

## تحلیل خمش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای غیرهمگن در صفحه با استفاده از توابع پایه متعادل شده بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

محمد عزیزپوریان و نیما نورمحمدی\*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۶ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۴/۸)

**چکیده-** در این مقاله تحلیل خمش ورق کامپوزیت لایه‌ای غیرهمگن در صفحه به صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به ضخامت نسبتاً زیاد، از تئوری میندلین که تغییر شکل برشی در ضخامت را به صورت خطی در نظر می‌گیرد استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل مسئله به صورت انتگرال وزنی ارضاء می‌شود. توابع پایه برای تخمین پاسخ، چند جمله‌ای‌های چبی شف نوع اول بوده و وزن‌های مورد استفاده نیز از جنس توابع نمایی هستند. با توسعه فرمول‌بندی در یک ناحیه مجازی مستطیلی در برگیرنده سطح ورق، امکان محاسبه انتگرال وزنی به صورت ترکیب خطی تعدادی انتگرال یک‌بعدی و نرمال شده وجود دارد که سرعت عملیات را بسیار بالا می‌برد. به منظور صحت‌سنجی روش ارائه شده، مثال‌هایی از ورق کامپوزیت لایه‌ای همگن و ناهمگن با انواع جهت‌گیری الیاف و شرایط تکیه‌گاهی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده با جواب‌های حاصل از روش‌های تحلیلی و نیز حل عددی از نرم‌افزارهای تجاری تطابق خوبی دارد که کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: توابع پایه متعادل شده، ورق نسبتاً ضخیم، کامپوزیت، غیرهمگن، چبی شف.

## Static Analysis of in-Plane Heterogeneous Laminated Composite Plates Using Equilibrated Basis Functions Based on FSDT

M. Azizpooryan and N. Noormohammadi\*

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

**Abstract:** In this paper, static analysis of in-plane heterogeneous laminated composite plates is numerically studied. The Mindlin's theory which considers linear transverse shear deformation has been implemented. The governing partial differential equation is satisfied by a weighted residual integration. Chebyshev polynomials of the first kind are used as basis functions and exponential functions make up the weight functions of the integration. The emerging integrals may be composed of some pre-evaluated 1D normalized ones, which effectively paces up the solution progress. To verify the method, several examples of

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Noormohammadi@iut.ac.ir

*homogeneous as well as heterogeneous plates with various lamination schemes and boundary conditions have been solved. Results are compared with those from the literature or by commercial codes, which reveal excellent accuracy of the proposed method.*

**Keywords:** *Equilibrated basis functions, Moderately thick plate, Heterogeneous, Composite, Chebyshev.*

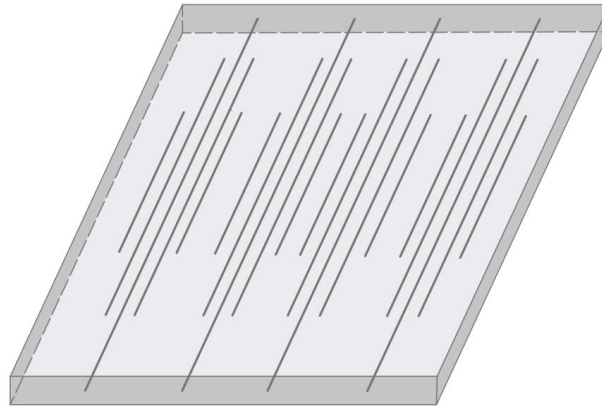
### فهرست علائم

ضرایب سختی تبدیل یافته تنش مستوی	$\bar{Q}_{ij}$	ماتریس ضرایب در ارضای تعادل	A
بردار نیروی گسترده خارجی	q	ابعاد دامنه مجازی مسئله	b, a
نیروهای برشی عرضی	$Q_y, Q_x$	عملگر شرایط مرزی	B
بردار مقادیر مرزی	$U_B$	بردار ضرایب مجهول پاسخ	c
دوران میان صفحه در راستای عمود و مماس بر مرز	$\varphi_s, \varphi_n$	ضرایب سختی محوری، خمشی - محوری، خمشی	$D_{ij}, B_{ij}, A_{ij}$
دوران میان صفحه در راستای x, y	$\varphi_y, \varphi_x$	مدول الاستیسیته در راستای الیاف و عمود بر الیاف	$E_T, E_\perp$
بردار جابه‌جایی	u	ماتریس توابع پایه متعادل شده	F
پاسخ همگن و خصوصی مسئله	$u_p, u_h$	تابع پایه اولیه زام	$f_j$
جابه‌جایی در راستای z, y, x	w, v, u	مدول برشی	$G_{ij}$
جابه‌جایی عمود و مماس بر مرز	$u_s, u_n$	ماتریس همانی	I
تابع وزن زام	$w_j$	شماره لایه	k
کرنش‌های محوری	$\varepsilon_y, \varepsilon_x$	ضریب اصلاح برشی	$K_s$
کرنش‌های برشی	$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	عملگر معادله دیفرانسیل	L
تنش‌های محوری	$\sigma_y, \sigma_x$	لنگرهای خمشی و پیچشی	$M_{xy}, M_{yy}, M_{xx}$
تنش‌های برشی	$\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}$	نیروهای محوری و برشی درون صفحه	$N_{xy}, N_{yy}, N_{xx}$
دامنه مسئله	$\Omega$	تعداد سطر و ستون شبکه وزن	$n_{wz}, n_{wx}$
مرز مسئله	$\partial\Omega$	درجه تقریب در راستای x و y	$o_y, o_x$
دامنه تصویری مسئله	$\Omega_0$	ضرایب سختی تنش مستوی	$Q_{ij}$

### ۱- مقدمه

با توجه به پیشرفت صنعت، ساخت و تحلیل مصالح با مقاومت مناسب در برابر تنش‌ها و خوردگی مورد توجه قرار گرفته است. ورق‌های کامپوزیت را می‌توان از مهم‌ترین مصالحی دانست که در صنایع با تکنولوژی بالا همانند هوافضا، خودرو، کشتی‌سازی و مهندسی پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بررسی سازه‌های متشکل از اعضای پوسته مانند نشان می‌دهد که همواره الگوی بزرگی و راستای تنش‌ها در آنها ثابت نیست، لذا می‌توان با ایجاد تغییر در مدول الاستیسیته یا ضخامت

ساختاری در صفحه، سازه را از نظر اقتصادی بهینه کرد. از این‌رو توسعه روش‌های مناسب برای تحلیل ورق‌های کامپوزیت دارای ناهمگنی در صفحه موجه و لازم است. مواد کامپوزیت از تلفیق دو یا چند ماده با خواص فیزیکی و مکانیکی مجزا تشکیل شده‌اند. از جمله پرکاربردترین کامپوزیت‌های مورد استفاده در صنعت، مواد الیافی هستند که به دلیل مقاومت بالاتر در راستای الیاف نسبت به راستای عمود بر آنها، رفتاری مشابه با مواد ارتوتروپیک دارند. از روی هم گذاری لایه‌های متعدد این مواد با زوایای متفاوت الیاف،



شکل ۱- نمایی از ورق کامپوزیت غیرهمگن در صفحه

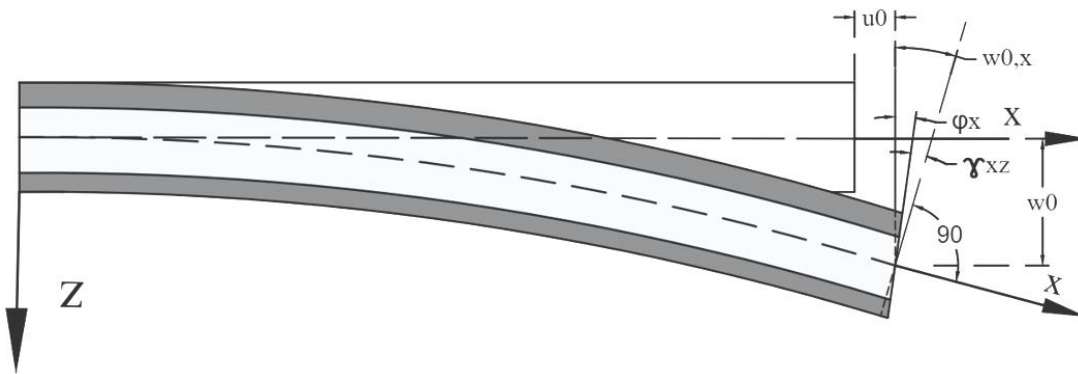
همچنین در بعضی از مسائل ویژه همچون ناپوستگی ترک، عملکرد روش‌های بدون شبکه در ارائه میدان‌های تنش بهتر از روش اجزا محدود است. روش‌های بدون شبکه را می‌توان به دو دسته محلی و مرزی تقسیم کرد. از جمله روش‌های بدون شبکه محلی در حل مسائل ورق می‌توان روش بدون شبکه گالرکین<sup>۲</sup> را نام برد [۱]. در این روش امکان ارضاء شرایط درিশله به صورت مستقیم فراهم نبوده و بنابراین در فرم ضعیف وزنی گالرکین از ضرایب لاگرانژ برای این منظور استفاده می‌شود. لزوم استفاده از شبکه المان پس زمینه برای محاسبه انتگرال عددی از سرعت و سهولت این روش می‌کاهد. آتلوری روش بدون شبکه پترو گالرکین<sup>۳</sup> را ابداع کرد [۲] که بر خلاف روش قبل، صورت ضعیف معادلات حاکم را در محدوده پیرامون یک گره اعمال می‌کند. در کنار روش‌های فوق، تکنیک‌های بدون شبکه مرزی نیز مورد توجه بوده‌اند. این تکنیک‌ها به عنوان روش‌های استفاده از توابع پایه نیز شناخته می‌شوند. فرایند حل توسط آنها، ارضای دقیق معادله با انتخاب مناسب توابع پایه تشکیل دهنده سری پاسخ تقریبی، و سپس اعمال شرایط مرزی به ترکیب مذکور به منظور برآورد ضرایب مجهول آن است. از جمله روش‌های بدون شبکه مرزی می‌توان به روش ترفتر<sup>۴</sup> اشاره کرد [۳]. اساس کار در این روش تخمین پاسخ با مجموعه‌ای از پایه‌های حل است که قادر به ارضای دقیق صورت همگن معادله دیفرانسیل هستند. از جمله کاستی‌های این روش عدم توانایی در حل معادلات با ضرایب متغیر و همچنین محدودیت در انتخاب توابع

ساختار کامپوزیت لایه‌ای به دست می‌آید. با توجه به پیچیدگی در خواص مکانیکی و فیزیکی، روش‌های متعددی برای بررسی رفتار این نوع مواد توسعه داده شده است. شکل (۱) نمونه‌ای از ورق‌های کامپوزیت غیرهمگن در صفحه را نمایش می‌دهد. تمام پدیده‌های فیزیکی تابعی از قوانین ریاضی هستند؛ در بسیاری از موارد معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار آنها قابل استخراج است که تحت شرایط خاصی دارای حل دقیق هستند. به دلیل تنوع و پیچیدگی معادلات حاکم بر اصول مهندسی، عموماً راه عملی برای حل آنها استفاده از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل است. در بین این روش‌ها، روش اجزا محدود<sup>۱</sup> قوی‌ترین و پرکاربردترین شیوه در حل مسائل مکانیک جامدات است که در آن، دامنه مسئله با مجموعه‌ای از المان‌ها که در تعدادی گره به هم متصل هستند مدل‌سازی می‌شوند. با وجود توانایی روش اجزا محدود، بعضی از ویژگی‌های ذاتی آن باعث طولانی شدن و کاهش دقت حل مساله می‌شود. به طور مشخص این روش به دلیل استفاده از تقریبات مرتبه پایین (عموماً خطی یا مرتبه دو) قادر به دستیابی به دقت‌های بسیار بالا و پیوستگی کافی خصوصاً در مشتقات توابع جابه‌جایی (برش و لنگر) نیست. در کنار روش‌های مبتنی بر شبکه همانند روش اجزاء محدود، می‌توان روش‌های بدون شبکه را نیز به کار گرفت. از مزایای این روش‌ها می‌توان به سرعت بالای حل، کاهش هزینه محاسبات، نرخ همگرایی بالاتر، توانایی ارائه حل با درجات بالاتری از پیوستگی و سازگاری بهتر با تغییر مکان‌های بزرگ اشاره کرد.

پایه صدق کننده در صورت همگن معادله دیفرانسیل است. روش حل‌های اساسی<sup>۵</sup> نیز یک روش بدون شبکه مرزی است که ابتدا توسط الکسیدزه و کوپرادزه ارائه شد [۴]. در این روش حاصل اعمال اپراتور معادله دیفرانسیل بر پایه‌های جواب همگن برابر با تابع دلتای دیراک به مرکزیت خارج از محدوده حل در نظر گرفته می‌شود تا پایه حاصل درون ناحیه حل در عملگر معادله صدق کند. لازم به ذکر است که یافتن این پایه‌ها که به توابع گرین معروف هستند ساده نبوده و در کلیه حالات موجود نیستند. در اقدامی جایگزین برومند و همکاران با استفاده از سری متشکل از توابع پایه نمایی، یک روش بدون شبکه محلی را توسعه دادند که برای ارضای معادله دیفرانسیل از روابط صریح در عبارت توان تابع نمایی در قالب معادلات مشخصه استفاده می‌کند [۵ و ۶]. از این روش مذکور صرفاً قادر به برآورد معادلات دیفرانسیل در محیط‌های همگن (دارای ضرایب ثابت مادی) است. در راستای رفع محدودیت روش‌های توابع پایه یعنی نیاز به توابعی که صورت همگن معادله دیفرانسیل را به‌طور دقیق ارضا کنند، نورمحمدی و برومند ایده توابع پایه متعادل شده را ارائه کردند [۷ و ۸]. نگرش این شیوه برآوردن فرم انتگرال وزنی صورت همگن معادله به‌جای ارضای دقیق آن است. حاصل این کار پایه‌های جدیدی است که صورت همگن معادله را در شکل انتگرال وزنی ارضا کرده و به‌عنوان توابع پایه متعادل شده شناخته می‌شوند. روند حل با پایه‌های جدید مشابه سایر روش‌های توابع پایه است. هدف تحقیق حاضر به‌کارگیری توابع مذکور در حل مسائل خمش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای دارای ناهمگنی در صفحه است.

در زمینه تحلیل مسائل ورق، نخستین بار ناویر توانست یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی مفصلی را تحلیل کند [۹ و ۱۰]. در ادامه لوی یک ورق مستطیلی با دو ضلع مفصلی مقابل یکدیگر را بررسی کرد [۱۱ و ۱۲]. لیو و لی با استفاده از فرم همیلتونی معادلات تعادل ورق نازک اقدام به حل دقیق ورق‌هایی با دو ضلع مجاور آزاد و دو ضلع دیگر مفصلی و یا گیردار کردند [۱۳]. با توسعه روش‌های عددی، گستره مسائل

قابل حل به‌طور قابل توجهی گسترش یافت. ارسالر و ردی از جمله محققانی هستند که با استفاده از روش اجزا محدود و با در نظر گرفتن کرنش‌های برشی مرتبه اول به تحلیل ورق‌های کامپوزیت پرداختند [۱۴]. بر و همکاران نیز با بهره‌گیری از روش اجزاء محدود و تئوری کرنش‌های برشی مرتبه اول و سوم، ورق‌های کامپوزیت ضخیم تقویت شده را تحلیل کردند [۱۵]. چنانکه پیش‌تر بیان شد، روش اجزاء محدود نیز علیرغم همه مزایا، دارای نقایصی در تحلیل مسائل ورق است. در این راستا روش‌های بدون شبکه توانسته‌اند جایگزین مناسبی برای روش اجزا محدود باشند. اسلادک و همکاران تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق ناهمسانگرد<sup>۶</sup> در تئوری میندلین-رینسور را با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروگالرکین مورد بررسی قرار دادند [۱۶]. جابرزاده و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین به بحث ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت پرداختند [۱۷]. شهبازی و برومند با بهره‌گیری از روش بدون شبکه توابع پایه نمایی، حل مسائل استاتیک ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای را مورد توجه قرار دادند [۱۸]. ازهری و برومند با استفاده از تئوری زیگزاگ مرتبه بالا، تحلیل مسائل خمشی ورق‌های کامپوزیت ضخیم را به روش توابع پایه نمایی بررسی کردند [۱۹]. معتمدی و برومند با بهره‌جستن از توابع پایه نمایی هموار به شکل بدون شبکه محلی، رفتار خمشی ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای نسبتاً ضخیم را براساس تئوری‌های خمش کلاسیک و تغییر شکل برشی مراتب اول و سوم مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. همچنین نورمحمدی و برومند به حل معادله بای‌هارمونیک و مسئله ورق نازک به روش توابع پایه متعادل شده پرداختند [۲۱]. روش انرژی یا ریتز از دیگر تکنیک‌هایی است که در تحلیل ورق‌ها به‌کار گرفته می‌شود. داو و رافائل از جمله محققانی هستند که ارتعاش ورق میندلین را با استفاده از تئوری رایلی-ریتز بررسی کردند [۲۲]. تانگ و وانگ توانستند با تخمین تابع تنش ایری با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبی‌شف، مسئله کماتش ورق کامپوزیت نازک تحت بار سهموی را با



شکل ۲- مؤلفه‌های تغییر شکل ورق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

دوران‌های مستقل در میان صفحه حول محورهای  $x$  و  $y$  هستند. در این تئوری المان‌های خطی عمود بر میان صفحه پس از تغییر شکل ورق همچنان به صورت خطی می‌مانند، اما برخلاف نظریه کلاسیک عمود بر میان صفحه نخواهند بود، بلکه نسبت به صفحه قائم بر محور  $x$  زاویه  $\phi_x$  و نسبت به صفحه قائم بر محور  $y$  زاویه  $\phi_y$  می‌سازند (شکل ۲). این تئوری منجر به بروز تنش‌های برشی عرضی ثابت در ضخامت ورق می‌شود که در تناقض با صفر بودن تنش‌های برشی در سطوح بالایی و پایینی ورق است. برای جبران این نقص در محاسبه تنش‌های برشی عرضی از ضریب اصلاح برشی  $K_s$  استفاده می‌شود. البته برآورد ضریب اصلاح برشی برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای بسیار دشوار است، زیرا به آرایش لایه‌ای ورق، شکل هندسی آن، بارگذاری و شرایط مرزی وابسته است؛ اما می‌توان به‌طور تقریبی از مقدار  $5/6$  استفاده کرد. کرنش‌های خطی مرتبط با میدان جابه‌جایی رابطه (۱) در شکل برداری به صورت زیر هستند

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(e)} \\ \varepsilon_{yy}^{(e)} \\ \gamma_{yz}^{(e)} \\ \gamma_{xz}^{(e)} \\ \gamma_{xy}^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(l)} \\ \varepsilon_{yy}^{(l)} \\ \gamma_{yz}^{(l)} \\ \gamma_{xz}^{(l)} \\ \gamma_{xy}^{(l)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

بهره‌گیری از روش انرژی تحلیل نمایند [۲۳].

همان‌طور که بیان شد تحقیقات فراوانی در زمینه تحلیل ورق‌ها انجام شده است، ولی تحلیل ورق‌های کامپوزیت غیرهمگن در صفحه کمتر مورد توجه بوده است. نتایج این پژوهش به خوبی نشان دهنده کارایی روش توابع پایه متعادل شده در تحلیل این نوع ورق‌ها است. در ادامه، ابتدا معادلات تعادل برحسب جابه‌جایی حاکم بر ورق کامپوزیت دارای ناهمگنی درون صفحه استخراج می‌شود و سپس معادلات دیفرانسیل مذکور به فرم انتگرال وزنی ارضاء خواهند شد. با در نظر گرفتن تعداد کافی از نقاط در امتداد مرزها و اعمال شرایط مرزی در آنها، ضرایب مجهول سری پاسخ نهایی تعیین می‌شوند. در انتها با ارائه چندین مثال از مراجع معتبر و یا مقایسه با نتایج حاصل از نرم‌افزارهای تجاری، دقت و کارایی روش مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

## ۲- معادلات حاکم بر ورق کامپوزیت لایه‌ای

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابه‌جایی ورق به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$   
که در آن  $(u_0, v_0, w_0)$  مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای  $x, y, z$  در میان صفحه (موقعیت  $z = 0$ ) هستند.  $\phi_x$  و  $\phi_y$  نیز

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^2 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{\phi\phi}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{\phi\phi}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{\phi\phi}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{1\phi} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{\phi\phi}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{\phi\phi}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{2\phi} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{\phi\phi}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{\phi\phi}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{\phi\phi} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{\phi\phi}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{\phi\phi} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{\phi\tau} &= Q_{\tau\phi} \cos^2 \theta + Q_{\delta\delta} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{\tau\delta} &= (Q_{\tau\phi} - Q_{\delta\delta}) \sin \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{\delta\delta} &= Q_{\delta\delta} \cos^2 \theta + Q_{\tau\tau} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (7)$$

نیروها و لنگرهای متوجه با انتگرال‌گیری مناسب از تنش‌ها در راستای ضخامت به صورت لایه به لایه محاسبه می‌شوند

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1\phi} \\ A_{12} & A_{22} & A_{2\phi} \\ A_{1\phi} & A_{2\phi} & A_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{1\phi} \\ B_{12} & B_{22} & B_{2\phi} \\ B_{1\phi} & B_{2\phi} & B_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (8-الف)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} Z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{1\phi} \\ D_{12} & D_{22} & D_{2\phi} \\ D_{1\phi} & D_{2\phi} & D_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (8-ب)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \sum_{k=1}^{n_1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz = K_s \begin{bmatrix} A_{\tau\tau} & A_{\tau\delta} \\ A_{\tau\delta} & A_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (8-پ)$$

در روابط (8) تعداد لایه‌ها است. ضرایب سختی  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  به صورت زیر به دست می‌آیند

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z, z) dz \quad (9)$$

معادلات تعادل به شکلی که در روابط (3) تا (9) آمد همراه با انواع شرایط مرزی بر مسئله ورق حاکم هستند. ویژگی انواع تکیه‌گاه‌های ساده<sup>۷</sup>، گیردار<sup>۸</sup> و آزاد<sup>۹</sup> بر مبنای تئوری حاضر در جدول (۱) قابل مشاهده است. در توضیح اجزای این جدول لازم

معادلات تعادل در حضور نیروهای غشایی و لنگرهای خمشی به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3-الف)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (3-ب)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (3-ت)$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3-ث)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3-ج)$$

روابط بنیادی برای لایه k ام در دستگاه اصلی با فرض آنکه راستای ۱ در امتداد الیاف و راستای ۲ عمود بر آن باشد مطابق

زیر است. راستای ۳ عمود بر میان صفحه است

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\phi} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{2\phi} \\ Q_{1\phi} & Q_{2\phi} & Q_{\phi\phi} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{\tau\tau} & Q_{\tau\delta} \\ Q_{\tau\delta} & Q_{\delta\delta} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{33} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)}$$

که در آن  $Q_{ij}^{(k)}$  ضرایب سختی تنش مستوی ناهمسانگرد بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{\phi\phi}^{(k)} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$Q_{\delta\delta}^{(k)} = G_{13}, \quad Q_{\tau\tau}^{(k)} = G_{23}$$

در صورت بازنویسی روابط بالا در راستای محورهای کلی X, Y, Z با استفاده از دوران، روابط جدید زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{1\phi} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{2\phi} \\ \bar{Q}_{1\phi} & \bar{Q}_{2\phi} & \bar{Q}_{\phi\phi} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{\tau\tau} & \bar{Q}_{\tau\delta} \\ \bar{Q}_{\tau\delta} & \bar{Q}_{\delta\delta} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)}$$

$\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  ضریب سختی تبدیل یافته در حالت تنش مستوی است که براساس زاویه ناهمسانگردی لایه k ام ورق برحسب  $Q_{ij}^{(k)}$  از مرجع [۲۴] محاسبه می‌شود،

جدول ۱- مقادیر مرزی معلوم بر اساس نوع شرایط مرزی

شرایط تکیه‌گاهی	مؤلفه‌های معلوم
S-۱	$u_s, N_{nn}, w_o, \phi_s, M_{nn}$
S-۲	$u_n, N_{ns}, w_o, \phi_s, M_{nn}$
C	$u_s, u_n, w_o, \phi_s, \phi_n$
F	$N_{ns}, N_{nn}, Q_n, M_{ns}, M_{nn}$

در رابطه (۱۴)  $\mathbf{q}$  بارگذاری گسترده عمود بر سطح ورق است.  $\mathbf{u}_B$  نیز مقادیر معلوم مرزی (جابه‌جایی، دوران، لنگر و برش) را شامل می‌شود. بر مبنای این معادلات اجزای روش پیشنهادی در ادامه تشریح می‌شوند.

### ۳-۱- پاسخ همگن معادله

بخش همگن پاسخ به صورت سری زیر تقریب زده می‌شود

$$\mathbf{u}_h \approx \hat{\mathbf{u}}_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j \mathbf{c}_j = \mathbf{f}^T \mathbf{c} \quad (15)$$

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j \times \mathbf{I}_{5 \times 5}$$

$$\mathbf{c}_j = [c_j^1 \ c_j^2 \ c_j^3 \ c_j^4 \ c_j^5]^T$$

در رابطه فوق  $\mathbf{f}_j$  توابع پایه اولیه متشکل از چند جمله‌ای‌های چبی شف نوع اول می‌باشد و  $\mathbf{I}$  ماتریس همانی است. همچنین ضرایب  $\mathbf{c}_j$  مجهولات پاسخ مسئله هستند. از آنجا که پایه‌های حل لزوماً قادر به ارضای دقیق معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله نیستند، این معادله به صورت باقی‌مانده وزنی روی دامنه مستطیلی مجازی  $\Omega$  به ابعاد  $a \times b$  که در بردارنده دامنه اصلی  $\Omega$  است اعمال می‌شود (شکل ۳)

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega = \left( \int_{\Omega} \mathbf{w} \mathbf{L} \mathbf{f}^T d\Omega \right) \mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{c} = 0 \quad (16)$$

در این رابطه  $\mathbf{w}$  ماتریس توابع وزن است

$$\mathbf{w} = [w_1 \mathbf{I}_{5 \times 5} \ \dots \ w_M \mathbf{I}_{5 \times 5}]^T \quad (17)$$

اضلاع مستطیل مجازی مذکور ۵ درصد بزرگ‌تر از مستطیل محیط بر دامنه اصلی حل در نظر گرفته می‌شوند تا اثرات نامطلوب در مرز بروز نکنند. پاسخ معادله فوق مترادف با انتخابی از فضای پوچ<sup>۱</sup> ماتریس  $\mathbf{A}$  است که با  $\boldsymbol{\varphi}$  نمایش داده

به‌ذکر است که بیان شرایط در لبه‌های مفصلی برای ورق‌هایی با جهت‌گیری الیاف در امتداد محورهای کلی به صورت S-۱ و برای جهت‌گیری‌هایی در غیر از راستای محورهای کلی از نوع S-۲ است. با داشتن روابط تعادل و شرایط مرزی، در بخش بعد اجزای روش پیشنهادی معرفی خواهد شد.

### ۳-۲ روش حل مسئله

مهم‌ترین ویژگی روش پیشنهادی، برآورد پاسخ همگن مسئله با ارضای تقریبی معادله تعادل حاکم بر آن در یک ناحیه مجازی در برگیرنده ناحیه اصلی حل است. این ایده روش را بی‌نیاز از داشتن پایه‌هایی می‌کند که به‌طور دقیق معادله دیفرانسیل را ارضا کنند. با این وجود ساختار کلی روش شباهت زیادی به سایر روش‌های استفاده از توابع پایه دارد. پاسخ کلی مسئله شامل دو بخش جواب همگن ( $\mathbf{u}_h$ ) و جواب خصوصی ( $\mathbf{u}_p$ ) است

$$\mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p \quad (10)$$

$$\mathbf{L} \mathbf{u}_h = 0, \quad \mathbf{L} \mathbf{u}_p + \mathbf{q} = 0 \text{ in } \Omega \quad (11)$$

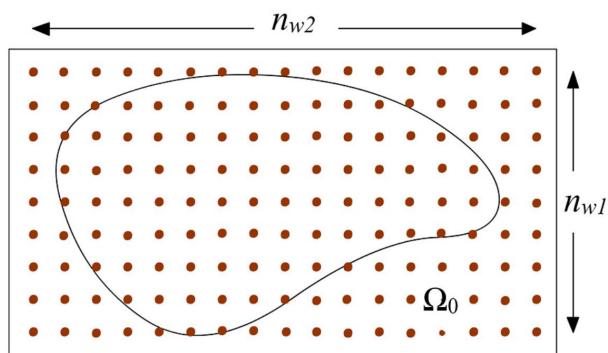
$$\mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{u}_B \text{ on } \Gamma = \partial \Omega \quad (12)$$

در روابط اخیر  $\mathbf{L}$  و  $\mathbf{B}$  به ترتیب بیانگر عملگر معادله (به صورت ماتریسی با اجزای مطابق پیوست ۱) و عملگر شرایط مرزی هستند.  $\Omega$  دامنه مسئله و  $\Gamma = \partial \Omega$  مرز آن هستند. بردار مجهولات جابه‌جایی و دوران ( $\mathbf{u}$ ) و نیز بارگذاری خارجی ( $\mathbf{q}$ ) به صورت زیر تعریف می‌شوند

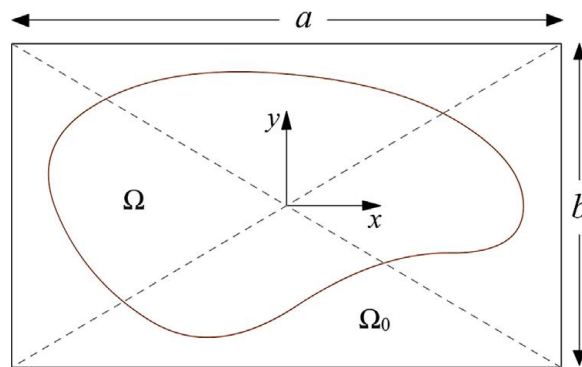
$$\mathbf{u} = \{w_o, \phi_x, \phi_y, u_o, v_o\}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{q} = \{q \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (14)$$

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۰



شکل ۴- شبکه نقاط مورد استفاده برای توابع وزن نمایشی



شکل ۳- نواحی اصلی و مجازی حل و موقعیت مبدأ مختصات

$$w_i = e^{-W[(\xi - \xi_l)^2 + (\eta - \eta_k)^2]} \quad (21)$$

مراکز وزن  $(\xi_l, \eta_k)$  در  $n_{w1}$  سطر و  $n_{w2}$  ستون در مستطیل مجازی به صورت منظم توزیع شده‌اند (شکل ۴)، به گونه‌ای که فاصله بین اولین سطر (ستون) از مرز مجاور برابر نصف فواصل بین سطرها (ستون‌ها) است. این الگوی توزیع در فضای نرمال شده نیز رعایت می‌شود. پارامتر وزنی  $W$  یک ضریب برای کنترل تمرکز توابع وزن در مجاورت نقطه وزن مورد نظر است که برای مسئله مورد بحث استفاده از مقدار ۳۰ نتایج مطلوبی به همراه دارد. شاخص  $i$  با رابطه زیر، معرف توابع وزن در مختصات  $(\xi_l, \eta_k)$  در فضای نرمال شده است

$$i = i(k, l), \quad k = 1, \dots, n_{w1}, \quad l = 1, \dots, n_{w2} \quad (22)$$

تعداد سطرها و ستون‌های شبکه مورد بحث از روابط صریح زیر تعیین می‌شود

$$n_{w1} = O_y - 1, \quad n_{w2} = O_x - 1 \quad (23)$$

در صورتی که ضرایب معادله دیفرانسیل به‌عنوان تابعی از مشخصات مادی و هندسی ورق در صفحه متغیر باشند، لازم است که پیش از حل مسئله با یک بسط از جملات غیر کامل مثلث خیام- پاسکال جایگزین شوند. دلیل این جایگزینی اعطای قابلیت تفکیک‌پذیری به صورت حاصل ضرب دو مجموعه مستقل یک متغیره به ضرایب مذکور است. جملات غیر کامل مذکور در دستگاه مختصات نرمال شده تا مرتبه  $n_k$  به صورت زیر هستند

$$f_D = [1, \xi, \dots, \xi^{n_k}, \eta, \xi\eta, \dots, \xi^{n_k}\eta, \dots, \xi^{n_k}\eta^{n_k}] \quad (24)$$

می‌شود. تعداد بردارهای فضای پوچ مذکور برابر با  $\delta N - \bar{M}$  است که  $\bar{M}$  مرتبه ماتریس  $A$  است. بردار مجهولات  $c$  می‌تواند ترکیب خطی دلخواهی از ستون‌های  $\phi$  باشد

$$c = \sum_{r=1}^{\delta N - \bar{M}} d_r \phi_r \quad (18)$$

رابطه (۱۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت که در آن، توابع پایه متعادل شده  $F_r$  توانایی ارضاء تقریبی معادله دیفرانسیل حاکم را در ناحیه مجازی مستطیلی و در نتیجه ناحیه اصلی حل که زیر مجموعه آن است دارند

$$\hat{u}_h = \sum_{r=1}^{\delta N - \bar{M}} d_r f^T \phi_r = \sum_{r=1}^{\delta N - \bar{M}} F_r d_r = F^T d, \quad F_r = f^T \phi_r, \quad F^T = [F_1 \dots F_{\delta N - \bar{M}}] \quad (19)$$

با توجه به دامنه تعریف چندجمله‌ای‌های چبی شرف در بازه نرمال  $[-1, +1]$ ، سری پاسخ همگن تقریبی مسئله به این صورت خواهد بود

$$\hat{u}_h = \sum_{m=0}^{O_x} \sum_{n=0}^{O_y} T_m \left( \frac{rx}{a} \right) T_n \left( \frac{ry}{b} \right) I_{(\delta \times \delta)} c_{(m,n)} = \sum_{m=0}^{O_x} \sum_{n=0}^{O_y} T_m(\xi) T_n(\eta) I_{(\delta \times \delta)} c_{(m,n)} \quad (20)$$

در این سری  $T_m$  بیانگر چندجمله‌ای چبی شرف نوع اول از مرتبه  $m$  است.  $O_x$  و  $O_y$  بالاترین مرتبه چندجمله‌ای مورد استفاده در راستای  $x$  و  $y$  هستند. همچنین از توابع نمایشی در صفحه گوسی هم‌پایه شده برای وزن‌دهی در انتگرال (۱۶) استفاده می‌شود



عملگر معادله دیفرانسیل مطابق با روابط ارائه شده در پیوست (۲) بازسازی می‌شود. حاصل عبارت مورد اشاره در پیوست مذکور، ماتریس کمکی  $A_h$  به ابعاد  $5(1+O_x) \times 5(1+O_y)$  است. اگر سطرهای این ماتریس در دسته‌های پنج تایی به ترتیب از چپ به راست در کنار یکدیگر قرار بگیرند، پنج سطر از ماتریس ضرایب نهایی  $A$  متناسب با نقطه وزن روی سطر  $k$  ام و ستون  $l$  ام شبکه نقاط وزن را خواهند ساخت. با تکرار این عمل به ازای کلیه نقاط شبکه وزن، ماتریس ضرایب نهایی تکمیل می‌شود. پس از محاسبه فضای پوچ این ماتریس، سری پاسخ همگن تقریبی مسئله با استفاده از توابع پایه متعادل شده مطابق با توضیحات قبلی ساخته خواهد شد.

### ۳-۲- پاسخ خصوصی معادله

مشابه روند طی شد برای حل همگن، پاسخ خصوصی رابطه  $(u_p)$  به صورت یک سری از توابع پایه همراه با ضرایب مجهول متناسب آنها در نظر گرفته می‌شود،

$$u_p \approx \hat{u}_p = \sum_{j=1}^N f_j^p c_j^p$$

$$f_j^p = f_j^p \times I_{5 \times 5}$$

$$c_j^p = [(c_j^p)_1 \ (c_j^p)_2 \ (c_j^p)_3 \ (c_j^p)_4 \ (c_j^p)_5]^T \quad (27)$$

در این تحقیق از بسط مشابه با پاسخ همگن برای تقریب حل خصوصی نیز استفاده می‌شود

$$\hat{u}_p = \sum_{m=0}^{O_x^p} \sum_{n=0}^{O_y^p} T_m(\xi) T_n(\eta) I_{(5 \times 5)} c_{(m,n)}^p \quad (28)$$

با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از نقاط درون دامنه اصلی حل و در امتداد مرزهای آن و با داشتن مقدار تابع بارگذاری مسئله  $(q)$  در هر یک از نقاط مذکور، مبادرت به اعمال وزنی صورت غیرهمگن معادله به سری پاسخ تقریبی می‌شود

$$\int_{\Omega} w_i \left\{ L \left( \sum_{j=1}^N f_j^p c_j^p \right) + q \right\} d\Omega = A_p c_p + q = 0 \quad (29)$$

$$i = 1, \dots, M_p$$

انتخاب‌های گوناگونی برای توابع وزن در رابطه بالا ممکن است. در تحقیق حاضر از توابع دلتای دیراک به مرکزیت شبکه

با برآزش حداقل مربعات در تعداد مناسبی نقطه روی ناحیه حل  $\Omega$  و در امتداد مرزهای آن می‌توان ضرایب مجهول متناسب با پایه‌های فوق را استخراج کرد. برای بازنویسی عبارت رابطه (۲۴) به صورت حاصل ضرب دو مجموعه یک متغیره، لازم است پایه‌های تقریب و ضرایب آنها با آرایش زیر با یکدیگر ترکیب شوند

$$D_i = f_{D\xi}^T C_D^i f_{D\eta}, \quad f_{D\xi} = [1, \xi, \dots, \xi^{n_k}]^T, \quad (25)$$

$$f_{D\eta} = [1, \eta, \dots, \eta^{n_k}]^T$$

ماتریس  $C_D^i$  به ابعاد  $(1+n_k) \times (1+n_k)$  ضرایب به دست آمده را به صورتی متناسب با آرایش ارائه شده در خود جای می‌دهد، به گونه‌ای که درایه سطر  $i$  و ستون  $j$  از این ماتریس ضریب عبارت  $\eta^j \xi^i$  در بسط جایگزین باشد [۷]. با توجه به تفکیک پذیری توابع پایه و وزن و نیز بسط جایگزین ضرایب مادی، می‌توان کلیه انتگرال‌های موجود در فرآیند باقی‌مانده وزنی را به صورت ترکیب انتگرال‌های نرمال‌شده یک‌بعدی در دو راستای  $x$  و  $y$  نوشت. ساختار این انتگرال‌های جای گرفته در ماتریس‌هایی سه‌اندیسی مطابق زیر است

$$(A_1)_{l, \delta m+1, p+1} = \frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^r} \xi^p \frac{\partial^r T_m(\xi)}{\partial \xi^r} d\xi$$

$$(B_1)_{k, \delta n+1, q+1} = \frac{1}{b} \int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^r} \eta^q \frac{\partial^r T_n(\eta)}{\partial \eta^r} d\eta$$

$$(A_2)_{l, \delta m+1, p+1} = \int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^r} \xi^p \frac{\partial T_m(\xi)}{\partial \xi} d\xi$$

$$(B_2)_{k, \delta n+1, q+1} = \int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^r} \eta^q \frac{\partial T_n(\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

$$(A_3)_{l, \delta m+1, p+1} = \frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^r} \xi^{p+1} T_m(\xi) d\xi$$

$$(B_3)_{k, \delta n+1, q+1} = \frac{1}{b} \int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^r} \eta^{q+1} T_n(\eta) d\eta$$

$$(A_4)_{l, \delta m+1, p+2} = \frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^r} \xi^p \frac{\partial T_m(\xi)}{\partial \xi} d\xi$$

$$(B_4)_{k, \delta n+1, q+2} = \frac{1}{b} \int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^r} \eta^q \frac{\partial T_n(\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

$$(A_5)_{l, \delta m+1, p+2} = \int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^r} \xi^{p+1} T_m(\xi) d\xi$$

$$(B_5)_{k, \delta n+1, q+2} = \int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^r} \eta^{q+1} T_n(\eta) d\eta \quad (26)$$

پیش از اقدام به حل معادله (۳۳)، لازم است از فرآیند هم پایه کردن برای بهبود شرایط ماتریس  $\mathbf{V}$  در فرآیند وارون‌سازی مطابق زیر استفاده شود

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{V} \quad (34)$$

اجزای غیرصفر ماتریس قطری  $\mathbf{E}$  با ابعاد  $5N_B \times 5N_B$  در رابطه (۳۴) به صورت زیر هستند

$$\mathbf{E}_{qq} = \begin{cases} \text{شرایط دریشله (جابجایی و دوران)} & 1 \\ \text{شرایط نویمان (برش و لنگر)} & E \end{cases} \quad (35)$$

$E$  مدول الاستیسیته در موضع مورد نظر است. با تقریب حداقل مربعات به صورت زیر می‌توان بردار مجهولات نهایی  $\mathbf{d}$  را تعیین کرد

$$\Pi = (\bar{\mathbf{V}}\mathbf{d} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}_B)^T (\bar{\mathbf{V}}\mathbf{d} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}_B), \quad (36)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = 0$$

با تعیین بردار مجهولات، پاسخ کلی مسئله به دست می‌آید. بخش آتی به ارائه نتایجی از روش پیشنهادی در حل مسائل گوناگون خواهد پرداخت.

#### ۴- نتایج

این بخش به ارائه چندین مثال منتخب از مراجع معتبر برای نشان دادن کارایی روش اختصاص دارد. مقادیر جابه‌جایی یا تنش برای ورق‌های لایه‌ای با ترکیبات مختلف در این قسمت آورده شده‌اند. به منظور مقایسه از تکنیک‌های گوناگون از جمله روش‌های نیمه تحلیلی و یا نرم‌افزارهای تجاری استفاده شده است.

#### مثال اول

در این مسئله ورق مربعی به ضلع  $a = 20 \text{ m}$  و ضخامت  $h$  با آرایش لایه‌ای  $(0^\circ, 90^\circ)_n$  دارای ضخامت یکسان لایه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. خصوصیات مکانیکی ناهمسانگرد لایه‌ها به قرار زیر است

$$E_r = E_\theta = 10 \text{ GPa} \quad E_1 = 25E_r, \quad G_{1r} = G_{1\theta} = 0.5E_r \quad (37)$$

$$G_{rr} = 0.2E_r, \quad \nu_{1r} = \nu_{r1} = \nu_{1\theta} = 0.25$$

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، زمستان ۱۴۰۰

نقاط ذکر شده استفاده می‌شود

$$\mathbf{w}_i = \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \mathbf{I}_{5 \times 5} \quad (30)$$

حاصل انتگرال فوق یک معادله ماتریسی است که با حل آن، ضرایب مجهول سری پاسخ  $(\mathbf{c}_j^P)$  به دست می‌آیند. به منظور دستیابی به دقت مناسب، لازم است تعداد سطرها و ستون‌های تشکیل دهنده شبکه نقاط وزن با رابطه زیر به مرتبه تقریب حل خصوصی مربوط باشد.

$$n_{w1}^P \geq 1/5 O_y^P, \quad n_{w2}^P \geq 1/5 O_x^P \quad (31)$$

بنابراین دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه نامعین خواهد بود که حل آن مستلزم استفاده از برازش حداقل مربعات است. عملگر معادله دیفرانسیل برای جواب خصوصی از طریق ماتریس کمکی  $\mathbf{A}_p$  مطابق پیوست (۳) بازسازی می‌شود.

#### ۳-۳- اعمال شرایط مرزی

به منظور ارضای شرایط مرزی در امتداد مرز ناحیه اصلی حل مسأله  $(\partial\Omega)$ ، تعداد  $N_B$  نقطه در امتداد مرز با مقادیر مرزی معلوم در نظر گرفته می‌شود. بردار مقادیر مرزی  $\mathbf{U}_B$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{U}_B = \left[ \mathbf{u}_B \Big|_{x_1, y_1} - \mathbf{B}(\mathbf{u}_p) \Big|_{x_1, y_1} \dots \mathbf{u}_B \Big|_{x_{N_B}, y_{N_B}} - \mathbf{B}(\mathbf{u}_p) \Big|_{x_{N_B}, y_{N_B}} \right]^T \quad (32)$$

هر یک از درآیه‌های ماتریس فوق، معادل با اختلاف مقدار ثابت مرزی روی نقطه مربوطه با تأثیر عملگر شرایط مرزی بر حل خصوصی معادله در همان نقطه است که مستقیماً سهم بخش همگن پاسخ را در بازسازی مقادیر مرزی نشان می‌دهد. بعد بردار مقادیر معلوم  $\mathbf{u}_B$  در هر نقطه برابر تعداد اجزای مستقل میدان پتانسیل مسأله یعنی ۵ است. رابطه (۱۸) را می‌توان برای مقادیر مرزی بازنویسی کرد

$$\mathbf{U}_B = \sum_{r=1}^{5N-M} d_r \mathbf{V}_r = \mathbf{V} \mathbf{d} \quad \mathbf{V}_r = \left[ \mathbf{F}_r \Big|_{x_1, y_1} \dots \mathbf{F}_r \Big|_{x_{N_B}, y_{N_B}} \right]^T$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_{5N-M}] \quad (33)$$

جدول ۲- مقادیر تغییر مکان قائم بی بعد در مرکز ورق مربعی  $(0^\circ, 90^\circ)_n$  تحت بار کسینوسی

SFSC	SFSS	SFSF	SCSC	SSSC	SSSS	Method	$\frac{a}{h}$	n
۱/۸۹۷۰	۲/۳۳۵۰	۲/۷۷۷۰	۱/۲۵۷۰	۱/۴۷۷۰	۱/۷۵۸۰	Ref. [۲۴]	۵	۱
۱/۸۹۷۲	۲/۳۳۵۱	۲/۷۷۷۰	۱/۲۵۶۰	۱/۴۷۷۰	۱/۷۵۸۰	Present		
۱/۲۲۳۰	۱/۶۸۷۰	۲/۰۲۸۰	۰/۶۵۶۰	۰/۸۸۳۰	۱/۲۳۷۰	Ref. [۲۴]	۱۰	۱
۱/۲۲۳۲	۱/۶۸۷۰	۲/۰۲۸۰	۰/۶۵۶۰	۰/۸۸۳۰	۱/۲۳۷۰	Present		
۱/۲۵۸۰	۱/۴۶۰۰	۱/۶۶۳۰	۰/۹۴۵۰	۱/۰۴۵۰	۱/۱۳۷۰	Ref. [۲۴]	۵	۵
۱/۲۵۷۵	۱/۴۵۹۳	۱/۶۶۲۴	۰/۹۴۴۰	۱/۰۴۵۰	۱/۱۳۶۰	Present		
۰/۶۱۲۰	۰/۸۰۰۰	۰/۹۱۵۰	۰/۳۸۵۰	۰/۴۸۰۰	۰/۶۱۵۰	Ref. [۲۴]	۱۰	۱۰
۰/۶۱۲۳	۰/۸۰۰۲	۰/۹۱۴۰	۰/۳۸۵۰	۰/۴۷۹۵	۰/۶۱۵۰	Present		

جدول ۳- مقادیر تنش محوری  $-\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}(-h/2)$  در مرکز ورق مربعی  $(0^\circ, 90^\circ)$  تحت بار کسینوسی

SFSC	SFSS	SFSF	SCSC	SSSC	SSSS	Method	a/h
۰/۲۴۳۴	۰/۴۴۳۰	۰/۲۴۶۹	۰/۳۹۱۱	۰/۵۳۳۸	۰/۷۱۵۷	Ref. [۲۴]	۵
۰/۲۴۳۴	۰/۴۴۲۹	۰/۲۴۶۹	۰/۳۹۱۰	۰/۵۳۳۸	۰/۷۱۵۷	Present	
۰/۲۷۹۰	۰/۴۴۳۵	۰/۲۴۴۲	۰/۴۴۵۰	۰/۵۴۹۴	۰/۷۱۵۷	Ref. [۲۴]	۱۰
۰/۲۷۹۰	۰/۴۴۳۵	۰/۲۴۴۲	۰/۴۴۵۰	۰/۵۴۹۳	۰/۷۱۵۷	Present	

روش حل، شامل شبکه وزن و نقاط مرزی، براساس توضیحات بخش‌های قبل مرتبط با مرتبه پایه‌های اولیه انتخاب می‌شوند.

### مثال دوم

در این مسئله ورق چهار طرف مفصل دو لایه‌ای با آرایش پادمتقارن  $(45^\circ, -45^\circ)$  با ضخامت یکسان لایه‌ها تحت بارگذاری کسینوسی مشابه مثال قبل مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات هندسی ورق و خواص الاستیک هریک از لایه‌ها، و نیز اجزای مورد استفاده در روش حل مشابه با مثال اول است. نتایج در جدول (۴) قابل مشاهده است.

### مثال سوم

در این مسئله ورق تک‌لایه مربع شکل به طول  $a = 2m$  و ضخامت  $h$  تحت بار یکنواخت  $q$  مورد بررسی قرار می‌گیرد.

این ورق تحت بارگذاری کسینوسی نسبت به دستگاه مختصات با مبدأ واقع بر مرکز ورق قرار گرفته است

$$q(x, y) = q_0 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/a) \quad (38)$$

کمیت‌های فیزیکی شامل تغییر مکان قائم و تنش در کلیه مثال‌ها به صورت نرمال شده گزارش می‌شوند،

$$\bar{w} = \frac{10^6 h^3 E_T}{q_0 a^4} w(0, 0), \quad \bar{\sigma}_{xx}^{(m)} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xx}(0, 0, z) \\ \bar{\sigma}_{xy}^{(m)} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xy}(a/2, a/2, z), \quad \bar{\sigma}_{yy}^{(m)} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{yy}(0, 0, z) \quad (39) \\ \bar{\sigma}_{yz}^{(m)} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{yz}(0, -a/2, z), \quad \bar{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}(-a/2, 0, z)$$

این ورق تحت انواع شرایط تکیه‌گاهی بررسی می‌شود. جدول (۲) و جدول (۳) به ترتیب بیانگر تغییر مکان قائم و تنش محوری در ساختار ورق است. نماد  $n$  در این جدول نشان دهنده شماره لایه است. به منظور حل مسئله، پایه‌های اولیه حل‌های همگن و خصوصی تا مرتبه ۱۵ در نظر گرفته شده‌اند. سایر پارامترهای

جدول ۴- مقادیر تغییر مکان و تنش‌های بدون بعد ورق چهار طرف مفصل ( $45^\circ, -45^\circ$ ) تحت بار کسینوسی

$\sigma_{xz}^{(r)}(h/4)$	$\sigma_{yz}^{(r)}(h/4)$	$\bar{\sigma}_{xy}^{(l)}(-h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}^{(r)}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{xx}^{(r)}(h/2)$	$\bar{w}$	Method	a/h
۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰	۰/۲۳۳۶	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۸۲۸۴	Ref [۲۴]	۱۰
۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰	۰/۲۳۳۶	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۸۲۸۴	Present	
۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰	۰/۲۳۳۶	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۶۹۸۱	Ref [۲۴]	۲۰
۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰	۰/۲۳۳۶	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۶۹۸۱	Present	
۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰	۰/۲۳۳۶	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۶۵۶۴	Ref [۲۴]	۱۰۰
۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰	۰/۲۳۳۶	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۶۵۶۴	Present	

جدول ۵- مقادیر تغییر مکان برون صفحه بدون بعد در مرکز ورق کامپوزیت غیرهمگن در صفحه تحت بار یکنواخت

FSCS	SSFS	SSCS	FSFS	CSCS	SSSS	Method	a/h
۱/۶۲۰۶	۱/۷۹۶۲	۱/۵۳۲۹	۱/۸۷۷۳	۱/۳۶۴۵	۱/۷۱۱۳	COMSOL	۱۰
۱/۶۲۰۵	۱/۷۹۶۱	۱/۵۳۲۸	۱/۸۷۷۳	۱/۳۶۴۴	۱/۷۱۱۲	Present	
۲/۴۴۵۴	۲/۶۳۷۱	۲/۳۶۹۱	۲/۷۷۰۹	۲/۱۲۹۹	۲/۴۹۶۱	COMSOL	۵
۲/۴۴۵۳	۲/۶۳۷۰	۲/۳۶۹۱	۲/۷۷۰۹	۲/۱۲۹۹	۲/۴۹۶۰	Present	

جدول ۶- مقادیر تنش‌های بدون بعد در ورق کامپوزیت چهار طرف مفصل غیرهمگن در صفحه تحت بار یکنواخت

$\bar{\sigma}_{xy}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{xx}(h/2)$	Method	a/h
۰/۰۹۵۶	۰/۰۷۶۸	۰/۶۷۶۴	COMSOL	۱۰
۰/۰۹۵۲	۰/۰۷۶۸	۰/۶۷۶۴	Present	
۰/۱۰۲۵	۰/۰۹۰۳	۰/۶۵۰۵	COMSOL	۵
۰/۱۰۲۱	۰/۰۹۰۳	۰/۶۵۰۵	Present	

نتایج کلیه مثال‌های ارائه شده بیانگر کارایی روش پیشنهادی و دقت بالای آن است. لازم به تذکر است که دقت حاصل نه تنها در مؤلفه‌های جابه‌جایی، بلکه در متجه‌های تنش که مشتقات توابع مذکور را در خود دارند نیز قابل مشاهده است. از این منظر روش پیشنهادی امتیاز ویژه‌ای نسبت به روش‌های دارای پیوستگی مرتبه صفر (همانند روش اجزاء محدود) دارد، زیرا پیوستگی را نه تنها در مقادیر مؤلفه‌های جابه‌جایی، بلکه در مشتقات آنها نیز برآورده می‌کند.

### ۵- نتیجه‌گیری

روش بدون شبکه توابع پایه متعادل شده ابزاری قدرتمند در

خواص ماده در صفحه متغیر به صورت زیر است

$$E_y = E_x = a^2 \text{GPa}, E_z = 10(a^2 - x^2) \text{GPa}$$

$$G_{yz} = G_{xz} = 0.5E_y, G_{xy} = 0.2E_y$$

$$\nu_{yz} = \nu_{xz} = \nu_{xy} = 0.25 \quad (40)$$

در جدول‌های (۵) و (۶) مقادیر تغییر مکان حداکثر قائم و تنش‌های محوری و برشی نرمال شده براساس رابطه (۳۹) برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت ورق و همچنین برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده و با نمونه مشابه مدل‌سازی شده به روش اجزاء محدود در نرم‌افزار COMSOL با مش‌بندی بسیار ریز مقایسه شده است. لازم به تذکر است که پایه‌های حل همگن و اختصاصی تا مرتبه ۱۵ در نظر گرفته شده است.

همگن معادله در این شیوه استفاده شده و به این ترتیب نیاز به وجود پایه‌های صادق در عملگر معادله دیفرانسیل برطرف می‌شود. با بازنویسی کلیه پارامترهای حل مسئله به صورت تفکیک‌پذیر، این قابلیت به وجود می‌آید که انتگرال‌های حاصل به صورت ترکیب انتگرال‌های یک‌بعدی هم‌پایه شده برآورد شود که به سادگی روش و افزایش قابل توجه سرعت حل آن می‌انجامد.

حل مسائل مکانیک جامدات است و برخلاف بسیاری از روش‌های استفاده از توابع پایه، توانایی حل انواع معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر را نیز دارد. توزیع ناهمگن الیاف در ورق‌های کامپوزیت سبب تغییر ضرایب سختی در صفحه ورق می‌شود. با توجه به نتایج به دست آمده، دقت بالای روش پیشنهادی در حل این گونه مسائل استنباط می‌شود؛ این در حالی است که از روش باقی‌مانده وزنی برای اعمال صورت

## واژه‌نامه

- |   |  |                |
|---|--|----------------|
| 1. finite element method (FEM)            | 5. method of fundamental solutions (MFS) | 9. free (F)    |
| 2. element free galerkin (EFG)            | 6. orthotropic                           | 10. null space |
| 3. mesh-less local petrov galerkin (MLPG) | 7. simply supported (S)                  | 11. rank       |
| 4. trefftz method                         | 8. clamped (C)                           |                |

## مراجع

- Belytschko, T. Lu, Y. Y., and Gu, L., "Element Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- Atluri, S. N., and Zhu, T., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", *Computational Mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 117-127, 1998.
- Trefftz, T., "Ein Gegenstück Zum Ritzschen Verfahren", *Proceedings of 2nd International Congress on Applied Mechanics*, Zurich, 1926.
- Kupradze, V. D. and Aleksidze, M. A., "The Method of Functional Equations for the Approximate Solution of Certain Boundary Value Problems", *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 4, No. 4, pp. 82-126, 1964.
- Soghrati, S., "Implementation of Smooth Fundamental Solutions in Solving Some Governing Differential Equations in Solid Mechanics", *M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2007. (in Persian).
- Boroomand, B., Soghrati, S. and Movahedian, B., "Exponential Basis Functions in Solution of Static and Time Harmonic Elastic Problems in a Meshless Style", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, No. 8, pp. 971-1018, 2010.
- Noormohammadi, N., "Solution of Solid Mechanics Problems Using Equilibrated Basis Functions and Mesh-Free Methods", *Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2015. (in Persian).
- Boroomand, B. and Noormohammadi, N., "Weakly Equilibrated Basis Functions for Elasticity Problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, No. 12, pp. 1712-1727, 2013.
- Bert, C. W., and Chen T. L. C., "Effect of Shear Deformation on Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Rectangular Plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No. 6, pp. 465-473, 1978.
- Swaminathan, K., and Ragounadin, D., "Analytical Solutions Using a Higher-Order Refined Theory for the Static Analysis of Antisymmetric Angle-Ply Composite and Sandwich Plates", *Composite Structures*, Vol. 64, No. 3, pp. 405-417, 2004.
- Reddy, J. N., Khdeir, A. A., and Librescu, L., "Le'vy Type Solutions for Symmetrically Laminated Rectangular Plates Using First-Order Shear Deformation Theory", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, No. 3, pp. 740-742, 1987.
- Khdeir, A. A., and Reddy, J. N., "Analytical Solutions of Refined Plate Theories of Cross-Ply Composite Laminates", *Journal of Pressure Vessels Technology*, Vol. 113, No. 4, pp. 570-578, 1991.
- Yuemei, L. and Rui, L., "Accurate Bending Analysis of Rectangular Plates with Two Adjacent Edges Free and the Others Clamped or Simply Supported Based on New Symplectic Approach", *Applied Mathematical Modeling*, Vol.34, No.4, pp.856-865, 2010.
- Urthaler, Y. and Reddy, J. N., "A Mixed Finite Element for the Nonlinear Bending Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT",

- Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 15, No. 5, pp. 355-354, 2008.
15. Bhar, A., Phoenix, S. S., and Satsangi, S. K., "Finite Element Analysis of Laminated Composite Stiffened Plates Using FSDT and HSDT: A Comparative Perspective", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 2, pp. 312-321, 2010.
  16. Sladek, J., Sladek, V., Zhang, Ch., Krivacek, J., Wen, P. H., "Analysis of Orthotropic Thick Plates by Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 13, pp. 1830-1850, 2006.
  17. Jaberzadeh, E., Azhari, M., and Boroomand, B., "Free Vibration of Moving Laminated Composite Plates with and Without Skew Roller Using the Element-Free Galerkin Method", *Iranian Journal of Science and Technology: Transactions of Civil Engineering*, Vol. 38, pp. 377-393, 2014.
  18. Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "A Mesh-Free Method Using Exponential Basis Functions for Laminates Modeled by CLPT, FSDT and TSDT-Part I: Formulation." *Composite Structures*, Vol. 93, No. 12, pp. 3112-3119, 2011.
  19. Azhari, F., Boroomand, B., and Shahbazi, M., "Exponential Basis Functions in the Solution of Laminated Plates Using a Higher-Order Zig-Zag Theory." *Composite Structures*, Vol. 105, pp. 398-407, 2013.
  20. Motamedi Ghahfarokhi, A., "On Bending Problem of Laminated Composite Plates Using Exponential Basis Functions in Mesh-Less Local Form", *M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2013 (in Persian).
  21. Noormohammadi, N., and Boroomand, B., "A Fictitious Domain Method Using Equilibrated Basis Functions for Harmonic and Bi-Harmonic Problems in Physics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 272, pp. 189-217, 2014.
  22. Dawe, D. J., and Roufaeil, O. L., "Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No. 3, pp. 345-359, 1980.
  23. Yuhua, T., and Wang, X., "Buckling of Symmetrically Laminated Rectangular Plates Under Parabolic Edge Compressions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 2, pp. 91-97, 2011.
  24. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC press, 2003.

پیوست ۱

اجزای ماتریس عملگر معادله تعادل در رابطه (۱۰) مطابق

زیر هستند:

$$L_{\gamma\gamma} = \frac{\partial B_{11}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{1\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial B_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial B_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$$

$$L_{\gamma\delta} = \frac{\partial B_{1\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial B_{1\delta}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{1\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{\gamma\delta}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma\delta} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial B_{\gamma\delta}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma\delta} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$$

$$L_{\gamma\gamma} = -A_{\gamma\gamma} \frac{\partial}{\partial y} - A_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{\gamma\gamma} = \frac{\partial D_{1\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{1\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{\gamma\delta}$$

$$L_{\gamma\gamma} = \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - A_{\gamma\gamma}$$

$$L_{\gamma\gamma} = \frac{\partial B_{1\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{\gamma\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial B_{1\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial B_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{11} = \frac{\partial A_{\gamma\delta}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma\delta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial A_{\delta\delta}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + A_{\delta\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial A_{\gamma\delta}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + A_{\gamma\delta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$L_{1\gamma} = \frac{\partial A_{\delta\delta}}{\partial x} + A_{\delta\delta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial A_{\gamma\delta}}{\partial y} + A_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{1\gamma} = \frac{\partial A_{\gamma\delta}}{\partial x} + A_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial A_{\gamma\gamma}}{\partial y} + A_{\gamma\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \quad L_{1\gamma} = L_{1\delta} = 0$$

$$L_{\gamma\gamma} = -A_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial y} - A_{\delta\delta} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{\gamma\gamma} = \frac{\partial D_{11}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{1\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{1\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{\delta\delta}$$

$$L_{\gamma\gamma} = \frac{\partial D_{1\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{1\delta}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - A_{\gamma\delta}$$

## پیوست ۲

به منظور بازسازی عملگر معادله، ابتدا با استفاده از ماتریس های معرفی شده در رابطه (۲۶)، ماتریس های مشابه زیر تشکیل می شوند. نکته بارز در روابط زیر، تغییر مؤلفه دوم ماتریس ها است.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_i)_{l, \delta m+1, p+1} &= (\mathbf{A}_{ii})_{l, \delta m+\tau, p+1} = (\mathbf{A}_{iii})_{l, \delta m+\tau, p+1} \\ &= (\mathbf{A}_{iiii})_{l, \delta m+\tau, p+1} = (\mathbf{A}_{iiii})_{l, \delta m+\delta, p+\tau} \\ i &= 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (2-p)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_i)_{k, \delta n+1, q+1} &= (\mathbf{B}_{ii})_{k, \delta n+\tau, q+1} = (\mathbf{B}_{iii})_{k, \delta n+\tau, q+1} \\ &= (\mathbf{B}_{iiii})_{k, \delta n+\tau, q+1} = (\mathbf{B}_{iiii})_{k, \delta n+\delta, q+\tau} \\ i &= 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (3-p)$$

عملگر معادله در قالب ماتریس کمکی زیر ساخته می شود.  $[\mathbf{X}]_i$  بیانگر کلیه درایه های ماتریس سه اندیسی  $\mathbf{X}$  است که مؤلفه نخست آن برابر  $i$  باشد (متناسب با مرکز وزنی واقع بر سطر یا ستون  $i$  ام).

$$\mathbf{A}_h = \sum_{i=1}^{\delta} \sum_{j=1}^{\delta} \mathbf{L}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, \delta$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{11} &= [\mathbf{A}_{\delta}]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{\tau\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau}]_k^T + [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{\delta\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau}]_k^T + [\mathbf{A}_{\delta}]_l \mathbf{C}_{\delta\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\tau}^A \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{\tau}]_k^T + [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\tau}^A [\mathbf{B}_{\delta}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\delta}^A \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{\delta}]_k^T + [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau}]_k^T \\ \mathbf{L}_{12} &= [\mathbf{A}_{\delta}]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{\delta\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau\tau}]_k^T + [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\delta\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau\tau}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\delta}^A \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{\delta\delta}]_k^T + [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau\tau}]_k^T \\ \mathbf{L}_{13} &= [\mathbf{A}_{\delta}]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{\tau\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}]_k^T + [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\tau}^A \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{\delta\delta\delta}]_k^T + [\mathbf{A}_{\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\tau}^A [\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}]_k^T \\ \mathbf{L}_{21} &= -[\mathbf{A}_{\tau\tau}]_l \mathbf{C}_{\tau\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau}]_k^T - [\mathbf{A}_{\tau\tau}]_l \mathbf{C}_{\delta\delta}^A [\mathbf{B}_{\tau}]_k^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{25} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{21} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{22} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{11}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{B}_{1\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{B}_{1\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{23} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{1\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_{1\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{24} &= \frac{\partial \mathbf{A}_{11}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{A}_{1\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{A}_{1\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{25} &= \frac{\partial \mathbf{A}_{1\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_{1\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{51} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{52} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{1\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{B}_{1\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{53} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{54} &= \frac{\partial \mathbf{A}_{1\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{A}_{1\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_{1\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{55} &= \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{A}_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

(۱-پ)





$$\begin{aligned} (A_1)_{l,\delta m+1} &= \frac{\gamma}{a} \frac{\partial^r T_m(\xi)}{\partial \xi^r} \Big|_{\xi=\xi_l} \\ (B_1)_{k,\delta n+1} &= \frac{\gamma}{b} \frac{\partial^r T_n(\eta)}{\partial \eta^r} \Big|_{\eta=\eta_k} \end{aligned} \quad (\delta - پ)$$

$$\begin{aligned} (A_r)_{l,\delta m+1} &= \frac{\partial T_m(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_l} \\ (B_r)_{k,\delta n+1} &= \frac{\partial T_n(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_k} \end{aligned} \quad (\epsilon - پ)$$

$$\begin{aligned} (A_r)_{l,\delta m+1} &= \frac{a}{\gamma} T_m(\xi) \Big|_{\xi=\xi_l} \\ (B_r)_{k,\delta n+1} &= \frac{b}{\gamma} T_n(\eta) \Big|_{\eta=\eta_k} \end{aligned} \quad (\zeta - پ)$$

مشابه پیوست قبل، ماتریس‌هایی مشابه با موارد فوق نیز ساخته می‌شوند که در ساختار نهایی لازم هستند.

$$\begin{aligned} (A_i)_{l,\delta m+1,p+1} &= (A_{ii})_{l,\delta m+1,p+1} = (A_{iii})_{l,\delta m+1,p+1} = \\ &= (A_{iiii})_{l,\delta m+1,p+1} = (A_{iiii})_{l,\delta m+5,p+1}, \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\eta - پ)$$

$$\begin{aligned} (B_i)_{k,\delta n+1,q+1} &= (B_{ii})_{k,\delta n+1,q+1} = (B_{iii})_{k,\delta n+1,q+1} = \\ &= (B_{iiii})_{k,\delta n+1,q+1} = (B_{iiii})_{k,\delta n+5,q+1}, \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\theta - پ)$$

در نهایت عملگر معادله در قالب ماتریس کمکی زیر ساخته می‌شود.  $(X)_i$  بیانگر سطر  $i$  ام از ماتریس دو اندیسی  $X$  است (متناسب با مرکز وزنی واقع بر سطر یا ستون  $i$  ام از شبکه وزن).

$$A_p = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 L_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 5$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{r\delta,x} (A_r)^T (B_r) + A_{r\delta} (A_r)^T (B_r) \\ &+ A_{\delta\delta,x} (A_r)^T (B_r) + A_{\delta\delta} (A_1)^T (B_r) \\ &+ A_{r\delta,y} (A_r)^T (B_r) + A_{r\delta} (A_r)^T (B_r) \\ &+ A_{r\delta,y} (A_r)^T (B_r) + A_{r\delta} (A_r)^T (B_r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{r\delta} &= [A_{\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta}]_l C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta}]_l m_x C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{11111}]_l C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta\delta}]_l C_{1r}^A m_y [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta}]_l C_{1r}^A [B_{11111}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^A m_y [B_{\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ L_{\delta r} &= [A_{r\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{1r}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{11111}]_l C_{1r}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{\delta\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{r\delta\delta}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{1r}^B m_y [B_{\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{1r}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^B m_y [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^B [B_{111}]_k^T \\ L_{\delta r} &= [A_{\delta\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{r\delta\delta}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{r\delta\delta}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{11111}]_l C_{r\delta\delta}^B [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^B m_y [B_{r\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^B [B_{111}]_k^T \\ L_{\delta r} &= [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{11111}]_l C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{r\delta\delta}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{1r}^A m_y [B_{\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^A m_y [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^A [B_{11111}]_k^T \\ L_{\delta\delta} &= [A_{\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l \\ &C_{1r}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l m_x C_{r\delta\delta}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T \\ &+ [A_{11111}]_l C_{r\delta\delta}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^A m_y \\ &[B_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^A [B_{11111}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l \\ &C_{r\delta\delta}^A m_y [B_{\delta\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T + [A_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_l C_{r\delta\delta}^A [B_{r\delta\delta\delta\delta\delta\delta\delta}]_k^T \end{aligned} \quad (\iota - پ)$$

### پیوست ۳

انتگرال‌های مورد نیاز برای برآورد حل خصوصی مطابق زیر هستند. این مقادیر در ماتریس‌هایی سه اندیسی ذخیره شده‌اند.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\gamma\gamma} &= D_{1\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + D_{1\phi}(\mathbf{A}_{111})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \\ &\quad + D_{\phi\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + D_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \\ &\quad + D_{1\gamma,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + D_{1\gamma}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \\ &\quad + D_{\gamma\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + D_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{11}) \\ &\quad - A_{\phi\delta}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\gamma\gamma} &= D_{\gamma\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + D_{\phi\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{111})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + D_{\gamma\gamma,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{\gamma\gamma}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{111}) \\ &\quad + D_{\gamma\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad - A_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\gamma\gamma} &= B_{1\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{1\phi}(\mathbf{A}_{111})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{\phi\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{1\gamma,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{1\gamma}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{\gamma\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{1111}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\gamma\delta} &= B_{\gamma\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{\phi\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{111})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{\gamma\gamma,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\gamma\gamma}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{11111}) \\ &\quad + B_{\gamma\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\gamma\gamma} &= B_{11,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + B_{11}(\mathbf{A}_{1111})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{1\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + B_{1\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{1\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + B_{1\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{\phi\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + B_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\gamma\gamma} &= B_{1\gamma,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + B_{1\gamma}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{1\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + B_{1\phi}(\mathbf{A}_{1111})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + B_{\gamma\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + B_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{111}) \\ &\quad + D_{\phi\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{1\gamma} &= A_{\delta\delta,X}(\mathbf{A}_{\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + A_{\delta\delta}(\mathbf{A}_{\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \\ &\quad + A_{\phi\delta,Y}(\mathbf{A}_{\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + A_{\phi\delta}(\mathbf{A}_{\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{1\gamma} &= A_{\phi\delta,X}(\mathbf{A}_{\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + A_{\phi\delta}(\mathbf{A}_{\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \\ &\quad + A_{\phi\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + A_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{\gamma 1} = -A_{\phi\delta}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma}) - A_{\delta\delta}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma})$$

$$\mathbf{L}_{\gamma 2} = D_{11,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + D_{11}(\mathbf{A}_{11})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma})$$

$$+ D_{1\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + D_{1\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma})$$

$$+ D_{1\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + D_{1\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma})$$

$$+ D_{\phi\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma}) + D_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{11})$$

$$- A_{\delta\delta}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma})$$

$$\mathbf{L}_{\gamma\gamma} = D_{1\gamma,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{1\gamma}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma})$$

$$+ D_{1\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{1\phi}(\mathbf{A}_{11})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma})$$

$$+ D_{\gamma\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{111})$$

$$+ D_{\phi\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}) + D_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma})$$

$$- A_{\phi\delta}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma})$$

$$\mathbf{L}_{\gamma\gamma} = B_{11,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{11}(\mathbf{A}_{11})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})$$

$$+ B_{1\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{1\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})$$

$$+ B_{1\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{1\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})$$

$$+ B_{\phi\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{1111})$$

$$\mathbf{L}_{\gamma\delta} = B_{1\gamma,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{1\gamma}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})$$

$$+ B_{1\phi,X}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{1\phi}(\mathbf{A}_{11})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma})$$

$$+ B_{\gamma\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\gamma\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{11111})$$

$$+ B_{\phi\phi,Y}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}) + B_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma})$$

$$\mathbf{L}_{\gamma 1} = -A_{\phi\phi}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma}) - A_{\phi\delta}(\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma})^T(\mathbf{B}_{\gamma})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{\Delta f} &= \mathbf{A}_{1\phi, X} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{3333}) + \mathbf{A}_{1\phi} (\mathbf{A}_{11111})^T (\mathbf{B}_{3333}) \\
 &+ \mathbf{A}_{\phi\phi, X} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{2222}) + \mathbf{A}_{\phi\phi} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{2222}) \\
 &+ \mathbf{A}_{1\gamma, Y} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{3333}) + \mathbf{A}_{1\gamma} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{2222}) \\
 &+ \mathbf{A}_{\gamma\phi, Y} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{2222}) + \mathbf{A}_{\gamma\phi} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{1111}) \\
 \mathbf{L}_{\Delta\delta} &= \mathbf{A}_{\gamma\phi, X} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{22222}) + \mathbf{A}_{\gamma\phi} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{22222}) \\
 &+ \mathbf{A}_{\phi\phi, X} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{33333}) + \mathbf{A}_{\phi\phi} (\mathbf{A}_{11111})^T (\mathbf{B}_{33333}) \\
 &+ \mathbf{A}_{\gamma\gamma, Y} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{22222}) + \mathbf{A}_{\gamma\gamma} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{11111}) \\
 &+ \mathbf{A}_{\gamma\phi, Y} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{33333}) + \mathbf{A}_{\gamma\phi} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{22222})
 \end{aligned}$$

(پ-۱)

دسته‌های پنج‌تایی از سطرهای ماتریس فوق به ترتیب در کنار یکدیگر قرار گرفته و پنج سطر از ماتریس ضرایب نهایی  $\mathbf{A}_p$  را خواهند ساخت. با حل دستگاه مربوطه، ضرایب لازم  $\mathbf{c}_p$  به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{\Delta f} &= \mathbf{A}_{1\gamma, X} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{3333}) + \mathbf{A}_{1\gamma} (\mathbf{A}_{1111})^T (\mathbf{B}_{3333}) \\
 &+ \mathbf{A}_{1\phi, X} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{3333}) + \mathbf{A}_{1\phi} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{2222}) \\
 &+ \mathbf{A}_{1\phi, Y} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{3333}) + \mathbf{A}_{1\phi} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{2222}) \\
 &+ \mathbf{A}_{\phi\phi, Y} (\mathbf{A}_{3333})^T (\mathbf{B}_{2222}) + \mathbf{A}_{\phi\phi} (\mathbf{A}_{3333})^T (\mathbf{B}_{1111}) \\
 \mathbf{L}_{\Delta\delta} &= \mathbf{A}_{1\gamma, X} (\mathbf{A}_{3333})^T (\mathbf{B}_{22222}) + \mathbf{A}_{1\gamma} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{22222}) \\
 &+ \mathbf{A}_{1\phi, X} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{33333}) + \mathbf{A}_{1\phi} (\mathbf{A}_{1111})^T (\mathbf{B}_{33333}) \\
 &+ \mathbf{A}_{\gamma\phi, Y} (\mathbf{A}_{3333})^T (\mathbf{B}_{22222}) + \mathbf{A}_{\gamma\phi} (\mathbf{A}_{3333})^T (\mathbf{B}_{11111}) \\
 &+ \mathbf{A}_{\phi\phi, Y} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{33333}) + \mathbf{A}_{\phi\phi} (\mathbf{A}_{2222})^T (\mathbf{B}_{22222}) \\
 \mathbf{L}_{\Delta\gamma} &= \mathbf{B}_{1\phi, X} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{33}) + \mathbf{B}_{1\phi} (\mathbf{A}_{11111})^T (\mathbf{B}_{33}) \\
 &+ \mathbf{B}_{\phi\phi, X} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{22}) + \mathbf{B}_{\phi\phi} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{22}) \\
 &+ \mathbf{B}_{1\gamma, Y} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{33}) + \mathbf{B}_{1\gamma} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{22}) \\
 &+ \mathbf{B}_{\gamma\phi, Y} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{22}) + \mathbf{B}_{\gamma\phi} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{11}) \\
 \mathbf{L}_{\Delta\gamma} &= \mathbf{B}_{\gamma\phi, X} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{222}) + \mathbf{B}_{\gamma\phi} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{222}) \\
 &+ \mathbf{B}_{\phi\phi, X} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{333}) + \mathbf{B}_{\phi\phi} (\mathbf{A}_{11111})^T (\mathbf{B}_{333}) \\
 &+ \mathbf{B}_{\gamma\gamma, Y} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{222}) + \mathbf{B}_{\gamma\gamma} (\mathbf{A}_{33333})^T (\mathbf{B}_{111}) \\
 &+ \mathbf{B}_{\gamma\phi, Y} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{333}) + \mathbf{B}_{\gamma\phi} (\mathbf{A}_{22222})^T (\mathbf{B}_{222})
 \end{aligned}$$