ریشه دندانه موجب افزایش احتمال آشوبناک شدن پاسخ سیستم می‌شود.

- ۳- کاهش ضریب میرایی بی‌بعد موجب افزایش بازه‌های آشوبناک پاسخ می‌شود.
- ۴- تاثیر اصطکاک خشک تنها به ازای مقادیر پائین ضرایب میرایی قابل مشاهده است و برای ضرایب میرایی بالا تنها اثر آن کاهش دامنه خطای انتقال دینامیکی در بعضی از محدوده‌های فرکانسی است که می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

واژه‌نامه

- | | | |
|----------------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| 1. hertzian | contact(HPSTC) | 7. no impact motion |
| 2. rim thickness | 5. lowest point of single tooth | 8. one side impact motion |
| 3. line of action | contact(LPSTC) | 9. double side impact motion |
| 4. highest point of single tooth | 6. meshing time | |

مراجع

- Ozguven, H. N., and Houser, D. R., "Mathematical Models Used in Gear dynamics - a Review", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121, No. 3, pp. 383-411, 1988.
- Vinayak, H., and Singh, R., "Multi-body dynamics and modal analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, No. 2, pp. 171-214, 1998.
- Vinayak, H., Singh, R., and Padmanabhan, C., "Linear Dynamic Analysis of Multi-mesh Transmissions Containing External Rigid Gears", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 185, No. 1, pp. 1-32, 1995.
- Fakhfakh, T., Chaari, F., and Haddar, M., "Numerical and Experimental Analysis of a Gear System with Teeth Defects", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 25, pp. 542-550, 2005.
- Kahraman, A., and Singh, R., "Non-Linear Dynamics of Spur Gear Pair", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, No. 1, pp. 49-75, 1990.
- Wang, J., Li, R., and Peng, X., "Survey of Nonlinear Vibration of Gear Transmission Systems", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 56, No. 3, pp. 309-329, 2003.
- Theodossiadis, S., and Natsiavas, S., "Nonlinear Dynamics of Gear-pair Systems with Periodic Stiffness and Backlash", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 2, pp. 287-310, 2000.
- Chang-Jian, C., and Chang, Sh., "Bifurcation and Chaos Analysis of Spur Gear Pair with and without Nonlinear Suspension, Nonlinear Analysis", *Real World Application*, Vol. 12, pp. 979-989, 2011.
- Vaishya, M., and Singh, R., "Sliding Friction-Induced Nonlinearity and Parametric Effects in Gear Dynamics", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 248, No. 4, pp. 671-694, 2001.
- Velex, P., and Sainsot, P., "An Analytical Study of Tooth Friction Excitations in Errorless Spur and Helical Gears", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37 pp. 641-658, 2002.
- He, S., Gunda, R., and Singh, R., "Effect of Sliding Friction on the Dynamics of Spur Gear Pair with Realistic Time-Varying Stiffness", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, pp. 927-949, 2007.
- He, S., Cho, S., and Singh, R., "Prediction of Dynamic Friction Forces in Spur Gears Using Alternate Sliding Friction Formulations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, pp. 843-851, 2008.
- Parey, A., and Tandon, N., "Spur Gear Dynamic Models Including Defects—A review", *The shock and Vibration Digest*, Vol. 35, No. 6, pp. 465-478, 2003.
- Chaari, F., Baccar, W., Abbes, M. S., and Haddar, M., "Effect of Spalling or Tooth Breakage on Gearmesh Stiffness and Dynamic Response of a One-Stage Spur Gear Transmission", *European Journal of Mechanics A/Solid*, Vol. 27, pp. 691-705, 2008.
- Chaari, F., Fakhfakh, T., and Haddar, M., "Analytical Modeling of Spur Gear Tooth Crack and Influence on Gear Mesh Stiffness", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 28, pp. 461-468, 2009.
- Wu, S., Zuo, M. J., and Pary, A., "Simulation of Spur Gear Dynamics and Estimation of Fault Growth", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, pp. 608-624, 2008.
- Endo, H., Randall, R. B., and Gosselin, C., "Differential Diagnosis of Spall Vs. Crack in Gear Tooth Fillet Region: Experimental Validation",

- Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, pp. 636-651, 2009.
18. Howard, I., Jia, Sh., and Wang, J., "The Dynamic Modelling of a Spur Gear in Mesh Including Friction and a Crack", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 15, No. 5, pp. 831-853, 2001.
 19. Lewicki, D. G., "Effect of Rim Thickness on Gear Crack Propagation Path, NASA Technical Memorandum 107229", *7th International Power Transmission and Gearing Conference sponsored by the American Society of Mechanical Engineers*, San Diego, California, 1996.
 20. Just Agosto, F. A., "Damage Detection Based on the Geometric Interpretation of the Eigenvalue Problem", Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997.
 21. Wang, J., Zheng, J., and Yang, A., "An Analytical Study of Bifurcation and Chaos in a Spure Gear Pair with Sliding Friction", *Procedia Engineering*, Vol. 31, pp. 563-570, 2012.
 22. Shen, Y., Yang, S., and Liu, X., "Nonlinear Dynamic of a Spur Gear Pair with Time-Varying Stiffness and Backlash Based on Incremental Harmonic Balance Method", *Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 1256-1263, 2006.