

## تحلیل اثر سرعت سیال روی ناپایداری لوله‌های بتنی مسلح شده با نانوذرات حاوی جریان سیال

علیرضا زمانی نوری<sup>۱\*</sup> و پیمان ابراهیمی<sup>۲</sup>

۱. گروه مهندسی عمران، واحد شهرقدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲. گروه مهندسی عمران، واحد رودهن، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱/۲ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۱/۲۸)

**چکیده** - با توجه به کاربرد فراوان لوله‌های حاوی جریان سیال در مهندسی عمران، ارائه یک مدل ریاضی مناسب برای تحلیل پایداری آنها ضروری است. بدین منظور یک لوله بتنی تقویت شده با نانوذرات سیلیس و حاوی جریان سیال در نظر گرفته می‌شود. هدف این تحقیق بررسی تحلیل پایداری سازه و نشان دادن اثر نانوذرات و سیال درون آن است. سازه با المان پوسته استوانه‌ای و با تئوری ردی مدل‌سازی می‌شود. برای به‌دست آوردن نیروی ناشی از سیال درونی از معادله ناویر-استوکس استفاده می‌شود. برای در نظر گرفتن اثر نانوذرات در لوله از مدل موری-تاناکا استفاده شده به طوری که اثرات انباشتگی نانوذرات لحاظ شده است. در نهایت با استفاده روش انرژی و اصل همپلتون، معادلات حاکم بر سازه استخراج می‌شود. برای تحلیل پایداری سازه از روش تفاضلات مربعی استفاده می‌شود و اثر پارامترهای مختلف همچون درصد حجمی نانوذرات، انباشتگی نانوذرات، سیال درون لوله و پارامترهای هندسی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که وجود نانوذرات به‌عنوان تقویت‌کننده لوله، منجر به تأخیر ناپایداری سازه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: لوله بتنی، نانوذرات، تئوری ردی، روش عددی تفاضلات مربعی، معادله ناویر-استوکس.

## Analysis of the Effect of Fluid Velocity on the Instability of Concrete Pipes Reinforced with Nanoparticles Conveying the Fluid Flow

A. Zamani Nouri<sup>1\*</sup> and P. Ebrahimi<sup>2</sup>

1. Department of Civil Engineering, Shar-e-Qods Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

2. Department of Civil Engineering, Roudehen Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

**Abstract:** *With respect to the great application of pipes conveying fluid in civil engineering, presenting a mathematical model for their stability analysis is essential. For this purpose, a concrete pipe, reinforced by iron oxide (Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) nanoparticles, conveying fluid*

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: dr.zamani.ar@gmail.com

is considered. The goal of this study is to investigate the structural stability to show the effects of the inside fluid and the nanoparticles. The structure was modeled by a cylindrical shell and using Reddy theory. To obtain the force induced by the inside fluid, the Navier-Stokes equation was used. To assume the effect of the nanoparticles in the pipe, the Mori-Tanaka model was utilized so that the effects of agglomeration of nanoparticles could be considered. Finally, by applying energy method and the Hamilton's principle, the governing equations were derived. For the stability analysis of the structure, differential quadrature method (DQM) was proposed and the effects of different parameters such as volume fraction of the nanoparticles and agglomeration of the nanoparticles inside fluid and geometrical parameters were investigated. The results showed that the existence of the nanoparticles as the reinforcement for the pipe led to the delay in the pipe instability.

**Keywords:** Concrete pipe; Nanoparticles; Reddy theory; DQM; Navier-Stokes equation.

## فهرست علائم

ماتریس جرم	[M]	ضرایب وزنی	$A_{ij}^{(0)}, B_{ij}^{(0)}$
منتجه‌های تنش	$M_{ij}, N_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}$	طول لوله	a
فشار سیال	P	ماتریس میرایی	[C]
شعاع میانگین لوله	R	ثوابت الاستیک	$C_{ij}$
نیروی خارجی ناشی از سیال	$R_{fluid}$	کسر حجمی میانگین نانوذرات	$c_r$
انرژی پتانسیل	U	بردار دامنه مربوط به مرز	$\{d_b\}$
جابه‌جایی کلی لوله	$u_1, u_2, u_3$	بردار دامنه مربوط به میدان	$\{d_d\}$
جابه‌جایی لایه میانی لوله	$u, v, w$	مدول یانگ نانوکامپوزیت	E
سرعت سیال در مختصات استوانه‌ای	$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_\theta, v_z)$	مدول یانگ زمینه	$E_m$
حجمی از نانوذرات در بتن	$V_r^m$	نیروی حجمی	$F_{body}$
ذرات حجم نهایی نانو	$V_r$	مدول برشی	G
حجمی از نانوذرات در گنجایش	$V_r^{inclusion}$	مدول برشی فاز پایه	$G_m$
فرکانس سازه	$\omega$	ضخامت لوله	h
تغییرات	$\delta$	عمق سیال درون لوله	$h_f$
ویسکوزیته سیال	$\mu$	ماتریس یکه	[I]
ضریب پواسون نانوکامپوزیت	$\nu$	مدول حجمی	K
ضریب پواسون زمینه	$\nu_m$	مدول حجمی گنجایش	$K_{in}$
دانسیته معادل لوله نانوکامپوزیتی	$\rho$	مدول حجمی کامپوزیت منهای گنجایش	$K_{out}$
چگالی سیال	$\rho_f$	مدول حجمی فاز پایه	$K_m$
مؤلفه‌های تنش	$\sigma_{ij}$	ماتریس سختی	[K]
مؤلفه‌های کرنش	$\varepsilon_{ij}$	مدول‌های الاستیک هیل	k, l, m, n, p
شیب‌های لایه میانی	$\phi_x, \phi_\theta$	مدول‌های الاستیک هیل برای فاز تقویت	$k_r, l_r, m_r, n_r, p_r$

## ۱- مقدمه

مدل‌سازی اتمی و مدل‌سازی مکانیک محیط پیوسته تقسیم می‌شوند. برای سیستم‌های دارای اتم‌های زیاد، این مدل‌سازی‌ها بسیار وقت‌گیر و دارای محاسبات پیچیده است و علاوه بر این

تاکنون تحقیقات تجربی زیادی برای مدل‌سازی لوله‌های حاوی جریان سیال انجام شده است. این مدل‌سازی‌ها به دو دسته

آنها با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا، سازه را مدل‌سازی ریاضی کرده و به کمک روش اجزای محدود به محاسبه بار کماتشی حرارتی پرداختند. شن [۹] کماتش پیچشی و پس-کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت درجه حرارت را انجام دادند. آنها از روش انرژی و اصل همپلتون برای به دست آوردن معادلات حاکم استفاده و روش تحلیلی را برای محاسبه بار کماتشی سازه انتخاب کردند. ردی و لیو [۱۰] در یک مطالعه جامع به مقایسه تئوری‌های مختلف در تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای پرداختند. آنها از روش انرژی و لاگرانژ برای به دست آوردن معادلات حرکت استفاده کردند و به کمک روش عددی به آنالیز سیستم پرداختند. آنها به این نتیجه رسیدند که تئوری برشی مرتبه بالای ردی برای پوسته‌های نازک و ضخیم قابلیت استفاده داشته و منجر به نتایج بسیار دقیقی خواهد شد. داک و تانگ [۱۱] به تحلیل دینامیکی و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی پرداختند. آنها از مدل پاسترناک برای شبیه‌سازی پوسته متکی بر بستر ارتجاعی استفاده کردند. کماتش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بار فشاری و درجه حرارت توسط سان و همکاران [۱۲] بررسی شد. آنها از تئوری ردی استفاده کردند و خواص پوسته را تابعی از دما در نظر گرفتند. در این کار از روش گالرکین برای محاسبه بار کماتشی استفاده شد و اثر پارامترهای مختلفی همچون شرایط مرزی، نوع ماده، درجه حرارت و اندیس غیرهمگنی روی رفتار کماتشی سازه بررسی شد.

پوسته‌های استوانه‌ای حاوی جریان سیال نیز کاربردهای فراوانی در صنعت و سیستم‌های بیومکانیکی دارند. به عنوان نمونه، محافظ حرارتی راکتورهای هسته‌ای و موتور احتراق داخلی هواپیما، مبدل‌های حرارتی، لوله‌های انتقال نفت و گاز، سیاهرگ‌ها، سیستم ریوی با پوسته‌استوانه‌ای حاوی جریان سیال مدل می‌شود. بیشترین بررسی و تحقیق در مورد پوسته‌های استوانه‌ای حاوی جریان سیال توسط آمابیلی [۱۳] انجام شده است. ونگ و نی [۱۴] پایداری دینامیکی لوله‌های

کاربردهای عملی این مدل‌سازی بسیار محدود است. از طرف دیگر با پیشرفت تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته می‌توان بر محدودیت‌های مدل‌سازی اتمی غلبه کرد. امروزه مدل‌های مکانیک پیوسته، به‌طور وسیعی برای مدل‌سازی سازه‌ها کاربرد دارد. مقایسه نتایج مدل‌سازی اتمی و مکانیک محیط پیوسته، نشان‌دهنده این مطلب است که مدل‌سازی مکانیک پیوسته، نتایج قابل قبولی در پیشگویی رفتار دینامیکی سیستم‌ها دارد.

پوسته‌های استوانه‌ای کاربردهای وسیعی در بسیاری از رشته‌های مهندسی مانند مکانیک، شیمی، هوافضا، عمران، هسته‌ای و ... دارند. برای مثال در صنعت نفت و گاز از پوسته‌های استوانه‌ای به عنوان مخازن تحت فشار استفاده می‌شود. اولین مطالعات در زمینه کماتش پوسته‌های استوانه‌ای توسط گوپتا [۱] انجام شد. او با استفاده از روش ریتز، درجه حرارت بحرانی کماتشی را برای پوسته ارتوتروپیک به دست آورد. دینگا و همکاران [۲] پس کماتش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای نازک را بررسی کردند. آنها از تئوری کلاسیک برای مدل‌سازی ریاضی مسئله استفاده و به کمک یک روش تحلیلی، بار کماتشی سازه را محاسبه کردند. تحقیق در زمینه تنش‌های الاستیک دیسک‌های با ضخامت متغیر توسط ردی و سریناث [۳] صورت پذیرفت. بشت یک مطالعه کلی در مورد مخازن استوانه‌ای و کروی انجام داد [۴]. اوباتا و نودا [۵] به مطالعه مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی، برای تحلیل تنش‌های حرارتی در دماهای بالا پرداختند. هورگان و چان [۶] حل استاتیکی دقیقی برای مخزن تحت فشار ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارائه کردند. آنها از مدل توانی برای تغییر مدول الاستیک استفاده کردند و از تغییرات ضریب پواسون صرف‌نظر کردند. سالزار [۷] به ارائه یک روش عددی برای بررسی تحلیل تنش در مخازن استوانه‌ای پرداخت. دلیل استفاده از روش عددی در کار این محققان انتخاب یک تابع خاص برای توصیف غیرهمگن بودن ماده بود. کماتش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی لایه‌ای توسط پاتل و همکاران [۸] انجام شد.



شکل ۱- شماتیک لوله حاوی جریان سیال تقویت شده با نانوذرات

## ۲- بیان هندسی مسئله

شکل (۱) یک لوله نانوکامپوزیتی حاوی جریان سیال با شعاع میانگین  $R$ ، ضخامت  $h$  و طول  $a$  با سیستم مختصات استوانه‌ای  $(x, \theta, \rho=R+z)$  را نشان می‌دهد.

## ۳- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی

در این بخش به بررسی میدان جابه‌جایی مرتبه سوم برشی ارائه شده توسط ردی پرداخته می‌شود. در این تئوری [۱۰]:

$$u_r(x, \theta, z, t) = u(x, \theta, t) + z\phi_x(x, \theta, t) - \frac{z^3}{3h^2} \left( \phi_x(x, \theta, t) + \frac{\partial}{\partial x} w(x, \theta, t) \right), \quad (1)$$

$$u_\theta(x, \theta, z, t) = v(x, \theta, t) + z\phi_\theta(x, \theta, t) - \frac{z^3}{3h^2} \left( \phi_\theta(x, \theta, t) + \frac{\partial}{R\partial\theta} w(x, \theta, t) \right), \quad (2)$$

$$u_z(x, \theta, z, t) = w(x, \theta, t), \quad (3)$$

که در آن  $u$ ،  $v$  و  $w$  جابه‌جایی‌های سطح میانی هستند. همچنین  $\phi_x$  و  $\phi_\theta$  در این تئوری شیب‌های صفحه عمود بر سطح میانی در  $z=0$  هستند. روابط کرنش به صورت زیر هستند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ \varepsilon_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^1 \\ \varepsilon_{x\theta}^1 \\ \varepsilon_{xz}^1 \\ \varepsilon_{\theta z}^1 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^2 \\ \varepsilon_{x\theta}^2 \\ \varepsilon_{xz}^2 \\ \varepsilon_{\theta z}^2 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^3 \\ \varepsilon_{x\theta}^3 \\ \varepsilon_{xz}^3 \\ \varepsilon_{\theta z}^3 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

حاوی جریان سیال را مورد بررسی قرار دادند. آنها از مدل تیر اویلر برای مدل‌سازی ریاضی سازه استفاده کردند و روش گالرکین را برای تحلیل سیستم به کار گرفتند. بحث اصلی این مقاله روی سرعت بحرانی سیال و بررسی پارامترهای مختلف روی آن بود. دایی و همکاران [۱۵] به مطالعه لوله‌های حاوی جریان سیال پرداختند. آنها از تئوری تیر اویلر-برنولی استفاده کردند و اثر میرایی سیال و جریان گردابی ایجاد شده در لوله را نیز در نظر گرفتند.

با توجه به مطالبی که بیان شده تاکنون تحقیقی درباره تحلیل پایداری و ارتعاشات لوله‌های بتنی تقویت شده با نانوذرات صورت نگرفته است. در این پژوهش، این موضوع مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش کار به این صورت است که ابتدا روابط کرنش-تغییر مکان و سپس تنش-کرنش سازه محاسبه می‌شوند. با توجه به اینکه لوله با نانوذرات تقویت شده است، در ادامه مدل موری-تاناکا برای محاسبه خواص معادل نانوکامپوزیت و خاصیت انباشتگی استفاده می‌شود. سپس روش انرژی مطرح شده و به کمک اصل همپلتون، معادلات ریاضی حاکم بر سازه استخراج می‌شود. در نهایت، با استفاده از روش عددی تفاضلات مربعی، سرعت بحرانی سازه محاسبه شده و تأثیر پارامترهای مختلف مانند درصد حجمی و انباشتگی نانوذرات، سرعت سیال و پارامترهای هندسی لوله روی پایداری سیستم بررسی می‌شود.

که در آن:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{21} & C_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

جایی که  $C_{ij}$  ثابت‌های الاستیک هستند.

### ۵- مدل موری - تاناکا

در این بخش خواص و ضرایب الاستیک کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره از دیدگاه میکرومکانیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که زمینه همسانگرد بوده و مدول یانگ و ضریب پواسون آن به ترتیب  $E_m$  و  $\nu_m$  باشد. نانوذرات دارای خواص الاستیک عرضی هستند، در نتیجه نانوکامپوزیت مورد نظر دارای خواص الاستیک عرضی است. رابطه تنش- کرنش در مختصات محلی یک المان اولیه در این حالت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K+m & l & K-m & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & n & l & \cdot & \cdot & \cdot \\ K-m & l & K+m & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)  $K, l, m, n, p$  مدول‌های الاستیک هیل هستند که  $K$  مدول حجمی کرنش صفحه‌ای عمود بر جهت الیاف،  $n$  مدول کششی غیرمحوری در جهت طولی الیاف‌ها،  $l$  مدول وابسته به سطح مقطع،  $m$  و  $p$  به ترتیب مدول برشی در صفحات موازی و قائم بر جهت الیاف‌ها هستند. مدول‌های الاستیک هیل با استفاده از روش موری- تاناکا به صورت رابطه زیر به دست می‌آیند [۱۶]:

$$K = \frac{E_m \{E_m c_m + \nu k_r (1 + \nu_m) [1 + c_r (1 - 2\nu_m)]\}}{\nu (1 + \nu_m) [E_m (1 + c_r - 2\nu_m) + \nu c_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)]},$$

$$l = \frac{E_m \{c_m \nu_m [E_m + \nu k_r (1 + \nu_m)] + \nu c_r l_r (1 - \nu_m^2)\}}{(1 + \nu_m) [E_m (1 + c_r - 2\nu_m) + \nu c_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)]},$$

$$n = \frac{E_m^2 c_m (1 + c_r - c_m \nu_m) + \nu c_m c_r (k_r n_r - l_r^2) (1 + \nu_m) (1 - 2\nu_m)}{(1 + \nu_m) [E_m (1 + c_r - 2\nu_m) + \nu c_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)]} +$$

$$\frac{E_m [\nu c_m k_r (1 - \nu_m) + c_r n_r (1 + c_r - 2\nu_m) - \nu c_m l_r \nu_m]}{E_m (1 + c_r - 2\nu_m) + \nu c_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} \\ \varepsilon_{x\theta}^{\circ} \\ \varepsilon_{xz}^{\circ} \\ \varepsilon_{\theta z}^{\circ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^{\circ} \\ \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^{\circ} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{R \partial \theta} \\ \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \phi_{\theta} + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} \\ \varepsilon_{x\theta}^{\circ} \\ \varepsilon_{xz}^{\circ} \\ \varepsilon_{\theta z}^{\circ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_{\theta}}{R \partial \theta} \\ \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial x} \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} \\ \varepsilon_{x\theta}^{\circ} \\ \varepsilon_{xz}^{\circ} \\ \varepsilon_{\theta z}^{\circ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\nu \left( \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\nu \left( \phi_{\theta} + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} \\ \varepsilon_{x\theta}^{\circ} \\ \varepsilon_{xz}^{\circ} \\ \varepsilon_{\theta z}^{\circ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-\nu}{r h^{\circ}} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^{\circ} w}{\partial x^{\circ}} \right) \\ \frac{-\nu}{r h^{\circ}} \left( \frac{\partial \phi_{\theta}}{R \partial \theta} + \frac{\partial^{\circ} w}{R^{\circ} \partial \theta^{\circ}} \right) \\ \frac{-\nu}{r h^{\circ}} \left( \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial^{\circ} w}{R \partial x \partial \theta} \right) \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

### ۴- رابطه تنش - کرنش

در این تحقیق جنس لوله از قانون هوک پیروی می‌کند. بنابراین روابط تنش- کرنش برای سازه، با توجه به تئوری ردی و با در نظر گرفتن خصوصیات ماده به صورت وابسته به دما، عبارت است از:

هستند:

$$K = K_{out} \left[ 1 + \frac{\xi \left( \frac{K_{in}}{K_{out}} - 1 \right)}{1 + \alpha (1 - \xi) \left( \frac{K_{in}}{K_{out}} - 1 \right)} \right], \quad (18)$$

$$G = G_{out} \left[ 1 + \frac{\xi \left( \frac{G_{in}}{G_{out}} - 1 \right)}{1 + \beta (1 - \xi) \left( \frac{G_{in}}{G_{out}} - 1 \right)} \right], \quad (19)$$

که در روابط بالا  $K_{in}$  و  $K_{out}$  به ترتیب مدول حجمی گنجایش و کامپوزیت منهای گنجایش بوده و به همین ترتیب  $G_{in}$  و  $G_{out}$  به ترتیب مدول حجمی گنجایش و کامپوزیت منهای گنجایش هستند که از روابط زیر به دست می آید:

$$K_{in} = K_m + \frac{(\delta_r - \nu K_m \chi_r) C_r \zeta}{\nu (\xi - C_r \zeta + C_r \zeta \chi_r)}, \quad (20)$$

$$K_{out} = K_m + \frac{C_r (\delta_r - \nu K_m \chi_r) (1 - \zeta)}{\nu [1 - \xi - C_r (1 - \zeta) + C_r \chi_r (1 - \zeta)]}, \quad (21)$$

$$G_{in} = G_m + \frac{(\eta_r - \nu G_m \beta_r) C_r \zeta}{\nu (\xi - C_r \zeta + C_r \zeta \beta_r)}, \quad (22)$$

$$G_{out} = G_m + \frac{C_r (\eta_r - \nu G_m \beta_r) (1 - \zeta)}{\nu [1 - \xi - C_r (1 - \zeta) + C_r \beta_r (1 - \zeta)]}, \quad (23)$$

جایی که  $\delta_r$ ،  $\beta_r$ ،  $\chi_r$  و  $\eta_r$  عبارتند از:

$$\chi_r = \frac{\nu (K_m + G_m) + k_r - l_r}{\nu (k_r + G_m)}, \quad (24)$$

$$\beta_r = \frac{1}{5} \left\{ \frac{\nu G_m + \nu k_r + l_r + \nu G_m}{\nu (k_r + G_m) (p_r + G_m)} + \frac{\nu [G_m (\nu K_m + G_m) + G_m (\nu K_m + \nu G_m)]}{G_m (\nu K_m + G_m) + m_r (\nu K_m + \nu G_m)} \right\}, \quad (25)$$

$$\delta_r = \frac{1}{3} \left[ n_r + \nu l_r + \frac{(\nu k_r - l_r) (\nu K_m + \nu G_m - l_r)}{k_r + G_m} \right], \quad (26)$$

$$\eta_r = \frac{1}{5} \left[ \frac{\nu (n_r - l_r) + \nu G_m p_r}{\nu (p_r + G_m)} + \frac{\nu G_m m_r (\nu K_m + \nu G_m)}{\nu K_m (m_r + G_m) + G_m (\nu m_r + G_m)} + \frac{\nu (k_r - l_r) (\nu G_m + l_r)}{\nu (k_r + G_m)} \right]. \quad (27)$$

$$p = \frac{E_m [E_m c_m + \nu p_r (1 + \nu m) (1 + c_r)]}{\nu (1 + \nu m) [E_m (1 + c_r) + \nu c_m p_r (1 + \nu m)]},$$

$$m = \frac{E_m [E_m c_m + \nu m_r (1 + \nu m) (\nu + c_r - \nu \nu m)]}{\nu (1 + \nu m) \{E_m [c_m + \nu c_r (1 - \nu m)] + \nu c_m m_r (\nu - \nu m - \nu \nu m)\}}, \quad (11)$$

در رابطه (11)  $p_r$ ،  $n_r$ ،  $l_r$ ،  $k_r$ ،  $m_r$  مدول الاستیسیته هیل برای فاز تقویت شده هستند. در نهایت با محاسبه پارامترهای  $K$ ،  $m$ ،  $l$ ،  $n$  و  $p$ ، ماتریس سختی از رابطه (10) به دست می آید.

نتایج تجربی نشان می دهد که بیشتر نانوذرات به صورت نامنظم در بتن جای می گیرند. مشاهده شده قسمت زیادی از نانوذرات درون کامپوزیت در یک ناحیه متمرکز می شوند [16]. فرض می شود این ناحیه کروی بوده و به اصطلاح گنجایش نامیده می شود.  $V_r$  حجم نهایی نانوذرات است:

$$V_r = V_r^{inclusion} + V_r^m \quad (12)$$

که در آن به ترتیب  $V_r^{inclusion}$  و  $V_r^m$  حجمی از نانوذرات در گنجایش و بتن هستند. از دو پارامتر زیر برای نشان دادن اثر انباشتگی در مدل میکرومکانیک استفاده می شوند:

$$\xi = \frac{V_r^{inclusion}}{V}, \quad (13)$$

$$\zeta = \frac{V_r^{inclusion}}{V_r}. \quad (14)$$

کسر حجمی میانگین نانوذرات در کامپوزیت ( $c_r$ ) به صورت زیر بیان می شود:

$$c_r = \frac{V_r}{V}. \quad (15)$$

رابطه کسر حجمی نانوذرات در گنجایش و بتن با استفاده از روابط بالا به صورت زیر است:

$$\frac{V_r^{inclusion}}{V_r} = \frac{c_r \zeta}{\xi}, \quad (16)$$

$$\frac{V_r^m}{V - V_r^{inclusion}} = \frac{c_r (1 - \zeta)}{1 - \xi}. \quad (17)$$

با فرض اینکه نانوذرات همسانگرد عرضی باشند و به طور کاملاً تصادفی در گنجایش قرار گرفته باشند، گنجایش همسانگرد فرض می شود و با استفاده از روش موری-تاناکا برای مواد همسانگرد، مدول حجمی  $K$  و مدول برشی  $G$  به صورت زیر

$$\begin{aligned}
& Q_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + N_{x\theta} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) + \\
& M_{xx} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + M_{\theta\theta} \frac{\partial \phi_\theta}{R\partial\theta} + M_{x\theta} \left( \frac{\partial \phi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) + \\
& L_\theta \left( \frac{-\nu}{h^\gamma} \left( \phi_\theta + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) \right) + L_x \left( \frac{-\nu}{h^\gamma} \left( \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \\
& R_{xx} \left( \frac{-\nu}{r h^\gamma} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) + \\
& R_{\theta\theta} \left( \frac{-\nu}{r h^\gamma} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{R\partial\theta} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial\theta^2} \right) \right) + \\
& R_{x\theta} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{R\partial\theta} + \nu \frac{\partial^2 w}{R\partial x \partial\theta} \right) \Bigg] dx d\theta
\end{aligned} \quad (36)$$

جایی که متجه‌های تنش عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} & M_{xx} & R_{xx} \\ N_{\theta\theta} & M_{\theta\theta} & R_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} & M_{x\theta} & R_{x\theta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xxz} & \sigma_{xxz}^2 \\ \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\theta z} & \sigma_{\theta\theta z}^2 \\ \sigma_{x\theta} & \sigma_{x\theta z} & \sigma_{x\theta z}^2 \end{bmatrix} dz, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} Q & R_x \\ Q_\theta & R_\theta \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} & \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{\theta z} & \sigma_{\theta z}^2 \end{bmatrix} dz. \quad (38)$$

### ۶-۲- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می شود:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left( (\dot{u}_1)^2 + (\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2 \right) dV \quad (39)$$

جایی که  $\rho$  دانسیته معادل لوله نانوکامپوزیتی است.

### ۶-۳- کار خارجی ناشی از سیال

اصل اساسی که از آن در مکانیک سیالات استفاده می شود اصل بقای جرم است. این اصل بیان می دارد که جرم نه تولید می شود و نه از بین می رود و توسط معادله پیوستگی به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (40)$$

در رابطه فوق  $\mathbf{v} \equiv (v_x, v_\theta, v_z)$  سرعت سیال در مختصات استوانه‌ای به ترتیب در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی هستند. مکانیک سیالات تنها با داشتن معادله پیوستگی مشخص نمی شود بلکه باید اصل بقای اندازه حرکت یا قانون دوم نیوتن

همچنین  $K_m$ ،  $G_m$  مدول حجمی و برشی فاز پایه هستند که عبارتند از:

$$K_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}, \quad (28)$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}. \quad (29)$$

به علاوه  $\alpha$  و  $\beta$  در روابط (۱۸) و (۱۹) از روابط زیر به دست می آیند:

$$\alpha = \frac{(1+\nu_{out})}{3(1-\nu_{out})}, \quad (30)$$

$$\beta = \frac{2(4-5\nu_{out})}{15(1-\nu_{out})}, \quad (31)$$

$$\nu_{out} = \frac{3K_{out} - 2G_{out}}{6K_{out} + 2G_{out}}. \quad (32)$$

با به دست آوردن مدول حجمی  $K$  و مدول برشی  $G$  نانوکامپوزیت با استفاده از روابط بالا،  $E$  و  $\nu$  برای ماده نانوکامپوزیت همسانگرد از رابطه زیر به دست می آیند:

$$E = \frac{4KG}{3K+G}, \quad (33)$$

$$\nu = \frac{3K-2G}{6K+2G}. \quad (34)$$

در نهایت با داشتن  $E$  و  $\nu$  ماتریس سختی سازه محاسبه می شود.

### ۶- روش انرژی

در این قسمت، انرژی پتانسیل و جنبشی سازه به همراه کار خارجی ناشی از سیال ارائه می شوند:

#### ۶-۱- انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل به صورت زیر نوشته می شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta}\epsilon_{x\theta} + \sigma_{xz}\epsilon_{xz} + \sigma_{\theta z}\epsilon_{\theta z}) dV \quad (35)$$

با جایگذاری کرنش‌ها در رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Bigg[ & N_{xx} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \\
& N_{\theta\theta} \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right)^2 \right) + Q_\theta \left( \frac{\partial w}{R\partial\theta} + \phi_\theta \right) + \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\int_0^t (\delta U - \delta W - \delta T) dt = 0 \quad (46)$$

و استفاده از انتگرال جزء به جزء و مرتب کردن روابط در راستای جابه‌جایی‌های مکانیکی، معادله‌های حاکم به صورت درگیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta u : & \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) + \\ & A_{1r} \left( \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right) + \\ & B_{11} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + B_{r\theta} \left( \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) + \\ & \frac{\partial}{R \partial \theta} \left( A_{r\theta} \left( \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) + \dots + \right. \\ & \left. E_{r\theta} \left( \frac{-r}{r h^2} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right) \right) \right) = \\ & I_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - \frac{r I_r}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2 \partial x} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \delta v : & \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{r\theta} \left( \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \right) + \\ & B_{r\theta} \left( \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) + \\ & E_{r\theta} \left( \frac{-r}{r h^2} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right) \right) + \\ & \frac{\partial}{R \partial \theta} \left( A_{1r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) + \\ & A_{rr} \left( \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right) + B_{1r} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \\ & B_{rr} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta} \right) + E_{1r} \left( \frac{-r}{r h^2} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) + \\ & E_{rr} \left( \frac{-r}{r h^2} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) \right) = \\ & I_r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} - \frac{r I_r}{h^2} \frac{\partial^2 w}{R \partial t^2 \partial \theta} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \delta w : & \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{r\theta} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + D_{r\theta} \left( \frac{-r}{h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right) + \\ & \frac{\partial}{R \partial \theta} \left( A_{\theta\theta} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} + \psi_\theta \right) + D_{\theta\theta} \left( \frac{-r}{h^2} \left( \psi_\theta + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \right) \right) - \\ & \left. \frac{r}{h^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{r\theta} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + F_{r\theta} \left( \frac{-r}{h^2} \left( \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right) \right) \right) + \\ & \left. \frac{\partial}{R \partial \theta} \left( D_{\theta\theta} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} + \phi_\theta \right) + F_{\theta\theta} \left( \frac{-r}{h^2} \left( \phi_\theta + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

را درباره آن بیان کرد. اندازه حرکت حاصلضرب جرم در سرعت است. قانون دوم نیوتن بیان می‌کند که برابری نیروهای که بر یک جسم اثر می‌کند برابر است با تغییرات خالص مومنتوم. با در نظر گرفتن سیال ویسکوز و غیرقابل تراکم معادله حاکم بر رفتار سیال به صورت زیر است که به معادله ناویر-استوکس مشهور است [۱۴]:

$$\rho_f \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + f_{body} \quad (41)$$

همچنین  $\rho_f$  و  $\mu$  به ترتیب فشار، ویسکوزیته و چگالی سیال بوده و  $f_{body}$  نیروی حجمی هستند. در رابطه ناویر-استوکس عملگر مشتق کامل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (42)$$

در نقطه تماس بین سیال و داخل پوسته، سرعت نسبی و شتاب در جهت جابه‌جایی شعاعی برابر می‌شود. بنابراین [۱۴]:

$$v_z = \frac{dw}{dt} \quad (43)$$

با فرض حرکت طولی سیال، ترکیب روابط (۴۱) تا (۴۳) و ضرب کردن دو طرف تساوی رابطه (۴۱) در عمق سیال درون لوله ( $h_f$ )، نیروی شعاعی ناشی از سیال محاسبه می‌شود که عبارت است از:

$$\begin{aligned} R_{fluid} = h_f \frac{\partial p_z}{\partial z} = & - \left[ \underbrace{\rho_f h_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{Kinetic} + \underbrace{v_x \rho_f h_f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}_{Gyroscopic} + \underbrace{v_x^2 \rho_f h_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{Potential} \right] + \\ & \underbrace{\mu h_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2 \partial t} + v_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2 \partial x} \right) \right)}_{Viscosity} \end{aligned} \quad (44)$$

در نهایت کار خارجی ناشی از نیروی سیال به صورت زیر است:

$$W = \int R_{fluid} W dA \quad (45)$$

#### ۶-۴- اصل همیلتون

حال با اعمال اصل همیلتون مطابق رابطه (۴۶):





بنابراین مشاهده می‌شود که دو عامل بسیار مهم و تعیین‌کننده در دقت روش تفاضلات مربعی، انتخاب نقاط نمونه و ضرایب وزنی هستند که در ادامه به آنها اشاره خواهد شد.

ریشه‌های چندجمله‌ای متعامد در این مورد خوب عمل می‌کند. مثلاً ریشه‌های چندجمله‌ای چیشف در حل مسائل مهندسی زیاد استفاده می‌شود و نتایج خوبی به بار می‌آورد. این فاصله‌گذار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x_i = \frac{a}{\gamma} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right] \quad i = 1, \dots, N_x, \quad (61)$$

$$\theta_i = \frac{\gamma\pi}{\gamma} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_\theta-1} \pi \right) \right] \quad i = 1, \dots, N_\theta. \quad (62)$$

ضرایب وزنی برای حالت دو بعدی به شکل زیر تعمیم می‌یابند:  
الف) برای مشتق مرتبه اول:

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} & \text{for } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x \\ -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_x} A_{ij}^{(1)} & \text{for } i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x \end{cases} \quad (63)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{P(\theta_i)}{(\theta_i - \theta_j)P(\theta_j)} & \text{for } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_\theta \\ -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_\theta} B_{ij}^{(1)} & \text{for } i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_\theta \end{cases} \quad (64)$$

که در روابط فوق:

$$M(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_x} (x_i - x_j), \quad (65)$$

$$P(\theta_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_\theta} (\theta_i - \theta_j). \quad (66)$$

ب) برای مشتق بالاتر:

$$A_{ij}^{(n)} = n \left( A_{ii}^{(n-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad (67)$$

$$\frac{\gamma}{h^\gamma} \left( D_{\Delta\Delta} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} + \phi_\theta \right) + F_{\Delta\Delta} \left( \frac{-\gamma}{h^\gamma} \left( \phi_\theta + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \right) \right) = J_1 \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + K_\gamma \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial a^2} - \frac{\gamma}{r h^\gamma} J_\gamma \frac{\partial^2 w}{R \partial a^2 \partial \theta} \quad (51)$$

جایی که

$$I_i = \int_{-h/\gamma}^{h/\gamma} \rho z^i dz \quad (i = 0, 1, \dots, 6), \quad (52)$$

$$J_i = I_i - \frac{\gamma}{r h^\gamma} I_{i+\gamma} \quad (i = 1, 4), \quad (53)$$

$$K_\gamma = I_\gamma - \frac{\gamma}{r h^\gamma} I_\gamma + \left( \frac{\gamma}{r h^\gamma} \right)^\gamma I_\gamma \quad (54)$$

معادلات فوق برای سه شرط مرزی زیر تحلیل خواهند شد:

ساده- ساده

$$x = 0, a \Rightarrow u = v = w = \phi_x = M_x = 0, \quad (55)$$

گیردار- ساده

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow u = v = w = \phi_x = \phi_\theta = 0, \\ x = a &\Rightarrow u = v = w = \phi_x = M_x = 0, \end{aligned} \quad (56)$$

گیردار- گیردار

$$x = 0, a \Rightarrow u = v = w = \phi_x = \phi_\theta = 0. \quad (57)$$

## ۷- معرفی روش تفاضلات مربعی

روش تفاضلات مربعی از جمله روش‌های عددی است که در آن با استفاده از ضرایب وزنی معادلات دیفرانسیلی حاکم، به دسته‌ای از معادلات جبری مرتبه اول تبدیل می‌شوند. بدین ترتیب که در هر نقطه، مشتق به صورت یک مجموع خطی از ضرایب وزنی و مقادیر تابع در آن نقطه و دیگر نقاط دامنه و در جهت محورهای مختصات بیان خواهند شد. رابطه اصلی این روش به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^n f_x(x_i, \theta_j)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(n)} f(x_k, \theta_j) \quad (58)$$

$$\frac{d^m f_y(x_i, \theta_j)}{d\theta^m} = \sum_{l=1}^{N_\theta} B_{jl}^{(m)} f(x_i, \theta_l) \quad (59)$$

$$\frac{d^{n+m} f_{xy}(x_i, \theta_j)}{dx^n d\theta^m} = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_\theta} A_{ik}^{(n)} B_{jl}^{(m)} f(x_k, \theta_l) \quad (60)$$

بدین منظور یک لوله با طول  $a = 1 \text{ m}$  و شعاع  $h = 15 \text{ cm}$ ، مدول الاستیک  $E_m = 20 \text{ GPa}$  و ضریب پواسون  $\nu_m = 0/3$  در نظر گرفته شده که با نانوذرات سیلیس با مدول الاستیک  $E_r = 66 \text{ GPa}$  و ضریب پواسون  $\nu_r = 0/2$  تقویت شده است. لازم به ذکر است که فرکانس‌های محاسبه شده در این قسمت خطی هستند.

#### ۸-۱- صحت‌سنجی

به منظور اعتبارسنجی، با صرف نظر کردن از ترم‌های سیال، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای لوله نانوکامپوزیتی با شرایط  $T = 400 \text{ K}$ ،  $h/R = 0/02$  و  $V_{CNT} = 0/17$  محاسبه شده و بر حسب دامنه بی‌بعد در شکل (۲) برای نسبت‌های مختلف  $L^2/Rh$  ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج کار حاضر با نتایج شن و ژیانگ [۱۷] مقایسه شده که نشان از تطابق کار حاضر با مقاله اشاره شده دارد.

لازم به ذکر است که برای حل مسئله غیرخطی از رابطه زیر استفاده شده است:

$$[[K_L + K_{NL}] + [C]\omega + [M]\omega^2][d] = [0] \quad (75)$$

جایی که  $[K_L]$  و  $[K_{NL}]$  به ترتیب بیانگر ماتریس سختی خطی و غیرخطی هستند. برای محاسبه فرکانس غیر خطی از رابطه بالا، از روش تکرار به ترتیب زیر استفاده شده است:

- از ترم‌های غیرخطی در ماتریس سختی صرف نظر شده و بردار ویژه ( بردار جابه‌جایی  $[d]$  ) و مقدار ویژه ( $\Omega_L$ ) در حالت خطی محاسبه می‌شود.
- بردار جابه‌جایی مرحله قبل در ترم‌های غیرخطی ماتریس سختی جایگذاری می‌شود و دوباره بردار ویژه و مقدار ویژه ( $\Omega_{NL}$ ) مربوط به حالت غیرخطی محاسبه می‌شود.
- این فرایند تا جایی ادامه پیدا می‌کند تا نسبت همگرایی زیر ارضا شود:

$$\frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{\alpha_{i-1}} < 0/01\% \quad (76)$$

لازم به ذکر است که منظور از  $\alpha$  همان فرکانس سیستم است.

$$B_{ij}^{(m)} = m \left( B_{ii}^{(m-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(m-1)}}{(\theta_i - \theta_j)} \right) \quad (68)$$

بنابراین معادلات حاکم و شرط مرزی در فرم ماتریسی با حذف جملات غیرخطی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left( [K] \begin{Bmatrix} \{d_b\} \\ \{d_d\} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \{\dot{d}_b\} \\ \{\dot{d}_d\} \end{Bmatrix} + [M] \begin{Bmatrix} \{\ddot{d}_b\} \\ \{\ddot{d}_d\} \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

در رابطه فوق  $[K]$ ،  $[C]$  و  $[M]$  به ترتیب بیانگر ماتریس سختی، ماتریس میرایی و ماتریس جرم هستند. همچنین  $\{d_b\}$  و  $\{d_d\}$  به ترتیب بردار دامنه دینامیکی مربوط به نقاط شرط مرزی و میدان هستند. حال با استفاده از رابطه زیر:

$$d(x, \theta, t) = d_0(x, \theta) e^{i\omega t} \quad (70)$$

معادله (۶۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$[[K] + [C]\omega + [M]\omega^2][d] = [0] \quad (71)$$

جایی که  $[d] = [u \ v \ \phi_x \ \phi_\theta]^T$  و  $\omega$  به ترتیب دامنه و فرکانس سازه هستند. معادله فوق فرم کلی یک مسئله مقدارویژه را دارد. برای حل باید به حالت استاندارد یک مسئله مقدارویژه تبدیل شود. برای این منظور با تعریف تغییر متغیر  $\bar{Y} = \omega d$ ، معادله (۷۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$[A]\{Z\} = \Omega\{Z\} \quad (72)$$

که در آن:

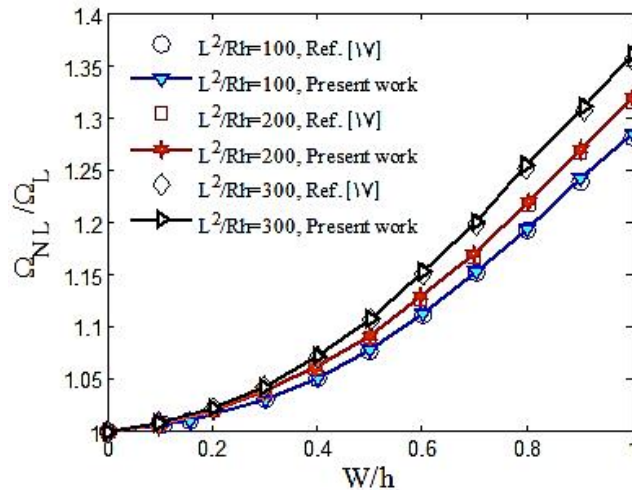
$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_{eq}^{-1}]K_{eq} & -[M_{eq}^{-1}]C_{eq} \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{(d)_b\} \\ \{(d)_d\} \\ \{(d')_b\} \\ \{(d')_d\} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

در روابط فوق،  $[I]$  بیانگر ماتریس یکه و  $\{(d')\}$  معرف مشتق بردارهای جابه‌جایی یا دامنه ارتعاشی هستند.

#### ۸- نتایج و نمودارها

در این قسمت به بررسی نتایج عددی پایداری و ارتعاشات لوله‌های بتنی تقویت شده با نانوذرات سیلیس پرداخته می‌شود.



شکل ۲- نسبت فرکانس برحسب دامنه بی بعد برای  $L^2/Rh$  های مختلف

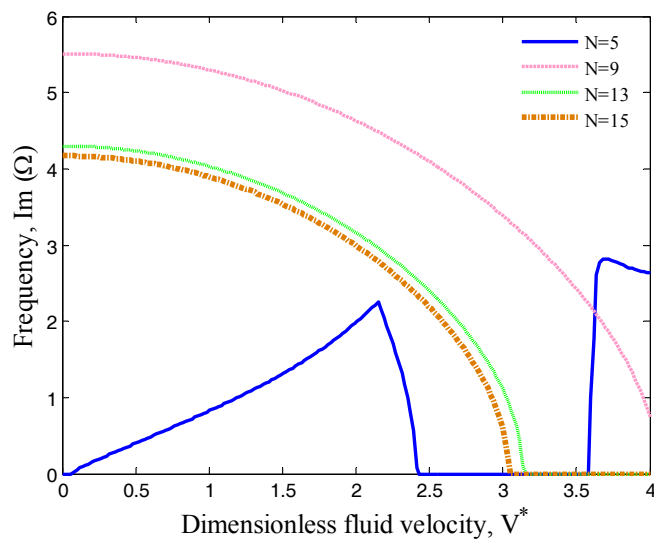
#### ۸-۲- بررسی همگرایی روش عددی

همگرایی و صحت روش مربعات دیفرانسیلی در تخمین قسمت موهومی و حقیقی فرکانس بی بعد ( $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho/C_{11}}$ ) برحسب سرعت سیال بی بعد ( $V = \sqrt{\rho F/C_{11}} v_x$ ) در شکل های (۳) و (۴) ارائه شده است. در این شکل ها نتایج برای مقادیر مختلف نقاط شبکه ارائه شده است. نقاط شبکه بر اساس فاصله گذار چبیشف (روابط (۶۱) و (۶۲)) در راستای طولی و محیطی در نظر گرفته شده است. بر اساس این فاصله گذار، نقاط در ابتدا و انتهای لوله (یا به عبارتی مکان های مرزی سازه) به یکدیگر نزدیک تر بوده تا شرایط مرزی به خوبی اعمال شوند. مشاهده می شود که به غیر از نقطه شبکه ۵ که نتایج غیرواقعی ارائه می دهد، با افزایش تعداد نقاط شبکه، فرکانس سازه کاهش می یابد. نرخ کاهش فرکانس در نقاط شبکه بالا کمتر شده تا جایی که در تعداد نقطه ۱۵، نتایج تغییر نمی کند. به عبارتی نتایج در ۱۵ نقطه شبکه همگرا می شوند. بنابراین در این پژوهش، برای دستیابی به نتایج با دقت بالا، ۱۵ نقطه شبکه در نظر گرفته شده است.

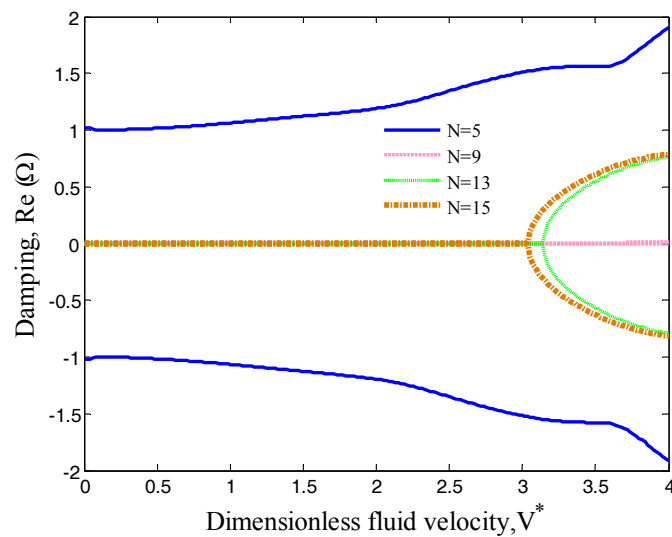
#### ۸-۳- بررسی اثرات پارامترهای مختلف بر ارتعاش سیستم

شکل های (۵) و (۶) به ترتیب تأثیر درصد حجمی نانوذرات بر فرکانس بی بعد (قسمت موهومی پاسخ) و میرایی (قسمت

حقیقی پاسخ) لوله در برابر سرعت سیال بی بعد را نشان می دهند. همان طور که در این دو شکل نشان داده می شود فرکانس با افزایش سرعت سیال کاهش می یابد در حالی که مقدار میرایی در این محدوده برابر صفر است. در این محدوده سیستم پایدار است. با افزایش سرعت، در نهایت در یک سرعت مشخص هنگامی که فرکانس (قسمت موهومی) به مقدار صفر می رسد، سیستم به علت دو شاخگی و داشتن جواب حقیقی مثبت پایداری خود را از دست می دهد. سرعتی که سازه پایداری خود را از دست می دهد، سرعت بحرانی سیال نامیده می شود. در این قسمت مقادیر ویژه فرکانس دارای قسمت حقیقی مثبت هستند که سیستم ناپایدار می شود. لازم به ذکر است که انشعاب ایجاد شده در نمودار قسمت حقیقی فرکانس از نوع دوشاخگی فوق بحرانی<sup>۱</sup> است چرا که عدد ماخ بیشتر از یک است. با توجه به شکل مشخص است که هرچه درصد حجمی نانوذرات بیشتر می شود، فرکانس و سرعت بحرانی سیال افزایش می یابد به علت آنکه سختی سازه بیشتر می شود. به عبارت دیگر، با افزودن هفت درصد نانوذرات سیلیس به لوله، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب حدود ۶۳ و ۱۲۶ درصد افزایش می یابند. بنابراین، با افزایش درصد حجمی نانوذرات، لوله در سرعت سیال بالاتری ناپایدار خواهد شد. نتایج این نمودار اهمیت استفاده از نانوذرات در پروسه ساخت



شکل ۳- همگرایی روش عددی بر قسمت موهومی فرکانس بی بعد در مقابل سرعت سیال بی بعد

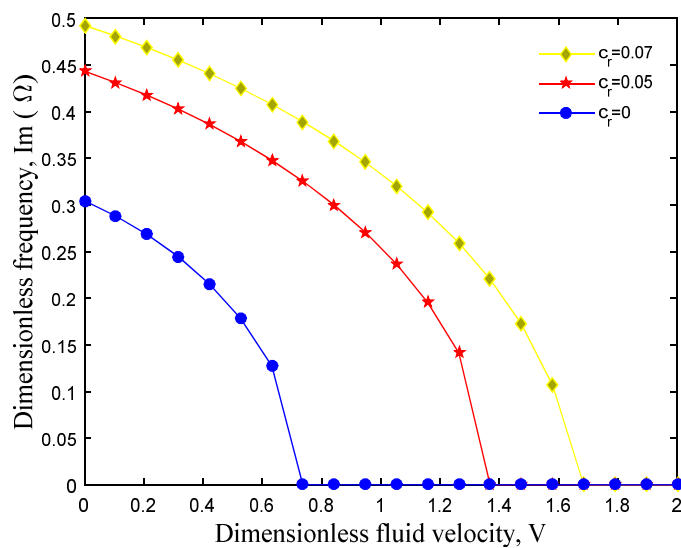


شکل ۴- همگرایی روش عددی بر قسمت حقیقی فرکانس بی بعد در مقابل سرعت سیال بی بعد

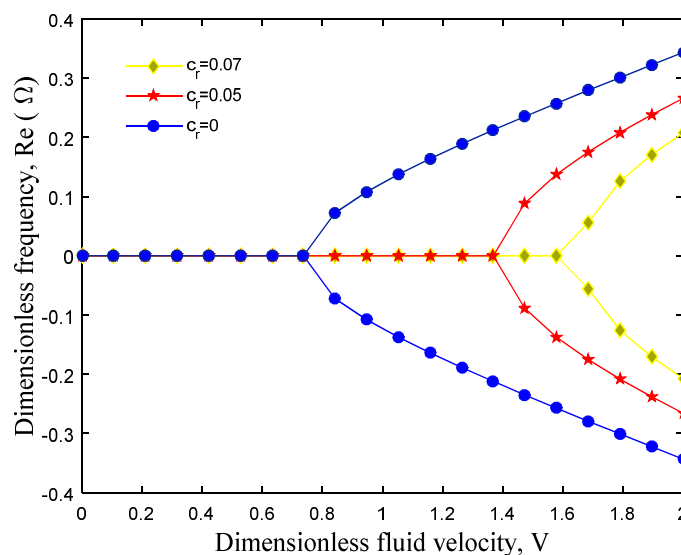
نانوذرات منجر به توزیع غیریکنواخت آنها در لوله شده و مقاومت در برابر شکل پذیری سازه کمتر می شود. بنابراین انباشتگی نانوذرات، سختی سازه را کاهش می دهد. به عبارت دیگر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال درحالی که نانوذرات به صورت یکنواخت در لوله توزیع شده اند ( $\xi = 1$ ) به ترتیب  $1/0.14$  و  $1/9.12$  است درحالی که این مقادیر برای  $\xi = 0.5$  (وجود انباشتگی) به ترتیب  $0.7314$  و  $1/0.521$  هستند.

لوله های بتنی را نشان می دهد که استفاده از آنها می تواند خواص مکانیکی سازه را بهبود ببخشد.

شکل های (۷) و (۸) تأثیر انباشتگی نانوذرات در یک منطقه خاص را روی قسمت موهومی و حقیقی فرکانس سازه بر حسب سرعت سیال بی بعد نشان می دهند. همان طور که مشاهده می شود در نظر گرفتن انباشتگی ( $\xi < 1$ ) منجر به کاهش فرکانس و سرعت بحرانی سیال می شود. دلیل این امر آن است که انباشتگی



شکل ۵- تأثیر درصد حجمی نانوذرات بر فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد

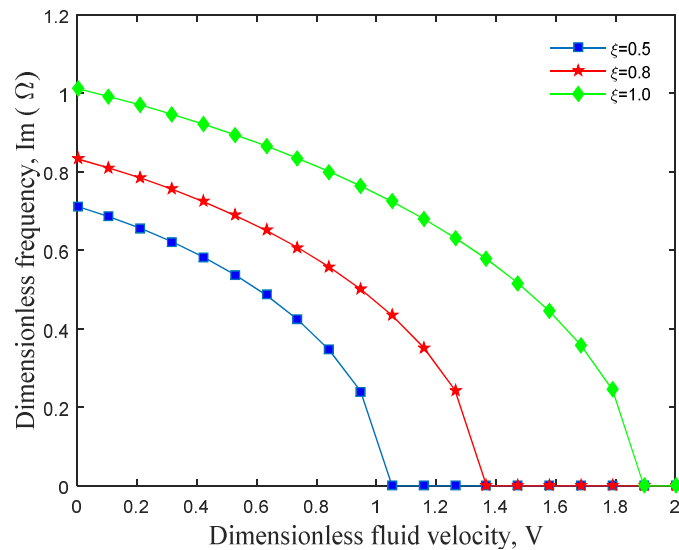


شکل ۶- تأثیر درصد حجمی نانوذرات بر میرایی بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد

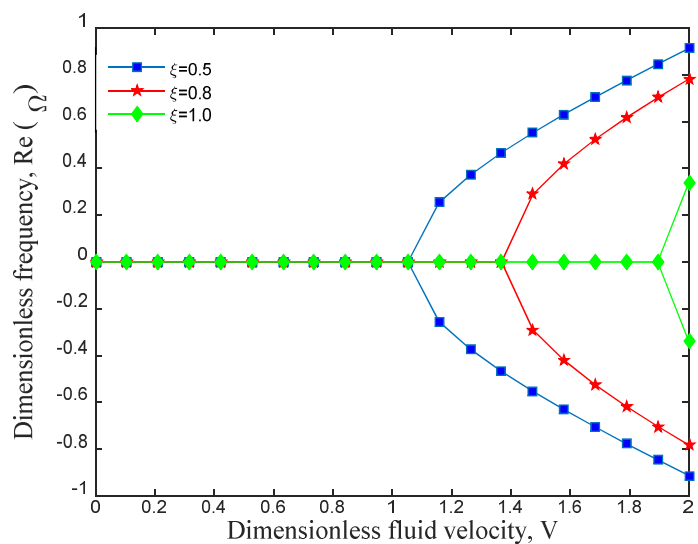
نشان داده شده است. همان‌طور که استنباط می‌شود با افزایش طول لوله، فرکانس و سرعت بحرانی سیال در لوله کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال، فرکانس و سرعت بحرانی سیال برای لوله با طول ۰/۶ متر به ترتیب ۱/۵۹۱ و ۱/۹۹۹ است و برای لوله با طول ۱/۵ متر این مقادیر به ترتیب به ۰/۹۵۶۷ و ۱/۶۹۸ می‌رسند. به‌عبارت دیگر، با افزایش طول از ۰/۶ متر به ۱/۵ متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۶۶ و ۱۸ درصد

با توجه به ارقام ذکر شده می‌توان نتیجه گرفت که وجود انباشتگی، فرکانس و سرعت بحرانی را به ترتیب ۳۹ و ۸۱ درصد کاهش می‌دهد. در نتیجه برای تقویت لوله با نانوذرات، هرچه انباشتگی در نقاط مختلف کمتر باشد، فرکانس و سرعت بحرانی سازه نیز افزایش خواهد یافت.

فرکانس و میرایی بی‌بعد سازه در مقابل سرعت سیال بدون بعد برای لوله با طول‌های مختلف در شکل‌های (۹) و (۱۰)



شکل ۷- تأثیر انباشتگی نانوذرات بر فرکانس بی بعد در مقابل سرعت سیال بی بعد

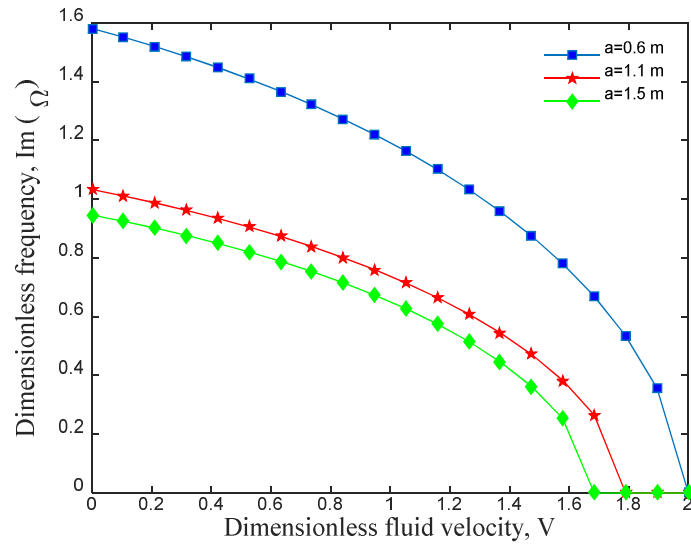


شکل ۸- تأثیر انباشتگی نانوذرات بر میرایی بی بعد در مقابل سرعت سیال بی بعد

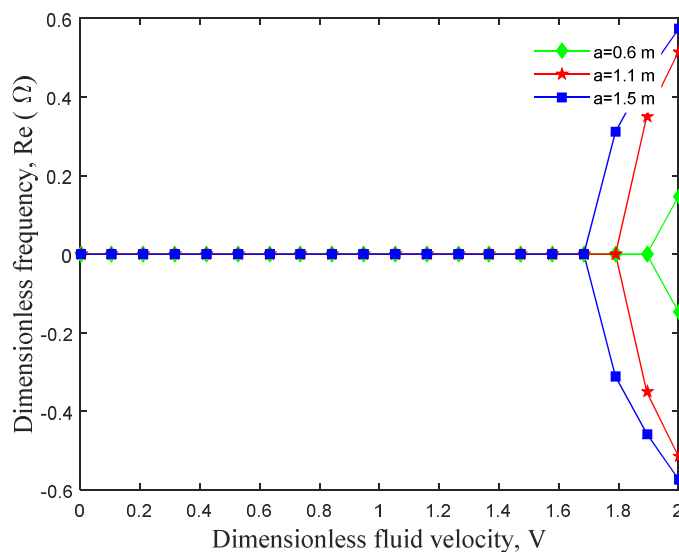
به دلیل کاهش سختی سازه است. به عنوان نمونه، فرکانس و سرعت بحرانی سیال برای لوله‌ای با شعاع ۲۰ سانتی‌متر به ترتیب  $1/0103$  و  $1/855$  است در حالی که این مقادیر برای لوله با شعاع ۴۰ سانتی‌متر به ترتیب  $0/9134$  و  $1/623$  هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با دو برابر کردن شعاع لوله از ۲۰ به ۴۰ سانتی‌متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۱۰ و ۱۲ درصد کاهش دارند.

کاهش می‌یابند. دلیل کاهش فرکانس و سرعت بحرانی سیال با افزایش طول لوله، کاهش سختی و مقاومت در برابر شکل پذیری سازه است.

شکل‌های (۱۱) و (۱۲) به ترتیب فرکانس و میرایی بی بعد سازه را در برابر سرعت سیال بی بعد برای شعاع‌های مختلف لوله بتنی نشان می‌دهند. مشخص است که افزایش شعاع منجر به کاهش فرکانس و سرعت بحرانی سیال می‌شود که این



شکل ۹- تأثیر طول لوله بر فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد



شکل ۱۰- تأثیر طول لوله بر میرایی بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد

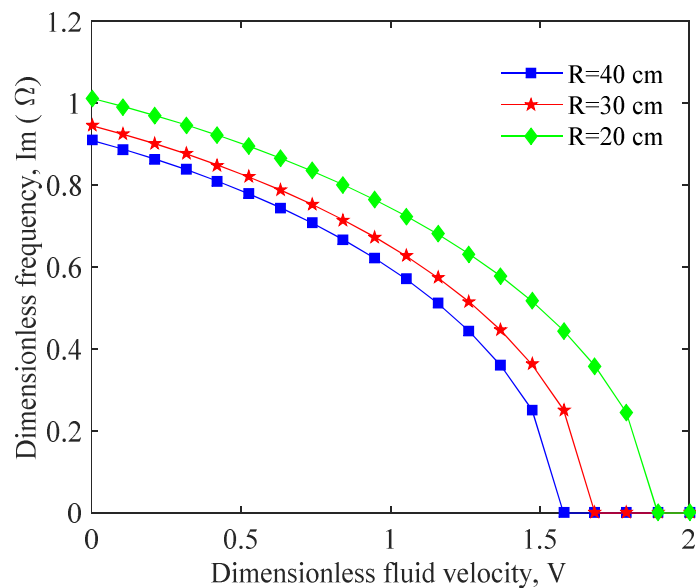
شکل‌پذیری سازه با افزایش ضخامت است.

### ۹- نتیجه‌گیری

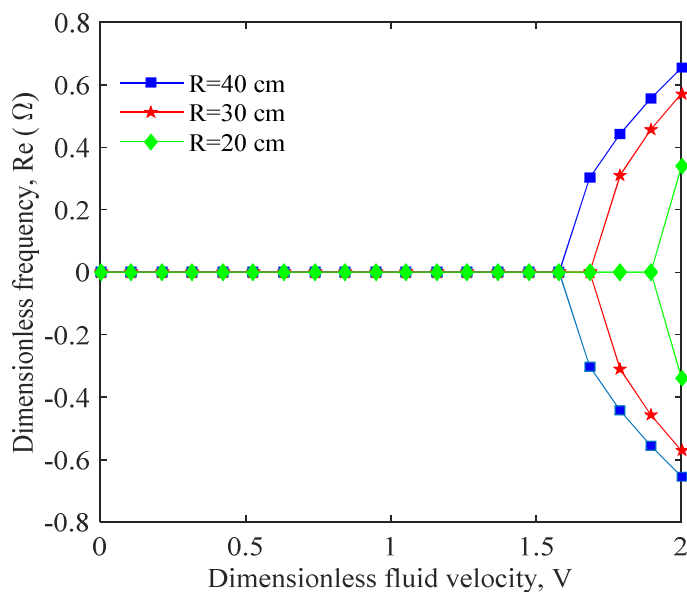
در این تحقیق، ارتعاشات و ناپایداری لوله‌های بتنی حاوی جریان سیال تقویت شده با نانوذرات سیلیس تحلیل شد. لوله با مدل پوسته استوانه‌ای ردی مدل‌سازی شده است. خواص معادل لوله با استفاده از قانون موری-تاناکا با در نظر گرفتن خاصیت

شکل‌های (۱۳) و (۱۴) اثر ضخامت لوله را به ترتیب روی فرکانس و میرایی بی‌بعد سازه در برابر سرعت سیال بی‌بعد نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که افزایش ضخامت باعث افزایش فرکانس و سرعت بحرانی سیال می‌شود. به عبارتی دیگر با  $\frac{3}{5}$  برابر کردن ضخامت لوله از  $10$  به  $35$  سانتی‌متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب حدود  $3$  و  $2$  برابر افزایش دارند. دلیل این امر افزایش سختی و مقاومت در برابر





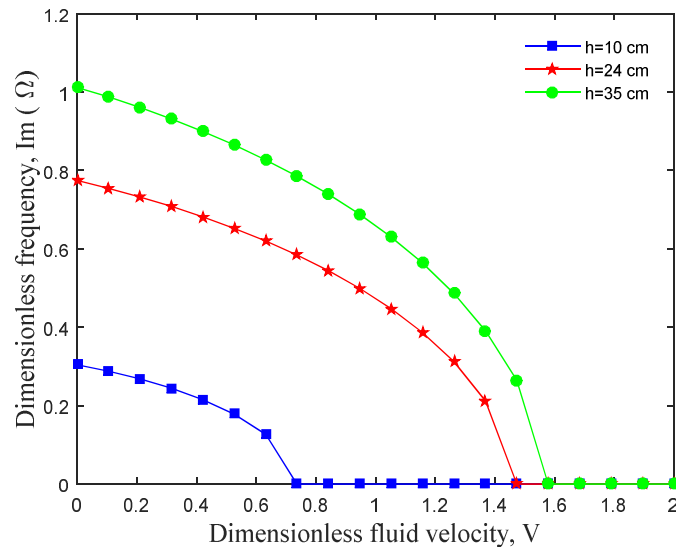
شکل ۱۱- تأثیر شعاع لوله بر فرکانس بی بعد در مقابل سرعت سیال بی بعد



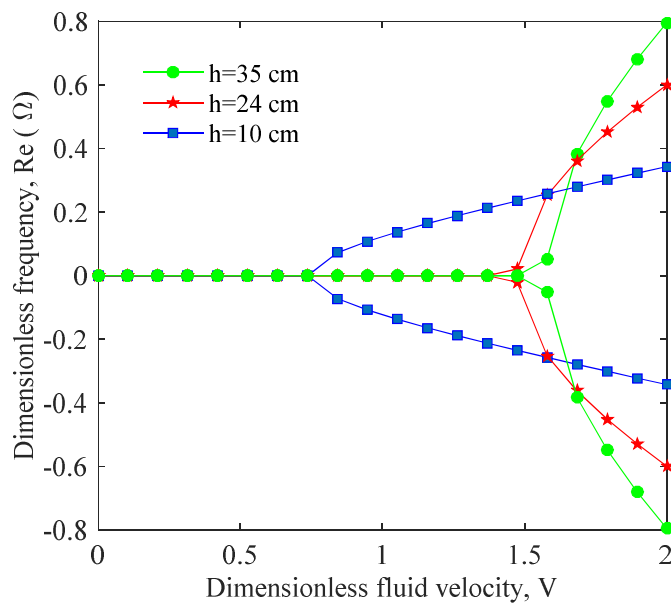
شکل ۱۲- تأثیر شعاع لوله بر میرایی بی بعد در مقابل سرعت سیال بی بعد

روی ارتعاشات و ناپایداری سازه بررسی شد. از مهم ترین نتایج این تحقیق می توان به موارد زیر اشاره کرد:  
 - با ۱۵ نقطه شبکه نتایج همگرا می شوند.  
 - با افزایش سرعت، در نهایت در یک سرعت مشخص هنگامی که فرکانس (قسمت موهومی) به مقدار صفر می رسد، سیستم به علت دو شاخگی و داشتن جواب حقیقی مثبت

انباشتگی نانوذرات محاسبه شد و برای به دست آوردن معادلات حاکم بر سیستم، از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده شد. با به کارگیری روش عددی تفاضلات مربعی، به حل معادلات حاکم پرداخته و فرکانس و سرعت بحرانی سیال محاسبه شد. اثر پارامترهای مختلف از جمله درصد حجمی نانوذرات، انباشتگی نانوذرات، پارامترهای هندسی و سرعت سیال عبوری



شکل ۱۳- تأثیر ضخامت لوله بر فرکانس بی بعد در مقابل سرعت سیال بی بعد



شکل ۱۴- تأثیر ضخامت لوله بر میرایی بی بعد در مقابل سرعت سیال بی بعد

- در نظر گرفتن انباشتگی ( $\xi < 1$ ) باعث کاهش سختی سازه شده و فرکانس و سرعت بحرانی سیال کاهش می یابد. به عبارتی، وجود انباشتگی نانوذرات فرکانس و سرعت بحرانی را به ترتیب ۳۹ و ۸۱ درصد کاهش می دهد.

- با افزایش طول از ۰/۶ متر به ۱/۵ متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۶۶ و ۱۸ درصد کاهش می یابند.

پایداری خود را از دست می دهد.

- هرچه درصد حجمی نانوذرات سیلیس بیشتر می شود، فرکانس و سرعت بحرانی سیال افزایش می یابد. به عنوان نمونه، با افزودن هفت درصد نانوذرات سیلیس به لوله، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب حدود ۶۳ و ۱۲۶ درصد افزایش می یابند.

و سرعت بحرانی سیال به ترتیب حدود ۳ و ۲ برابر افزایش دارند.

- با دو برابر کردن شعاع لوله از ۲۰ به ۴۰ سانتی متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۱۰ و ۱۲ درصد کاهش دارند.

با ۳/۵ برابر کردن ضخامت لوله از ۱۰ به ۳۵ سانتی متر، فرکانس

## واژه‌نامه

### 1. Pitchfork-supercritical

## مراجع

1. Gupta, S., "Thermal Buckling of Orthotropic Cylindrical Shells", *Fibre Science and Technology*, Vol. 6, pp. 139-145, 1973.
2. Dinga, H., Wu, J., and Xu, B., "Theoretical Analyses of Thermal Post-Buckling Problems of Liner Shells", *Nuclear Engineering Design*, Vol. 180, pp. 243-250, 1998.
3. Reddy, T. Y., and Srinath, H., "Elastic Stresses in Rotating Anisotropic Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 16, pp. 85-89, 1974.
4. Basset, A. B., "On the Extension and Flexure of Cylindrical and Spherical Thin Elastic Shells", *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 181, pp. 433-480, 1990.
5. Obata, Y., and Noda, N., "Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material", *Journal of Thermal Stress*, Vol. 17, No. 3, pp. 471-487, 1994.
6. Horgan, C. O., and Chan, A. M., "The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linear Elastic Materials", *Journal of Elasticity*, Vol. 55, No. 1, pp. 43-59, 1999.
7. Salzar, R. S., "Functionally Graded Metal Matrix Composite Tubes", *Composite Engineering*, Vol. 5, No. 7, pp. 891-900, 1995.
8. Patel, B. P., Shukla, K. K., and Nath, Y., "Thermal Buckling of Laminated Cross-ply Oval Cylindrical Shells", *Composite Structures*, Vol. 65, pp. 217-229, 2004.
9. Shen, H. Sh., "Torsional Buckling and Postbuckling of FGM Cylindrical Shells in Thermal Environments", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44: pp. 644-657, 2009.
10. Reddy, J. N., and Liu, C. F., "Higher-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 23, pp. 319-330, 1985.
11. Duc, N., and Toan Than, P., "Nonlinear Dynamic Response and Vibration of Shear Deformable Imperfect Eccentrically Stiffened S-FGM Circular Cylindrical Shells Surrounded on Elastic Foundations", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 40, pp. 115-127, 2015.
12. Sun, J., Xu, X., Lim, C. W., and Qiao, W., "Accurate Buckling Analysis for Shear Deformable FGM Cylindrical Shells under Axial Compression and Thermal Loads", *Composite Structures*, Vol. 123, pp. 246-256, 2015.
13. Amabili, M., "A Comparison of Shell Theories for Large-Amplitude Vibrations of Circular Cylindrical Shells: Lagrangian Approach", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 264, pp. 1091-1125, 2003.
14. Wang, L., and Ni, Q., "A Reappraisal of the Computational Modelling of Carbon Nanotubes Conveying Viscous Fluid", *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, pp. 833-837, 2009.
15. Dai, H. L., Wang, L., Qian, Q., and Ni, Q., "Vortex-Induced Vibrations of Pipes Conveying Pulsating Fluid", *Ocean Engineering*, Vol. 77, pp. 12-22, 2014.
16. Shi, D. L., and Feng, X. Q., "The Effect of Nanotube Waviness and Agglomeration on the Elastic Property of Carbon Nanotube-Reinforced Composites", *Journal of Engineering Materials and Technology ASME*, Vol. 126, pp. 250-270, 2004.
17. Shen, H., and Xiang, Y., "Nonlinear Vibration of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments", *Computational. Methods in Applied. Mechanics and. Engenering*, Vol. 213, pp. 196-211, 2011.