

## تحلیل تنش در جسم پرنده با استفاده از مودهای ارتعاشی

حسن حدادپور

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۸۳/۶/۱ - دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۱/۱۶)

چکیده - در این مطالعه برای محاسبه تنش حین پرواز تحت عواملی از قبیل تندباد و حرکت سطوح کنترلی (مانور)، از معادلات کامل حاکم بر حرکت‌های صلب و الاستیک استفاده شده است. برای این منظور روابط خطی حاکم بر دینامیک پرواز و الاستیسیته جسم پرنده حین پرواز با استفاده از دیدگاه لاگرانژی به کار گرفته شده و برای بررسی رفتار سیستم بر حسب زمان حل شده‌اند. معادلات موردنظر شامل معادلات اساسی حرکت در دستگاه بدنی‌اند که با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و نیروهای تعمیم‌یافته در روش لاگرانژ استخراج شده‌اند. با حل معادلات حاکم بر حسب زمان، متغیرهای پروازی و حرکت‌های الاستیک بدنه بر حسب زمان محاسبه شده و با استفاده از ارتباط تنش و مودهای ارتعاشی، تنش در جسم پرنده محاسبه شده است. نتایج به دست آمده دربرگیرنده بررسی پایداری موشکی خاص و بررسی رفتار آیروالاستیک آن است که نتایج مربوط به پایداری با نتایج به دست آمده توسط سایر مراجع مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: آیروالاستیسته - آیرودینامیک - تنش - شکل مود - دینامیک

## Stress Analysis of Flight Vehicles under Flight Conditions

Hassan Haddadpour

Aerospace Engineering Department, Sharif University of Technology

**Abstract:** A method is presented for the stress analysis of flight vehicles under different flight conditions including gust and control surface deflection (or maneuver) using the governing equations of rigid-body motions and elastic deformations. The Lagrangian approach is used to derive the governing equations of motions. For this purpose, the basic equations of motions are derived in terms of potential energy, kinetic energy and generalized forces, which are, in turn, computed in terms of rigid-body motion variables, elastic mode shapes and  $c_{la}(x)$  distribution for aerodynamic forces. By replacing them into the relations obtained, the governing equations for aeroelastic behavior of the vehicle are derived. The system of aeroelastic equations of

\* - استادیار

*motions is solved in time domain using numerical methods. The stress distribution is determined using the relation between modal variables and strain at each point. Finally, the prepared code is verified through comparison of the results obtained from the proposed method for the stability of a rocket and the same results reported by other studies. Also additional information such as maximum stress in the body is presented for various flight conditions.*

**Keywords:** Aeroelasticity, Aerodynamic, Stress, Mode shape, Dynamic.

## ۱- مقدمه

بررسی رفتار آیروالاستیک اجسام پرنده از دو دیدگاه بررسی پایداری و بررسی رفتار آیروالاستیک انجام می‌گیرد. در بررسی اول تاکید بر یافتن شرایطی است که در آن شرایط جسم پرنده رفتار ناپایدار (واگرایی یا فلاتر) از خود نشان می‌دهد. در نوع دوم از بررسی با فرض اینکه شرایط پروازی در محدوده پایدار قرار دارد بارگذاری جسم تحت تاثیر رفتار آیروالاستیک آن قرار داشته و نیاز به محاسبه این اثر به خصوص برای طراحی سازه و اطمینان از قرار داشتن در حاشیه امن، وجود دارد. تحقیقات انجام شده در این زمینه بیشتر معطوف به بررسی پایداری، با در نظر گرفتن فرضیات مختلف بوده است و به صورت سنتی تنها به بررسی اثر رفتار آیروالاستیک استاتیک در بارگذاری نیز اشاره می‌شود. به عنوان نمونه خاصی از اجسام پرنده در این مقاله به موشکها پرداخته شده است، ولی روش مورد بررسی برای تمامی اجسام پرنده صادق است. در مبحث بررسی ترکیب معادلات پرواز با رفتار الاستیک میروویچ و نلسون [۱] برای بیان پایداری اجسام پرنده الاستیک دوران‌دار، با استفاده از روش لاگرانژ معادلات وابسته حاکم بر حرکت و آیروالاستیسیته راکت را به دست آوردند. معادلات خطی شده حاکم بر دوران موشکهای دوران‌دار نیز توسط کریمی [۲] با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج شد. آنها از میرایی سازه با فرض دست بالا بودن محاسبات صرف نظر کردند. پلاتوس [۳] اثر میرایی در راکت‌های دوران‌دار را در بررسی خود لحاظ کرد و ثابت کرد در بعضی از حالات خاص میرایی سازه‌ای می‌تواند باعث ناپایداری موشکهای دوران‌دار شود. برای راکت‌های بدون دوران با جرم متغیر (اثر سوزش موتور) نیز، پایداری آیروالاستیک توسط میروویچ و وسلی [۴] مورد بررسی قرار

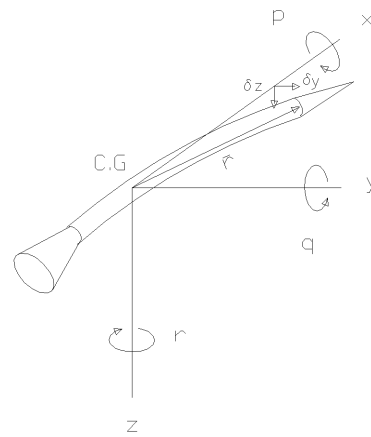
گرفت. الیادا [۵] روش بسته‌ای را برای پایداری آیروالاستیک استاتیک راکت‌های بدون دوران در صفحه، بدون استفاده از معادلات کامل و تنها با استفاده از ضرایب تاثیر سازه مورد بررسی قرار داد. اشمیت [۶] روشی نیمه عمومی را برای به دست آوردن معادلات آیروالاستیک کلیه اجسام پرنده برحسب مودهای ارتعاشی ارائه کرد. در ادامه این روش برای به دست آوردن معادلات حاکم بر راکت‌های دوران‌دار مورد استفاده قرار گرفت [۷]. اثر نیروی محوری بر پایداری استاتیک و دینامیک موشک نیز توسط تعدادی از محققان بررسی شد [۸-۱۰].

در این مقاله از معادلات حاکم بر رفتار دینامیک کل سیستم با استفاده از روش مودال برای سازه، برای بررسی رفتار آیروالاستیک جسم پرنده استفاده خواهد شد. همچنین موشک به عنوان نمونه خاصی از اجسام پرنده انتخاب شده است. در ادامه محاسبات برای راکتی خاص انجام شده و تحت شرایط مختلف پروازی علاوه بر بررسی کمیت‌های صلب موشک به بررسی رفتار آیروالاستیک آن نیز پرداخته خواهد شد. همچنین تاریخچه زمانی<sup>۱</sup> مقادیر تنش با استفاده از ارتباط تنش مودال (تنش در هر مود ارتعاشی) در این شرایط تعیین خواهد شد. در انتها نیز مقایسه‌ای بین تعدادی از نتایج حاصل با نتایج موجود مشابه، انجام خواهد گرفت.

## ۲- معادلات حاکم

پلاتوس [۳] معادلات حرکت موشک الاستیک را که در شکل (۱) نشان داده است، در فضای سه بعدی با استفاده از مودهای ارتعاشی استخراج نمود. برای این منظور شش متغیر برای بیان حرکت صلب و روش مودال (بی‌نهایت درجه آزادی) برای بیان حرکت الاستیک مورد استفاده قرار گرفتند. در این مقاله

تحریک مربوط معلوم باشند، می توان اقدام به محاسبه تنش در هر نقطه از موشک کرد. برای به دست آوردن توابع زمانی با بهره گیری از روشهای ارایه شده برای بررسی رفتار آیروالاستیک و نوشتن معادلات برای حالت حرکت صفحه ای (صفحه  $xz$ ) دستگاه معادلات (۳) به دست می آید.



شکل ۱- موشک الاستیک در فضای سه بعدی به همراه دستگاه مختصات بدنی

در معادلات فوق  $q, a$  و  $z_i$  مختصات تعمیم یافته سیستم دینامیکی بوده و به ترتیب شامل زاویه حمله، سرعت پیچ و مختصه تعمیم یافته متناظر با مود ارتعاشی اند. متغیر  $u$  سرعت خطی موشک بوده و در بخش اول محاسبات آتی ثابت در نظر گرفته می شود. کمیت های  $I_0, m$  و  $w_i$  به ترتیب شامل جرم، گشتاور اینرسی حول مرکز جرم و فرکانس طبیعی مود ارتعاشی نام موشک بوده و ثابت فرض می شوند (از تغییرات جرم موشک صرف نظر شده است). مقادیر  $T$  و  $D$  به ترتیب نیروهای پیشران و پسا هستند که به ترتیب در محل اثر نیروهای پیشران ( $x_T$ ) و پسا ( $x_D$ ) اثر می کنند. شایان ذکر است که محل اثر نیروی پسا را می توان با استفاده از توزیع آن روی موشک محاسبه کرد. مقادیر  $f_z^e, M_y^e$  و  $Q_{z_1}^e$  به ترتیب بیانگر نیرو در جهت محور  $z$ ، گشتاور حول محور  $y$  و نیروی تعمیم یافته متناظر با مود ارتعاشی نام، هستند. همچنین  $f_i(x)$  و  $c_{ia}(x)$  به ترتیب توزیع شکل مودهای ارتعاشی و ضریب نیروی برا در امتداد بدنه تلقی می شوند. مقدار نیروی برا بر واحد طول نیز از معادله  $I_a(x) = q \sum_{i=1}^{\Psi} S_i c_{ia}(x)$  محاسبه می شود. سایر ضرایب معادلات نیز در جدول (۱) آورده شده اند.

### ۳- نیروهای خارجی

برای حل دستگاه معادلات (۳) در حوزه زمان نیاز به محاسبه نیروهای خارجی عمل کننده روی سیستم وجود دارد. به عنوان مثال این نیروها می تواند ناشی از منابعی نظیر تندباد، عدم تقارن و حرکت سطوح کنترلی باشد. وجود این نیروها باعث می شود سمت راست معادلات دارای مقدار شود. در ادامه در سه حالت اثر تندباد، اثر تغییر پله ای زاویه بالک و اثر حرکت نوسانی بالک، بردار نیروهای تعمیم یافته محاسبه شده اند.

از روابط به دست آمده وسط پلاتوس بدون اثر رول (حرکت صفحه ای) استفاده شده و اثر نیروی پیشران<sup>۲</sup> و پسا<sup>۳</sup> به این معادلات اضافه شده است. حرکت بدنه در امتداد محور  $z$  (عمود بر بدنه) به عنوان تغییر مکان الاستیک برای موشک دوبعدی، در نظر گرفته شده است. این تغییر شکل تابعی از مکان در دستگاه بدنی و زمان بوده و با فرض تیر برای سازه موشک، به صورت زیر بیان می شود:

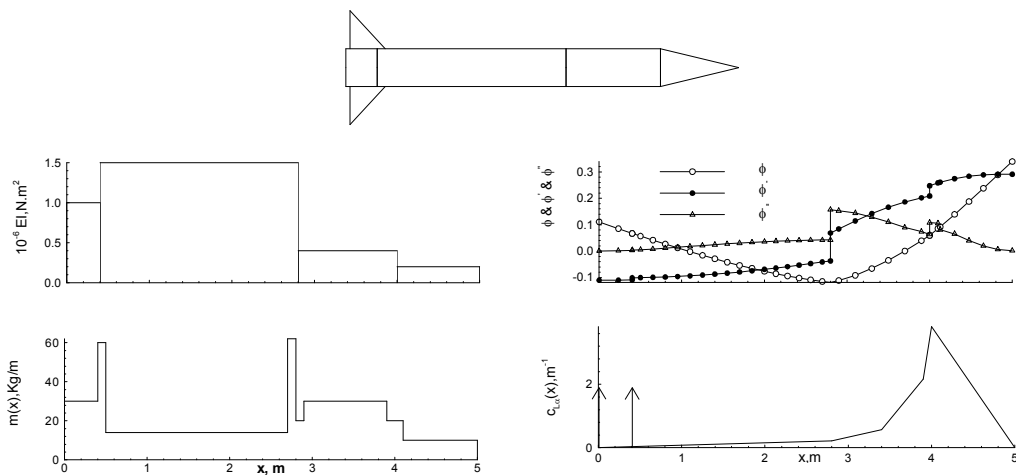
$$e_z = \sum_{i=1}^{\Psi} f_i(x) z_i(t) \quad (1)$$

در معادله فوق  $f_i(x)$  مود ارتعاشی نام (خمشی) بوده و  $z_i(t)$  تابع زمانی تحریک این مود است. در بحث نیروها و مختصات تعمیم یافته با توجه به اینکه شکل مودهای ارتعاشی معلوم است از  $z_i(t)$  به عنوان مختصات تعمیم یافته استفاده می شود. واضح است این مختصات می تواند دارای بی نهایت عضو باشد. چنانچه توابع  $z_i(t)$  ها بر حسب زمان معلوم شوند، می توان جابه جایی هر نقطه از موشک را در هر لحظه محاسبه کرد. با معلوم بودن جابه جایی می توان توزیع تنش خمشی در بدنه را با استفاده از معادله زیر بر حسب زمان محاسبه کرد:

$$s_z = \frac{Mz}{I} = Ez \frac{d^2 e_z}{dx^2} = Ez \sum_{i=1}^{\Psi} \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} z_i(t) \quad (2)$$

بنابراین چنانچه مشتق دوم مودهای ارتعاشی و توابع





شکل ۲- اطلاعات موشک شامل توزیع سختی، توزیع جرم، شکل مود ارتعاشی اول و مشتقات آن و توزیع ضریب برا

جدول ۲- مقادیر خاص برای راکت نمونه

توضیح	m محل اعمال	مقدار	بعد
C <sub>Lα</sub> متمرکز †	۰/۰	۱/۹۱	
	۰/۴	۱/۹۱	
سختی فنر پیچشی	۰/۴ ۲/۸ ۴/۰	۰/۶ × ۱۰ <sup>-۶</sup>	N.m/rad
سطح مرجع (S <sub>r</sub> )		۳/۱۴ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	m <sup>2</sup>
سختی مرجع (EI <sub>r</sub> )		۳/۳۳۳ × ۱۰ <sup>۰</sup>	N.m <sup>2</sup>
فرکانس طبیعی مود اول		۱۳۵/۶	rad/s

† نسبت به سطح مرجع

توسط معادلات به دست آمده با تنها یک مود ارتعاشی دارای دقت کافی است [۳]. بنابراین در محاسبات آتی تنها از مود ارتعاشی اول استفاده خواهد شد. برای انجام حل عددی، داده‌های مربوط به موشک خاص مورد استفاده قرار گرفت. این موشک در مرجع [۵] معرفی شده و مقادیر مربوط به حالت ناپایداری آن محاسبه شده است. مرجع [۷] نیز با استفاده از روش مرجع [۳] نتیجه مشابهی را برای این موشک به دست آورده است. اطلاعات مربوط به این موشک در جدول (۲) و شکل (۲) آورده شده‌اند. در ادامه نتایج در دو قسمت بدون حضور نیروهای محوری (سرعت طولی ثابت) و با حضور آنها بررسی شده است. در حالت بدون حضور نیروهای محوری

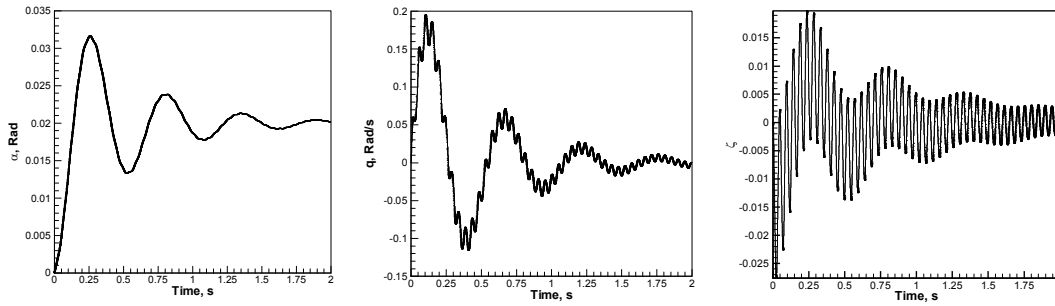
برای نیروهای تعمیم یافته نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_z^c \\ \ddot{M}_y^c \\ \ddot{Q}_{z_1}^c \\ \ddot{M}_z^c \end{Bmatrix} = q_{\psi} S_c C_{l\alpha} \sin(\psi t) \begin{Bmatrix} 1 \\ -x_c \\ f_1(x_c) \\ M \end{Bmatrix} \quad (9)$$

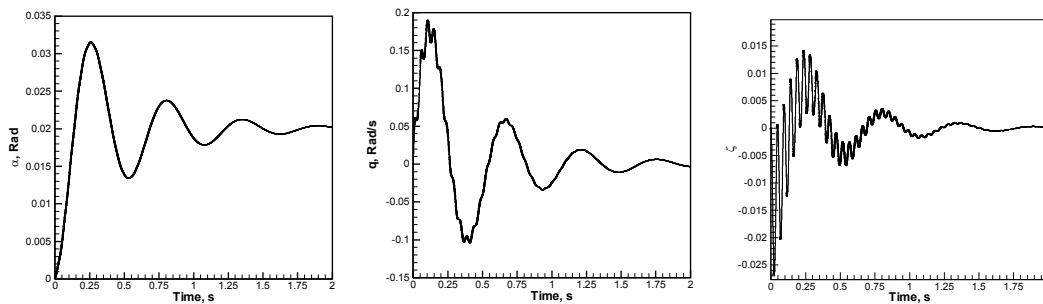
با معین بودن بردار سمت راست معادلات (۳) می‌توان اقدام به حل دستگاه معادلات وابسته آیروالاستیک با استفاده از روشهای حل مختلف کرد. در این مقاله حل معادلات در حوزه زمان با استفاده از روشهای انتگرال گیری عددی انجام گرفته است.

#### ۴- نتایج

پلاتوس نشان داد که بررسی رفتار آیروالاستیک موشک



شکل ۳- پاسخ سیستم به تندباد بدون میرایی سازه‌ای در سرعت ۱۰۰۰ m/s



شکل ۴- پاسخ سیستم به تندباد با میرایی سازه‌ای در سرعت ۱۰۰۰ m/s

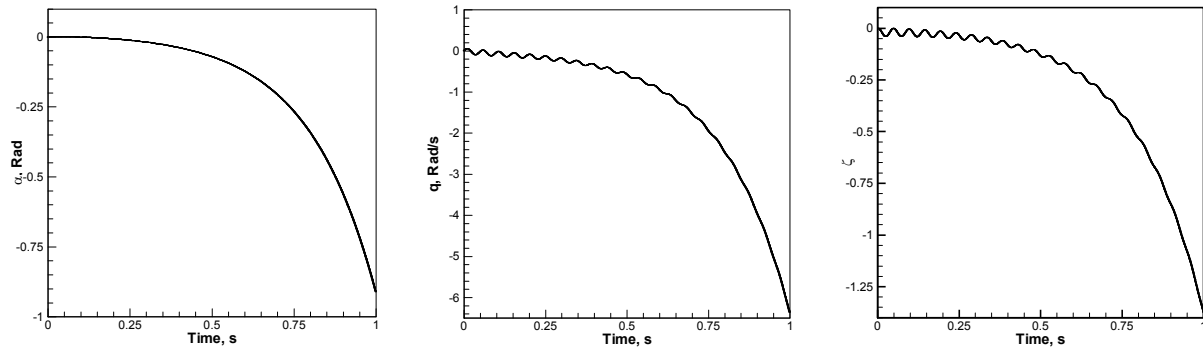
جدول ۳- مقادیر  $Q_{div}$  برای راکت نمونه

$Q_{div}$	راکت
$1/149 \times 10^6$	مرجع [۵] (روش مهندسی)
$1/0.87 \times 10^6$	روش ارزیابی شده
$1/0.89 \times 10^6$	روش مرجع [۳]

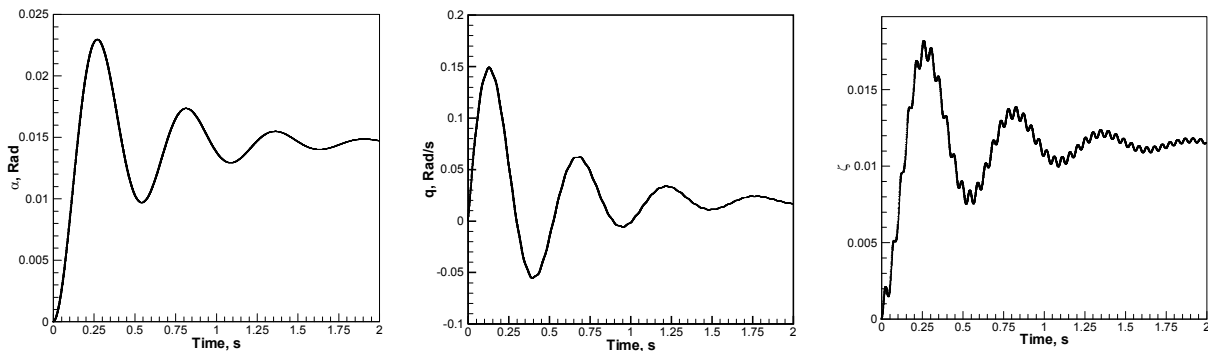
در نتیجه، رفتار جواب نیز واگرایی را نشان می‌دهد. همچنین در شکل (۶) پاسخ سیستم به ورودی پله با سرعت طولی ۱۰۰۰ متر بر ثانیه برای موشک آورده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود در این حالت زاویه حمله به مقدار ثابت غیرصفری همگرا شده در حالی که سایر متغیرها به سمت صفر میل می‌نمایند. در شکل (۷) نیز پاسخ موشک به ورودی سینوسی با فرکانس پنج هرتز برای زاویه بالک ارزیابی شده است که نتایج نشان‌دهنده تبعیت تمامی متغیرها از رفتار نوسانی بالک است. شایان ذکر است که در عمل حرکت بالک تابع سیستم هدایت و کنترل آن بوده و برای بررسی دقیقتر باید دینامیک حلقه هدایت

پاسخ زمانی به ورودی تندباد در حالت زیر واگرایی (سرعت ۱۰۰۰ متر بر ثانیه) برای سه متغیر در شکل (۳) بدون اثر میرایی سازه‌ای و در شکل (۴) با میرایی مودال ۰/۰۲ نشان‌داده شده است. فشار دینامیک مربوط به واگرایی این موشک با استفاده از روش حاضر محاسبه شده و در مقایسه با نتایج سایرین در جدول (۳) نشان داده شده است.

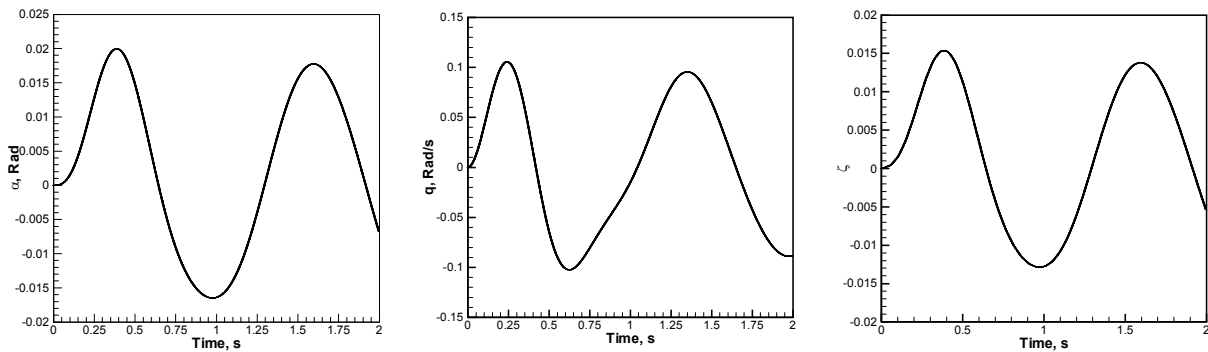
پاسخ زمانی به ورودی تندباد مربوط به این حالت نیز برای سه متغیر در شکل (۵) نشان داده شده است. در این حالت سرعت موشک ۱۴۰۰ متر بر ثانیه فرض شده که اندکی از سرعت واگرایی آن در این ارتفاع بیشتر است که



شکل ۵- پاسخ سیستم به تندباد در سرعت  $1400 \text{ m/s}$



شکل ۶- پاسخ سیستم به ورودی پله برای سطح کنترلی در سرعت  $1000 \text{ m/s}$

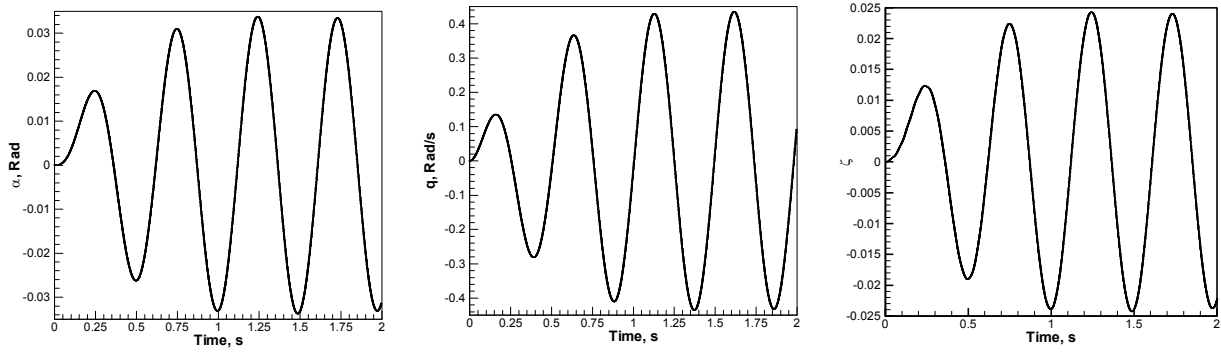


شکل ۷- پاسخ سیستم به ورودی پله برای سطح کنترلی در سرعت  $1000 \text{ m/s}$  با فرکانس پنج هرتز

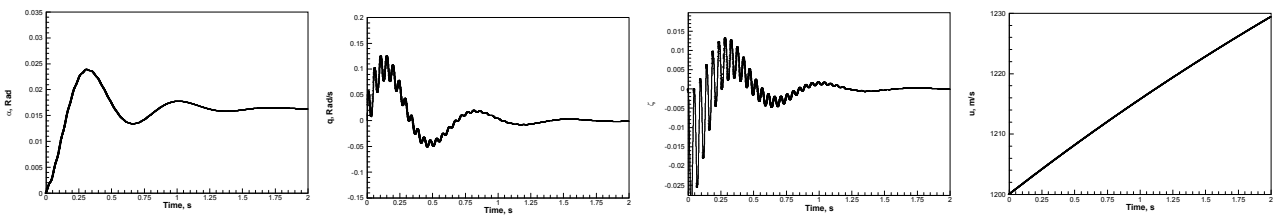
است ارایه شده و ناپایداری دینامیک سیستم در این حالت رویت شده است.

در شکل (۹) اثر نیروی پیشران  $10$  کیلونیوتنی بر رفتار دینامیک موشک نشان داده شده است. در این حالت نیروی پسا نیز با فرض ضریب پسای  $0/3$  محاسبه شده است. شایان ذکر است که در این حالت سرعت طولی موشک

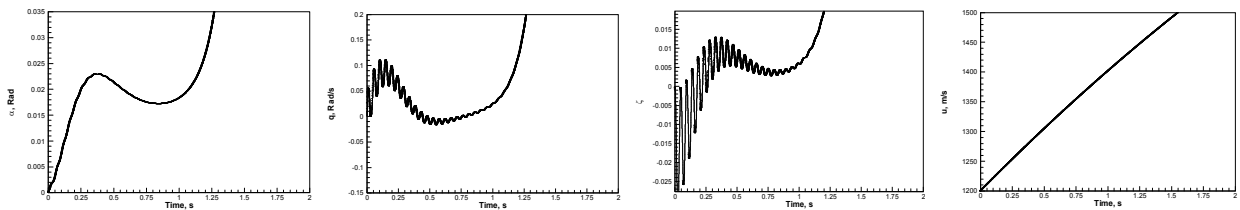
و کنترل نیز به معادلات اضافه شود که زمینه تحقیقات آتی است. در اینجا برای بررسی پاسخ کیفی، اثر یک سویه نوسانات سطح کنترلی بر دینامیک موشک الاستیک در نظر گرفته شده است. در شکل (۸) پاسخ به ورودی سینوسی برای زاویه بالک با فرکانس سیزده هرتز که نزدیک به فرکانس طبیعی ارتعاشات صلب (دینامیک پرواز) موشک



شکل ۸- پاسخ سیستم به ورودی نوسانی برای سطح کنترلی در سرعت  $1000 \text{ m/s}$  با فرکانس سیزده هرتز



شکل ۹- پاسخ سیستم به تندباد با وجود نیروی پیشروان  $10 \text{ kN}$



شکل ۱۰- پاسخ سیستم به تندباد با وجود نیروی پیشروان  $30 \text{ kN}$

شکل (۱۱) رسم شده است که بیانگر کاهش محدوده پایداری با افزایش نیروی پیشروان است.

در ادامه برای تمامی حالات مورد بررسی تحلیل تنش انجام گرفته است. از معادله (۲) نتیجه می‌شود با فرض استفاده از یک مود ارتعاشی، توزیع تنش در موشک تابع مشتق دوم این مود است و بیشترین مقدار آن برای موشک مورد مطالعه در فاصله  $2/8$  متری از انتهای موشک قرار دارد. مقدار بی بعد این تنش با فرض اینکه قطر موشک  $20$  سانتیمتر باشد، به همراه بیشینه  $Z_1(t)$  در حوزه زمان مربوط به کلیه حالات پروازی در جدول (۴) آورده شده است.

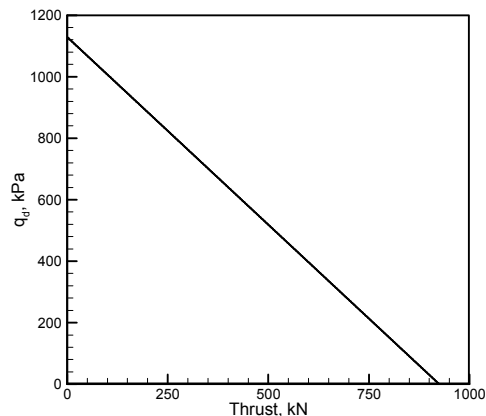
متغیر بوده و برای محاسبه آن معادله حرکت طولی موشک به معادلات حاکم بر مساله اضافه گردیده و دستگاه معادلات جدید در حوزه زمان حل گردیده است. در شکل ۱۰ اثر نیروی پیشروان  $30$  کیلو نیوتنی بر رفتار دینامیک موشک نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود بعد از رسیدن سرعت طولی موشک به مقدار خاصی ناپایداری استاتیک شروع می‌شود. این نتیجه تایید کننده استفاده از فرض سرعت ثابت برای بررسی اثر نیروی محوری بر ناپایداری آیروالاستیک موشک است. با استفاده از این نتیجه فشار استاتیک ناپایداری بر حسب نیروی پیشروان در



جدول ۴- مقادیر تنش بیشینه بی‌بعد در بدنه (در نقطه

$$(f_{1\max} = 0.15)$$

$\zeta_{1\max}$	$\frac{\sigma_{\max}}{E}$	حالت
$1/98 \times 10^{-2}$	$3/17 \times 10^{-4}$	شکل ۳
$1/42 \times 10^{-2}$	$2/27 \times 10^{-4}$	شکل ۴
$1/82 \times 10^{-2}$	$2/91 \times 10^{-4}$	شکل ۶
$1/53 \times 10^{-2}$	$2/45 \times 10^{-4}$	شکل ۷
$1/33 \times 10^{-2}$	$2/13 \times 10^{-4}$	شکل ۹
$1/29 \times 10^{-2}$	$2/06 \times 10^{-4}$	شکل ۱۰



شکل ۱۱- اثر نیروی پیشران بر فشار استاتیک ناپایداری

مقادیر پاسخ دینامیکی سیستم که شامل دو بخش صلب و الاستیک است می‌تواند بارهایی به مراتب بیشتر از بار استاتیکی را به جسم پرنده وارد کند. همچنین اثر نیروهای محوری پیشران و پسا بر پایداری بررسی گردید و نشان داده شد که نیروی محوری باعث کاهش محدوده پایداری آیروالاستیک موشک می‌شود.

### قدردانی

تحقیق حاصل با حمایت دانشگاه صنعتی شریف انجام گرفته است. همچنین نویسنده مراتب تشکر و قدردانی خود را از معاونت تحقیقات و مدیریت سازه صنایع شهید باقری ابراز می‌کند.

### ۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله معادلات ترکیبی حاکم بر رفتار سازه، دینامیک و آیرودینامیک جسم پرنده (موشک) با استفاده از متغیرهای دینامیکی برای جسم صلب و مودهای ارتعاشی برای رفتار الاستیک و توزیع  $c_{1a}(x)$  برای آیرودینامیک به صورت خطی به کار گرفته شد. همچنین از ارتباط بین شکل مودهای ارتعاشی و تنش مودال برای محاسبه تنش در طول پرواز استفاده شد. شرایط پروازی به کار گرفته شده شامل بررسی اثر تندباد، ورودی پله برای سطوح کنترلی و ورودی نوسانی برای سطوح کنترلی است. همچنین اثر میرایی سازه‌ای بر پاسخ سیستم نیز بررسی شد. با استفاده از نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از بارگذاری استاتیک (روش مرسوم) برای محاسبه تنش در فرآیند طراحی سازه جسم پرنده کافی نبوده و در عمل

### واژه نامه

- |                 |           |         |
|-----------------|-----------|---------|
| 1. time history | 2. thrust | 3. drag |
|-----------------|-----------|---------|

### مراجع

- Meirovitch, L., and Nelson, H. D., "On the High-Spin Motion of a Satellite Containing Elastic Parts", *J. Spacecraft and Rockets*, Vol. 3, pp. 1597-1602, Nov. 1966
- Crimi, P., "Aeroelastic Stability and Response of Flexible Tactical Weapons," AIAA Paper 84-0392, Jan. 1984
- Platus, D. H., "Aeroelastic Stability of Slender, Spinning Missiles," *J. Guidance*, Vol. 15, No. 1, 1992.
- Meirovitch, L., and Wesley, D. A., "On the Dynamic Characteristics of a Variable-Mass Slender Elastic Body under High Accelerations," *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 8, pp. 1439-1447, 1967.
- Elyada, D. "Closed Form Approach to Rocket Vehicles Aeroelastic Divergence," *J. Spacecraft*,

Vol. 26, No. 2, 1989.

6. Bilimoria, K.D., and Schmidt, D. K., "Integrated Development of the Equation of Motion for Elastic Hypersonic Flight Vehicles," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 1, 1995.

۷. حدادپور، ح.، "سلطانی، ن. و اصفهانیان، و. معادلات اساسی در

پایداری آیروالاستیک موشک" دومین کنفرانس سالانه مهندسی

هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، مهر ۱۳۷۷.

8. Beal, T. R., "Dynamic Stability of a Flexible Missile

under Constant and Pulsating Thrust", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol 3, pp. 486-494, 1965.

9. Yoon, S. J., and Kim J. H., "A Concentrated Mass on the Spinning Unconstrained Beam Subjected to a Thrust", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, iss. 4, pp. 621-634(14), 2002.

10. Pourtakdoust, S. H., and Assadian, N., "Investigation of Thrust Effect on the Vibrational Characteristics of Flexible Guided Missiles," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, iss. 1, pp. 287-299, 2004.