

## بازسازی تصویر با استفاده از اطلاعات غیر کامل

حمید فهیمی\*

### چکیده

در این مقاله بازسازی تصویر از روی مؤلفه های فرکانس پایین تبدیل فوریه آن بررسی شده است. بدین معنی که فرکانس های بالای تصویر حذف شده و تصویر تار شده مبنای پردازش قرار می گیرد و سعی می شود تا با استفاده از اطلاعات دیگری از تصویر که عمدتاً همان نامنفی بودن آن است، تصویر واضح گردد. در این مقاله روشهای متفاوت پردازش تصویر معرفی شده که تمامی آنها تا حدود زیادی به وضوح بیشتر تصویر و بازسازی مؤلفه های فرکانس بالای آن بنحو مطلوب می انجامد. در اینجا همگرایی این الگوریتم ها بررسی گردیده و سرعت همگرایی آنها مقایسه شده است و الگوریتم های سریع دیگری جهت بازسازی فرکانس های بالای تصویر معرفی شده است.

### مقدمه

مسأله بازسازی سیگنال با استفاده از اطلاع غیر کامل از سالهای دهه ۷۰ مورد توجه بوده و در حال

---

\* استادیار دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شریف

حاضر نیز به صورت گسترده ای مطرح است [۱]. نمونه هایی از آن عبارتند از:

الف - بازسازی سیگنال از روی دامنه تبدیل فوریه آن که بازسازی فاز نامیده می شود ([۲ تا ۴]).

ب - بازسازی سیگنال از روی فاز تبدیل فوریه آن [۵ و ۶].

ج - ادامه سیگنال دارای پهنای باند محدود از روی قطعه ای از آن در مکان یا زمان<sup>۱</sup> و یا به صورت دوگان و ادامه تبدیل فوریه یک سیگنال دارای دوره محدود در مکان یا زمان از روی قطعه ای از تبدیل فوریه آن<sup>۲</sup> ([۷ تا ۱۱]).

در این مقاله ادامه تبدیل فوریه یک تصویر مورد بررسی قرار گرفته است. واضح است که در مسأله بازسازی اطلاع جدیدی تولید نمی شود، بلکه از همان اطلاعات قبلی که ممکن است به نحو مطلوب و مناسب بکار برده نشده به صورتی استفاده کنیم که تصویر جدید، پس از پردازش، از کیفیت بهتری برخوردار باشد. عموماً در مسائل بازسازی سیگنال فرضیهایی مانند داشتن دوره محدود برای سیگنال و/یا غیر منفی بودن سیگنال مطرح بوده و با استفاده از این نوع اطلاعات و بکارگیری مناسب آنها سیگنال بازسازی شده نسبت به قبل به کیفیت برتری دست می یابد. در بررسی حاضر هرچند مسأله ادامه تبدیل فوریه از روی قطعه ای از آن به صورت مجرد عنوان شده است، اما این روش کاربردهای عملی زیادی دارد. به عنوان نمونه، در عکسبرداری توسط امواج الکترومغناطیسی (مایکروویو) از سطح زمین و یا در عکسبرداری از یک هدف در نور مرئی و با عدسی و یا در عکسبرداری از ستارگان توسط تلسکوپ قدرت تفکیک تصویر توسط ابعاد آنتن یا عدسی یا تلسکوپ محدود می شود و برای افزایش آن می بایست از وسائلی با ابعاد فیزیکی بزرگتر استفاده نمود، که این امر مشکلات و موانع عملی زیادی را در پی خواهد داشت. به جای آن می توان با استفاده از روشهای معرفی شده در این مقاله تبدیل فوریه را در ماورای آنچه قابل دسترسی سیستم تصویر برداری است ادامه داد.

اولین تصویر اصلی که مورد استفاده قرار گرفته در شکل ۱ آمده است. این تصویر دارای  $32 \times 32$

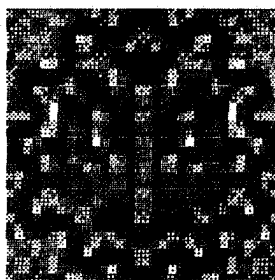
1- Signal Extrapolation

2 - Super Resolution



شکل ۱- تصویر اصلی

المان تصویری<sup>۱</sup> است و توسط یک فیلتر پایین گذر ایده آل دایره ای به شعاع ۱۲ مؤلفه (در میدان فرکانس) تار شده و مؤلفه های فرکانس بالای آن کاملاً حذف گردیده است (شکل ۲). باید توجه کرد که در تمام شکلها نقاط کاملاً سفید معرف مقدار صفر برای تصویر بوده و با افزایش دامنه تصویر نقطه مربوطه تیره تر می گردد. هدف پردازش، بازسازی مؤلفه های فرکانس بالای تصویر شکل ۲ بوده است. در تمام روشهایی که ذیلاً معرفی می شوند فقط از نامنفی بودن تصویر که همواره صادق است استفاده شده است.



شکل ۲- تصویر تار شده پس از عبور از فیلتر ایده آل پایین گذر

در ادامه، چند روش تکراری<sup>۱</sup> موجود جهت بازسازی تصویر بررسی شده و چند روش جدید نیز معرفی می‌گردد. همچنین نتیجه عملکرد این روشها و سرعت همگرایی آنها مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

### روشهای بازسازی تکراری [۱]

یکی از روشهای بازسازی که در صورت استفاده از کامپیوتر کارایی بالایی خواهد داشت روش تقریبات متوالی بر پایه یک الگوریتم تکراری است. این الگوریتم ها به فرم کلی زیر قابل نمایش هستند:

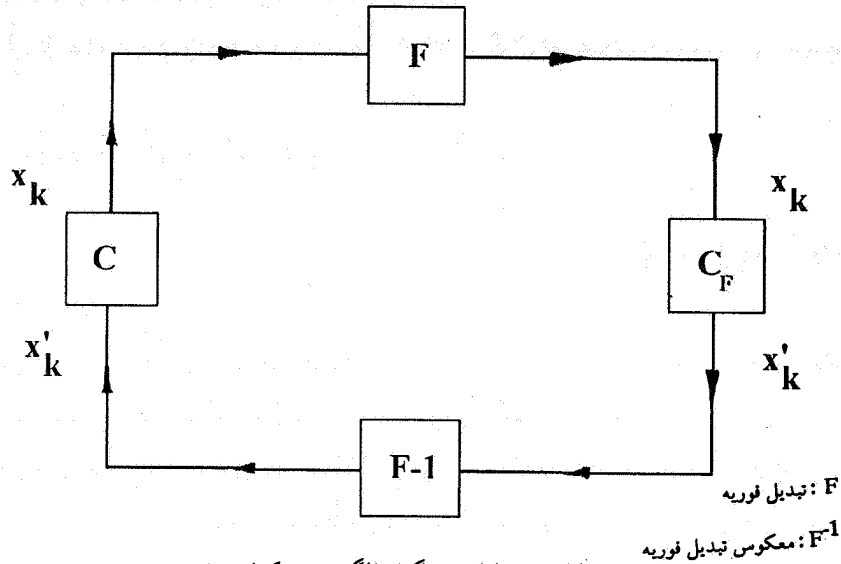
$$x_{k+1} = Gx_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن  $x_k$  و  $x_{k+1}$  به ترتیب  $k$  و  $k+1$  امین تقریب است. این روشها در صورتی مفید هستند که اپراتور  $G$  نقطه ثابتی<sup>۲</sup> مانند  $x^*$  داشته باشد، به طوری که  $Gx^* = x^*$  بوده و دنباله  $\{x_k\}$  به این نقطه ثابت همگرا گردد.

### الگوریتم تکراری ساده

تعداد زیادی از الگوریتم های بازسازی تکراری بدون استفاده از اطلاعات تکرار قبل عمل می‌کنند ([۱] و [۸]).

شکل ۳ نحوه عملکرد این الگوریتم را جهت بازسازی مؤلفه های فرکانس بالای تصویر نشان می‌دهد. حروف کوچک نمایانگر ماتریس مقادیر تصاویر دو بعدی و حروف بزرگ نشان دهنده ماتریس تبدیل فوریه آنهاست. در این شکل اپراتور  $C_f$  وظیفه اعمال اطلاعات موجود در تبدیل فوریه را به عهده دارد. بدین صورت که در محدوده‌ای که تبدیل فوریه سیگنال را می‌دانیم



شکل ۳- بلوک دیاگرام الگوریتم تکراری

فرکانسهای پایین) مؤلفه های  $X_k$  به آن مقادیر معلوم تصحیح می شوند و در خارج از محدوده مؤلفه های  $X_k$  تغییری نمی کنند. همچنین اپراتور  $C_s$  وظیفه اعمال اطلاعات مکانی را به عهده داشته و نقاط منفی تصویر را صفر می گذارد. روش فوق از نظر ریاضی به فرم زیر قابل بیان است.

$$x_{k+1} = C_s F^{-1} C_f F x_k = G x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

حال به بررسی همگرایی این الگوریتم می پردازیم [۱۲] و [۱]:

الف - چنانچه برای هر  $x_i$  و  $x_j$  متفاوت داشته باشیم:

$$\| G x_i - G x_j \| < \beta \| x_i - x_j \|, \quad 0 < \beta < 1$$

در آن صورت اپراتور  $G$  را یک نگاشت انقباضی می گویند و می توان نشان داد که مسأله بازسازی در

این حالت یک جواب منحصر به فرد داشته و دنباله  $\{x_k\}$  به سمت آن جواب میل می کند. توجه شود که  $\| \cdot \|$  علامت نرم بوده و به صورت جذر انرژی سیگنال تعریف شده که همان نرم اقلیدسی است.

ب - چنانچه برای هر  $x_i$  و  $x_j$  داشته باشیم:

$$\| Gx_i - Gx_j \| \leq \| x_i - x_j \|^2$$

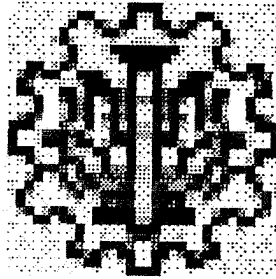
در آن صورت اپراتور  $G$  را غیر انبساطی گویند. در این حال مسأله ممکن است چندین جواب داشته باشد و حتی ممکن است دنباله  $\{x_k\}$  به سمت جوابی میل نکند.

ج - چنانچه در حالت ب تساوی فقط هنگامی برقرار باشد که  $x_i = x_j$  است، آنگاه اپراتور  $G$  را صریحاً غیر انبساطی گویند. هر چند صریحاً غیر انبساطی بودن دلیل کافی برای وجود جواب نیست لیکن چنانچه جوابی وجود داشته باشد منحصر به فرد است. در عمل نشان داده شده است که اگر اطلاعات ناسازگار نباشند این الگوریتم ها حتی در صورت غیر انبساطی بودن به سمت جوابی قابل قبول میل می نمایند [۵]. در مورد الگوریتم شکل ۳ به راحتی می توان نشان داد که دو اپراتور  $C_s$  و  $C_f$  غیر انبساطی هستند و از آنجا که تبدیل فوریه یک تبدیل Unitary بوده و ثابت می شود که نرم تفاضل دو سیگنال تحت هر تبدیل Unitary ثابت می ماند، نتیجه می گیریم که اپراتور  $G = C_s F^{-1} C_f F$  نیز غیر انبساطی است.

نتیجه کاربرد الگوریتم شکل ۳ بر روی تصویر تار شده شکل ۲ در شکل ۴ آمده است. چنانچه دیده می شود قسمت زیادی از تار شدگی برطرف گردیده است.

### الگوریتم تکراری ترکیبی

این الگوریتم از نظر کلی مشابه الگوریتم قبلی است لیکن هر تقریب بعدی به صورت زیر و با -فاده از تقریب قبلی بدست می آید:



شکل ۴- تصویر بازسازی شده توسط الگوریتم ساده شکل ۳ بعد از ۵۰ تکرار

$$x_{k+1} = wx_k + (1 - w)Gx_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

که در این رابطه  $w$  عددی بین صفر و یک بوده و  $G$  همان اپراتور اعمال اطلاعات مکانی و اطلاعات فرکانسی مشابه الگوریتم قبل است. نشان داده می شود که اگر  $G$  غیر انبساطی باشد آنگاه دنباله  $\{x_k\}$  به سمت یکی از نقاط ثابت  $G$  همگرا می شود [۱۲]. در عمل این الگوریتم برای محاسبه تقریبات متوالی در میدان فرکانس بکار برده شد و حتی برای هر مؤلفه فرکانسی ضریب  $w$  متفاوتی نیز در نظر گرفته شده و نتایج خوبی به دست آمده است. لیکن از آنجا که اطلاعات جدید با ضریب  $(1-w)$  بکار گرفته می شوند به هر حال این الگوریتم کندتر از الگوریتم قبلی بوده و هر چه  $w$  بزرگتر شود (با شرط  $w < 1$ ) سرعت همگرایی به پاسخ کمتر می شود.

### الگوریتم های سریع

در این بخش الگوریتم هایی مطرح می شوند که هدف آنها همگرایی سریعتر به پاسخ است. در عمل ثابت شده که تمام این روشها به جوابهای قابل قبولی همگرا می شوند و سرعت همگرایی آنها بسیار بیشتر از سرعت همگرایی الگوریتم های قبلی است.

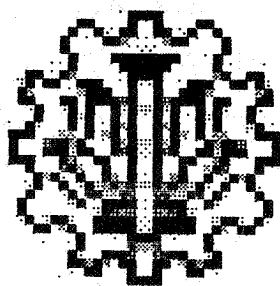
## روش فین آپ [۲]

این روش جهت بازسازی سیگنال از روی دامنه تبدیل فوریه آن مطرح شده [۲] و در آن رابطه سرعت همگرا شدن به پاسخ را بسیار افزایش داده است. ما در اینجا این روش را جهت بازسازی فرکانس های بالای تصویر بکار بردیم و در نتیجه سرعت همگرایی به نحو محسوسی افزایش یافت. این الگوریتم مشابه الگوریتم شکل ۳ است و فقط در مکان بجای اعمال اپراتور  $C_8$  بصورت زیر عمل شده و تقریب بعدی ساخته می شود.

چنانچه  $\hat{x}_k$  تقریب  $k$  ام و  $\hat{x}_k$  همان تقریب پس از اعمال اطلاعات میدان فرکانس (مطابق شکل ۳) باشد و چنانچه  $\gamma$  مجموعه نقاطی باشد که در آن  $\hat{x}_k$  شرط نامنفی بودن را نقض می کند، برای تقریب  $(k+1)$  ام داریم:

$$x_{k+1} = \begin{cases} \hat{x}_k & \text{اگر } \hat{x}_k \notin \gamma \\ x_k - \beta \hat{x}_k & \text{اگر } \hat{x}_k \in \gamma \end{cases}$$

در رابطه فوق  $\beta$  یک ضریب ثابت بوده و لیکن از هر تکرار تا تکرار بعد می تواند مقدار متفاوتی داشته باشد. نتیجه کاربرد این روش بر روی تصویر تار شده شکل ۲ در شکل ۵ آمده است.



شکل ۵- تصویر بازسازی شده توسط روش فین آپ بعد از ۵۰ تکرار با  $\beta=0.9$



## الگوریتم ابداعی سریع

چنانچه گفته شد استفاده از اطلاعات دوره قبل باعث کند شدن همگرایی می شود. حال برای تسریع می توان از عکس آن مطلب استفاده نمود. یعنی در  $x_{k+1} = Gx_k$  یک اپراتور  $Q$  پیدا می کنیم بطوریکه  $x_{k+1} = wx_k + (1-w)Qx_k = Gx_k$  باشد. حال اگر اپراتور  $Q$  که از این طریق بدست می آید غیر انبساطی باشد، انتظار داریم که  $Q$  سریعتر از  $G$  عمل کند.

$$Qx_k = \frac{1}{1-w} Gx_k - \frac{w}{1-w} x_k = \alpha Gx_k - \beta x_k$$

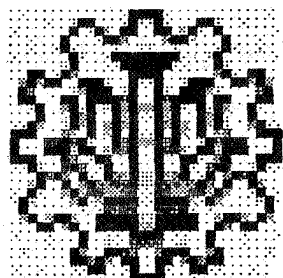
بنابراین تقریب بعدی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_{k+1} = Qx_k = \alpha Gx_k - \beta x_k$$

که در رابطه فوق  $G$  اپراتور «اعمال اطلاعاتی مکانی» به علاوه «اعمال اطلاعات میدان فرکانس» است. نتایج استفاده از این روش نشان داد که برای مقادیر مختلف  $\alpha \leq 2$  الگوریتم همواره همگرا شده و هر چه  $\alpha$  بزرگتر باشد سرعت همگرایی بیشتر می شود و لیکن اگر  $\alpha$  بزرگتر از ۲ شود الگوریتم ناپایدار می گردد. بنابراین سریعترین همگرایی برای  $\alpha=2$  و  $\beta=1$  به دست آمد. نتیجه پردازش تصویر تار شده شکل ۲ با استفاده از این الگوریتم در شکل ۶ آمده است و چنانچه دیده می شود سرعت همگرایی آن نزدیک به سرعت همگرایی روش فین آپ بوده است. لازم به تذکر است که الگوریتم فوق همان الگوریتم تکراری با استفاده از اطلاعات قبلی ولی برای  $w < 0$  است و هر چند در عمل همگرایی آن برای  $-1 \leq w < 0$  مشاهده شد ولی اثبات نشده است.

## الگوریتم تلفیقی سریع

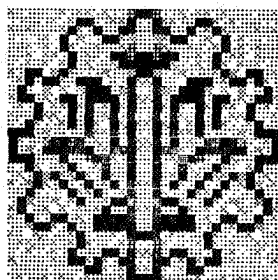
این الگوریتم با تلفیق الگوریتم فین آپ و روش ابداعی فوق به دست آمده و به این صورت عمل می کند که ابتداء هر تکرار  $(2Gx_k - x_k)$  بدست آمده و تقریب بعدی بصورت زیر از روی آن ساخته می شود:



شکل ۶- تصویر بازسازی شده توسط الگوریتم ابداعی سریع بعد از ۵۰ تکرار با  $\alpha=2$  و  $\beta=1$

$$x_{k+1} = |2Gx_k - x_k|$$

بدین صورت که در هر نقطه مکانی  $2Gx_k - x_k$  بدست آمده و قدر مطلق آن برای تقریب بعدی آن نقطه منظور می شود. باید دقت کرد که در رابطه فوق اپراتور  $G$  فقط همان «اعمال اطلاعات میدان فرکانس» یعنی قرار دادن مؤلفه های فرکانس پایین تصویر است. حاصل عملکرد این الگوریتم بر روی تصویر تار شده شکل ۲ در شکل ۷ آمده است. نکته مهم در مورد الگوریتم تلفیقی آن است که اگر بنویسیم:



شکل ۷- تصویر بازسازی شده توسط الگوریتم تلفیقی سریع بعد از ۵۰ تکرار

$$\bar{x}_{i+1} = 2Gx_i - x_i, \quad \bar{x}_{j+1} = 2Gx_j - x_j$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\|\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_{j+1}\| = \|x_i - x_j\|$$

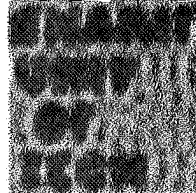
رابطه فوق به این صورت قابل اثبات است که حاصل  $2Gx_i - 2Gx_j$  در فرکانس های پایین که اطلاعات آن در اختیار است صفر بوده و در فرکانس های بالا دو برابر  $(x_i - x_j)$  است. حال با توجه به آنکه  $(x_i - x_j) - 2(Gx_i - Gx_j) = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_{j+1}$ ، در فرکانس های پایین حاصل  $\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_{j+1}$  برابر  $(x_i - x_j)$  و در فرکانسهای بالا برابر  $(x_i - x_j)$  است و در نتیجه با توجه به قضیه پارسوال  $\|\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_{j+1}\|$  برابر  $\|x_i - x_j\|$  می شود.

بنابراین محاسبه  $2Gx_k - x_k$  عملی غیر انبساطی است. پس از این مرحله در هر نقطه مکانی مقدار  $2Gx_k - x_k$  با صفر مقایسه شده و در صورت مثبت بودن تغییر نکرده و در صورت منفی بودن در یک منفی ضرب می شود و بطور کلی باید گفت که در هر نقطه قدر مطلق  $2Gx_k - x_k$  قرار داده می شود. براحتمی می توان نشان داد که محاسبه قدر مطلق عملی غیر انبساطی است زیرا چنانچه هر دو عدد هم علامت باشند این کار تأثیری بر مجذور فاصله آنها ندارد و چنانچه هم علامت نباشند این عمل مجذور فاصله آنها را کمتر می کند. بنابراین بطور کلی الگوریتم تلفیقی سریع یک الگوریتم غیر انبساطی است.

### مقایسه نتایج

تصویر تار شده شکل ۲ فقط حاوی حدود ۴۸ درصد مؤلفه های فرکانسی است. شکل های ۴، ۵، ۶ و ۷ حاصل اجرای الگوریتم های ذکر شده را پس از ۵۰ تکرار نشان می دهد. سه شکل آخر مربوط به روشهای معرفی شده در این نوشتار هستند. با افزایش تعداد تکرار تصاویر بهبود می یابند لیکن باز هم تفاوت کیفیت خود را حفظ می کنند و برای نمونه با افزایش تکرار، تصاویر ۴ و ۷ برابری نمی کنند. برای مقایسه دقیقتر عملکرد این الگوریتم ها شکل ۸ معرفی می شود. که حاوی تصویر اصلی و تصویر تار شده است. این تصویر تار شده فقط حاوی حدود ۳۴ درصد مؤلفه های فرکانسی

SHARIF  
UNIV  
OF  
TECH



شکل ۸- تصویر اصلی و تصویر تار شده

است. حاصل عملکرد الگوریتم ها پس از پانصد تکرار در شکل ۹ آمده است. شکل‌های الف و ب و نیز ج و د به ترتیب مربوط به الگوریتم های ساده، فین آپ، ابداعی سریع و تلفیقی سریع است. چنانچه دیده می شود، حاصل الگوریتم تلفیقی سریع بهترین پاسخ است. نکته قابل ذکر آن است که این قبیل الگوریتم ها بیشتر برای عکسهای تلسکوپی یا عکسهای دارای قدرت تفکیک اصلی بالا مورد استفاده قرار می گیرد و جهت تصاویر معمولی مانند مناظر و انسان کارایی ندارد زیرا در آنها حذف حتی نیمی از مؤلفه های فرکانسی بالا هم تأثیری جدی بر کیفیت برجای نخواهد گذاشت.

SHARIF  
UNIV  
OF  
TECH

ب

SHARIF  
UNIV  
OF  
TECH

الف

SHARIF  
UNIV  
OF  
TECH

د

SHARIF  
UNIV  
OF  
TECH

ج

س ۹ - الف: الگوریتم ساده، ب: روش فین آپ، ج: الگوریتم ابداعی سریع، د: الگوریتم تلفیقی سریع

### نتیجه گیری

در این مقاله بازسازی تصویر از روی مؤلفه های فرکانس پایین تبدیل فوریه آن بررسی شده و روشهایی ارائه گردیده است که تصویر نسبتاً واضحی را از روی تصویر تار شده به دست می دهد. اطلاع مکانی تصویر که در این روشها مورد استفاده قرار گرفت همان غیر منفی بودن تصویر بود. هر چند هر سه الگوریتم جدید سریع هستند، لیکن مقایسه نتایج اجرای الگوریتم ها نشان می دهد که الگوریتم تلفیقی سریع بهترین کارایی را دارد.

### قدردانی

بدینوسیله از معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی شریف که در انجام این پژوهش نویسنده را یاری نمودند تشکر می گردد.

## مراجع

1. Schafer, R. W. et al, "Constrained Iterative Restoration Algorithms", *Proc. IEEE*, Vol. 69, No. 4, pp. 432-450, April 1981.
2. Fienup, J. R., "Reconstruction of an Object from the Modulus of its Fourier Transform", *Optics Letters*, Vol. 3, No. 1, pp. 27-29, Jan. 1978.
3. Izraelevitz, D. and Lim, J. S., "A New Direct Algorithm for Image Reconstruction from Fourier Transform Magnitude", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 35, No. 4, pp. 511-519, April 1987.
4. Shitz, S. and Zeevi, Y. Y., "On the Duality of Time and Frequency Domain Signal Reconstruction from Partial Information", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 33, No. 6, pp. 1486-1498, Dec. 1985.
5. Hayes, M. H., Lim, J.S. and Oppenheim, A.V., "Phase Only Signal Restoration", in *Proc. 1980 Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Proc.*, pp. 437-440, April 1980.
6. Huang, T. T., Sanz, J. L. C. and Blanz, W., "Image Representation by One-Bit Fourier Phase: Theory, Sampling and Coherent Image Model", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 36, No. 8, pp. 1292-1304, Aug. 1988.
7. Cadzow, J. A., "An Extrapolation Procedure for Band - Limited Signals", *IEEE Trans. on ASSP* Vol. 27, No. 1, pp. 4-12, Feb. 1979.
8. Gerchberg, R. W., " Super- Resolution Through Error Energy Reduction", *OPTICA ACTA*, Vol. 21, No. 9, pp. 709-720, 1974.
9. Zhou, X. W. and Xia, X. G., "The Extrapolation of High Dimensional Band -

- Limited Functions ", *IEEE Trans. on ASSP* , Vol. 37, No. 10, pp. 1579-1581, Oct. 1989.
10. Gerchberg, R. W., "Super Resolution Through Error Function Extrapolation", *IEEE Trans. on ASSP* Vol. 37, No. 10, pp. 1603-1606, Oct. 1989.
  11. Haacke, E. M., Liang, Z. P. and Izen, S. H., " Super Resolution Reconstruction Through Object Modeling and Parametric Estimation ", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 37. No. 4, pp. 592-595, April 1989.
  12. Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, New York, Academic Press, 1970.