

# الگوریتم مورچه‌ای برای طراحی مسیر حرکت باربران خودکار در سیستم تک حلقه

کوروش عشقی\* و مرتضی کاظمی\*\*

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۸۱/۲/۷ - دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۸/۲۱)

**چکیده** - در این مقاله الگوریتمی ابتکاری برای مسئله طراحی مسیر حرکت باربران خودکار در سیستم تک حلقه معرفی می‌شود. در این مسئله هدف تعیین کوتاهترین حلقه برای یک باربر خودکار در چیدمان کارخانه به نحوی است که با هر دپارتمان لااقل یک ضلع مشترک داشته باشد. برای این منظور در ابتدا با استفاده از خواص مسئله آن را به مسئله‌ای معادل در نظریه گراف تبدیل کرده و سپس با به‌کارگیری الگوریتم فرا ابتکاری مورچه‌ای مسئله را حل خواهیم کرد. نتایج آزمایشات کارایی مطلوب الگوریتم پیشنهادی را در مقایسه با سایر روشها در حل مسائل مسیریابی سیستم تک حلقه نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: طراحی مسیر حرکت باربران خودکار، الگوریتم مورچه‌ای، الگوریتمهای فرا ابتکاری

## Ant Colony Algorithm for the Single Loop Routing Problem

K. Eshgee and M. Kazemi

Associate Professor and PhD Student, respectively, Department of Industrial Engineering,  
Sharif University of Technology

**Abstract:** *In this paper, a new algorithm for solving the single loop routing problem is presented. The purpose of the single loop routing problem (SLRP) is to find the shortest loop for an automated guided vehicle covering at least one edge of each department of a block layout. First it is shown that this problem can be represented as a graph model. Then a meta-heuristic algorithm based on ant colony system is developed for ALRP by using the properties of the graph model. Computational results show the efficiency of the proposed algorithm in comparison with other techniques for solving SLRP.*

**Keywords:** *Single loop routing problem, Ant colony optimization algorithm, Meta-heuristic algorithms*

\*- دانشیار

\*\*- دانشجوی دکترا

در سیستم حمل و نقل خودکار استفاده از باربران خودکار<sup>۱</sup> (AGV) از جمله سیستمهای جابه‌جایی محسوب می‌شود که استفاده از آن در سالهای اخیر روز به روز افزایش می‌یابد. دلیل این امر نیز انعطاف پذیری بالای این تجهیزات در سیستم جابه‌حایی مواد است. باربران خودکار خوروهایی بدون سرنشین‌اند که توسط رایانه کنترل شده و برای انتقال مواد از نقطه‌ای به نقطه دیگر در چیدمان کارخانه مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از مهمترین عوامل در طراحی مسیر حرکت AGV آن است که کل فاصله طی شده توسط این وسایل کمینه شود. سیستمهای مختلفی برای مسیریابی AGV وجود دارد که می‌توان به سیستمهای سنتی، کوتاهترین مسیر دوطرفه و سیستم تک حلقه اشاره کرد [۲]. در این مقاله مسیریابی سیستم تک حلقه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در سیستم تک حلقه، هدف طراحی یک حلقه بسته و غیر متقاطع در کارخانه به نحوی است که همه پارتمانهای کارخانه حداقل به یکی از اضلاع این حلقه دسترسی داشته باشند. نام این مسئله را طراحی سیستم مسیریابی تک حلقه می‌نامیم و از این پس آن را با علامت اختصاری SLRP نشان خواهیم داد.

مسئله مسیریابی باربران خودکار در سیستم تک حلقه نخستین بار در سال ۱۹۹۰ توسط سینریچ [۸] معرفی شد. هدف وی معرفی سیستمی بود که علاوه بر داشتن کارایی سیستمهای مسیریابی که در آن زمان وجود داشت از نظر محاسباتی برای یافتن جواب به محاسبات کمتری نیاز داشته باشد. در سال ۱۹۹۲ تانچوکو و سینریچ [۹] به تعیین کوتاهترین حلقه و همچنین تعیین مکان ایستگاههای بارگیری و تخلیه در یک چیدمان پرداختند. در این مدل ابعاد مسئله قابل حل مشخص نشده است. این دو محقق یک سال بعد در سال ۱۹۹۳ [۱۰] مدل خود را بهبود داده و از روش شاخه و کران برای پیدا کردن جواب بهینه استفاده کردند. در سال ۱۹۹۶ لاپورته و سایرین، مسئله SLRP را به صورت یک مسئله فروشنده دوره گرد تعمیم یافته مدل کردند [۷]. پیچیدگی محاسباتی مسئله مسیریابی توسط

دازمن و دیگران [۳] بررسی شد. آنها نشان دادند که این مسئله به رده مسائل NP-hard تعلق دارد. در سال ۲۰۰۰ آصف وزیری و دیگران [۱] با استفاده از برنامه‌ریزی خطی این مسئله را مدل کرده و با استفاده از خواص هندسی مسئله به کاهش تعداد محدودیتهای مدل پرداختند و موفق شدند که مسئله را برای نموده‌های با ابعاد متوسط در زمان مناسبی حل کنند.

در این مقاله، الگوریتمی ابتکاری برای حل مسئله SLRP با استفاده از تکنیک بهینه‌سازی بر مبنای رفتار مورچگان<sup>۳</sup> (ACO) که آن را الگوریتم مورچه‌ای می‌نامیم، ارائه خواهد شد. برای این منظور ابتدا مسئله SLRP را با استفاده از خواص آن به یک مسئله معادل در نظریه گراف تبدیل کرده و سپس با استفاده از خواص این گراف، الگوریتم حل مسئله را طراحی خواهیم کرد.

## ۲- معرفی الگوریتم مورچه‌ای (ACO)

الگوریتم فرا ابتکاری بهینه‌سازی بر مبنای رفتار مورچگان (ACO) در اوایل دهه نود میلادی توسط دوریگو، مانیزو و کلرینی [۴] و [۶] معرفی شد. این الگوریتم از رفتار اجتماعی مورچه‌ها الهام گرفته شده است. مورچه‌ها با آنکه فاقد قدرت بینایی‌اند می‌توانند کوتاهترین مسیر از منبع تغذیه تا لانه خویش را با استفاده از مواد شیمیایی که در هنگام حرکت از خود بر جای می‌گذارند، و به فرومون<sup>۴</sup> موسومند پیدا کنند [۶]. مورچه‌ها در هنگام حرکت با به جای گذاشتن فرومون، فرومونهای باقیمانده از بقیه مورچه‌ها را (به صورت تصادفی) دنبال می‌نمایند. از نظر مورچه‌ها مسیری مطلوبتر است که مقدار فرومون بیشتری داشته باشد. طریقه یافتن کوتاهترین مسیر با استفاده از فرومون در شکل (۱) نشان داده شده است.

حالت A را در شکل (۱) در نظر بگیرید. مورچه‌ها به یک دوراهی رسیده‌اند و مجبورند تصمیم بگیرند که به سمت بالا یا مستقیم حرکت کنند. در این لحظه هیچ پیش‌زمینه‌ای در مورد بهترین انتخاب وجود ندارد بنابراین مورچه‌ها مسیر حرکت خود را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنند. می‌توان انتظار

چه که فرومون یک یال بیشتر باشد آن یال از مطلوبیت بالاتری برای انتخاب برخوردار است. در نهایت جوابی تولید می‌شود که از مطلوبترین یالها استفاده شده و احتمالاً نزدیک به جواب بهینه مسئله خواهد بود. در اکثر مسائلی که توسط الگوریتم مورچه‌ای حل شده‌اند نتایج حاصل بیانگر برتری این روش بر سایر روشهای فراابتکاری مخصوصاً در مسایل مسیریابی است.

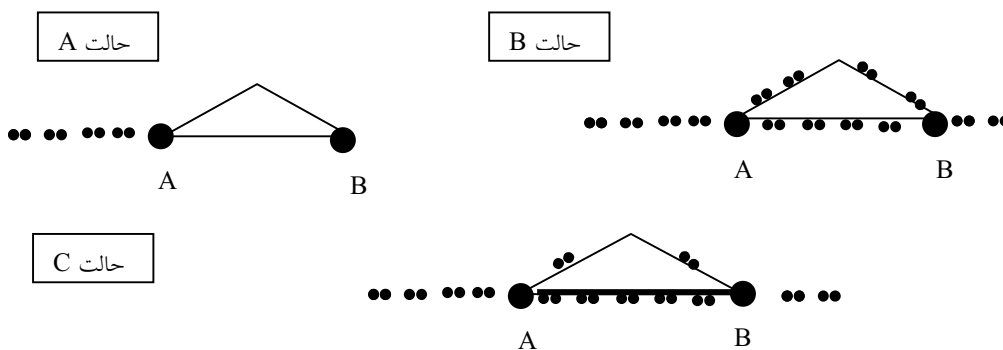
### ۳- تعاریف

در این بخش به معرفی مسئله مسیریابی باربران خودکار در سیستم تک‌حلقه و مفاهیم مربوط به آن می‌پردازیم. یک چیدمان کارخانه را که از  $n$  دپارتمان با خطوط مستقیم تشکیل شده است، در نظر بگیرید شکل (۲-الف) [۱]. چیدمان کارخانه یکپارچه است و فرض می‌شود که هیچ دپارتمانی را نتوان یافت که محیط آن به‌طور کامل و بدون داشتن یال مشترک در درون دپارتمان دیگر قرار بگیرد. دپارتمان‌ها لزوماً مستطیل نبوده اما فرض می‌شود که تمامی زوایای متعلق به دپارتمانها  $90^\circ$ ،  $180^\circ$  و  $270^\circ$  است. مسئله مسیریابی باربران خودکار در سیستم تک حلقه یا SLRP عبارت است از یافتن یک حلقه بسته با حداقل طول در امتداد اضلاع دپارتمانها به نحوی که اولاً این حلقه غیر متقاطع بوده و ثانیاً هر یک از دپارتمانها یک ضلع مشترک با آن داشته باشد، شکل (۲-ب و ج). یک جواب موجه یا یک حلقه موجه برای مسئله حلقه‌ای است که دارای شرایط اول و دوم باشد اما لزوماً با حداقل طول نباشد. البته هر مسئله SLRP لزوماً دارای جواب موجه نیست و در حالات خاصی نظیر شکل (۲-د) مسئله دارای جواب موجه نیست. در این مقاله فرض می‌شود که روشهای ارائه شده در مسائلی به کار رود که حداقل یک جواب موجه دارند.

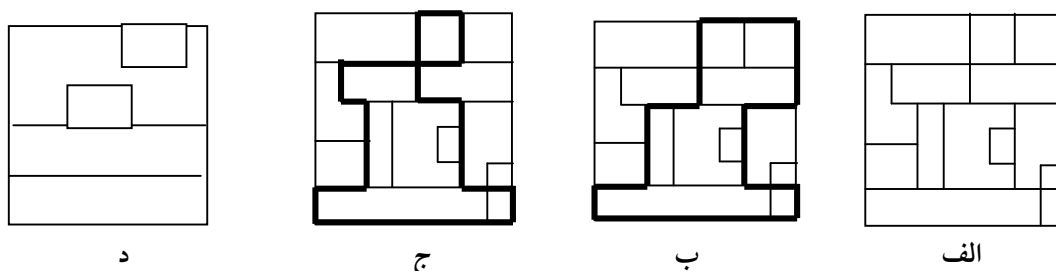
به ازای هر چیدمانی یک گراف نظیر  $G=(N,A)$  وجود دارد که آن را گراف چیدمان<sup>۵</sup> می‌نامیم. در این گراف، منظور از مجموعه  $N$  مجموعه گره‌ها و مجموعه  $A$  مجموعه یالهای این گراف است و به‌ازای هر دپارتمان موجود در چیدمان یک گره در نظر می‌گیریم. علاوه بر آن محوطه بیرونی کل چیدمان را نیز

داشت تا به‌طور متوسط نیمی از مورچه‌ها مسیر بالا و نیمی دیگر مسیر مستقیم را برای ادامه حرکت خود انتخاب نمایند که در حالت B نشان داده شده است. از آنجا که مسیر مستقیم پایینی کوتاهتر از مسیر بالایی بوده با فرض مساوی بودن سرعت حرکت مورچه‌ها تعداد بیشتری مورچه می‌توانند این مسیر را در واحد زمان طی کنند که این امر موجب انباشته شدن سریعتر فرومون در این مسیر می‌شود. به تدریج اختلاف فرومون دو مسیر زیاد می‌شود و پس از مدتی اختلاف فرومون در دو مسیر به اندازه کافی بزرگ می‌شود تا بر تصمیم مورچه‌های جدید در انتخاب مسیر تأثیرگذار باشد. این مطلب در قسمت C شکل (۱) نشان داده شده است. از حالا به بعد مورچه‌ها به دلیل یافتن فرومون بیشتری در مسیر پایینی به‌طور احتمالی ترجیح می‌دهند تا این مسیر را انتخاب کنند. این فرایند با یک بازخور مثبت ادامه می‌یابد، یعنی اینکه افزایش انتخاب مسیر موجب افزایش فرومون در این مسیر و افزایش فرومون موجب افزایش انتخاب این مسیر می‌شود و هر مورچه برای مدتی مسیر ثابتی را انتخاب کرده به نحوی پس از مدتی تمام مورچه‌ها مسیر کوتاهتر را برای ادامه حرکت خود انتخاب می‌کنند.

اولین الگوریتم بهینه‌سازی ACO براساس همین رفتار مورچه‌ها ابداع شد. الگوریتم ACO نخستین بار در حل مسئله فروشنده دوره گرد استفاده شد و پس از آن در حل دیگر مسائل بهینه‌سازی ترکیبی به‌کار رفت که می‌توان به مسائل تخصیص مربع، مسیریابی خودروها، رنگ آمیزی گرافها و ۰۰۰ اشاره کرد. صورت کاملی از این مسائل به همراه مراجع مربوطه در [۵ و ۱۱] ذکر شده است. در روش ACO معمولاً مسئله به یک مدل در نظریه گراف تبدیل شده و جواب مسئله نیز به‌صورت مسیری بر روی آن تعریف خواهد شد [۴]. در این روش از تعدادی مورچه مصنوعی برای حل مسئله استفاده می‌شود. این مورچه‌ها به جست‌وجو در گراف مسئله می‌پردازند و با مبادله اطلاعات، از طریق به‌جای گذاشتن فرومون در طول یالهای گراف در ساختن جواب به همکاری با یکدیگر می‌پردازند. هر



شکل ۱- طریقه یافتن کوتاهترین مسیر بین دو نقطه توسط مورچه‌ها



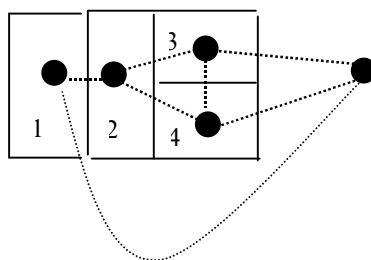
شکل ۲- الف- نمایی از چیدمان یک کارخانه، ب- مثالی از یک حلقه موج در طراحی مسیر حرکت، ج- یک مثال از یک حلقه غیرموجه، د- مثالی از یک مسئله فاقد جواب موج

مجموعه یالهایی باشد که در گراف چیدمان ما بین این گره‌ها موجود است. یک مجموعه از دیارتمانها را یکپارچه گوئیم اگر زیرگراف القایی نظیر آن همبند باشد. برای مثال در شکل ۳ زیرگراف القایی حاصل از دیارتمانهای ۲ و ۳ و ۴ تشکیل یک مثلث را داده و چون همبند است این دیارتمانها یکپارچه‌اند ولی زیرگراف القایی نظیر دیارتمانهای ۱ و ۳ و ۴ همبند نیست و در نتیجه این دیارتمانها یکپارچه نیستند.

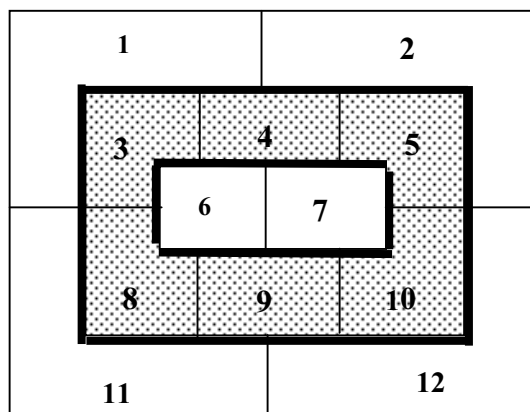
اجتماع مرزی چند دیارتمان یکپارچه عبارت است از اجتماع یالهای این دیارتمانها با این شرط که یالهایی را که در مرز مشترک این دیارتمانها واقع شده‌اند را حذف کنیم. در شکل (۴) اجتماع مرزی دیارتمانهای ۳ و ۴ و ۵ و ۸ و ۹ و ۱۰ که به صورت خطوط هاشور نمایش داده شده است تشکیل دو حلقه جدا از هم را می‌دهد. به عبارت دیگر اجتماع مرزی چند دیارتمان مجموعه یالهایی است که بروی مرز حاصل از ادغام این دیارتمانها در یکدیگر به وجود می‌آید.

به عنوان یک دیارتمان در نظر گرفته و گره متناظر با آن را در گراف چیدمان گره صفر می‌نامیم. در گراف چیدمان دو گره با یک یال به یکدیگر متصل‌اند و یا به عبارت دیگر مجاورند اگر و تنها اگر دیارتمانهای نظیر این دو گره دارای ضلع یا اضلاع مشترکی باشند. در نتیجه گره صفر و گره‌های نظیر دیارتمانهایی که در مرز چیدمان قرار دارند نیز با هم مجاور می‌شوند. گراف چیدمان با فرضیات ذکر شده یک گراف مسطح است. از خواص یک گراف مسطح با حداقل سه راس آن است که تعداد یالهای این گراف حد اکثر برابر با  $3|N| - 6$  است که  $|N|$  تعداد رئوس این گراف است [۲]. در شکل (۳) گراف چیدمان وابسته به یک چیدمان متشکل از چهار دیارتمان با خطوط خط چین نشان داده شده است:

منظور از زیرگراف القایی<sup>۵</sup> نظیر مجموعه‌ای از دیارتمانها، یک زیرگراف از گراف چیدمان است که اولاً گره‌های آن وابسته به دیارتمانهای موجود در آن مجموعه باشند و ثانیاً یالهای آن



شکل ۳- گراف چیدمان



شکل ۴- اجتماع مرزی دیارتانها

داشت. که تمام گره‌های مجاورش نیز برچسب دار بوده و این بدین معنی است حلقه ناشی از اجتماع مرزی دیارتان ۷ و دیارتانهای مجاورش دارای ضلع مشترکی با دیارتان نظیر ۷ نخواهد داشت که این امر با فرض موجه بودن حلقه در تناقض است. برای مثال در شکل (۴) زیر گراف القایی ناشی از دیارتانهای ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ زیر گراف موجه نیست چرا که در آن تمامی گره‌های مجاور گره‌های برچسب دار ۶ یا ۷ خود برچسب دارند. و یا به عبارت دیگر حلقه ناشی از اجتماع مرزی این دیارتانها دارای ضلع مشترکی با دیارتانهای ۶ یا ۷ نیست بنابراین نمی‌تواند موجه باشد.

۳- حداقل یکی از گره‌های مجاور یک گره غیر برچسب دار (غیر از گره صفر) برچسب دار خواهد بود چرا که در غیر این صورت اصولاً حلقه موجه نخواهد شد. به عبارت دیگر هر یک از دیارتانهای خارج از حلقه می‌بایستی یال و یا یالهایی مشترک با حلقه بسته تشکیل شده داشته باشند. برای مثال در شکل (۴) اجتماع مرزی دیارتانهای ۶ و ۷ نمی‌تواند تشکیل یک

#### ۴- یافتن جواب موجه مسئله SLRP از روی گراف چیدمان

همان‌گونه که قبلاً دیدیم هر جواب موجه از یک مسئله SLRP را می‌توان به صورت یک حلقه بسته در چیدمان نشان داد که آن را حلقه موجه می‌نامیم. این حلقه در حقیقت از اجتماع مرزی دیارتانهایی تشکیل می‌شود که در درون حلقه‌اند. زیرگراف القایی متناظر با دیارتانهایی را که در درون این حلقه قرار می‌گیرند را نیز زیرگراف موجه نامیده و گره‌های موجود در آن را با برچسب مشخص می‌سازیم. در این صورت پس از یافتن حلقه موجه هر گره موجود در گراف چیدمان با دارای برچسب خواهد بود و یا با یکی از گره‌های برچسب دار مجاور می‌شود. علاوه بر آن مشاهده می‌شود که در گراف چیدمان:

- ۱- زیر گراف القایی نظیر گره‌های برچسب دار همبند است.
- ۲- حداقل یکی از گره‌های مجاور یک گره برچسب دار است. زیرا در غیر این صورت گره برچسب داری نظیر ۷ خواهیم

شرایط فوق در حقیقت شرایط لازم برای وجود زیر گراف موجه بودند. اکنون به قضیه زیر که شرط کافی برای وجود یک زیر گراف موجه را بیان می کند توجه کنید:

قضیه: فرض کنید که یک زیر گراف القایی نظیر  $G_U = (V_U, E_U)$  از یک گراف چیدمان داده شده است. اگر گراف  $G_U$  در شرایط زیر صدق کند آن گاه  $G_U$  یک زیر گراف موجه است:

۱.  $G_U$  همبند باشد.
۲. حداقل یکی از گره های مجاور به یک گره  $V_U$  عضوی از مجموعه  $V - V_U$  باشد.
۳. هر گره از مجموعه  $V - V_U$  (غیر از گره صفر) دارای حداقل یک گره مجاور از  $V_U$  باشد.
۴. گراف  $G - G_U$  همبند باشد.

اثبات: حلقه ناشی از اجتماع مرزی دپارتمانهای متناظر با گره های  $V_U$  را در نظر بگیرید. شرط ۱ بیانگر آن است که اولاً دپارتمانها یکپارچه اند و تشکیل یک حلقه پیوسته را می دهند. شرط ۳ تضمین می کند که حلقه مذکور با هر دپارتمان حداقل دارای یک ضلع مشترک است و شرایط ۲ و ۴ از وقوع حفره جلوگیری می کنند.

### ۵- الگوریتم یافتن "زیر گراف موجه"

با توجه به قضیه بخش قبل می توان نتیجه گرفت که مسئله تعیین یک حلقه موجه در SLRP (در صورتی که جواب موجه برای آن موجود باشد) با یافتن یک زیرگراف از گراف چیدمان مسئله که واجد چهار شرط ذکر شده باشد معادل است. حال به ارائه الگوریتمی خواهیم پرداخت که قادر است یک زیر گراف موجه از گراف چیدمان را بیابد بنحوی که با توجه به آن بتوان یک جواب موجه را برای مسئله SLRP به دست آورد:

- ۱- یک گره غیر از گره صفر را به دلخواه از گراف چیدمان برگزینید و آن را برچسب دار کنید. اگر این گره به تمام گره های دیگر گراف (غیر از گره صفر) متصل باشد متوقف شوید. در این حالت حلقه موجه بر روی مرز این دپارتمان قرار دارد.

حلقه موجه را بدهد زیرا که در زیر گراف القایی وابسته به این دپارتمانها گره های وابسته به دپارتمانهای ۱۲ و ۱۱ و ۱۲ غیر برچسب دار بوده و گره های مجاور آنها نیز غیر برچسب دار خواهد شد.

۴- اگر از گراف چیدمان کلیه گره های با برچسب دار و یالهای متصل به آن را حذف کنیم زیرگراف حاصل باید همچنان همبند باقی بماند چرا که در غیر این صورت اجتماع مرزی دپارتمانهای وابسته به این گره ها تشکیل دو حلقه جدا از هم را می دهند. برای مثال در شکل (۴) زیر گراف القایی ناشی از دپارتمانهای ۳ و ۴ و ۵ و ۸ و ۱۰ زیر گراف موجه نیست چرا که در آن زیر گراف حاصل از حذف گره های ۳ و ۴ و ۵ و ۸ و ۹ و ۱۰ از گراف چیدمان غیر همبند می شود.

در شرایط فوق در حقیقت وجود شرایط ۱ و ۳ بدین خاطر است که حلقه ناشی از اجتماع مرزی دپارتمانها یکپارچه بوده و با هر یک از دپارتمانهای موجود در چیدمان ضلع مشترک داشته باشد. واضح است که این مجموعه بایست یکپارچه باشد چرا که در غیر این صورت اصولاً حلقه ای تعریف نمی شود. اگر زیرگراف القایی ناشی از دپارتمانها دارای شرایط ۱ و ۳ باشد اما یکی از شروط ۲ یا ۴ را نقض کند اصطلاحاً گفته می شود که دپارتمانهای وابسته به این زیر گراف دارای حفره اند.

حلقه ناشی از اجتماع مرزی دپارتمانها در صورتی جواب مسئله است که دپارتمانهای وابسته به آن غیرحفره دار نیز باشد زیرا اگر مجموعه دپارتمانها حفره دار باشد آن گاه مرز این مجموعه یا تشکیل دو حلقه جدا از هم را می دهد نظیر هنگامی که در شکل (۴) اجتماع مرزی شامل دپارتمانهای ۳، ۴، ۵، ۸، ۹ و ۱۰ باشد و یا این که دپارتمانی از مجموعه دپارتمانهای حفره دار وجود دارد که تمام دپارتمانهای مجاور با آن متعلق به جواب اند و لذا نمی تواند یال مشترکی با حلقه داشته باشد مثلاً در شکل (۴) وقتی که مجموعه ما شامل دپارتمانهای ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ باشد، در این حالت دپارتمان ۶ یا ۷ یال مشترکی با حلقه ایجاد شده ندارد.

جواب موجه برای مسئله می‌کنند. مورچه‌ها ساختن جواب خود را زمانی آغاز می‌کنند که مورچه قبلی جواب خود را تکمیل کرده باشد. در این مسئله جواب نهایی با یک زیرگراف از گراف چیدمان مشخص می‌شود. از آنجا که چنین زیرگرافی در حقیقت یک زیر گراف القایی از گراف چیدمان است پس با مشخص شدن مجموعه گره‌هایش می‌توان آن را به صورت منحصر به فردی مشخص ساخت. در هر مرحله از ساختن یک جواب مسئله توسط هر یک از مورچه‌ها نظیر مورچه  $k$  توسط گام ۲ الگوریتم "یافتن زیر گراف موجه"، گره جدید  $i$  با احتمال  $S_i^k$  که از معادله زیر به دست می‌آید برای انتخاب استفاده می‌شود:

$$S_i^k = \begin{cases} \frac{\tau_i \cdot [\eta_i]^\alpha}{\sum_{j \in J_k} \tau_j \cdot [\eta_j]^\alpha} & \text{if } i \in J_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

در این معادله  $\eta_i$  تابعی است که به هر گره تخصیص داده می‌شود و مقدار آن برابر است با  $W_i / P_i$  که  $P_i$  بیانگر محیط دپارتمان نظیرگره  $i$  و  $W_i$  نیز درجه این گره در گراف است. در حقیقت این نسبت بیانگر این نکته است که هر چقدر گره جدید با گره‌های بیشتری مجاور باشد بهتر بوده و هر چقدر محیط بیشتری داشته باشد به دلیل آن که می‌تواند بر طول حلقه حاصل بیفزاید از مطلوبیت کمتری برخوردار خواهد بود.

$\tau_i$  نیز مقدار فرومون گره  $i$  است.  $\alpha$  پارامتری است مثبت که بیانگر اهمیت  $\eta_i$  در مقابل فرومون گره می‌باشد.  $J_k$  مجموعه گره‌هایی است که حداقل با یکی از گره‌های زیرگراف ساخته شده مورچه  $k$  ام مجاور است و طبق بندهای الف و ب گام ۲ الگوریتم انتخاب آنها برای اضافه کردنشان به زیرگراف مجاز است. با توجه به این معادله می‌توان گفت گره‌هایی برای انتخاب مناسب‌ترند که مقدار فرومون بیشتری داشته، با تعداد گره بیشتری مجاور باشند و در عین حال محیط کمتری نیز داشته باشند. همان‌گونه که دیدیم طبق گام ۲ اگر گره‌ای برای انتخاب وجود نداشت فرایند ساختن جواب توسط این مورچه مجدداً از نو آغاز می‌شود.

۲- از میان گره‌های غیر برچسب‌دار (به جز گره صفر) متصل به گره‌های برچسب‌دار، گره‌ای را انتخاب کنید که در شرایط زیر برای زیر گراف القایی حاصل از گره‌های برچسب‌دار و این گره صدق کند:

الف: هر گره از این زیر گراف حداقل با یک گره برچسب نخورده مجاور باشد.

ب: اگر از گراف چیدمان این زیر گراف القایی را حذف کنیم همچنان همبند باقی بماند.

اگر چنین گره‌ای پیدا نشد مجدداً از گام ۱ شروع کنید.

۳. گره را به مجموعه گره‌های برچسب‌دار اضافه کنید و زیر گراف القایی حاصل از گره‌های برچسب‌دار را با توجه به این گره تعمیم دهید. اگر هر گره غیر برچسب‌دار مجاور یکی از گره‌های این زیر گراف باشد متوقف شوید. در این صورت زیر گراف موجه به دست آمده است. در غیر این صورت به گام ۲ برگردید.

زیرگراف به دست آمده از این الگوریتم از آنجا که در گام ۲ گره جدید را از میان گره‌های مجاور با یکی از گره‌های زیرگراف ساخته شده برمی‌گزیند، در نهایت همبند خواهد بود و به دلیل بندهای الف و ب گام ۲ شرایط ۲ و ۴ موجود در یک جواب موجه مسئله را ارضا کرد و با توجه به این که شرط توقف الگوریتم ارضای شرط ۳ موجه بودن یک جواب است در نهایت منجر به یک زیرگراف موجه خواهد شد.

## ۶- حل مسئله SLRP به کمک الگوریتم ACO

در بخش (۴) جواب موجه برای یک مسئله SLRP را به صورت یک زیرگراف از گراف چیدمان بیان کردیم و در بخش (۵) الگوریتمی بر این پایه طراحی نمودیم. اینک می‌توان از ایده موجود در الگوریتم‌های ACO در الگوریتم بخش ۵ به شرح زیر استفاده کرد:

در ابتدا  $m$  مورچه را به صورت تصادفی در  $m$  گره گراف چیدمان قرار می‌دهیم. سپس هر یک از مورچه‌های مصنوعی، طبق الگوریتم ارائه شده در بخش (۵)، شروع به ساختن یک

گام ۲: از میان گره‌های غیر برجسب دارنظیر<sup>۱</sup>، گره‌ای را برای حرکت بعدی مورچه  $k$  ام انتخاب کنید که در شرایط زیر برای زیر گراف القایی حاصل از گره‌های برجسب دار و این گره صدق کند:

الف: هر گره از این زیر گراف حداقل با یک گره برجسب نخورده مجاور باشد.

ب: اگر از گراف چیدمان این زیر گراف القایی را حذف کنیم همچنان همبند باقی بماند

اگر چنین گره‌ای پیدا نشد مجدداً از گام ۱ شروع کنید.

ج: دارای احتمال انتخاب  $S_i^k$  با توجه به معادله ۱ باشد.

گام ۳: گره را به مجموعه گره‌های برجسب دار اضافه کنید و مورچه  $k$  ام را بر روی آن قرار دهید و زیر گراف القایی حاصل از گره‌های برجسب دار را با توجه به این گره تعمیم دهید. اگر هر گره غیر برجسب دار مجاور یکی از گره‌های این زیر گراف باشد زیر گراف موجه به دست آمده است و در نتیجه حلقه موجه توسط مورچه  $k$  ام تکمیل شده است در این حالت به گام بعدی بروید. در غیر این صورت به گام ۲ برگردید.

گام ۴:  $k = k + 1$  و اگر  $k \leq m$  شد به گام ۱ برگردید. در غیر این صورت به گام ۵ بروید.

گام ۵: طول حلقه موجه حاصل در این تکرار را با بهترین حلقه به دست آمد تا این تکرار مقایسه کرده و مقدار بهتر را در  $L_{gb}$  قرار دهید. فرمون هر گره را با توجه به معادله ۲ بهنگام کرده و شمارنده تعداد تکرارها یعنی  $i$  را یک واحد افزایش دهید در صورتی که این مقدار کمترین مساوی  $I_{max}$  بود  $k = 1$  قرار داده به گام ۱ برگردید. در غیر این صورت متوقف شوید بهترین جواب را در بین حلقه‌های موجه تعیین کنید.

الگوریتم فوق را می‌توان در قالب زیر خلاصه کرد:

```

Initialize
For t=1 to number of cycles do
  For k=1 to ant-no. do
    Repeat until ant k make feasible solution
      Select item i from  $J_k$  with
      probability  $P_i^k$  given by Eq.(1)
      if item i is not feasible then
         $J_k \leftarrow J_k - \{i\}$ 

```

زمانی که تمامی مورچه‌ها جواب خود را تکمیل کردند مطلوبیت آن توسط استفاده از قاعده به هنگام کردن نهایی<sup>۱</sup> اندکی کاهش می‌یابد. این قاعده باعث می‌شود که مطلوبیت گره‌ها به صورتی پویا در حال تغییر باشد و از همگرا شدن جوابها در اطراف یک بهینه محلی جلوگیری شود. این قاعده از این اصل طبیعی ناشی می‌شود که همواره مقداری از فرومونی که مورچه‌ها بروی یک مسیر باقی می‌گذارند به دلیل تبخیر از بین می‌رود. برای به هنگام کردن فرمون گره‌های موجود در گراف چیدمان از معادله زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tau_i \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau_i + \rho \cdot \Delta \tau_i \quad (2)$$

در این معادله  $\Delta \tau_i = \begin{cases} (L_{gb})^{-1} & \text{if } i \in \text{global best Loop} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

است که منظور از  $L_{gb}$  طول بهترین حلقه به دست آمده تا تکرار کنونی الگوریتم است و  $\rho$  نیز به نام پارامتر تبخیر است. هدف از معادله فوق آن است که اگر گره‌هایی متعلق به بهترین حلقه موجه تا تکرار کنونی نباشد مقدار فرمونش کمتر خواهد شد و اگر گره‌هایی متعلق به بهترین حلقه موجه بود اگر چه به دلیل تبخیر مقدار از فرمون آن کم می‌شود اما این مقدار به اندازه سایر گره‌ها نخواهد بود.

از ترکیب الگوریتم یافتن "زیر گراف موجه" با قواعد ذکر شده در بالا الگوریتم مورچه‌ای برای حل مسئله SLRP به صورت زیر به دست می‌آید:

گام ۰: شمارنده تکرار الگوریتم یعنی  $I$  و شمارنده تعداد مورچه‌ها یعنی  $k$  را برابر ۱ قرار دهید. حداکثر مقدار هریک از آنها را نیز به ترتیب  $I_{max}$  و  $m$  فرض کنید.

گام ۱: یک گره غیر از گره صفر را به صورت تصادفی از گراف چیدمان برگزینید و آن را برجسب دار کنید و مورچه  $k$  ام را بروی آن قرار دهید. اگر این گره به تمام گره‌های دیگر گراف (غیر از گره صفر) متصل باشد حلقه موجه بروی مرز این دپارتمان قرار دارد و به گام ۴ بروید.



با توجه به این نتایج در می‌یابیم که در تمام ۳۲ مسئله نمونه، بهترین جواب حاصل از الگوریتم مورچه‌ای در واقع همان جواب بهینه مسئله است. نکته جالب آن است که به‌طور متوسط در ۲۱ اجرا از ۳۰ اجرای الگوریتم برای هر مسئله نمونه جواب بهینه به‌دست آمده است و این بدان معنی است که می‌توان انتظار داشت که جواب حاصل از یک‌بار اجرای الگوریتم به احتمال ۷۰٪ جواب بهینه را تولید می‌کند. از طرف دیگر در ۱۳ مسئله در تمامی ۳۰ بار اجرای الگوریتم جواب به‌دست آمده بهینه بوده است. با توجه به این نکته که در مورد مسائل با ۱۰ و ۲۰ دپارتمان در ۹۴٪ موارد در بیش از ۸۰٪ اجراها جواب بهینه حاصل شده است می‌توان نتیجه گرفت که در این نوع از مسائل می‌توان از تعداد اجراهای الگوریتم کاست. بیشترین میزان خطا در جواب حاصل از یک تکرار الگوریتم در مسئله ۳۱ که دارای ۱۸٪ خطا است اتفاق افتاده است. اما با توجه به این نکته که میانگین انحراف بدترین جواب مربوط به هر مسئله نسبت به جواب بهینه از ۴٫۷٪ بیشتر نیست می‌توان نتیجه گرفت که حتی بدترین جوابهای حاصل از الگوریتم نیز نزدیک به جواب بهینه است. همچنین متوسط جواب حاصل از اجرای الگوریتم بروی تمام مسائل نمونه در بازه [۰٫۸٪، ۰٪] نسبت به جواب بهینه مسائل قرار دارد. متوسط زمان اجرای الگوریتم بر روی تمام مسائل نمونه برابر ۰٫۶۷۲ ثانیه و به تفکیک هر گروه از مسائل برحسب دپارتمان در جدول ۲ داده شده است. بدترین زمان اجرای الگوریتم در کل ۹۶۰ اجرای متعلق به ۳۲ مسئله در مسئله شماره ۳۱ با ۴۰ دپارتمان اتفاق افتاده است که ۱٫۸۳ ثانیه بوده است که با توجه به ابعاد مسئله زمان بسیار سریعی محسوب می‌شود. برای مقایسه کارایی الگوریتم با سایر روشهای موجود برای حل مسئله، الگوریتم مرجع [۱] که حل بهینه مسئله را با استفاده از روشهای بهینه‌سازی انجام می‌دهد انتخاب شد. در جدول (۲) مقایسه ایی مابین نتایج حاصل از این الگوریتم و الگوریتم موجود در مرجع [۱] داده شده است. لازم به ذکر است که زمان ارائه شده در این جدول برای الگوریتم مرجع [۱] مستقیماً از روی نتایج گزارش شده در این مرجع ذکر

*End.*  
*Calculate the objective function of the generated solution*  
*End.*  
*Find the best solution.*  
*Make local – optimum.*  
*Update the pheromone for each node by Eq. (2)*  
*End.*

## ۷- نتایج محاسباتی

برای بررسی کارایی الگوریتم نرم افزاری به زبان برنامه‌نویسی دلفی تهیه شد و بر روی ۳۲ مسئله نمونه آزمایش شد. مسائل نمونه برای انجام این آزمایش مسائلی بودند که در مرجع [۱] نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند به این دلیل که بتوان کارایی الگوریتم را با الگوریتم دیگر حل SLRP سنجید. در جداول زیر نتایج حاصل از اجرای الگوریتم بروی مسائل نمونه و با استفاده از رایانه شخصی Pentium 3 با پردازنده 800 MHZ و 128 مگابایت حافظه اصلی آورده شده است.

قبل از اجرای الگوریتم ضروری بود که مقادیر پارامترهای موجود در الگوریتم تخمین زده شود. برای این منظور برای هر یک از پارامترهای موجود در الگوریتم دامنه تغییرات به صورت  $\rho=[0.05,2.5]$ ,  $m=[5,5]$ ,  $\alpha = [1.0, 3.0]$ ,  $I_{max}=10$  در نظر گرفته شد و الگوریتم بر روی مسایل نمونه به ازای ترکیبهای مختلفی از مقادیر برای پارامترهای مذکور اجرا شد که در نتیجه بهترین نتایج با توجه به تجزیه و تحلیل حساسیت بروی پارامترهای فوق در هنگام اجرای الگوریتم به صورت زیر  $\rho = 0.1$ ,  $m = 10$ ,  $\alpha = 2.0$ ,  $I_{max} = 10$  برای هر نمونه مسئله ۳۰ بار اجرا شده است. در ستونهای این جدول به ترتیب از سمت چپ شماره مسئله (NO.) نام مسئله در مرجع [۱] (Name) تعداد دپارتمان موجود در مسئله (#Dept.) زمان اجرای الگوریتم بروی هر مسئله نمونه برحسب ثانیه (Time) بهترین جواب به‌دست آمده در ۳۰ بار اجرا (Best Solution) بدترین جواب به‌دست آمده در ۳۰ بار اجرا (Worst Solution) متوسط جواب به‌دست آمده در ۳۰ بار اجرا (Average Solution) و تعداد اجراهایی که در آن جواب به‌دست آمده بهینه است (BI) درج شده است.

جدول ۱- نتایج محاسباتی حاصل از اجرای الگوریتم بر روی ۳۲ مسئله نمونه

BI	Average	Worst Solution	Best	Time (sec)	#Dept.	Name	NO.
30	180	180	180	0.073	10	A1	1
30	320	320	320	0.113	10	A2	2
30	150	150	150	0.047	10	T1	3
30	234	234	234	0.065	10	T2	4
30	340	240	240	0.056	10	F1	5
30	224	224	224	0.075	10	F2	6
30	224	224	224	0.062	10	F3	7
30	188	188	188	0.085	10	F4	8
20	425.5	452	422	0.325	20	A10T20	9
30	490	490	490	0.401	20	A20T10	10
30	373	373	373	0.267	20	F10F20	11
25	396.5	404	396	0.295	20	F30F40	12
3	416.8	426	402	0.326	20	A10F20	13
30	504	504	504	0.433	20	A20F40	14
30	430	430	430	0.274	20	T10F10	15
29	400.6	434	398	0.329	20	T20F30	16
26	600.7	658	592	0.850	30	A10T20F30	17
30	580	580	580	0.871	30	F40A20T10	18
12	592.8	612	580	0.727	30	F10A10T20	19
4	598.3	610	580	0.895	30	F20A20T10	20
27	530	554	526	0.717	30	F30A10T20	21
29	602	752	598	0.649	30	F40T10A20	22
26	588	598	584	0.875	30	F10F20F30	23
7	536	538	534	0.700	30	F20F30F41	24
24	675.4	750	664	1.451	40	A10F20T10T20	25
3	747	784	710	1.445	40	F10F20 F30F40	26
1	701	725	680	1.379	40	F20F31 F42F13	27
17	698	732	680	1.549	40	F30F41 F12F23	28
2	757	786	728	1.435	40	F40F11 F22F33	29
15	655.6	684	642	1.470	40	A10T10 F10F30	30
10	694.3	756	640	1.682	40	T20A10 F20F40	31
4	833.4	892	770	1.626	40	A10F10A20F20	32

جدول ۲- مقایسه نتایج الگوریتم مورچه‌ای و الگوریتم مرجع [۱]

۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	تعداد دیپارتمانهای موجود در مسئله
۳۳	۱۲	۳	۱	متوسط زمان حل در الگوریتم مرجع [۱] (ثانیه)
۱.۵۰۴	۰.۷۸۵	۰.۳۳۱	۰.۰۷	متوسط زمان حل توسط الگوریتم مورچه‌ای (ثانیه)

جدول ۳- نتایج حاصل از اجرای الگوریتم مورچه‌ای بر روی مسائل بزرگ

۲۰۰	۱۶۰	۱۲۰	۸۰	تعداد دیپارتمانهای موجود در مسئله
۱	۲	۳	۴	تعداد مسئله نمونه حل شده
۱۴۲۰	۹۳۴	۳۱۴	۵۰	متوسط زمان حل توسط الگوریتم مورچه‌ای (ثانیه)

برای مسائل بزرگ نیز در زمان قابل قبول حل تقریبی را ارائه کند که این موضوع با اجرای الگوریتم بروی ۱۰ مسئله بزرگ با ابعاد مختلف که به صورت تصادفی تولید شدند بررسی شد که نتایج آن در جدول (۳) آمده است.

لازم به ذکر است که برای مسائل عملی حداکثر دپارتمان مورد بررسی معمولاً کمتر از ۱۰۰ دپارتمان است که با توجه به آن می توان گفت که الگوریتم مورچه‌ای قادر است جواب نزدیک به بهینه را برای چنین مسائلی در زمان کوتاهی تولید کند.

1. automated guided vehicles
2. single loop routing problem
3. ant colony optimization
4. pheromone

1. Asef-Vaziri, A., Laporte, G., and Sriskandarajah, C., "The Block Layout Shortest Loop Design Problem," *IIE Transactions on Computers and Intractability*, Vol. 32, pp. 727-734, 2000.
2. Askin, R. G., and Standridge, C. R., *Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, pp. 232-235, Wiley, 1993.
3. De Duzman, M. C., Prabhu, N., and Tanchoco, J. M. A., "Complexity of the AGV Shortest Path and Single Loop Guide Path Layout Problem," *International Journal of Production Research*, Vol. 8, pp. 2083-2091, 1997.
4. Dorigo, M., and Di Caro, G., "Ant Colony Optimization: A New Meta-Heuristic," *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation*, 1999.
5. Dorigo, M., and Gambardella, L. M., "Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 1, pp. 53-66, 1997.
6. Dorigo, M., Maniezzo, V., and Colorni, A., "Positive Feedback as a Search Strategy," Technical Report 91-016, University of Milan, Italy, 1991.

شده است و حاصل از اجرای الگوریتم مذکور بر روی شبکه پیشرفته SUN SPARC STATION 20, 150 MHz, 64 MB است که همان‌گونه که مشخص است با افزایش تعداد دپارتمانها هم بر زمان اجرای الگوریتم مرجع [۱] افزوده می‌شود و هم برای مسائل با بیش از ۴۰ دپارتمان به دلیل افزایش ابعاد مسئله، الگوریتم مذکور قادر نیست جواب بهینه را تعیین کند. اما اشکال زمان حل در الگوریتم مورچه‌ای بسیار کمتر به چشم می‌خورد و علیرغم اجرای الگوریتم بر روی رایانه شخصی، زمان اجرای آن سریعتر از الگوریتم مرجع است. همچنین با توجه به بررسیهای به عمل آمده الگوریتم مورچه‌ای قادر است

## واژه‌نامه

5. layout graph
6. planar graph
7. induced subgraph
8. global updating rule

## مراجع

7. Laporte, G., Asef-Vaziri, A., and Sriskandarajah, C., "Some Applications of the Generalized Traveling Salesman Problem," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 47, pp. 1461-1467, 1996.
8. Sinrich, D., "Design and Evaluation of Optimal Single Loop Guide Paths for Automated Guided Vehicle Systems," M.S.I.E Thesis, Purdue University, Indiana, 1990.
9. Sinriech, D., and Tanchoco, J.M.A., "Impact of Empty Vehicle Flow on Performance of Single-Loop AGV Systems," *International Journal of Production Research*, Vol. 30, pp. 2237-2252, 1992.
10. Sinriech, D., and Tanchoco, J.M.A., "Solution Methods for the Mathematical Models of Single-Loop AGV Systems," *International Journal of Production Research*, Vol. 31, pp. 705-723, 1993.
11. Stützle, T., and Hoos, H. H., "Max-Min Ant System," pp. 889-914, 2000.