

# استفاده از یک روش جدید برای متعارف ساختن انتگرالهای منفرد سه بعدی اجزای مرزی در حالت کلی

داور درخشان\* و قدرت... کرمی\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۲/۷ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۶/۷/۲)

چکیده - در این مقاله روشی برای متعارف ساختن انتگرالهای منفرد<sup>۱</sup> سه بعدی ارائه می شود که قادر است هر درجه از منفردیت را در برگیرد و برای کلیه مسائل که با روش اجزای مرزی تحلیل می شوند قابل استفاده باشد. انتگرالهای منفرد جز لاینفک روش اجزای مرزی اند. به عنوان نمونه می توان از انتگرالهای منفردی که در مسائل پتانسیل برای محاسبه جریان و گرادیان جریان و یا محاسبه تغییر مکان و تنش در مسائل کشسانی به کار می روند نام برد. در روش پیشنهادی تنها با داشتن تابع صورت و مشتقهای آن که به طور صریح و یا تقریبی به دست آمده باشند، می توان مسائل قوی منفرد<sup>۲</sup>، فوق منفرد<sup>۳</sup> و حتی مافوق منفرد<sup>۴</sup> را با دقت بسیار خوبی محاسبه کرد. برای متعارف ساختن انتگرالها، توابعی به طور متوالی کم و اضافه می شوند. تا بدین وسیله جمله های منفرد و نامنفرد جدا پذیر شوند. نتایج سه مثال به صورت عددی در مقاله آورده شده است که بیانگر کارایی روش مزبور و دقت مناسب آن در محاسبات است.

## A General New Algorithm for Regularization of Singular Integrals in Three-Dimensional Boundary Elements

D. Derakhshan and G. Karami

Department of Mechanical Engineering, School of Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran.

**ABSTRACT-** *In this paper an algorithm is presented for the regularization of singular integrals with any degrees of singularity, which may be employed in all three-dimensional problems analyzed by Boundary Elements. The integrals in Boundary Integrals Equations are inherently singular. For example, one can mention the integrals confronted in potential problems to evaluate the flow or the gradient of the flow or the integrals employed to determine the stress or the deformation in elastic problems. Having only the numerator functions and their derivatives derived either explicitly or implicitly, this algorithm may be employed to evaluate*

\*\* استاد

\* دانشجوی دکترا

فهرست علائم

$A(\phi)_i, B(\phi)_i$	مربوط به تابع تغییر مکان	$r$	تابع فاصله	$x^P$	مکان نقطه منبع
$e_\varepsilon$	مرز حذف شده در شکل ۱	$t_{,i}$	مشتق تابع فاصله نسبت به $x_i$	$A, B, C, D, \varepsilon$	تابع تحلیلی برحسب $\phi$
$f(\rho, \phi)$	تابع تحلیلی تعریف شده در انتگرال	$S$	مرز دامنه	$H_i$	تابع تحلیلی برحسب $\phi$
$f_i(\rho, \phi)$	تابع تفاوتی	$S_x$	حوزه انتگرالگیری	$\varepsilon$	شعاع همسایگی در مختصات کلی
$f(\text{difference})$		$S_\varepsilon$	مرز اضافه شده در شکل ۱	$\xi_i$	مختصه‌های محلی
$g(x, x^P)$	تابع تحلیلی انتگرال	$T(x^P, x)$	جواب اساسی تنش مرزی	$\xi_i^P$	نقطه منبع در مختصات محلی
$I_p$	مقدار انتگرال منفرد	$U(x^P, x)$	جواب اساسی تغییر مکان	$\rho$	مختصه فاصله در تبدیل قطبی
$J$	ژاکوبین تبدیل	$u(x)$	تابع تغییر مکان	$\rho_\varepsilon$	شعاع همسایگی در مختصات محلی
$M(\rho, \phi)$	مربوط به تابع تغییر مکان	$V_i$	مشتق جواب اساسی تنش مرزی	$\rho_M$	فاصله منبع تا مرز جزء در مختصات محلی
$n$	رتبه منفردیت	$W_i$	مشتق جواب اساسی تغییر مکان	$\phi$	مختصه زاویه در تبدیل قطبی
$n(x)$	بردار عمود بر سطح	$x$	مکان		
$q(x)$	تابع تنش مرزی		مکان نقطه مشاهده		

the strongly, hyper or supersingular integrals with a satisfactory of accuracy. To regularize the integrals, some functions are either added or subtracted successively so as to differentiate the singular and nonsingular terms. Three examples with their numerical solutions are included which show the efficiency and the accuracy of the proposed algorithm.

۱- مقدمه

مقدمه این مقاله به معرفی انواع انتگرالهای منفرد پرداخته و سپس تاریخچه‌ای از روشهای پیشنهاد شده گفته خواهد شد.

به طور کلی در مسائل دو بعدی چنانچه رتبه منفردیت (در مخرج) از یک کوچکتر باشد، انتگرال نامبرده را ضعیف منفرد<sup>۸</sup> و چنانچه برابر یک باشد قوی منفرد و اگر بزرگتر از یک باشد فوق منفرد گویند. در مسائل سه بعدی رتبه منفردیت یک درجه اضافه می‌شود که براساس آن تعاریف بالا باز هم صادق‌اند. به عنوان مثال معادله انتگرالی تغییر مکان در مسائل کشسانی دارای آرگومان انتگرالی ضعیف منفرد و قوی منفرد است [۶]. همچنین معادله مربوط به تنش و یا گرادیان تغییر مکان که انتگرالهای قوی منفرد و فوق منفرد را شامل می‌شود. [۷]. این‌گونه آرگونها به دلیل ظاهر شدن جوابهای اساسی<sup>۹</sup> و استفاده از قضیه دیورژانس، منفردیتهای مختلفی را ایجاد می‌کنند. مانند تابع لگاریتمی مکان در مسائل دو بعدی که از نوع ضعیف منفرد است و مشتقهای آن منفردیتهای بالاتر را پدید می‌آورند. تابع تنش در مسائل کشسانی نیز دارای آرگومانهای قوی و فوق منفرد است. انتگرالهای ضعیف منفرد به

روشهای محاسباتی مکانیزه همچون روش اجزای محدود<sup>۶</sup> و اجزای مرزی<sup>۷</sup> فصل نوینی بر روی تحلیل مسائل مهندسی کاربردی گشوده است به گونه‌ای که امروزه اکثر مسائل پیچیده استاتیکی و دینامیکی به کمک این روشها مشابه سازی شده و تجزیه و تحلیل می‌شوند. به کارگیری دقیق این روشها نیز مشکلات مخصوص به خود را دارند. از جمله در روش اجزای مرزی با وجود اینکه خطا و محاسبات کمتری نسبت به روش اجزای محدود دارد اما به دلیل استفاده دوباره از قضیه دیورژانس منفردیتهایی در آرگومان انتگرال آن ایجاد می‌شود که به نوبه خود نوعی واگرایی در محاسبات پدید می‌آورد. بدیهی است در این حالت روشهای متداول عددی قادر به محاسبه آنها نیستند و بایستی با شیوه‌هایی دیگر رفع منفردیت و محاسبه شوند. گرچه کار بر روی انتگرالهای منفرد و نحوه رفع منفردیت آن چند دهه‌ای است که آغاز شده است لیکن کاربری این مسئله در به کارگیری روش اجزای مرزی از سالهای ۱۹۸۰ به بعد اوج شدیدتری را داشته است (رجوع کنید به مقاله‌های [۱-۵]). در

توضیحات لازم پیرامون آن در پیوست ۲ آمده است.

#### ۴-۱ روش حدگیری

در این روش ابتدا نقطه منفرد (منبع) را از روی مرز دور می‌کنند و سپس با استفاده از عملیات جبری و تحلیلی مقدار انتگرال را به طور پارامتری به دست می‌آورند. در نهایت با عمل حدگیری نقطه منفرد از روی مرز برده و مقدار انتگرال را به صورت عددی به دست می‌آورند [۱۱].

#### ۵-۱ استفاده از مقدار معین هادامار<sup>۱۳</sup>

در این روش با استفاده از فرمولبندی خاصی، جمله‌های منفرد را (برحسب شعاع همسایگی نقطه منفرد) محاسبه کرده و از مقدار کل انتگرال کم می‌کنند. بدین ترتیب آنچه باقی می‌ماند کمیتی معین و محدود است [۱۲].

#### ۶-۱ مزایای روش پیشنهادی نسبت به بقیه روشها

الف - روش پیشنهادی یک روش کلی برای رفع هرگونه منفردیت در مسائل سه بعدی اجزای مرزی است و می‌توان با تغییر مقدار  $n$  (در معادله ۲۳) رتبه منفردیت را تغییر داد. برای تعیین مشتقات  $f$  و توابع  $H$  و  $J$  توضیحات کافی در متن و ضمایم آمده است. در مرجع [۱۲] نیز یک روش کلی برای محاسبه انتگرالهای منفرد دو بعدی اجزای مرزی ارائه شده است که محاسبات آن به طور عددی و بر حسب انتخاب شعاع همسایگی نقطه منفرد استوار است. برای مسائل سه بعدی اجزای مرزی مؤلف هیچ‌گونه مثال عددی ارائه نداده است تا کارایی این روش را به ثبوت برساند.

ب - روش جوابهای اختصاصی همیشه با مشکل به دست آوردن یک جواب اختصاصی برای میدان تغییر مکان روبروست. به ویژه برای مسائل غیر خطی پیدا کردن یک جواب دقیق شاید ناممکن باشد.

ج - بیشتر روشهای تبدیل (که همه مراجع آن نیز در اینجا ذکر نشده) سعی کرده‌اند با یک تبدیل خاص و شعاع همسایگی مناسب، دقت انتگرالگیری را در نواحی نزدیک به نقطه منفرد افزایش دهند. در این حالت جمله‌های منفرد و غیر منفرد از یکدیگر جدا نمی‌شوند بلکه دقت محاسبه جمله‌های منفرد که قرار است که با یکدیگر حذف

کمک روشهای متداول عددی مانند انتگرالگیری معمولی گوس<sup>۱۰</sup> و یا انتگرالگیری لگاریتمی گوس تا دقت بسیار خوبی قابل محاسبه‌اند. اما انتگرالهای قوی منفرد و فوق منفرد به راحتی قابل محاسبه نیستند و ترفندهای ویژه‌ای لازم است تا به شکل متعارف قابل محاسبه‌اند. اصولاً انتگرالهای مزبور دارای دو مقدار متمایزند. یک انتگرال با همسایگی نقطه منفرد (یا منبع) که اصطلاحاً به آن جمله آزاد<sup>۱۱</sup> می‌گویند و دیگری انتگرال بدون همسایگی نقطه منفرد که به آن مقدار اصلی<sup>۱۲</sup> نیز اطلاق می‌شود. در این مقاله انتگرال نوع دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد و انتگرال نوع اول به مقاله‌ها و مراجع ذیربط محول می‌شود [۱]. برای حل انتگرالهای منفرد روشهای مختلفی پیشنهاد شده که به طور مختصر در زیر آمده است.

#### ۱-۱ انتگرالگیری جزء به جزء

در این روش با استفاده از انتگرال جزء به جزء مشتقهای پاره‌ای را از توابع فوق منفرد به توابعی که در آنها ضرب شده‌اند منتقل می‌کنند. با این عمل یک درجه منفردیت کاهش پیدا می‌کند [۳ و ۲].

#### ۲-۱ استفاده از جوابهای اختصاصی

حالت ساده این روش همان حرکت جسم صلب که بیانگر میدان ثابت تغییر مکان است. همچنین تغییر شکل ثابت که مثال بارز آن فشار هیدروستاتیکی است. از مزایای این روش به دست آوردن همزمان جمله آزاد و مقدار اصلی است [۸ و ۹].

#### ۳-۱ روش تبدیل

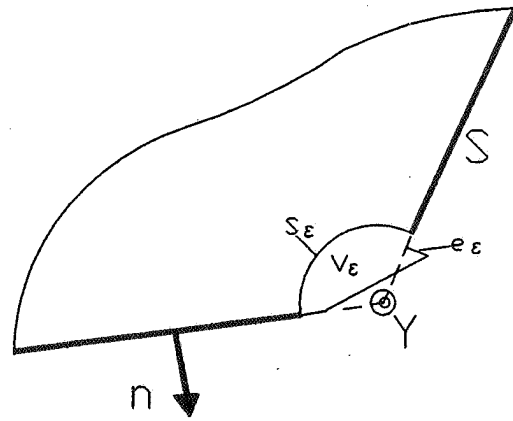
اساس کار این روش تبدیل مختصات مناسب به کمک بعضی از عملیات جبری و عددی است [۱۰]. مانند کار مراجع [۴ و ۵] که در ابتدا با یک عمل جمع و تفریق ساده شروع می‌کنند و سپس با تغییر مختصات از کارتین به استوانه‌ای جمله‌های منفرد و غیر منفرد از یکدیگر جدا می‌سازند. لازم به توضیح است که این روش حالت ساده روشی است که در این مقاله پیشنهاد شده است. بدین ترتیب که عملیات جمع و تفریق آن قدر ادامه پیدا می‌کند که انتگرالهای باقیمانده کلاً غیر منفرد شوند. بدیهی است که در این حالت محاسبه تفریقها و یا مشتقهای تابع آرگومان نیز مورد لزوم است که

چنانچه از معادله (۱) نسبت به  $x_i$  مشتق بگیریم خواهیم داشت.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(S-e_\varepsilon)} [V_i(x^P, x)u(x) - W_i(x^P, x)q(x)] dS_x = 0 \quad (3)$$

در حالی که

$$W_i = \frac{\partial U}{\partial x_i^P} \quad ; \quad V_i = \frac{\partial T}{\partial x_i^P} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i^P} n_k(x) \quad (4)$$



شکل ۱- نحوه خارج کردن نقطه منفرد (منبع) از روی مرز

توابع منفرد بالا با توجه به نوع مسئله و ابعاد آن تعیین می شوند. مثال ساده آن تابع پتانسیل سه بعدی است که دارای جوابهای زیر است.

$$U(x^P, x) = \frac{-1}{4\pi r} \quad ; \quad W_i = \frac{r_{,i}}{4\pi r^2} \quad (5)$$

$$V_i(x^P, x) = \frac{-1}{4\pi r^3} [3r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} - n_i]$$

حال برای متعارف ساختن معادله های انتگرالی (مانند معادله هایی که در بالا آورده شد) روش زیر پیشنهاد می شود.

## ۲-۲ متعارف ساختن انتگرالهای منفرد در حالت کلی

در آغاز بهتر است از حالت کلیتر شروع کنیم. فرض کنید که انتگرال زیر از رتبه منفردیت  $n$ ام باشد. بدین ترتیب می توان نوشت

$$I_\nu = \iint_R \frac{g(x, x^P)}{r^n(x, x^P)} dx_1 dx_\nu \quad (6)$$

جمله های  $x_i$  بیانگر مختصات اصلی و بردارهای  $x^P$  و  $x$  نشاندهنده مکان نقاط منبع  $1^6$  و مشاهده  $1^7$  اند.  $r$  نیز فاصله بین دو نقطه مزبور است. چنانچه انتگرال را در مختصات محلی  $\xi_1, \xi_\nu$  بنویسیم می توان حوزه  $R$  را به دامنه ساده  $\{-1, 1\}$  تبدیل کرد. در این صورت خواهیم داشت

$$I_\nu = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g(\xi_1, \xi_\nu)}{r^n(\xi_1, \xi_\nu)} J(\xi_1, \xi_\nu) d\xi_1 d\xi_\nu \quad (7)$$

به طوری که  $J(\xi_1, \xi_\nu)$  ضریب تبدیل این تغییر مختصات خواهد بود. برای محاسبه انتگرال همان طوری که گفته شد بایستی از دو دامنه انتگرالگیری بهره بگیریم، یکی همسایگی نقطه منفرد که

$$T = \frac{\partial U}{\partial n} \quad (2)$$

شوند، بیشتر می شود طبیعی است مقدار خطا در این وضعیت بیشتر از روش پیشنهادی خواهد بود. تنها کار مراجع [۱۳] و [۵] با روش پیشنهادی شباهت دارد که از نقطه نظر دقت نیز یکسان اند. د- کار مرجع [۱۱] که براساس روش حدگیری است با استفاده از واسطه یابی اجزای هرمیت  $1^4$  صورت گرفته است. طبیعی است استفاده از واسطه یابی همراه با تقریب است و از جواب واقعی دور خواهیم شد.

ه- خطای محاسباتی روش پیشنهادی به دلیل حذف جمله های منفرد (نامحدود) و استفاده از نقاط گوس بیشتر منحصر به گرد کردن عدد  $1^5$  می شود.

## ۲- بخش نظری

### ۱-۲ یافتن معادله انتگرالی فوق منفرد

شکل کلی معادله های انتگرال مرزی را می توان به صورت زیر نوشت [۱۴].

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(S-e_\varepsilon)+S_\varepsilon} [T(x^P, x)u(x) - U(x^P, x)q(x)] dS_x = 0 \quad (1)$$

برای برداشتن نقطه منفرد از روی مرز و متعارف ساختن معادله انتگرالی، لازم است که مرز و دامنه آن مطابق شکل (۱) تغییر یابد [۱۳]. در این حالت  $U$  و  $T$  عبارت اند از جوابهای اساسی تغییر مکان و تنش مرزی که به ترتیب دارای منفردیتهای  $\frac{1}{r}$  و  $\frac{1}{r^2}$  هستند. به طوری که

$$A_1(\phi) = \left[ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right]_p \cos \phi + \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)_p \sin \phi;$$

$$B_1(\phi) = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)_p \cos \phi + \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)_p \sin \phi$$

$$A_2(\phi) = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1^2} \right)_p \cos^2 \phi$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)_p \sin \phi \cos \phi + \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_2^2} \right)_p \sin^2 \phi$$

$$B_2(\phi) = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1^2} \right)_p \cos^2 \phi$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)_p \sin \phi \cos \phi + \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_2^2} \right)_p \sin^2 \phi \quad (13)$$

در نهایت انتگرال  $I_v$  به شکل زیر تعریف می شود.

$$\iint \frac{g \cdot J}{\rho^{n-1} M^n} d\rho d\phi \quad (14)$$

فرض کنید که  $f$  تابعی پیوسته از درجه  $2-n$  باشد. در این صورت شکل کلی انتگرال منفرد از رتبه  $1-n$  خواهد بود که به شکل زیر به دست می آید.

$$\iint \frac{f(\rho, \phi)}{\rho^{n-1}} d\rho d\phi \quad ; \quad f = \frac{g \cdot J}{M^n} \quad (15)$$

حال با استفاده از روش جمع و تفریقهای متوالی جمله‌های منفرد را از غیر منفرد جدا می کنیم.

$$I_v = \iint \frac{f(\rho, \phi) - f(\cdot, \phi)}{\rho^{n-1}} d\rho d\phi + \int f(\cdot, \phi) \int \frac{d\rho}{\rho^{n-1}} d\phi$$

$$= \iint \frac{f_1(\rho, \phi)}{\rho^{n-2}} d\rho d\phi + \int f(\cdot, \phi) \int \left[ \frac{1}{-n+2} \rho^{-n+2} \right]_{\rho_\varepsilon}^{\rho_M} d\phi \quad (16)$$

$$= \iint \frac{f_1(\rho, \phi)}{\rho^{n-2}} d\rho d\phi + \frac{1}{-n+2} \left[ \int \frac{f(\cdot, \phi) d\phi}{\rho M^{n-2}(\phi)} - \int \frac{f(\cdot, \phi) d\phi}{\rho \varepsilon^{n-2}(\phi)} \right]$$

و اگر به این عمل تا مرحله  $1-n$  ادامه دهیم خواهیم داشت

جمله ازاد را در بر خواهد داشت و دیگری بدون همسایگی آن. برای ایجاد یک همسایگی مناسب و جداسازی نقطه منفرد بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. زیرا عملیات ریاضی آن آسانتر بوده و پیوستگی تابع  $g$  را در مسائل اجزای مرزی تضمین می کند. این پیوستگی نقش اساسی در محاسبه کلی انتگرالهای منفرد دارد. به همین دلیل تغییر مختصات زیر پیشنهاد می شود:

$$\xi_1 = \xi_1^P + \rho \cos \phi \quad ; \quad \xi_2 = \xi_2^P + \rho \sin \phi \quad (8)$$

$$I_v = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_\varepsilon(\phi)}^{\rho_M(\phi)} \frac{g(\rho, \phi)}{r^n(\rho, \phi)} J(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi \quad (9)$$

به طوری که  $\rho$  همان ضریب تبدیل مختصات استوانه‌ای است و  $\rho_\varepsilon$  و  $\rho_M$  بیانگر حدود انتگرالگیری اند. با استفاده از معادله (8) و بسط تیلور حول نقطه منبع  $(\xi_i^P)$  می توان نوشت

$$x_i - x_i^P = \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \cos \phi + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \sin \phi \right) \rho \quad (10)$$

$$+ \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_1^2} \cos^2 \phi + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \sin \phi \cos \phi \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_2^2} \sin^2 \phi \right) \rho^2 + O(\rho^3)$$

بدیهی است اگر از جزء چهار گره‌ای استفاده کنیم احتیاجی به جمله‌های  $O(\rho^3)$  نخواهیم داشت و معادله‌ها شکل ساده تری پیدا خواهند کرد. تابع فاصله  $r$  نیز چنین تعریف می شود.

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^P)^2 + (x_2 - x_2^P)^2} = \rho_M(\rho, \phi) \quad (11)$$

به طوری که:

$$M(\rho, \phi) = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + 2(A_1 A_2 + B_1 B_2) \rho + (A_2^2 + B_2^2) \rho^2 + O(\rho^3)} \quad (12)$$

می آیند که در پیوست ۱ آمده است. بدیهی است مقدار  $I_\nu$  در صورتی معین <sup>۱۹</sup> است که انتگرالهای بالا روی حوزه  $\phi$  برابر صفر باشند، یا اینکه در اثر جمع شدن با جمله‌های آزاد از کل معادلات حذف می‌شوند. در واقع ثابت می‌شود که اگر  $g$  به شکل  $\Gamma_i^j$  بوده و  $j$  فرد باشد، آن گاه انتگرالهای معادله (۲۲) صفر خواهند بود. در نتیجه با حذف جمله‌های منفرد می‌توان نوشت

$$I_\nu = \int \int f_{n-1}(\rho, \phi) d\rho d\phi + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{-n+k+2} \left[ \int \frac{f_k(\phi)}{\rho M^{n-k-2}(\phi)} d\phi - \int f_k(\phi) H_{n-k}(\phi) d\phi \right] + \int f_{n-2}(\phi) \ln(A(\phi)\rho M(\phi)) d\phi \quad (23)$$

به طوری که

$$f_i(\rho, \phi) = \frac{f(\rho, \phi) - \sum_{k=0}^{i-1} f_k(\phi) \rho^k}{\rho^i} \quad (24)$$

و به سادگی می‌توان نشان داد که

$$f_k(\phi) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k f(\rho, \phi)}{\partial \rho^k} \right]_{\rho=0} \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

و مشتقهای معادله (۲۵) برای حالتی که  $n=2, 3$  است در پیوست ۲ آمده است.

### ۳- مثالهای عددی

مثال ۱: مطلوب است محاسبه انتگرال قوی منفرد سه بعدی با مشخصات زیر (پیوست ۳):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_{1,2}}{\Gamma_{1,2}} dx_1 dx_2; \quad g=r_{1,2}; \quad n=2; \quad x_1^p = 0/4, \quad x_2^p = 0/6$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال فوق منفرد سه بعدی با مشخصات زیر [پیوست ۳]:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_{1,1}}{\Gamma_{1,1}} dx_1 dx_2; \quad g=r_{1,1}; \quad n=3; \quad x_1^p = 0/6, \quad x_2^p = 0$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال فوق منفرد زیر:

$$I_\nu = \int \int f_{n-1}(\rho, \phi) d\rho d\phi + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{-n+k+2} \left[ \int \frac{f_k(\phi)}{\rho M^{n-k-2}(\phi)} d\phi - \int \frac{f_k(\phi)}{\rho_\varepsilon^{n-k-2}(\phi)} d\phi \right] + \int f_{n-2}(\phi) \ln[\rho M(\phi)] d\phi - \int f_{n-2}(\phi) \ln[\rho_\varepsilon(\phi)] d\phi \quad (17)$$

برای اینکه جمله آزاد انتگرال بالا را بتوان به راحتی محاسبه کرد بهتر است همسایگی نقطه منفرد را یک دایره در مختصات کلی <sup>۱۸</sup> در نظر بگیریم. بدین ترتیب با میل دادن شعاع دایره به سمت صفر جمله منفرد مربوط به آن استخراج خواهد شد.

به عبارت دیگر

$$r = \varepsilon = \rho_\varepsilon(\phi) M(\rho_\varepsilon(\phi), \phi) = cte \quad (18)$$

اما از بسط چند جمله‌ای و به کمک معادله (۱۰) می‌توان نوشت

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\rho_\varepsilon(\phi), \phi) \approx A + B\varepsilon \quad (19)$$

به طوری که

$$A = (A_1^2 + B_1^2)^{1/2}; \quad B = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{A^2}; \quad \rho_\varepsilon \approx \frac{\varepsilon}{A}$$

بنابراین جمله‌های منفرد و غیرمنفرد به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\ln[\rho_\varepsilon(\phi)] = \ln A - \ln \varepsilon \quad (20)$$

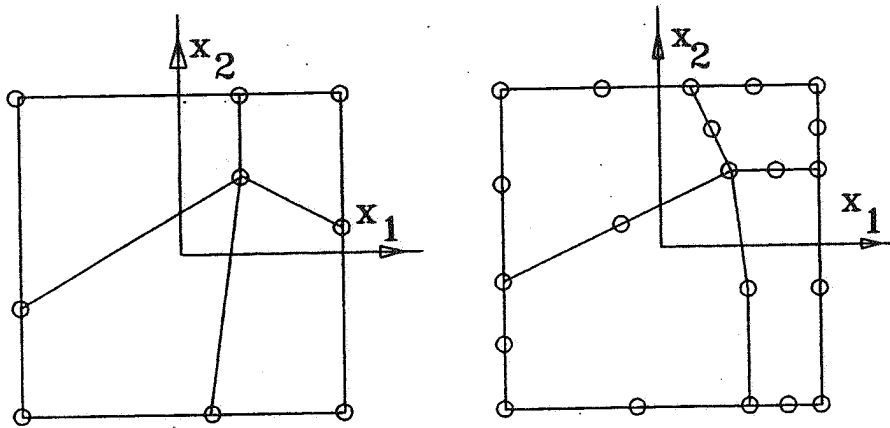
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\rho_\varepsilon^{n-k-2}} = \frac{1}{\varepsilon^{n-k-2}} A^{n-k-2} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-k-3}}\right) + \dots + H_{n-k} \quad (21)$$

و انتگرالهای منفرد حاصل می‌شوند.

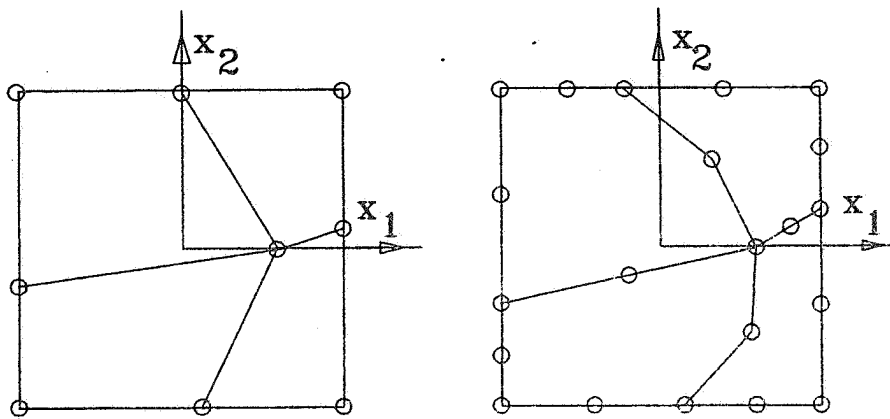
$$-\ln \varepsilon \int_{-1}^{2\pi} f_{n-2}(\phi) d\phi$$

$$\int_{-1}^{2\pi} \left[ \left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^{n-k-2}(\phi) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-k-3}}\right) \dots + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right] f_k(\phi) d\phi \quad (22)$$

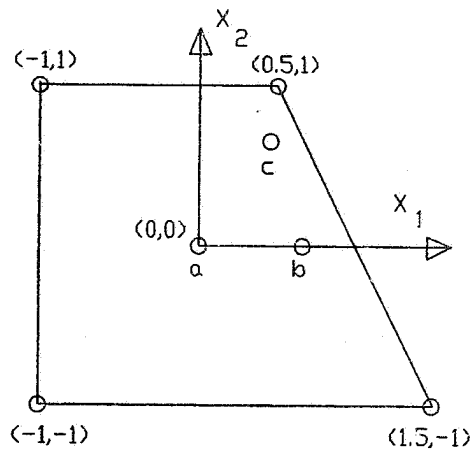
توابع معین  $H(\phi)$  نیز معادله (۱۲) و به کمک معادله‌های دیگر به دست



شکل ۲- اجزای چهار و هشت گره‌ای مثال ۱



شکل ۳- اجزای چهار و هشت گره‌ای مثال ۲



شکل ۴- دامنه اجزای هشت گره‌ای مثال ۳

به طوری که دامنه مطابق شکل ۴ بوده و مختصات نقاط منفرد نیز چنین اختیار شوند:  $a(0,0)$ ،  $b(0.66,0)$  و  $c(0.479226,0.66)$ . لازم به تذکر است که در این حالت  $r_{,3} = 0$  و  $n_3 = 1$  هستند.

$$\int_{(S-e_e) + S_e} V_{\Gamma}(y,x) dS_x \quad ; \quad (26)$$

$$V_{\Gamma}(y,x) \frac{-1}{\sqrt{r}} \left[ r_{,3} \frac{\partial r}{\partial n} - n_3 \right]$$

جدول ۱ - مربوط به مثال ۱

تعداد نقاط گوس	چهار گره‌ای متعامد	چهار گره‌ای غیر متعامد	هشت گره‌ای غیر متعامد
۲	-۲/۰۳۰۲۶۲۶	-۲/۳۵۸۶۰۵۱	-۲/۰۰۲۲۶۱۲
۳	-۲/۰۳۱۲۳۹۷	-۲/۰۴۷۴۰۲۲	-۲/۰۵۴۴۵۰۶۶
۴	-۲/۰۰۱۴۵۶۴	-۱/۹۴۵۷۳۵۵	-۲/۰۰۰۸۸۹۴
۵	-۲/۰۰۲۶۲۷۱	-۲/۰۱۲۱۳۷۷	-۲/۰۰۱۰۳۸۶
۶	-۲/۰۰۳۶۹۵۳	-۲/۰۰۶۹۷۱۱	-۲/۰۰۳۸۳۲۹
۱۰	-۲/۰۰۳۵۶۸۵	-۲/۰۰۳۵۶۴۰	-۲/۰۰۳۳۵۷۹۰
جواب دقیق	-۲/۰۰۳۵۹۰۶	-۲/۰۰۳۵۹۰۶	-۲/۰۰۳۵۹۰۶

جدول ۲ - مربوط به مثال ۲

تعداد نقاط گوس	جزء چهار گره‌ای	جزء هشت گره‌ای	درصد خطا جزء چهار گره‌ای	درصد خطا جزء هشت گره‌ای
۲	-۲/۱۰۷۱۴۶۸	-۳/۸۰۳۲۵۲۰	۱۹/۷۷۶۶۵	۴۴/۷۹۷۵۲
۳	-۳/۱۱۹۵۴۴۴	-۲/۵۷۶۴۱۵۱	۱۸/۷۶۷۳۸	۱/۹۱۰۶۵۲
۴	-۲/۳۷۴۶۴۷۲	-۲/۴۸۹۳۳۸۹	۹/۵۹۲۳۶۵	۵/۲۲۵۸۲۰
۵	-۲/۷۲۶۶۵۴۰	-۲/۶۳۹۸۵۸۷	۳/۸۰۹۲۴۸	۰/۵۰۴۷۷۴۲
۶	-۲/۶۰۰۹۲۷۱	-۲/۶۳۸۷۶۶۶	۰/۹۷۷۴۳۰۱	۰/۴۶۳۱۹۵۷
۱۰	-۲/۶۲۷۰۷۱۳	-۲/۶۲۶۶۰۲۴	۰/۰۱۷۳۱۹	۰/۰۰۰۰۰۸۰
جواب دقیق	-۲/۶۲۶۶۰۰۳	-۲/۶۲۶۶۰۰۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰

#### ۴ - نتیجه گیری

د- در مثال ۱ ملاحظه شد که اگر از پنج نقطه گوس برای انتگرالگیری

استفاده شود درصد خطای حاصله حدود ۰/۱۲۷۴ به دست می آید. این در حالی است که با انتخاب دو ریشه گوس و تقسیم دامنه انتگرالگیری به پنج قسمت (با وجود زمان یکسان) درصد خطا تا مقدار ۰/۰۳۵ کاهش یافته است.

ه- از مقایسه ستونهای جدول ۳ مشخص می شود که هر اندازه نقطه منفرد از محدوده انتگرالگیری فاصله بیشتری داشته باشد، دقت جواب به دست آمده بیشتر می شود.

از روش پیشنهادی می توان در متعارف ساختن انتگرالهای با هر درجه از منفردیت و از جمله انتگرالهای مافوق منفرد استفاده کرد در این حالت مشتق دوم تابع صورت نیز مورد لزوم است که بدست آوردن آن به عهده خواننده گذاشته می شود.

با یک بررسی از روش پیشنهادی نتیجه می شود که

الف - به دلیل ثابت بودن شعاع همسایگی نقطه منفرد، به دست آوردن جمله های آزاد به راحتی صورت می گیرد.

اجزای غیر متعامد و درجه منفردیت زیاد، بسیار مطلوب اند

ب - با توجه به جداول ۱ و ۲ ملاحظه می شود که دقت معادله های پیشنهادی حتی با وجود استفاده از اجزای غیر متعامد و درجه منفردیت زیاد، بسیار مطلوب اند.

ج - با مقایسه اعداد به دست آمده از دو نوع جزء نتیجه می شود که افزایش درجه منفردیت دقت محاسبات عددی را اندکی کاهش می دهد. زیرا هر اندازه منفردیت بیشتر باشد خواص غیر خطی آن نیز بیشتر خواهد بود.



جدول ۳ - مربوط به مثال ۳

نقطه منفرد c	نقطه منفرد b	نقطه منفرد a	تعداد نقاط گوس
-۱۳/۴۹۴۷۴	-۹/۶۹۹۸۸۴	-۵/۷۴۹۷۳۱	۲
-۱۵/۲۲۸۴۲	-۸/۹۷۵۲۴۸	-۵/۷۴۹۳۲۳	۳
-۱۵/۲۸۵۶۸	-۹/۱۸۱۰۱۲	-۵/۷۴۹۲۲۳	۴
-۱۵/۳۱۲۰۷	-۹/۱۵۴۹۰۵	-۵/۷۴۹۲۳۸	۵
-۱۵/۳۱۵۱۶	-۹/۱۵۳۰۸۱	-۵/۷۴۹۲۳۷	۶
-۱۵/۳۲۹۱۰	-۹/۱۵۴۶۰۷	-۵/۷۴۹۲۳۷	۱۰
-۱۵/۳۲۸۵۰	-۹/۱۵۴۵۸۵	-۵/۷۴۹۲۳۷	جواب دقیق

واژه نامه:

- |                      |                          |                    |
|----------------------|--------------------------|--------------------|
| 1. regular           | 8. weakly singular       | 15. round of error |
| 2. singular          | 9. fundamental solution  | 16. source         |
| 3. strongly singular | 10. Guassian quadrature  | 17. observation    |
| 4. hyper-singular    | 11. free term            | 18. global         |
| 5. supersingular     | 12. principal value      | 19. definte        |
| 6. finite elements   | 13. Hadamard finite part |                    |
| 7. boundary elements | 14. Hermite              |                    |

مراجع

- Hartmann, F., *Computing C-matrix in Non-smooth Boundary Points* , in C.A. Brebbia (ed). New Deuedlopments in Boundary Element Methods, Butterworth, Lodon, PP. 367-871., 1980.
- Nishimuar, N., and Kobayashi, S., "A Regularized Boundary Integral Equation Method for Elastodynamic Crack Problems," Computational Mechanics, Vol. 4, PP. 367-871, 1989.
- Polch, E., Curse, T.A., and Huang, C. J., "Traction BIE Solution for Flat Cracks," Computational Mechanics, Vol. 2, PP. 253-267, 1987.
- Guiggiani M. and Casalini, P., "Direct Computaion of Cauchy Principal Value Integral in Advanced Boundary Element, "International Journal for Numerical Methods in engineering, Vol. 24, PP. 1711-1720, 1987.
- Guiggiani, M., and Gigante, A., "A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, PP. 906-915, 1990.
- Brebbia, C.A., and Dominguez, J., *Boundary Elements, An Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1989.
- Karami, G., *A Boundary Element Method for Two-Dimensional Contact Problems*, Springer-Verlag, Vol. 59, PP. 42-49, 1989.
- Rudolph, T. J., "The Use of Simple Solution in the Regularization of Hypersingular Boudary Integral Equations," Math Comput. Model, Vol. 15, PP. 269-278, 1991."
- Bialecki, R., Dallner, R. and Kuhn, G., "New Application of the Hypersingular Equations in the Boundary Element Method, "Computer Methods in Applied Mechannics and Engineering, Vol. 103, PP. 399-416, 1990.
- Bounet, M., and Bui, H. D., Regularization of the Displacement and Traction BIE for 3D Elstodynamics Using Indirect Methods , In Advances in Boundary Element Techniques, Edited By J.H. Kane, G. Maier, Tosaka and S.N. Atluri, PP. 1-29., Springer, Berlin. 1993.

11. Gray L. J., and Soucie, C. S., "A Hermite Interpolation Algorithm for Hypersingular Boundary Integrals", International Journal for Numerical Methods, in Engineering, Vol. 36, PP. 2357-2367, 1993.
12. Toh, K. C. and Mukherjee, S., "Hypersingular and Finite Part Integral in the Boundary Element Method, "International Journal of Solids and Structures, Vol. 17, PP. 2299-2312., 1994.
13. Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T. J., and Rizzo, F.J., "A General Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary integral Equations," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 59, PP. 604-614, 1992.
14. Kellogg, O. D., Foundation of Potential Theory, Frederick Ungar Publishing Company, New York., 1929.

### پیوست ۱

در این پیوست نحوه به دست آوردن مقادیر معین  $H_i$  نشان داده می شود. با استفاده از معادله (۱۰) داریم

$$\frac{1}{\rho_\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} \sqrt{1 + \gamma B \rho_\varepsilon + D \rho_\varepsilon^2 + \varepsilon \rho_\varepsilon^3} ; \rho_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{A} ; D = \frac{A^2 + B^2}{A^2}$$

مقدار  $\varepsilon$  نیز برای جزء هشت گره ای مخالف صفر و برای چهار گره ای برابر صفر است و نحوه به دست آوردن آن به عهده خواننده گذاشته می شود. در این صورت خواهیم داشت

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{A^2 + \gamma AB + D \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{A} \varepsilon^3}$$

با استفاده از بسط چند جمله ای می توان جمله های معین  $H_i$  را به دست آورد. برای فوق منفرد داریم

$$\frac{1}{\rho_\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon} (A + B\varepsilon + \frac{1}{\gamma} \frac{D}{A} \varepsilon^2 + \frac{1}{\gamma} \frac{\varepsilon}{A} \varepsilon^3) ; \text{ if } \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho_\varepsilon} \approx \frac{A}{\varepsilon} + B \Rightarrow H_\gamma = B$$

برای مافوق منفرد می توان نوشت

$$\frac{1}{\rho_\varepsilon} \approx \frac{A^2}{\varepsilon^2} + \frac{\gamma AB}{\varepsilon} + D - \gamma B^2 + \frac{\varepsilon}{A} \varepsilon ; \text{ if } \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow H_\gamma = D - \gamma B^2$$

به همین ترتیب برای منفردیت رتبه پنج به دست می آید

$$\dots \Rightarrow H_\delta = \frac{\gamma}{\gamma} (\varepsilon + BD - \frac{1}{\gamma^2} B^3)$$

### پیوست ۲

آنچه در زیر ملاحظه می کنید عبارات تحلیلی توابع  $f$  و  $\frac{df}{dp}$  در نقطه منفرد است که به ترتیب برای مثالهای ۲ و ۳ به ازای  $g=1$  و  $g=1,2$  به دست آمده اند. رتبه منفردیت نیز در این دو مثال، فوق منفرد ( $n=3$ ) در نظر گرفته شده است. در حالت کلی تابع  $f$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$f(\rho, \phi) = \frac{g \cdot J}{M^n}(\rho, \phi)$$

برای مثال ۲ و ۳ می توان نوشت

$$f(\rho, \phi) = \frac{(B_1 + B_2 \rho + O(\rho^2))J(\rho, \phi)}{M^r(\rho, \phi)} \quad ; \quad f(\rho, \phi) = \frac{J(\rho, \phi)}{M^r(\rho, \phi)}$$

از تعاریف داریم

$$J = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad ; \quad x_i = \sum_c \Phi_c(\xi_1, \xi_2) x_i^c$$

$\Phi_c$  نیز از توابع شکل لاگرانژند. بدین ترتیب می توان مشتقهای زیر را به دست آورد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial \xi_1} = \cos \phi \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} = \frac{\sin \phi}{\rho} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_2} + \frac{\partial x_1}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial \xi_2} = \sin \phi \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} = \frac{\cos \phi}{\rho} \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} &= A_1 \cos \phi - A_1' \sin \phi + (2A_2 \cos \phi - A_2' \sin \phi)\rho + O(\rho^2) \\ \Rightarrow J(\rho, \phi) &= A_1 B_1' - A_1' B_1 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right)_p = \text{cte} = J. \end{aligned}$$

بنابراین تابع  $f(\rho, \phi)$  در مثالهای ۲ و ۳ به ترتیب زیر به دست می آیند.

$$f(\rho, \phi) = \frac{B_1(\phi)}{A^r(\phi)} J \quad ; \quad f(\rho, \phi) = \frac{1}{A^r(\phi)} J.$$

در نهایت مشتق پاره‌ای تابع  $f$  نسبت به پارامتر  $\rho$  به دست می آیند.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = \frac{B_2 A^r - 2B_1 C}{A^r} J + \frac{B_1}{A^r} \left. \frac{\partial J}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = \frac{\left. \frac{\partial J}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} A^r - 2J \cdot C}{A^\Delta}$$

به طوری که

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 2(A_2 B_1' - A_1' B_2) + A_1 B_2' - A_2' B_1; \quad C = A_1 A_2 + B_1 B_2$$

### پیوست ۳

در این پیوست جوابهای مثالهای ۱ و ۲ که به طور تحلیلی به دست آمده‌اند به قرار زیر می باشند.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{y - \rho/\epsilon}{[(x - \rho/\epsilon)^2 + (y - \rho/\epsilon)^2]^{3/2}} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{[(x-0/4)^2 + (y-0/6)^2]^{1/2}} \right) dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \left( \frac{dx}{[0/16 + (x-0/4)^2]^{1/2}} - \int_{-1}^1 \frac{dx}{[2/56 + (x-0/4)^2]^{1/2}} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh^{-1} \left( \frac{x-0/4}{0/4} \right) \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh^{-1} \left( \frac{x-0/4}{1/6} \right) \Big|_{-1}^1 \\
&= -\sinh^{-1}(1/5) - \sinh^{-1}(3/5) + \sinh^{-1}(0/3\sqrt{5}) + \sinh^{-1}(0/8\sqrt{5})
\end{aligned}$$

$$\approx -2/0.3591$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x-0/6}{[(x-0/6)^2 + y^2]^{3/2}} dx dy \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{(x-0/6)^2 + y^2} \right) dy \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int_{-1}^1 \frac{dy}{0/16 + y^2} - \int_{-1}^1 \frac{dy}{2/56 + y^2} \right) \\
&= -1/25 \tan^{-1} \left( \frac{y}{0/4} \right) \Big|_{-1}^1 + 0/3125 \tan^{-1} \left( \frac{y}{1/6} \right) \Big|_{-1}^1 \\
&= 0/625 \tan^{-1}(0/625) - 2/5 \tan^{-1}(2/5)
\end{aligned}$$

$$\approx -2/6266.03$$