

# معرفی الگوریتم جدید برای محاسبه پاشندگی در موجبر نوری

سعید فیض\* و سعید همتی\*\*

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۱۱/۲۷ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۷/۱۱/۱)

چکیده - یکی از عوامل محدودکننده ظرفیت کانالهای مخابراتی فیبر نوری مکانیزم پاشندگی نوری است. بررسی دقیق پاشندگی ماده اغلب بسیار پیچیده است و تنها در شرایط خاص و با پذیرفتن فرضهای متعدد بررسی شده است. یکی از بهترین روشهای بررسی پاشندگی ماده توسط مارکوس، که خود یکی از پیشگامان بررسی موجبرهای عایق است، ارائه شده است. در این مقاله ضمن اشاره مختصر به روش ارائه شده توسط مارکوس الگوریتم جدیدی پیشنهاد می شود که بر مبنای آن می توان پاشندگی ماده را با دقت بیشتری تعیین کرد. در روش جدید پیشنهادی، نیازی به پیش فرضهای ساده کننده نیست و برخلاف روش مارکوس که منابع نوری خاصی را در نظر گرفته است، این روش برای همه منابع نوری قابل استفاده است.

## Dispersion Evaluation In Optical Wave Guides

S. Feiz and S. Hemati

Department of Electrical Engineering, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** One of the factors which limits the transmission capacity of the fiber optics communication channel is the material dispersion. Exact analytical study of the material dispersion is often complex and involves calculating the derivatives of the refractive index of the core. These calculations are too cumbersome to do, especially for high-order derivatives. So material dispersion has only been studied analytically in certain circumstances and with many simplifying assumptions. One of the best of such studies was done by Marcuse [10-12]. In this article, a new algorithm is presented which can be used to determine material dispersion more precisely. In this new approach, there is no need for simplifying assumptions and unlike the method in [10-13], it can be used for all kinds of optical sources.

این چنین سیستمهایی به شدت نسبت به پاشندگی حساس اند و در صورت وجود پاشندگی پدیده های غیرخطی نوری می توانند اعوجاج شدیدی در شکل موج ایجاد کنند [۲-۳]. بنابراین تنها هنگامی می توان به یک انتقال خوب دست یافت که طول موج

۱- مقدمه

حداکثر توان قابل انتقال در فیبرهای نوری توسط پدیده های غیر خطی محدود می شود و این امر یک محدودیت جدی در سیستمهایی که طول خط در آنها زیاد است، به حساب می آید [۱].

\*\* کارشناسی ارشد

\* استادیار

## ۲- شکل بسته برای مشتقات ضریب شکست نسبت به طول موج و فرکانس زاویه‌ای

نخست معادله (۱) با تغییر نام پارامترها به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{2A_k \lambda^2}{\lambda^2 - B_k} \quad (2)$$

که در آن  $B_k = \lambda_{1k}$  و  $G_k = 2A_k$

حال اگر نمادهای جدیدی براساس معادله‌های زیر تعریف شود

$$S_k = \frac{2A_k \lambda^2}{\lambda^2 - B_k} \quad (3)$$

$$S_{k1} = \frac{A_k \lambda}{\lambda - B_k} \quad (4)$$

$$S_{k2} = \frac{A_k \lambda}{\lambda + B_k} \quad (5)$$

خواهیم داشت:

$$S_k = S_{k1} + S_{k2} = \frac{A_k \lambda}{\lambda - B_k} + \frac{A_k \lambda}{\lambda + B_k} \quad (6)$$

لازم است به این نکته توجه شود که حاصل جمع  $S_k$ ها بر روی  $k$ ها برابر سمت راست معادله (۲) است. حال اگر اولین و دومین مشتق  $S_k$  نسبت به  $\lambda$  محاسبه شود آن‌گاه خواهیم داشت

$$S'_k = S'_{k1} + S'_{k2} = -A_k B_k (\lambda - B_k)^{-2} + A_k B_k (\lambda + B_k)^{-2} \quad (7)$$

$$S''_k = S''_{k1} + S''_{k2} = (-1)(-2)A_k B_k (\lambda - B_k)^{-3} + (-1)(-2)A_k B_k (\lambda + B_k)^{-3} \quad (8)$$

با استقراء ریاضی می‌توان نشان داد که:

$$S_k^{(m)} = S_{k1}^{(m)} + S_{k2}^{(m)} = (-1)^m m! A_k B_k (\lambda - B_k)^{-(m+1)} + (-1)^{m+1} m! A_k B_k (\lambda + B_k)^{-(m+1)} \quad (9)$$

و به عبارت دیگر

سیگنال با خطایی در حد کمتر از نانومتر، بر طول موج پاشندگی صفر سیستم فیبر نوری منطبق باشد [۴] و از آنجایی که کنترل پاشندگی ماده دارای اهمیت زیادی است بررسی دقیق خواص پاشندگی ضروری خواهد بود. در طی سالهای اخیر روشهای متعددی که مبتنی بر آزمایش‌اند، ارائه شده است [۵-۷]. روشهای متعددی هم وجود دارد که پاشندگی ماده را به صورت تحلیلی ابتدا می‌کنند [۸-۱۳].

برای تعیین پاشندگی به صورت تحلیلی، ابتدا مشتقات ضریب شکست هسته فیبر نوری را نسبت به طول موج تعیین می‌کنیم. تغییرات ضریب شکست هسته فیبر SI نسبت به طول موج اغلب با معادله سلمیر بیان می‌شود [۹]. این معادله وابستگی ضریب شکست مواد شفاف با طول موج نور در خلا را به شکل زیر بیان می‌کند

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{G_k \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (1)$$

که در آن،  $n$  بیانگر ضریب شکست ماده شفاف،  $\lambda$  طول موج نور در خلا،  $G_k$ ،  $\lambda_k$  هم اعداد ثابتی‌اند که به نوع ماده شفاف بستگی دارند.

یکی از اهداف اساسی در مطالعات تحلیلی پاشندگی، یافتن طول موجی است که در آن حداقل پاشندگی در فیبر SI ایجاد می‌شود. برای تعیین دقیق این طول موج، محاسبه مشتقات مراتب بالای ضریب شکست  $n$  ضروری است. اما هیچ عبارت دقیقی به شکل بسته برای مشتقات  $n$  ارائه نشده است و با توجه به پیچیدگی زیاد روابط حاکم بر پاشندگی، بالاترین مرتبه مشتقی که در محاسبه پاشندگی ماده به کار گرفته شده است مشتق مرتبه سوم ضریب شکست بوده است [۸-۱۳].

به همین لحاظ اولین گام منطقی برای محاسبه دقیق پاشندگی، تعیین مشتقات ضریب شکست است و چون اغلب روشهای عددی برای محاسبه این مشتقات کارآمد نیستند [۱۵] در این مقاله ابتدا الگوریتمی برای محاسبه مشتقات ضریب شکست هسته نسبت به طول موج و فرکانس زاویه‌ای ارائه خواهد شد و پس از آن الگوریتمی را برای محاسبه پاشندگی ماده ارائه خواهیم کرد.

محاسبه شود. ما معادله بالا را برای محاسبه مشتقات ضریب شکست سیلیکای خالص به کار بردیم. معادله سلیمیر سیلیکای خالص با دقت زیاد توسط مالیستون اندازه گیری شده است [۱۴]. شکل‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتایج حاصل از به کارگیری معادله (۱۴) را نشان می‌دهد. بسیاری از مولفان طول موج پاشندگی صفر برای سیلیکای خالص را بین طول موج ۱/۲۷ تا ۱/۲۸ میکرومتر اعلام کرده‌اند. در مرجع [۹] این مقدار برابر ۱/۲۷۶ میکرومتر داده شده است و در مرجع [۱۰] گفته شده است که این مقدار برابر ۱/۲۷۳ میکرومتر است. با روش ارائه شده در این مقاله طول موج پاشندگی صفر در سیلیکای خالص برابر ۱/۲۷۲۷۵۳۹ میکرومتر به دست می‌آید. برای مشتقات مراتب بالاتر در طول موج ۱/۲۸ میکرومتر مقادیر زیر در مرجع [۹] داده شده است

$$\frac{d^3 n}{d\lambda^3} = -0.023, \quad \frac{d^4 n}{d\lambda^4} = 0.0847$$

در روش پیشنهادی ما در این طول موج مشتقات مراتب سوم و چهارم برابرند با

$$\frac{d^3 n}{d\lambda^3} = -0.022923, \quad \frac{d^4 n}{d\lambda^4} = 0.0846801$$

این مثالها نشان می‌دهند که مقادیری که پیش از این گزارش شده‌اند تفاوت چندانی با نتایج حاصل از روش پیشنهادی ندارند. با این وجود لازم است توجه شود که این‌گونه محاسبات در گذشته با استفاده از روشهای عددی نسبتاً پیچیده‌ای به دست آمده‌اند که در مشتقات مراتب بالا دارای خطاهای قابل توجهی خواهند بود. علاوه بر این در این‌گونه روشهای عددی معمولاً ناپایداری روشها مشکل ساز است [۱۵].

برای محاسبه معادله کلی مشتقات ضریب شکست نسبت به فرکانس زاویه‌ای کافی است  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  را قرار دهیم بنابراین خواهیم داشت

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{G_k \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = \sum_k \frac{G_k}{1 - (\lambda_k / 2\pi c)^2 \omega^2} \quad (15)$$

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{G_k \pi c}{\lambda_k} \left[ \left( \frac{2\pi c}{\lambda_k} - \omega \right)^{-1} - \left( \frac{2\pi c}{\lambda_k} + \omega \right)^{-1} \right]$$

$$\left[ \sum_k \frac{2A_k \lambda^2}{\lambda^2 - B_k^2} \right]^{(m)} = \quad (10)$$

$$(-1)^m m! \sum_k A_k B_k \left[ (\lambda - B_k)^{-(m+1)} - (\lambda + B_k)^{-(m+1)} \right]$$

معادله بالا m امین مشتق سمت راست در معادله (۲) است. به منظور محاسبه مشتقات  $n^2 - 1$  که عبارت سمت چپ معادله (۲) است، m امین مشتق  $(n^2 - 1)$  نسبت به  $\lambda$  را با  $D^{(m)}$  نشان می‌دهیم و i امین مشتق n نسبت به  $\lambda$  را  $n^{(i)}$  نشان می‌دهیم، آن‌گاه  $D^{(0)} = n^{(0)} = n$  و

$$D^{(0)} = n^{(0)} \cdot n^{(0)}$$

$$D^{(1)} = n^{(0)} \cdot n^{(1)} + n^{(1)} \cdot n^{(0)}$$

$$D^{(2)} = n^{(0)} \cdot n^{(2)} + 2n^{(1)} \cdot n^{(1)} + n^{(2)} \cdot n^{(0)} \quad (11)$$

$$D^{(3)} = n^{(0)} \cdot n^{(3)} + 3n^{(1)} \cdot n^{(2)} + 3n^{(2)} \cdot n^{(1)} + n^{(3)} \cdot n^{(0)}$$

با توجه به شباهت بسطهای بالا با بسط دو جمله‌ای نیوتن، می‌توان با استقراء ریاضی نشان داد که:

$$D^{(m)} = \sum_{i=0}^m C_m^i n^{(i)} n^{(m-i)} = 2n n^{(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i n^{(i)} n^{(m-i)} \quad (12-الف)$$

$$C_m^i = \frac{m!}{(m-i)! i!} \quad (12-ب)$$

معادله‌های (۱۰) و (۱۲) مشتقات دو طرف معادله (۱) هستند و بنابراین با هم برابرند.

$$2n n^{(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i n^{(i)} n^{(m-i)} = \quad (13)$$

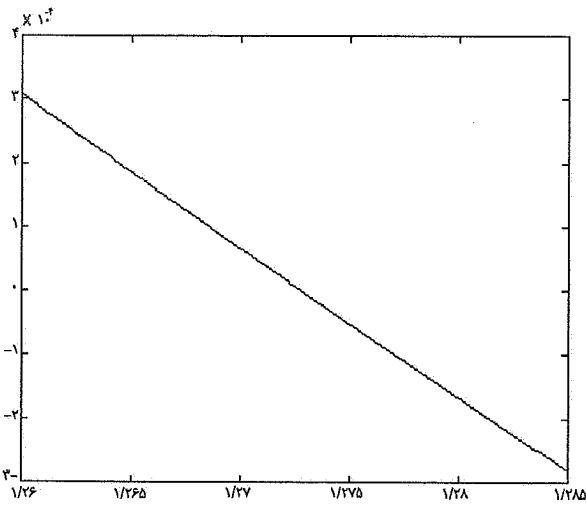
$$(-1)^m m! \sum_k A_k B_k \left[ (\lambda - B_k)^{-(m+1)} - (\lambda + B_k)^{-(m+1)} \right]$$

بنابراین m امین مشتق ضریب شکست نسبت به طول موج برابر است با

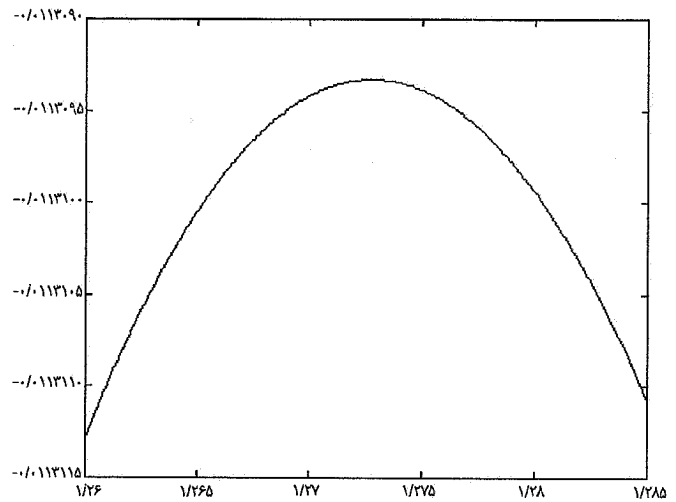
$$\frac{d^m n}{d\lambda^m} = \frac{1}{2n} \left[ - \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i n^{(i)} n^{(m-i)} + \right] \quad (14)$$

$$(-1)^m m! \sum_k A_k B_k \left[ (\lambda - B_k)^{-(m+1)} - (\lambda + B_k)^{-(m+1)} \right]$$

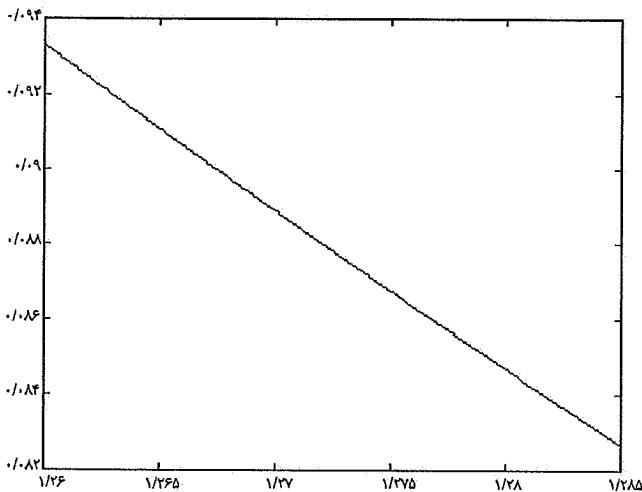
بدیهی است که اگر m برابر یک باشد، نباید عبارت جمع اول



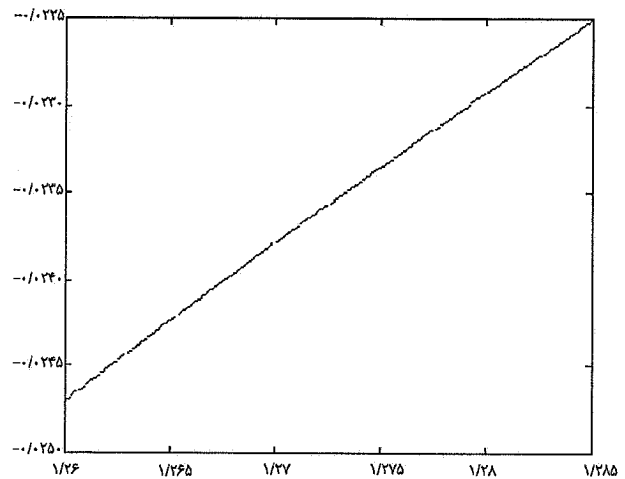
شکل ۲- مشتق مرتبه دوم از ضریب شکست



شکل ۱- مشتق مرتبه اول از ضریب شکست



شکل ۴- مشتق مرتبه چهارم از ضریب شکست



شکل ۳- مشتق مرتبه سوم از ضریب شکست

بدیهی است که برای  $m=1$  عبارت جمع دوم را نباید محاسبه کرد [۱۷].

### ۳- الگوریتم محاسباتی جدید برای تعیین پاشندگی

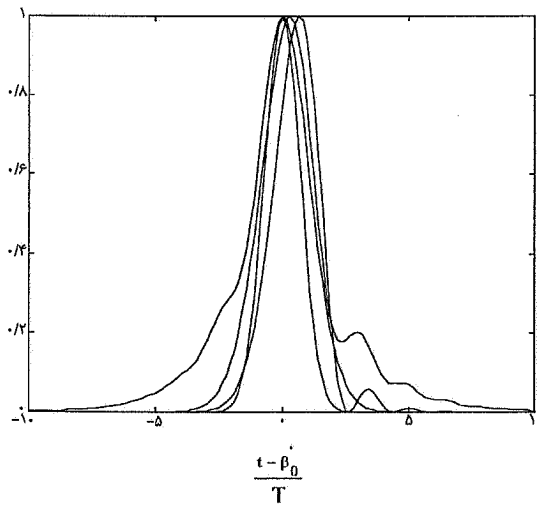
یکی از بهترین روشهای محاسبه پاشندگی ماده توسط د. مارکوس در سال ۱۹۸۰ در یک سری مقاله ارائه شد [۱۰-۱۲ و ۱۶]. در این مقالات، مارکوس سومین مشتق ضریب شکست نسبت به فرکانس زاویه‌ای را در محاسبه پاشندگی به کار گرفته بود. اما با وجود در نظر گرفتن فرضهای ساده‌کننده، پیچیدگی روابط به حدی بود که خود مؤلف نسبت به نتایج به دست آمده اظهار

حال اگر تعریف کنیم  $n^{(m)} = \frac{d^m n}{d\omega^m}$  و  $n^{(0)} = n$  با مشتقگیری از طرفین معادله بالا خواهیم داشت

$$\sum_{i=0}^m C_m^i n^{(i)} n^{(m-i)} = \sum_k \frac{G_k \pi c}{\lambda_k} m! \left[ \left( \frac{\gamma \pi c}{\lambda_k} - \omega \right)^{-m-1} - \left( -\frac{\gamma \pi c}{\lambda_k} - \omega \right)^{-m-1} \right] \quad (16)$$

و بنابراین

$$n^{(m)} = \frac{1}{\gamma n} \left[ \sum_k \frac{G_k \pi c}{\lambda_k} m! \left[ \left( \frac{\gamma \pi c}{\lambda_k} - \omega \right)^{-m-1} - \left( -\frac{\gamma \pi c}{\lambda_k} - \omega \right)^{-m-1} \right] - \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i n^{(i)} n^{(m-i)} \right] \quad (17)$$



شکل ۶- پاره‌ای از نتایج حاصل از روش مارکوس در تحلیل پاشندگی مراتب بالا [۱۰]

$\psi(z,t)$  را برحسب مشتقات نور مدوله شده به دست آورد، بدون آنکه نیازی به در نظر گرفتن فرضهای ساده‌کننده باشد و در ضمن در نظر گرفتن مشتقات مراتب بالای  $\beta$  در الگوریتم پیچیدگی خاصی به همراه داشته باشد. ما به جای آنکه  $\beta$  را با بسط تیلورش جایگزین کنیم  $e^{-i(\beta - \beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z}$  را با بسط تیلورش جایگزین می‌کنیم. در واقع

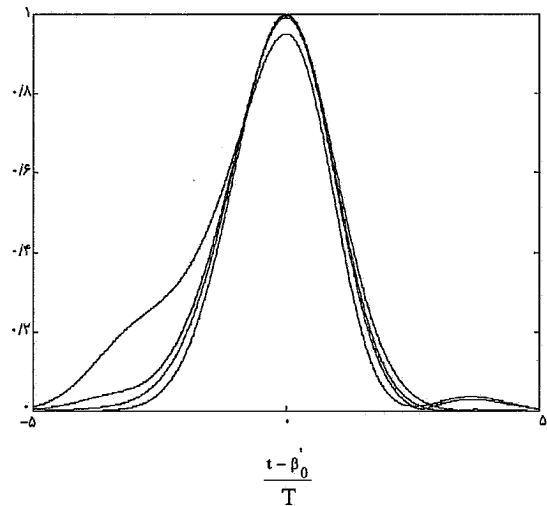
$$\psi(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \exp[i(\omega t - \beta z)] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z} \Phi(\omega) e^{i\omega t} e^{-i(\beta - \beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z} d\omega \quad (20)$$

با توجه به اینکه هدف اصلی در محاسبه انتگرال بالا، محاسبه اندازه  $\psi(z,t)$  برای استفاده در فرمول (۱۹) است. پس:

$$|\psi(z,t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega(t - \beta'_0 z)} e^{-i(\beta - \beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z} d\omega \right| \quad (21)$$

اگر فرض کنیم  $\tau = t - \beta'_0 z$

$$|\psi(z,t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\tau} e^{-i(\beta - \beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z} d\omega \right| \quad (22)$$



شکل ۵- پیش‌بینی پاره‌ای از اعوجاجهای امکانپذیر توسط پاشندگی ماده در یک فیبر نوری به طول ۱۰ کیلومتر در حوالی طول موج پاشندگی صفر (براساس الگوریتم پیشنهادی)

تردید کرد [۱۰]. به دلیل پیچیدگی زیاد روابط، به نظر نمی‌رسد که بتوان روش مارکوس را برای مشتقات مراتب بالاتر به کار گرفت. اما با این وجود مارکوس به خوبی نشان داد که وارد کردن مشتقات مراتب بالا در تحلیل پاشندگی، می‌تواند نتایج جالبی به همراه داشته باشد. او نشان داد که اگر طیف فرکانسی نور به فرم گوسی باشد، پس از پاشندگی، لزوماً نور به فرم گوسی نخواهد بود و برحسب شرایط می‌تواند شکلهای متنوعی داشته باشد. اگر فرض کنیم که  $\Phi(\omega)$  طیف موج نوری مدوله شده باشد و  $\beta$  ثابت انتشار، آن‌گاه دامنه موج نوری در فیبر برابر خواهد بود با  $\psi(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \exp[i(\omega t - \beta z)] d\omega$  زاویه‌ای،  $t$  زمان و  $z$  فاصله نقطه مورد نظر تا منبع نور است. مارکوس در معادله بالا  $\beta$  را با بسط تیلور آن، حول فرکانس مرکزی نور جایگزین کرد

$$\beta = \beta_0 + \beta'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta''_0(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6} \beta'''_0(\omega - \omega_0)^3 \quad (18)$$

و سپس با در نظر گرفتن یک سری فرضیات ساده‌کننده توان متوسط  $P(z,t)$  را که از معادله زیر به دست می‌آید، محاسبه کرد.

$$\langle P(z,t) \rangle = |\psi(z,t)|^2 \quad (19)$$

ما در این مقاله روشی را پیشنهاد می‌کنیم که براساس آن می‌توان

که با استفاده از بسط سری تیلور می توان نوشت:

(۲۳)

$$|\psi(z, t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\omega - \omega_0)^k d\omega \right|$$

که در آن  $\alpha_k$  یک عدد مختلط است "ضرایب  $\alpha_k$  در پیوست محاسبه شده است".

$$|\psi(z, t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi(\omega) e^{i\omega\tau} (\omega - \omega_0)^k d\omega \right| \quad (۲۴)$$

$$|\psi(z, t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi(\omega + \omega_0) \omega^k e^{i\omega\tau} d\omega \right| \quad (۲۵)$$

$$|\psi(z, t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k F^{-1} \{ \omega^k \Phi(\omega + \omega_0) \} \right| \quad (۲۶)$$

$$|\psi(z, t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (-i)^k D_k^\tau \{ e^{-i\omega_0 \tau} \psi(\tau) \} \right| \quad (۲۷)$$

که در آن  $D_k^\tau$ ، نماد مشتق مرتبه  $k$  ام نسبت به  $\tau$  است.

$$|\psi(z, t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k D_k^\tau [e^{-i\omega_0 \tau} \psi(\tau)] \right| \quad (۲۸)$$

$$b_k = (-i)^k \alpha_k \quad (۲۹)$$

همان طوری که دیده می شود  $|\psi(z, t)|$  با اندازه یک ترکیب خطی از  $\psi(\tau)$  و مشتقاتش برابر است. بنابراین لازم است به نحوی مشتقات  $\psi(\tau)$  نسبت به  $\tau$  تعیین شوند. برای توابع شناخته شده ای همچون تابع گوسی این کار به آسانی امکان پذیر است و می توان به راحتی برای آن یک فرمول کلی به دست آورد. برای سایر توابع می توان از روشهای عددی استفاده کرد.

نکته جالب توجه در معادله (۲۸) این است که اگر محیط غیرپاشنده باشد خروجی صرفاً تأخیر یافته ورودی است و میزان تأخیر برابر با  $Z$ .  $\beta'$  خواهد بود که این میزان، همان مدت زمان لازم برای طی مسافتی به طول  $Z$  است.

#### ۴- بررسی پاشندگی حاصل از منابع نور گوسی

پیش از آنکه نور مدوله شود، منبع نور سیگنالی را می فرستد، که دامنه اش با تابع  $\psi_0(t)$  بیان می شود و توانش برابر است با

$$P_0(t) = |\psi_0(t)|^2 \quad (۳۰)$$

اگر فرض کنیم، طیف منبع نور به فرم گوسی باشد. آن گاه

$$\psi_0(t) = A \exp\left[-\frac{W^2 t^2}{\tau}\right] \exp[i\omega_0 t] \quad (۳۱)$$

که در آن  $W\sqrt{\tau}$  پهنای طیف نور است. منبع نور در سیستم مخابرات نوری اغلب توسط توانش مدوله می شود. توان سیگنال نوری را می توان به شکل زیر نوشت

$$P(t) = S(t) P_0(t) \quad (۳۲)$$

که در آن  $S(t)$  سیگنال پیام است و فرض می شود به فرم گوسی است

$$S(t) = S \exp\left[-\frac{t^2}{T^2}\right] \quad (۳۳)$$

که در آن  $S$  نشان دهنده دامنه پالس و  $T$  پهنای آن است. سیگنال نور مدوله شده همان  $\psi(t)$  است. و توان آن با معادله زیر داده می شود

$$P(t) = |\psi(t)|^2 \quad (۳۴)$$

در واقع می توان  $\psi(t)$  را به شکل زیر نوشت

$$\psi(t) = S^{1/2}(t) \psi_0(t) \quad (۳۵)$$

$$\psi(t) = S^{1/2} A e^{-t^2/2T^2} e^{-W^2 t^2/2} e^{i\omega_0 t} \quad (۳۶)$$

$$\psi(t) = S^{1/2} A e^{-t^2/2(1+T^2W^2)/T^2} e^{i\omega_0 t} \quad (۳۷)$$

با فرض  $A=1$  و  $S^{1/2} V = T.W$  داریم

$$\psi(t) = e^{-t^{1/2} (1+V^2)/T^2} e^{i\omega t} \quad (38)$$

با توجه به معادله‌های (28) و (38) داریم:

$$|\psi(z,t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k D_k^T [e^{-t^{1/2} (1+V^2)/T^2}] \right| \quad (39)$$

$$|\psi(z,t)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} A_k \tau^k e^{-t^{1/2} (1+V^2)/T^2} \right| \quad (40)$$

به خوبی می‌توان نشان داد که [18]:

$$(41)$$

$$A_k = \left( j \frac{1+V^2}{T^2} \right)^k \left[ \alpha_k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!(k-i)!} \left( \frac{1+V^2}{T^2} \right) \alpha_{i+k} \right]$$

$$|\psi(z,t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_k T^k \left( \frac{\tau}{T} \right)^k e^{-(\tau/T)^2 \cdot (1+V^2)/2} \right| \quad (42)$$

$$|\psi(z,t)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left( \frac{t-\beta'z}{T} \right)^k e^{-(t-\beta'z/T)^2 \cdot (1+V^2)/2} \right| \quad (43)$$

که در آن  $B_k = A_k T^k$  تعریف شده است.

با توجه به معادله بالا برای  $|\psi(z,t)|$  می‌توان دریافت که یک چندجمله‌ای برحسب  $\frac{t-\beta'z}{T}$  در یک پالس گوسی ضرب شده که حاصل می‌تواند نتایج متنوعی به همراه داشته باشد، از جمله پهن کردن پالس گوسی و تغییر دادن شکل پالس است.

## ۵- مثال کاربردی از به‌کارگیری الگوریتم پیشنهادی

نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم پیشنهادی برای تحلیل پاشندگی در فیبر نوری SI که هسته آن از جنس Fused Silica باشد در شکل (۵) نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود پالسهای نوری پس از گذر از فیبر به طول ۱۰ Km دچار پاشندگی شده‌اند و در حالتی که طول موج نور بر طول موج پاشندگی صفر

منطبق باشد میزان انحراف شکل پالس از حالت گوسی، چشمگیر است. و در سایر طول موجها پهن‌شدگی پالس به خوبی محسوس است.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله الگوریتم جدیدی ارائه شد که بر مبنای آن می‌توان پاشندگی را در فیبر نوری SI محاسبه کرد. در این الگوریتم پاشندگیهای مراتب بالا در محاسبه پاشندگی دخالت داده شده است. نتایج به دست آمده با نتایج ارائه شده توسط مارکوس هماهنگی دارند با این تفاوت که فرضهای ساده‌کننده‌ای که مارکوس در نظر گرفته است در این محاسبات دخالت داده نشده است. علاوه بر آنکه منحنیهای رسم‌شده توسط مارکوس بر مبنای مقادیر ثابت  $V$  و  $B$  و  $D$  هستند که به طور دلخواه عددگذاری شده‌اند. مطابق فرضیات وی،  $V=T.W$ ،  $D=\beta_0 z / (2T^2)$  و  $B=\beta_0 z / (6T^2)$  است. شکل (۶) سه نمونه از شکلهای رسم شده توسط مارکوس را نشان می‌دهد.

الگوریتم پیشنهادی در این مقاله را می‌توان برای حالتی که طیف منبع نور به فرم گوسی نباشد هم به کار برد. بنابراین برخلاف روش مارکوس محدود به منابع خاصی نمی‌شود. عاملی که صحت نتایج در این الگوریتم را محدود می‌کند خطای ناشی از جایگزین کردن تابع  $\exp[-i(\beta-\beta_0-\beta')(\omega-\omega_0)z]$  با بسط سری تیلور آن است، لازم به ذکر است که در واقع عبارت  $(\beta-\beta_0-\beta')(\omega-\omega_0)$  در حوالی طول موج پاشندگی صفر ( $\lambda = 1/27275 \mu m$ ) مقدار ناچیزی است، زیرا اولاً مشتق دوم  $\beta$  نسبت به فرکانس زاویه‌ای صفر است و ثانیاً مشتقات بعدی  $\beta$  نسبت به فرکانس زاویه‌ای آنقدر کوچک‌اند که تاکنون در اغلب محاسبات پاشندگی از آنها صرف‌نظر شده است. با این وجود، اگر پهنای طیف منبع نور کوچک باشد و یا اگر طول کانال ( $z$ ) چندان بزرگ نباشد معادله‌ها از دقت بالایی برخوردار خواهند بود.

## قدردانی

هزینه این طرح پژوهشی توسط دانشگاه صنعتی اصفهان پرداخت شده است.

1. Marcuse, D., Charaplyvy, A. R., and Tkach, R. W., "Effect of Fiber Nonlinearity on Long Distance Transmission," *J. Lightwave Technol.*, LT-9, PP.121-128, 1991.
2. Marcuse, D., "Single Channel Operation in Very Long Nonlinear Fibers with Optical Amplifiers at Zero Dispersion," *J. Lightwave Technol.*, LT-9, PP.356-361, 1991.
3. Murakami, M., "Fiber Nonlinear Effects in Long Distance Transmission Systems with Optical Amplifiers," *Int.Symp. Nonlinear Theory and its Applications*, Vol. 3, PP. 923-926, December 1993.
4. Imai, T., Murakami, M., and Naka, A., "Optimum Parameter Guide Lines for 10Gbit/s, Multimegametre Transmission Systems Considering the Nonlinear Effect," *Electron. Lett.*, 29, PP. 1409-1410, 1993.
5. Nishi, S., and Saruwatari, M., "Technique for Measuring the Distributed Zero Dispersion Wave Length of Optical Fibers Using Pulse Amplification Caused by Modulation Instability," *Electron. Lett.*, 31, (3), PP. 225-226, 1995.
6. Murakami, M., and Amemiya, M., "Simple and Accurate Zero Dispersion Wave Length Measurment for Long Haul Optical Amplifier Systems Using Induced Phase to Amplitude Modulation Conversion," *Electron. Lett.*, 31, (8), PP.666-668, 1995.
7. Payne, D. N., Reekie, L., Tucknott, J. Barcelos ,S., Zervas ,M.N., Laming ,R.I., A., Kashyap, R., Mckee, P. F., Sladen, F. and Wojciechowicz, B., "High Accuracy Dispersion Measurements of Chirped Fiber Grating," *Electron. Lett.*, 31, (15), PP. 1280-1282, 1995.
8. Payne, D.N. and Gambling ,W.A."Zero Material Dispersion in Optical Fibers," *Electron. Lett.*, 11(8), pp. 176-178, 1975.
9. Gowar, J., *Optical Communication System*, John Wiley pp. 42-69, 1983.
10. Marcuse ,D. ,"Pulse Distortion in Single Mode Fibers," *Appl. Opt.* 19, pp. 1653-1660, 1980.
11. Marcuse ,D. ,"Pulse Distortion in Single Mode Fibers, Part 2," *Appl. Opt.* 20, pp. 2969-2974, 1981.
12. Marcuse ,D. ,"Pulse Distortion in Single Mode Fibers, Part 3, Chirped Pulses," *Appl.Opt.*, 20, pp. 3573-3579, 1981.
13. Miyagi ,M. and Nishida, S, "Pulse Spreading in Single Mode Fiber due to Third Order Dispersion," *Appl. Opt.*18, pp. 678-682, 1979.
14. Malitson, I. H., "Inter-Specimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica," *Jnl. Optical Soc. America*, 55, pp. 1205-1209, 1965.
15. Belewett, I. J. "Effect of Bending on Chromatic Dispersion of Single Mode Optical Fibers," *Electron. Lett.*, 30, (7), pp. 592-594, 1994.
16. Etten, Wim Van, Plaats, Jan and Van Der, *Fundamentals of Optical Fiber Communications*, Prentice Hall, pp.194, 1991.
17. Feiz, S., and Hemati, S., "Exact Determination of the Derivatives of the Refractive Index of the Optical Fiber Core," *Proceedings of Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE-96)*, Tehran-Iran, pp. 225-230.
۱۸. فیض، س. و همتی، س.، "تعیین دقیق پاشندگی ماده در فیبر نوری با ضریب شکست پله‌ای"، گزارش طرح پژوهشی، مرکز پژوهشی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۵.



اگر  $u$  را طبق معادله زیر تعریف کنیم

$$D_1[e^u] = u^{(1)} e^u$$

$$D_2[e^u] = (u^{(2)} + (u^{(1)})^2) e^u$$

$$D_3[e^u] = (u^{(3)} + 3u^{(1)}u^{(2)} + (u^{(1)})^3) e^u$$

$$D_4[e^u] = (u^{(4)} + 4u^{(1)}u^{(3)} + 6u^{(1)^2}u^{(2)} + (u^{(1)})^4) e^u$$

$$D_5[e^u] = (u^{(5)} + 5u^{(1)}u^{(4)} + 10u^{(1)^2}u^{(3)} + 10u^{(1)}u^{(1)^2}u^{(2)} + 10u^{(1)^3}u^{(2)} + (u^{(1)})^5) e^u$$

که با توجه به معادله‌های بالا می‌توان دریافت ضریب مربوط به هر جمله از معادله (۳) به دست می‌آید.

به‌طور مثال ضریب جمله سوم از مشتق مرتبه پنجم را به دست می‌آوریم

$$\frac{5!}{1! \times (1!)^4 \times 1! \times (4!)^1} = 5$$

بنابراین:

$$\alpha_k = \sum_k \frac{1}{\pi(i_j!(m_j!)^{i_j})} (u^{(i_1)})^{m_1} (u^{(i_2)})^{m_2} \dots (u^{(i_k)})^{m_k} e^u$$

$$\sum m_j i_j = k, \quad m_j \neq 0$$

(۵)

$$u = -j(\beta - \beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z \quad (1)$$

ضرایب بسط سری تیلور  $e^u$  حول نقطه  $\omega$  برابر خواهد بود با

$$\alpha_k = \frac{D_k^\omega[e^u]}{k!} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (2)$$

که نماد  $D_k^\omega$  مشتق  $k$  ام نسبت به  $\omega$ ، و نماد  $(u^{(i_k)})^{m_k}$  مشتق مرتبه  $i_k$  ام  $u$  به توان  $m_k$  است.

با استقراء ریاضی می‌توان نشان داد که

$$D_k^\omega[e^u] = \sum_k C(m_1, i_1, \dots, m_k, i_k) (u^{(i_1)})^{m_1} \dots (u^{(i_k)})^{m_k} e^u \quad (3)$$

$$\sum m_j i_j = k$$

که در آن

$$C(m_1, i_1, \dots, m_k, i_k) = \frac{k!}{\pi_{m_j \neq 0} (i_j!(m_j!)^{i_j})} \quad (4)$$

برای نمونه اگر چندین بار از تابع  $e^u$  نسبت به  $\omega$  مشتق بگیریم خواهیم داشت