

## پاسخ ارتعاشات طولی و عرضی تیرها از روش "تحلیل آماری انرژی"

ابراهیم اسماعیل زاده\* و عبدالرضا اوحدی همدانی\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۱/۲۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۶/۸/۲۵)

چکیده - برای غلبه بر مشکلات اساسی که روش کارا و موثر اجزای محدود در تحلیل دینامیکی سازه‌های پیچیده و خصوصاً در محدوده فرکانسی متوسط و بالا دارد، استفاده از روش تحلیل آماری انرژی<sup>۱</sup> و تکنیک جریان قدرت توصیه می‌شود. از آنجایی که اساس روش تحلیل آماری انرژی بر پاسخ متوسط سازه و خصوصیات آماری مودهای تشدید استوار است، لذا کاربرد موثر آن در مواردی نظیر چگالی مودال بالا، همپوشانی مودال بالا و همچنین طول موجهای کوتاه است. در کلیه موارد بالا پاسخ متوسط مقداری واقعی و قابل قبول است و در مقابل، روش اجزای محدود غیر دقیق است.

در این مقاله پس از بیان مشکلات اساسی روش اجزای محدود در فرکانسهای بالا، به مشخصات و کاربردهای روش تحلیل آماری انرژی و جریان قدرت اشاره شده است. پس از تشریح اصول پایه روش تحلیل انرژی، مفاهیم اساسی روش انرژی عمومی بیان شده و در ادامه فرمولبندی روش مذکور برای بررسی ارتعاشات طولی میله‌ها و ارتعاشات عرضی تیرها ارائه شده است. نهایتاً با تشریح نحوه ارضای شرایط مرزی انرژی، تحلیل جریان انرژی یک میله و یک تیر با تکیه گاه کشسان تحت تحریک نیروی هارمونیک آورده شده است.

## Longitudinal and Transversal Vibration Response of Beams by Statistical Energy Analysis (SEA)

E. Esmailzadeh and A.R. Ohadi

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology

**ABSTRACT-** *The useful and efficient method of Finite Element (FEM) has a drawback for dynamic analysis of complex structures, especially in the medium and high frequency range. To overcome this fundamental difficulty, application of Statistical Energy Analysis (SEA) and power flow technique has been suggested. As the SEA is based on the average response of structure and statistical properties of its resonant modes, SEA is found to be effective in cases like high modal density, high modal overlap and in short wave length. In these cases, the average response is found to be both real and an acceptable value, contrary to the FEM which is not accurate enough.*

\*\* دانشجوی دکترا

\* استاد

فهرست علائم

$E, E_0$	مدول کشسان حقیقی و مختلط	P	جریان انرژی فعال لحظه‌ای	W	چگالی انرژی کل لحظه‌ای
$F_{ex}$	اندازه نیروی خارجی	Q	جریان انرژی نافع لحظه‌ای	$Z, Z_0$	امپدانس
Im	قسمت موهومی هر عدد مختلط	Re	قسمت حقیقی هر عدد مختلط	$\Pi$	جریان انرژی مختلط لحظه‌ای
$k, k_0$	عدد موج حقیقی و مختلط	s	سطح مقطع میله	$\Pi_{diss}$	انرژی تلف شده
$K_T, K_{sp}, K_0$	سختیهای پیچشی و انتقالی فنرهای تکیه گاه	T	چگالی انرژی جنبشی	$\varepsilon, \sigma$	تنش و کرنش
L	چگالی انرژی لاگرانژین لحظه‌ای	u	جابه‌جایی لحظه‌ای	$\eta$	میرایی سازه‌ای
$M_{sij}$	قابلیت انتقال	U	چگالی انرژی پتانسیل لحظه‌ای	$\omega$	فرکانس
		V	سرعت لحظه‌ای	$\rho$	چگالی

*In this study, the fundamental difficulties of FEM in the high frequency range are explained and then the advantages and applications of SEA and power flow technique are presented. Moreover, a description of SEA basis, fundamental concepts of General Energy Method (GEM) are explained and formulated to be used in the longitudinal and transversal vibrations of beams. Finally, by satisfying the energy boundary conditions, the energy flow analysis of rods and beams with elastic support and under harmonic excitation are investigated.*

۱- مقدمه

در طی سالهای اخیر مهندسان به تحلیل ارتعاشی سازه‌ای - آکوستیکی در محدوده فرکانسی متوسط و بالا توجه خاصی نشان داده‌اند. برای مهندسانی که در راستای کاهش سطح نوفه<sup>۲</sup> و ارتعاش فعالیت می‌کنند شناخت مسیر انتشار انرژی ارتعاشی حائز اهمیت است. در بسیاری از موارد، ارتعاشات ناشی از ماشین آلات از طریق سازه آنها منتقل شده و به صورت صدا در محیط منتشر می‌شود. در سازه‌های پیچیده، توانایی شناسایی نحوه انتقال انرژی در سازه امکان کنترل صدای ناشی از سازه<sup>۳</sup> را فراهم می‌سازد. بر این اساس به منظور کنترل و کاهش جابه‌جاییها، تنشها و نوفه‌های ناشی از انتشار آکوستیکی، لازم است که پاسخ دینامیکی به صورت مناسب تخمین زده شود.

در سه دهه گذشته مدل‌های دینامیک سازه‌ای بر مبنای روش اجزای محدود و همراه با تحلیل تجربی مودال استوار شده است. باید توجه داشت که شکست سازه‌ای در مسایل هوافضایی به دلیل هزینه‌های بسیار زیاد آنها قابل قبول و توجیه پذیر نیستند لذا این مسئله بر پیشرفت روشهای فوق الذکر نقش اساسی را ایفا کرده است. امروزه این ابزار در صنایع مختلف نظیر صنعت خودرو و برای تحلیل‌های ان.وی.اچ<sup>۴</sup> اهمیت فراوان یافته‌اند [۱]. اما باید توجه داشت که روش اجزای محدود در سیستمهای پیچیده سازه‌ای -

آکوستیکی به تحلیل فرکانسهای پایین محدود می‌شود. با افزایش فرکانس، طول موج ارتعاش کاهش یافته لذا برای مدلسازی مناسب ارتعاشات با فرکانس بالا لازم است که مرتبه تابع شکلی افزایش داده شده و یا اندازه جزء کاهش یابد [۲ و ۳]. به عبارتی برای حصول نتایج دقیق در فرکانسهای بالا مدل‌های اجزای محدود بسیار بزرگ و پرهزینه لازم است. علاوه بر آن روش اجزاء محدود اساساً یک تکنیک تحلیلی مشخص و غیر اتفاقی است. فرض می‌شود که کلیه داده‌های مساله معلوم و مشخص است. در فرکانسهای پایین داده‌هایی نظیر خصوصیات ماده و یا رفتار اتصالات کاملاً شناخته شده‌اند و حل مسئله به تغییرات آنها حساسیت زیادی ندارد. ولی در فرکانسهای بالا عدم شناخت کامل از جزئیات خواص هندسی و فیزیکی سیستم باعث می‌شود که دو سیستم مشابه یا یک سیستم و مدل عددی آن یا یک سیستم و مدل تجربی آن رفتار کیفی مشابهی نداشته باشند اگرچه رفتار کمی آنها یکسان باشد. در فرکانسهای بالا حل مسئله به صورت قابل توجهی به تغییرات داده‌ها حساس است. در نتیجه، نتایج تحلیل عددی دقیق نظیر اجزای محدود نمی‌تواند قابل اطمینان باشد. تخمین تغییرات آماری پاسخ سازه‌ای - آکوستیکی قسمت مهمی از حل مسائل ارتعاشی سازه‌ای در فرکانسهای بالاست.

در سالهای اخیر، به منظور حل مشکلات بالا روشهای مختلفی ارائه شده است که از جمله می‌توان به روش سختی دینامیکی

تحلیل آماری انرژی، روش سحیل شدت موج<sup>۳</sup> و روش تحلیل مودال جانبی<sup>۶</sup> اشاره کرد [۴]. "دول و کوبوتا" [۵] نشان داده‌اند که پاره ای از نتایج تحلیل آماری انرژی را می‌توان به صورت حد نهایی تحلیل مودال کلاسیک به دست آورد و بر این اساس این دیدگاه را تحلیل مودال جانبی نامیده‌اند. امروزه تحلیل آماری انرژی یکی از متداولترین و مناسبترین تکنیکها برای بررسی پاسخ دینامیکی سیستمهای سازه ای - آکوستیکی با چگالی بالا می‌باشد. با تشریح تبادل انرژی بین سیستم مختلف با طبیعت یکسان یا متفاوت می‌توان تحلیل انرژی سیستمهای مکانیکی - آکوستیکی مرتعش را انجام داد. اگر یک سازه پیچیده به صورت مجموعه ای از زیر سیستمها و یا گروه مدها مدل شود، آن گاه این روش پاسخ دینامیکی سیستم را به شکل متوسط زمانی و مکانی می‌دهد. اما باید توجه داشت که در روش تحلیل آماری انرژی صرفاً یک سطح انرژی مطرح است و با استفاده از این روش نمی‌توان تغییرات پاسخ هر زیر سیستم را به دست آورد.

از آنجایی که اساس روش تحلیل آماری انرژی بر پاسخ متوسط سازه و خصوصیات آماری مودهای تشدید آن استوار است، لذا کاربرد موثر تحلیل آماری انرژی در مواردی نظیر چگالی مودال بالا (تعداد مودها در محدوده فرکانسی واحد)، همپوشانی مودال<sup>۷</sup> بالا و همچنین طول موجهای کوتاه است. در کلیه موارد بالا پاسخ متوسط مقداری واقعی و قابل قبول است و در مقابل روش اجزای محدود غیر دقیق است. باید توجه داشت که تحلیل آماری انرژی و روش اجزای محدود در مقابل یکدیگر قرار ندارند بلکه مکمل یکدیگرند. روش اجزای محدود برای فرکانسهای پایین و تحلیل آماری انرژی برای فرکانسهای بالا به کار گرفته می‌شوند. همان گونه که تحلیل تجربی مودال از لحاظ آزمایشگاهی متمم روش اجزای محدود است، تکنیک تحلیل آماری انرژی نیز دارای زمینه تجربی است.

روش جریان قدرت به عنوان تعمیم تحلیل آماری انرژی مطرح شده است و در آن تغییرات انرژی برای هر زیر سیستم، همانند سیستم کل، در نظر گرفته شده است. برای هر زیر سیستم با استفاده از اتلاف انرژی و ضرایب انتقال ارتعاش رابطه بین چگالی انرژی ارتعاش و جریان آن نوشته می‌شود. در نتیجه، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم نظیر معادله انتقال گرما حاصل شده که به صورت تحلیلی یا تقریبی حل می‌شود. در روش جریان قدرت، مسئله نحوه نمایش منبع دینامیکی و تشریح وضعیت

انرژی در ناپیوستگیها مطرح است.

روشهای جریان قدرت و تحلیل آماری انرژی کاربرد قابل توجهی در مسائل مختلف صنعتی و تحقیقاتی پیدا کرده‌اند. "ول اور و برنهارد" [۳] روش جدیدی ارائه کرده‌اند که برای محدوده فرکانسی میانی بسیار مناسب است. در این روش جریان انرژی مکانیکی مشابه جریان گرمایی در انتقال گرما مدل می‌شود. مزیت عمده این روش نسبت به فرمولبندی تغییر مکان روش اجزای محدود آن است که صرفاً تغییرات انرژی مدل می‌شود. از آنجایی که حتی برای مودهای مرتبه بالا تغییرات انرژی یکنواخت تر از تغییرات تغییر مکان است لذا فرمولبندی جریان انرژی در یک محدوده فرکانسی وسیع موثر و مفید خواهد بود. نویسندگان مقاله روش خود را برای تیر و میله به کار گرفته‌اند. "لازه" و همکاران [۲] نیز با استفاده از تعاریف چگالی انرژی کل<sup>۸</sup>، چگالی انرژی لاگرانژی<sup>۹</sup> و جریان انرژی فعال و نفعال<sup>۱۰</sup>، دو روش انرژی عمومی و انرژی ساده شده را برای بررسی رفتار تیرها و میله‌های یکسر گیردار ارائه داده و نتایج حاصل از آنها را با نتایج روش فرمولبندی تغییر مکان مقایسه کرده‌اند. جریان انرژی گذرا بین دو تیر توسط "پنینگتن" مورد بررسی قرار گرفته است [۶]. دو تیر کوپل از یک انتها تحریک ضربه شده و پاسخ در انتهای دیگر بررسی شده است. پاسخ با استفاده از حل دقیق موج حاصل شده و با حل تقریبی انرژی آماری گذرا مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش تقریبی برای موجهای طولی و خمشی دقیق است. "برسین" [۴] با استفاده از روشهای مختلف سختی دینامیکی، تحلیل آماری انرژی و تحلیل شدت موج نشان داده است که ارتعاشات درون صفحه ای اثر قابل توجهی بر جریان انرژی بین صفحات کوپل دارد. وی بیان کرده است که به جز برای سازه‌های ساده، نادیده گرفتن مودهای درون صفحه‌ای باعث خطای قابل توجهی در تخمین انرژی سیستم می‌شود. "بیاله و اکراست" [۷] با تعمیم روش ارائه شده توسط "میلر و فون فلو توو" [۸] به بررسی جریان قدرت در قابهای دو بعدی و سه بعدی پرداخته‌اند. هدف آنها ارائه یک روش ماتریسی با ماهیت رایانه‌ای مناسب بوده تا بتوان قابهای پیچیده با مودهای چندوجه را بررسی کرد. آنها مودهای خمشی، پیچشی و محوری را در نظر گرفته‌اند. در این مقاله نتایج روش جریان قدرت با نتایج روش اجزای محدود مقایسه شده و تطابق خوب آنها نشان داده شده است.

اگرچه لازم به ذکر است که راندمان خوب محاسباتی روش جریان قدرت برای محدوده فرکانسی متوسط قابل توجه است. "ماگرانز" در مقاله خود کاربرد تحلیل آماری انرژی در مسائل آکوستیک ساختمان را نشان داده است. همچنین "هینا" و همکاران [۹] با به کارگیری روش مذکور انتشار صوت ناشی از سازه را در سازه‌های کشتیهای بزرگ تخمین زده‌اند. استفاده روزافزون تحلیل آماری انرژی در بررسی نطفه داخلی خودرو [۱۰] یکی دیگر از مهمترین کاربردهای این روش در صنایع امروز جهان است. اخیراً تعدادی از محققان در راستای ارائه یک روش تلفیقی از تحلیل آماری انرژی و روش اجزای محدود فعالیت داشته‌اند [۱۱].

#### ۲- اصول روش تحلیل آماری انرژی

مقالات متعددی در رابطه با روش تحلیل آماری انرژی ارائه شده است. در اینجا هدف تشریح جزئیات نظریه تحلیل آماری انرژی نبوده، بلکه ارائه اطلاعات کافی به منظور بیان تفاوت بین این روش و سایر روشها و تعریف واژگان مورد استفاده در بخشهای بعدی مورد نظر است. در مرجع [۱۲] جزئیات روش مذکور آورده شده است.

فلسفه اصلی روش تحلیل آماری انرژی را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

(الف) - سیستم (سازه) اصلی به تعدادی زیر سیستم تقسیم شده و تحلیل سیستم با شناسایی این زیر سیستمها آغاز می‌شود.

(ب) زیر سیستمها می‌توانند اجزای سازه ای کشسان خطی و یا انواع موج داخل قطعه نظیر موجهای خمشی، طولی و برشی در ورقها باشند.

(ج) - تحلیل آماری انرژی از انرژی ارتعاشی برای تشریح حالت سیستم استفاده می‌کند و بنابراین برای هر زیر سیستم، مجهول مورد نظر سطح انرژی آن زیر سیستم است.

(د) - انرژی که در هر زیر سیستم از بین می‌رود با ضریب اتلاف انرژی که به سایر زیر سیستمها متصل می‌شود با ضریب اتلاف کوپلینگ مشخص می‌شود.

(ه) - در تحلیل آماری انرژی با در نظر گرفتن جریان انرژی، یک مجموعه معادله‌های خطی برحسب سطوح انرژی زیر سیستمها حاصل می‌شود.

معمولاً شرایط زیر برای کاربرد موفقیت آمیز روش تحلیل

آماري انرژی لازم است:

- (۱) - زیر سیستمها باید به صورت ضعیف کوپل باشند.
- (۲) - ضریب همپوشانی مودال که نسبت فاصله متوسط بین فرکانسها به پهنای باند مودال متوسط است، باید کمتر از واحد باشد.
- (۳) - باند فرکانسی باید به اندازه کافی پهن باشد که حداقل شامل پنج تا هفت مود شود.

#### ۳- جریانها و چگالیهای انرژی - روش انرژی عمومی

"ول اور و برنهارد" [۳] معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حاکم بر توزیع انرژی در میله‌ها و تیرها را ارائه داده‌اند. آنها همچنین رابطه کوپلینگ بین تیرها و میله‌ها را بیان کرده‌اند. "لازه" و همکاران [۲] بر این باورند که نمی‌توان به صورت صحیح صرفاً توسط چگالی انرژی کل و جریان انرژی فعال اثر کوپلینگ را نمایش داد. لازم است که شکل دیگری از انرژی و قدرت منظور شود. بر این اساس دو نوع مختلف از جریان و چگالی انرژی را برای میله‌ها و تیرها معرفی کردند. نخست چگالی انرژی کل و جریان فعال که رفتار انتشار سازه‌ای را مشخص می‌نماید و دوم چگالی لاگرانژین و جریان انرژی نا فعال که رفتار مودال سازه را معرفی می‌کند.

در میله‌ها می‌توان رابطه‌ای بین جریان انرژی فعال و جریان انرژی نافع با چگالی انرژی کل و چگالی لاگرانژین برقرار کرد. با جایگزین کردن این روابط در تعادل جریان قدرت دو معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حاصل می‌شود. این معادله‌ها شامل چگالی انرژی کل و چگالی لاگرانژین‌اند. روش فوق الذکر روش عمومی انرژی است که برای میله‌ها و تیرها قابل استفاده است. قبل از اینکه روش انرژی عمومی برای تحلیل ارتعاشی میله با تکیه گاه کشسان به کار گرفته شود لازم است که تعاریف چگالی انرژی کل، چگالی لاگرانژین و جریان انرژی فعال و نافع بیان گشته و معادله تعادل انرژی به شکل کلی ارائه شود.

برای سیستمهای یک بعدی ایزوتروپیک خطی کشسان با مدول مختلط  $E = E_0(1 + i\eta)$  و میرایی سازه‌ای کوچک  $\eta \ll 1$  اگر تحت نیروهای هارمونیک یا فرکانس  $(\omega/2\pi)$  قرار بگیرند، آن گاه چگالی انرژی جنبشی لحظه‌ای، چگالی انرژی پتانسیل لحظه‌ای و جریان انرژی فعال لحظه‌ای در نقطه M متعلق به تیر از معادله‌های زیر حاصل می‌شود:

معادله (۵) تعادل جریان انرژی هارمونیک کلاسیک است و بیان می‌کند که در حالت ماندگار بدون نیرو، جریان انرژی فعال خالص ورودی به حجم کنترل متناسب با میرایی و متوسط زمانی دانسته انرژی پتانسیل است. معادله دوم (۶) مربوط به جریان انرژی نافع است و نشان می‌دهد که جریان نافع خالص تابع میرایی نیست و متناسب با متوسط زمانی چگالی انرژی لاگرانژین است.

#### ۴- روش انرژی عمومی برای میله‌ها و تیرها

معادله ارتعاش طولی میله تحت بار متمرکز هارمونیک در نقطه

$x_0$  عبارت است از:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = \frac{F_{ex}}{Es} \delta(x - x_0) e^{i\omega t} \quad (7)$$

که در معادله بالا  $k^2 = k_0^2 (1 - i\eta)$ ،  $k_0^2 = \frac{\rho}{E} \omega^2$  است. انرژی پتانسیل لحظه‌ای، انرژی جنبشی لحظه‌ای و جریان انرژی فعال لحظه‌ای برابرند با:

$$T = \rho \frac{s}{\gamma} \text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2, U = \frac{1}{\gamma} \text{Re} \left( Es \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$P = -\frac{1}{\gamma} \text{Re} \left( Es \frac{\partial u}{\partial x} \right) \text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

مقدار متوسط زمانی مقادیر فوق الذکر عبارت اند از:

$$\langle T \rangle = \frac{\rho s \omega^2}{\gamma} u \cdot u^*, \langle U \rangle = \frac{\rho s \omega^2}{\gamma k_0^2} \frac{du}{dx} \cdot \frac{du^*}{dx}, \quad (9)$$

$$\langle \Pi \rangle = -\frac{iEs}{\gamma} \frac{du}{dx} \cdot u^*$$

با جایگزین کردن جواب همگن معادله (۷) یعنی:

$$u(x) = a_1 e^{ikx} + a_2 e^{-ikx} \quad (10)$$

$$T(M, t) = \rho \frac{s}{\gamma} \text{Re} (\vec{V}) \cdot \text{Re} (\vec{V})$$

$$U(M, t) = \frac{1}{\gamma} \text{Re}(\sigma) \cdot \text{Re}(\varepsilon)$$

$$P(M, t) = -\frac{1}{\gamma} \text{Re}(\sigma) \cdot \text{Re} (\vec{V}) \quad (1)$$

حاصل جمع و تفریق چگالیهای انرژی جنبشی و پتانسیل به ترتیب انرژی کل لحظه‌ای و انرژی لاگرانژین را می‌دهد.

$$W = T + U, L = T - U \quad (2)$$

متوسط زمانی کمیت‌های معادله (۱) عبارت اند از\*:

$$\langle T \rangle = \frac{\rho s}{\gamma} \text{Re} (\vec{V} \cdot \vec{V}^*), \langle U \rangle = \frac{1}{\gamma} \text{Re}(\sigma : \varepsilon^*) \quad (3)$$

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{\gamma} \text{Re} (\sigma \cdot \vec{V}^*)$$

نوع دیگر جریان انرژی که جریان انرژی نافع است از معادله

$$\langle Q \rangle = -\frac{1}{\gamma} \text{Im} (\sigma \cdot \vec{V}^*) \quad (4)$$

حاصل می‌شود.

در حالتی که انرژی ورودی وجود نداشته باشد، معادله تعادل جریان انرژی مختلط عبارت است از [۱۲]:

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{\Pi} \rangle + \langle \Pi_{diss} \rangle + \gamma i \omega \langle L \rangle = 0 \quad (5)$$

که  $\langle \Pi \rangle = \langle P \rangle + i \langle Q \rangle$  است. در حالت میرایی هیستریک انرژی تلف شده مقداری حقیقی و متناسب با چگالی انرژی پتانسیل و فوکانس است. بر این اساس می‌توان معادله تعادل انرژی را به دو قسمت حقیقی و موهومی تبدیل کرد.

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{P} \rangle + \eta \omega (\langle W \rangle - \langle L \rangle) = 0, \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{Q} \rangle + \gamma \omega \langle L \rangle = 0$$

\* - متوسط زمانی تابع  $H = f \cdot g$  که  $f$ ،  $g$  دو متغیر هامونیک مختلط اند عبارت است از  $\langle H \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}(f) \cdot \text{Re}(g) dt = \frac{1}{\gamma} \text{Re}(f \cdot g^*)$

$$\begin{aligned} \langle W(x) \rangle &= A_1 e^{\frac{\eta\omega}{c_0}x} + A_2 e^{-\frac{\eta\omega}{c_0}x}, \\ \langle L(x) \rangle &= B_1 e^{\frac{\gamma i\omega}{c_0}x} + B_2 e^{-\frac{\gamma i\omega}{c_0}x} \end{aligned} \quad (14)$$

که ضرایب  $A_1, A_2, B_1, B_2$  از شرایط مرزی حاصل می‌شوند. معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر اویلر - برنولی تحت بار متمرکز هارمونیک در نقطه  $x_0$  به صورت:

$$\rho s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = F_{ex} \delta(x - x_0) e^{i\omega t} \quad (15)$$

است. جواب عمومی معادله (15) عبارت است از:

$$u(x) = (a_1 e^{ikx} + a_2 e^{-ikx} + b_1 e^{kx} + b_2 e^{-kx}) e^{i\omega t} \quad (16)$$

که در این معادله  $k_0 = (\rho s \omega^2 / EI)^{1/4}$ ,  $k = k_0 (1 - i\eta/\gamma)$  است. برای ارتعاشات عرضی تیر، متوسط زمانی چگالیهای انرژی و جریان انرژی مختلط برابرند با:

$$\langle T \rangle = \frac{\rho s \omega^2}{\gamma} u \cdot u^*, \quad \langle U \rangle = \frac{EI}{\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^* \quad (17)$$

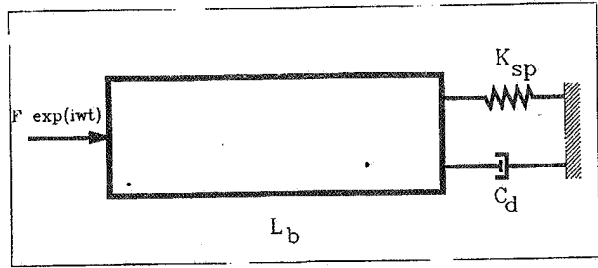
$$\langle \Pi \rangle = \langle P \rangle + i \langle Q \rangle = \frac{-i\omega}{\gamma} \left[ EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot u^* + -EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^* \right]$$

با انجام عملیاتی مشابه آنچه برای میله‌ها بیان شد، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \left( \frac{c_m}{\lambda_m} \right) \frac{d^2 \langle W \rangle}{dx^2} - c_m \lambda_m \langle W \rangle &= 0, \\ \left( \frac{c_m}{\Psi_m} \right) \frac{d^2 \langle L \rangle}{dx^2} + c_m \Psi_m \langle L \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

پارامترهای  $c_m, \lambda_m, \Psi_m$  به ترتیب عبارت‌اند از:  $k + k^*, i(k - k^*), \gamma\omega/k$ . پارامترهای معادله‌های (18) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \langle W(x) \rangle &= C_1 e^{\lambda_m x} + C_2 e^{-\lambda_m x}, \\ \langle L(x) \rangle &= D_1 e^{i\Psi_m x} + D_2 e^{-i\Psi_m x} \end{aligned} \quad (19)$$



شکل ۱- میله با تکیه‌گاه کشسان تحت بار محوری هارمونیک

در معادله تعادل انرژی (5) که در آن  $\langle \Pi_{diss} \rangle = \eta\omega (\langle W \rangle - \langle L \rangle)$  است نتیجه می‌شود:

$$\langle \Pi \rangle = \frac{-c_g}{\lambda} \frac{d\langle W \rangle}{dx} + i \frac{c_g}{\Psi} \frac{d\langle L \rangle}{dx} \quad (11)$$

$c_g = \omega/k$  بوده و برای نسبت میرایی کوچک  $\eta$   $c_0 = \omega/k$ ,  $c_g = c_0 + i(\eta/\gamma)c_0$  است. پارامترهای  $\lambda$  و  $\Psi$  عبارت‌اند از  $\lambda = \frac{\eta\omega}{c_0}$ ,  $\Psi = \frac{\gamma\omega}{c_0}$ . از قسمت حقیقی و موهومی معادله (11) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{-c_0}{\lambda} \frac{d\langle W \rangle}{dx} - \frac{\eta c_0}{\gamma \Psi} \frac{d\langle L \rangle}{dx}, \\ \langle Q \rangle &= \frac{-\eta c_0}{\gamma \lambda} \frac{d\langle W \rangle}{dx} + \frac{c_0}{\Psi} \frac{d\langle L \rangle}{dx} \end{aligned} \quad (12)$$

پس از مشتقگیری از معادله (11) و جایگزین کردن در معادله (5) دو معادله دیفرانسیل

$$\begin{aligned} - \left( \frac{c_0^2}{\eta\omega} \right) \frac{d^2 \langle W \rangle}{dx^2} + \eta\omega \langle W \rangle &= 0, \\ \left( \frac{c_0^2}{\gamma\omega} \right) \frac{d^2 \langle L \rangle}{dx^2} + \gamma\omega \langle L \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

حاصل می‌شود که معادله حاکم بر چگالی انرژی کل و چگالی انرژی لاگرانژین است. باید توجه داشت که چگالی انرژی کل توزیع هذلولی دارد و حال آنکه توزیع متوسط زمانی چگالی لاگرانژین سینوسی است که در فرکانسهای بالا یا در سازه‌های بینهایت از بین می‌رود. از حل معادله‌های (13) می‌توان متوسط زمانی چگالی انرژی کل و چگالی انرژی لاگرانژین را به دست آورد.

میله شکل (۲)، کمیت‌های سینماتیکی توسط قابلیت‌های انتقال<sup>۱۲</sup> سیستم غیر کوپل ارتباط دارند [۶]:

$$\begin{Bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{s11} & M_{s12} \\ M_{s21} & M_{s22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{s1} \\ F_{s2} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

که  $i, j = 1, 2$ ،  $M_{sij}$  ها معرف قابلیت انتقال بوده و عبارت اند از:

$$M_{s11} = M_{s22} = M_s \frac{(1 + \alpha)}{(1 - \alpha)},$$

$$M_{s12} = M_{s21} = M_s \frac{2\alpha^{1/2}}{(1 - \alpha)}$$

$$\alpha = \exp(-2ikL_b)$$

بدین ترتیب می‌توان با محاسبه امپدانس میله (Z)، مقادیر  $\langle Q \rangle$ ،  $\langle P \rangle$  را با تقریب خوبی به دست آورد:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F_{ex}^2 \frac{1}{\text{Re}(Z)}, \quad \langle Q \rangle = \frac{1}{2} F_{ex}^2 \frac{1}{\text{Im}(Z)} \quad (22)$$

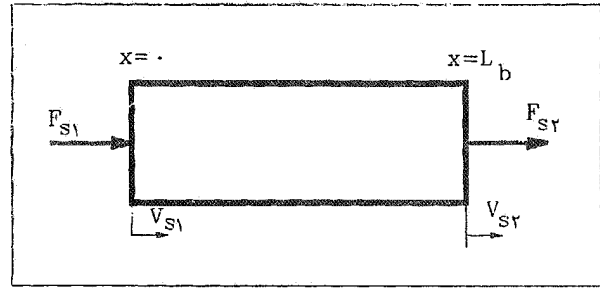
با حل چهار معادله شرط مرزی ضرایب مجهول فوق الذکر، که در حالت کلی کمیت‌های مختلط اند، به دست می‌آیند. برای این منظور یک برنامه رایانه ای توسط نرم افزار Maple نوشته شده است. شکل‌های (۳) و (۴) به ترتیب تغییرات چگالی انرژی کل و جریان انرژی فعال در طول میله را نمایش می‌دهند. نتایج حاصله برای تکیه‌گاه گیردار کاملاً با نتایج ارائه شده در مرجع [۳] منطبق است. تغییرات چگالی انرژی کل برحسب فرکانس (در نقطه  $x=L_b/2$ ) در شکل (۵) و تغییرات چگالی انرژی لاگرانژین در طول میله در شکل (۶) آورده شده است.

در مثالی دیگر تیری با تکیه‌گاه کشسان تحت نیروی عرضی متمرکز هارمونیک در انتها در نظر گرفته می‌شود. مشخصات تیر و بار وارد بر آن عبارت است از:

$$F_{ex} = 1^N, L_b = 1^m, E_0 I = 1.041/\sqrt{Nm^2}, \rho s = 195^{\text{kg/m}^3},$$

$$\eta = 0.01, K_T = 3000^{\text{N/m}}, K_\theta = 2000^{\text{Nm/deg}}$$

مشابه آنچه برای میله بیان شد می‌توان ضرایب مجهول معادله (۱۹)



شکل ۲- نمایش کمیت‌های سینماتیکی دو انتهای میله

با اعمال شرایط مرزی انرژی می‌توان ضرایب معادله (۱۹) را به دست آورد.

### ۵- ارائه دو مثال

در شکل (۱) یک میله با تکیه‌گاه کشسان تحت تحریک محوری هارمونیک نشان داده شده است. مشخصات میله و نیروی وارد بر آن به شرح زیر است:

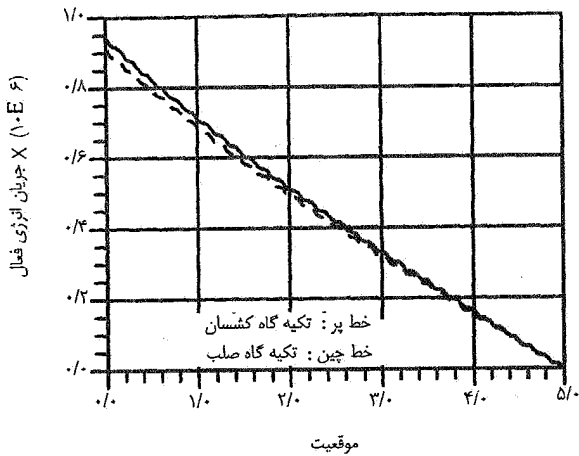
$$F_{ex} = 1^N, L_b = 5^m, E \cdot S = 6 \times 10^6 \text{VN}, \rho s = 234^{\text{kg/m}^3}$$

$$\eta = 0.01, K_{sp} = 10000^{\text{N/m}}, C_d = 10$$

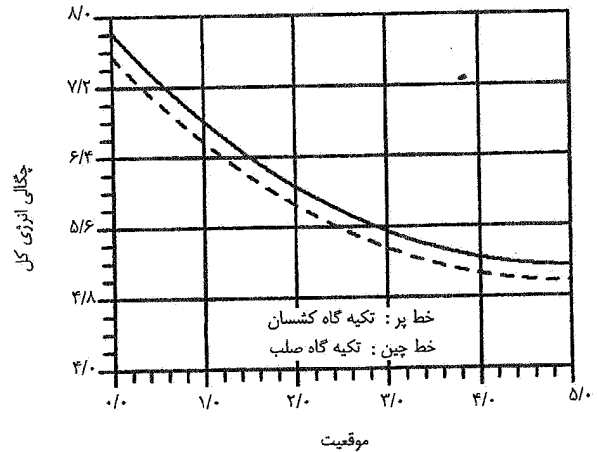
در ابتدا لازم است که شرایط مرزی جابه‌جایی و نیرو به صورت شرایط انرژی تبدیل شوند و سپس از آنجا می‌توان ضرایب مجهول  $A_1, A_2, B_1, B_2$  در معادله (۱۴) را به دست آورد. برای تکیه‌گاه کشسان که جزء میرایی را نیز به همراه دارد می‌توان نوشت:

$$\langle P \rangle = \frac{2\langle W \rangle}{\rho s}, \quad \langle Q \rangle = \frac{-2k}{\rho s \omega} \langle T \rangle \quad (20)$$

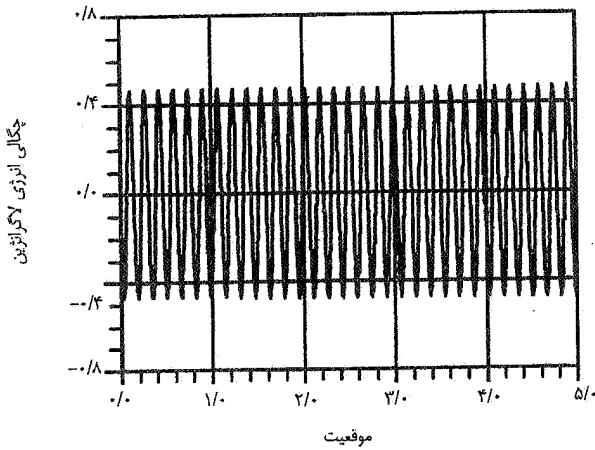
از ترکیب معادله‌های (۱۲)، (۱۵) و تعریف  $\langle T \rangle = \frac{\langle W \rangle + \langle L \rangle}{2}$  دو معادله برحسب ضرایب مجهول حاصل می‌شود. همچنین فرض می‌شود که در نقطه اعمال نیرو جریان انرژی فعال و نافع ورودی معلوم است. به عبارتی  $\langle P \rangle = \langle P \rangle_0, \langle Q \rangle = \langle Q \rangle_0$  است که از اینجا نیز دو معادله دیگر برحسب ضرایب مجهول به دست می‌آید. اما از آنجایی که محاسبه دقیق قدرت ورودی مشکل است، لذا می‌توان از مفهوم امپدانس یک میله نیمه بینهایت ( $Z_0 = \rho s c$ ) استفاده کرد. برای



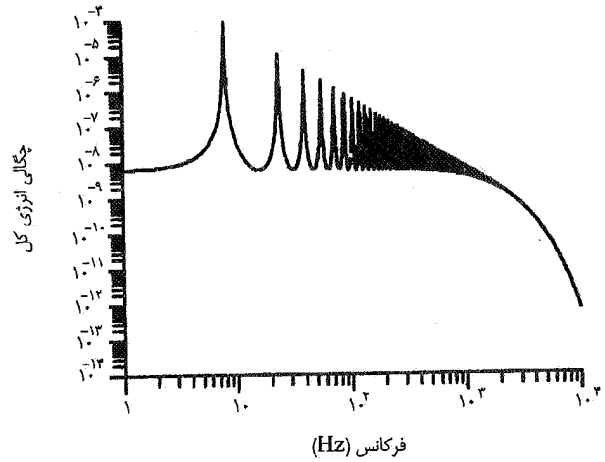
شکل ۴- تغییرات جریان انرژی فعال در طول میله، تکیه گاه کشسان و گیردار (فرکانس ۵۰۰ هرتز)



شکل ۳- تغییرات چگالی انرژی کل در طول میله، تکیه گاه کشسان و گیردار (فرکانس ۵۰۰ هرتز)



شکل ۶- تغییرات چگالی انرژی لاگاریتمی در طول میله، تکیه گاه کشسان (فرکانس ۵۰۰ هرتز)



شکل ۵- تغییرات چگالی انرژی کل میله بر حسب فرکانس، تکیه گاه کشسان ( $x=2/5m$ )

جریان قدرت در حصول پاسخ فرکانسی سازه‌های پیچیده، خصوصاً در محدوده فرکانسی متوسط و بالا، تشریح شده است. از آنجایی که اساس روش تحلیل آماری انرژی بر پاسخ متوسط سازه و خصوصیات آماری مودهای تشدید آن استوار است، لذا کاربرد موثر تحلیل آماری انرژی در مواردی نظیر چگالی مودال بالا، همپوشانی مودال بالا و همچنین طول موجهای کوتاه است.

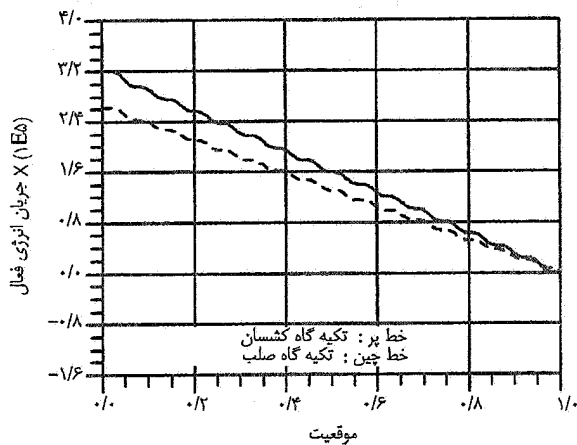
روش انرژی عمومی برای تعیین پاسخ انرژی سازه در فرکانسهای پایین و بالا ارائه شده است. این روش نه تنها رفتار مودال سازه بلکه رفتار انتشاری آن را تشریح می‌کند. از مزایای

را با تبدیل شرایط مرزی غیر کلاسیک نیرو و گشتاور در تکیه گاه کشسان به شرایط مرزی انرژی و همچنین به کارگیری مفهوم امپدانس برای تعیین جریان انرژی فعال و نافع ورودی در نقطه اعمال نیرو به دست آورد. شکل‌های (۷) و (۸) به ترتیب تغییرات چگالی انرژی کل و جریان انرژی فعال در طول تیر را نمایش می‌دهند.

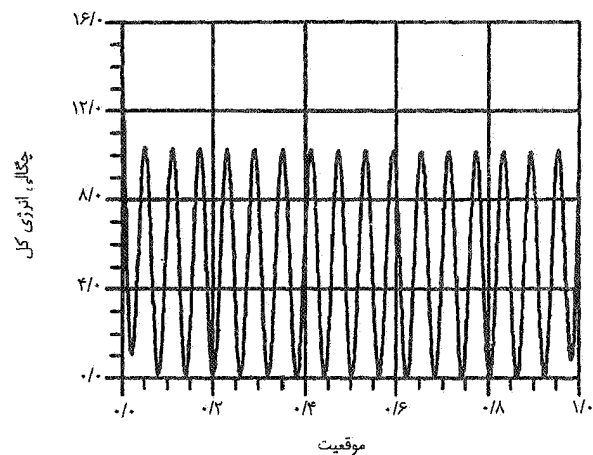
#### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله با استناد به مطالب ارائه شده در مراجع مختلف، اهمیت و کاربرد روش تحلیل آماری انرژی و تکنیک





شکل ۸- تغییرات جریان انرژی فعال در طول تیر، تکیه گاه کشسان (فرکانس ۱۰۰۰ هرتز)



شکل ۷- تغییرات چگالی انرژی کل در طول تیر، تکیه گاه کشسان و گیردار (فرکانس ۱۰۰۰ هرتز)

مناسب است، لذا با ارضای شرایط مرزی انرژی، تحلیل جریان انرژی یک میله و یک تیر با تکیه گاه کشسان تحت نیروی هارمونیک انجام پذیرفته است.

روش مذکور حل مسائل کوپل و بیان رفتار ناپیوستگیها است. مدل ریاضی انرژی ارائه شده در این مقاله برای بررسی ارتعاشات طولی میله و عرضی تیر تحت نیروی هارمونیک

واژه نامه

- |                                      |                              |                                     |
|--------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. statistical energy analysis (SEA) | 5. wave intensity analysis   | 9. Lagrangian energy density        |
| 2. noise                             | 6. asymptotic modal analysis | 10. active and reactive energy flow |
| 3. structure-born                    | 7. modal overlap             | 11. reverbarant                     |
| 4. noise, vibration, harshness (NVH) | 8. total energy density      | 12. mobility                        |

مراجع

- Lalor, N., "Statistical Energy Analysis and its Use as an NVH Analysis Tool," *Sound and Vibration*, January 1996.
- Lase, Y., Ichchou, M. N., and Jezequel, L., "Energy Flow Analysis of Bars and Beams: Theoretical Formulations," *Journal of Sound and Vibration*, 192(1), pp. 281-305, 1996.
- Wohlever, J. C., and Bernhard, R. J., "Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams," *Journal of Sound and Vibration*, 153(1), pp. 1-19, 1992.
- Berein, A. N., "An Assessment of the Effects of In-Plane Vibrations on the Energy Flow Between Coupled Plates," *Journal of Sound and Vibration*, 191(5), pp. 661-680, 1996.
- Dowell, E. H., and Kubotta, Y., "Asymptotic Modal Analysis and Statistical Energy Analysis of Dynamical System," *Journal of Applied Mechanics*, 52, pp. 949-957, 1985.
- Pinnington, R. J., and Lednik, D., "Transient Energy Flow Between Two Coupled Beams," *Journal of Sound and Vibration*, 189(2), pp. 265-287, 1996.
- Beale, L. S., and Accorsi, M. L., "Power Flow in Two-and-Three Dimensional Frame Structures," *Journal of Sound and Vibration*, 185(4), pp. 685-720, 1995.
- Miller, D. W., and Flotow, A. Von, "A Travelling Wave Approach to Power Flow in Structural Networks," *Journal of Sound and Vibration*, 128(2), pp. 145-162, 1989.
- Hynna, P., Klinge, P., and Vouksinen, J., "Prediction

of Structure-Borne Sound Transmission in Large Welded Ship Structures Using Statistical Energy Analysis, *Journal of Sound and Vibration* 180(4), pp. 583-607, 1995.

10. Pinnington, R. J., "Application of SEA and Power Flow Techniques to Automotive, *Noise and Automobile, I-Mech E, Auto. Tech* 93, 1993.

11. Steel, J. A., and Craik, R. J. M., "Statistical Energy Analysis of Structure-Borne Sound Transmission by Finite Element Methods, *Journal of Sound and Vibration*, 178(4), pp. 553-561, 1994.

12. Lyon, R. H., *Statistical Energy Analysis of Dynamical System: Theory and Practice*, MIT Press, London , 1975.