

# روش گسسته مستقیم تحلیل حساسیت جزء خمشی با شش درجه آزادی

محمد رضایی پزند\* و محمدرضا سالاری\*\*  
گروه عمران دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی "مشهد"  
(دریافت مقاله: ۱۳۷۳/۱۱/۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۵/۱/۱۴)

چکیده - مقاله ای که در پیش رو دارید به روش گسسته مستقیم تحلیل حساسیت<sup>۲</sup> می پردازد. جزء مثلثی خمشی با لنگر ثابت و شش درجه آزادی به کار رفته و مشتقهای صریح مورد نیاز تحلیل حساسیت آن حساب شده است. از این مشتقها، روش اجزای محدود و برنامه ریزی خطی پیاپی استفاده خواهد شد و شکل بهینه مسأله صفحه خمشی به دست می آید. نمونه های عددی، که نشان دهنده کارایی مشتقهای ارائه شده است، به نظر خوانندگان می رسد.

## Discrete Direct Sensitivity Analysis Method of Bending Element with Six Degrees of Freedom

M. Rezaiee-Pajand and M.R. Salari

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

**ABSTRACT-** This paper is about discrete direct sensitivity analysis. A triangular bending element with constant moment and six degrees of freedom is used. The required derivatives for sensitivity analysis are calculated explicitly. These formulations, finite element method and sequential linear programming are utilized to find shape optimization of plate bending structures. The numerical examples, which show the ability of the derivatives, are presented.

### ۱- مقدمه

بهینه سازی وسعت شگرفی یافت. پیشرفت نظریه های تحلیل سازه ها از یک سو و ابزار با ارزشی همچون رایانه<sup>۲</sup>، کمک شایسته ای به بهینه سازان در این دوره کرده است. در دهه ۱۹۶۰ میلادی، بهینه سازی شکل<sup>۴</sup> سازه ها با استفاده از روشهای رایانه ای حرکت پرتوانی را آغاز کرد. بیشتر کارهای اولیه در باره بهینه سازی اندازه سازه بود. پس از گذشت چند سال، روشهایی برای تغییر شکل هندسی سازه ارائه شد.

هدف مهندسان از دیرباز ساختن سازه هایی بوده است که مواد و کار کمتری نیاز داشته باشند. با این همه، آنها تنها تا حدودی به هدف خود دست یافته اند. زیرا، دانش و وسایل در دسترس آنان در سطح پایینی بوده است. در واقع، عمر فن بهینه سازی و تحلیل سازه ها برابر است. با وجود این، در نیمه دوم قرن بیستم تحولهای

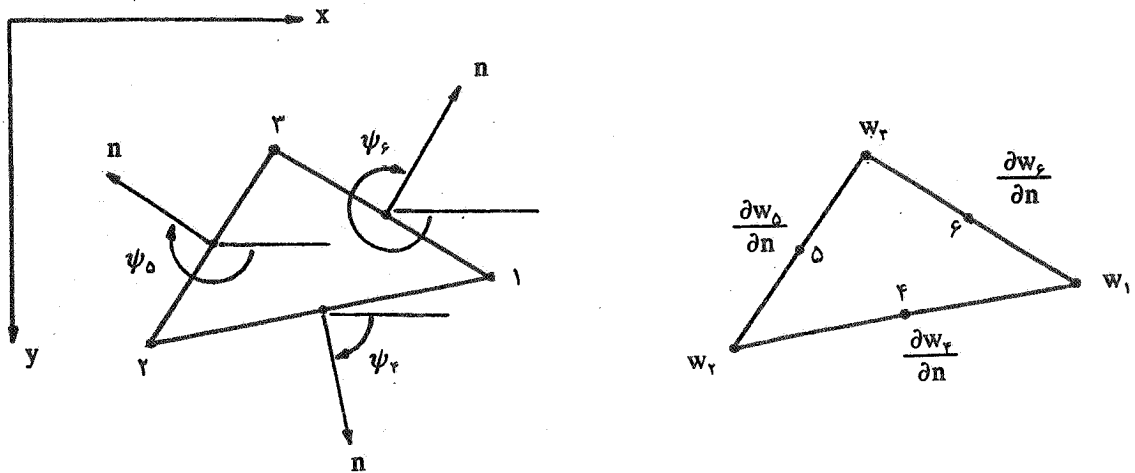
در بهینه سازی اندازه، شبکه بندی سازه ثابت می ماند و مشکلی

\* دانشیار \*\* مربی

فهرست علائم					
کرنش	{ $\epsilon$ }	ضخامت صفحه	$t$	انحنای	$k$
لنگر	$M$	ضریب مجهول،	$\alpha$	بردار عمود بر پهلوها	$n$
ماتریس سختی جزء	$[S]_e$	مختصات گره کلیدی		تابع خیز صفحه	$w$
ماتریس کرنش	$[B]$	طول پهلوی جزء	$d_i$	تابع شکل	$N_i, L_i, f_i(r, s)$
ماتریس مواد	$[D]_m$	عامل میانی	$R_k$	تغییر مکان گره‌ی	$\{D\}$
مساحت جزء	$A$	عملگر مشتق	$\{d\}$	تنش	$\{\sigma\}$
نسبت پواسان	$\nu$	عوامل مختصات گره‌ی	$a_i, b_i, c_i$	زاویه بین عمود بر پهلو و افق	$\psi$

می‌گیرد. مختصات گره‌های مرزی، اولین صورت متغیرهای طراحی است. این روش در آغاز کار بهینه سازی شکل رایج بوده و ممکن است به طراحی شکل سازه نامناسبی منجر شود. در واقع، اگر تدابیر لازم گرفته نشود شکل بهینه دارای هندسه نامناسب، مانند مرزهای با گوشه‌های تند و تغییرات شدید خواهد شد. نوع دوم انتخاب متغیر طراحی، ارائه کردن مرزها با چند جمله ایهای دارای ضریبهای متغیر است. حالت کلی روش مزبور به این صورت است که مجموعه خطی از توابع شکل با ضریبهای متغیر (متغیر طراحی) برای مرزها تعریف می‌شوند. باید دانست که چند جمله ایهای مرتبه بالا سبب ارائه سازه‌های بهینه با مرزهای پرچین می‌شوند. روش سوم از تابعهای اسپلاین<sup>۵</sup> استفاده می‌کند که مشکل درج شده را ندارد. تابعهای مزبور مرزها را صاف می‌سازد. بنابراین، شرایط بهینه سازی شکل به گونه‌ای برقرار می‌شود که مرزهای مناسبی داشته باشد. تابعهای اسپلاین در تحلیل حساسیت دقت بهتری از ارائه مرزها با تابعهای خطی دارند. چهارمین روش، استفاده از جزء طراحی<sup>۶</sup> است. در این جزءها، تعدادی گره کلیدی تغییرهای مرزی را به عهده می‌گیرند. هر جزء طراحی از چندین جزء شبکه اجزای محدود تشکیل می‌شود. روش تحلیلی حساسیت به صورت دقیق انجام می‌شود، در صورتی که روش نیمه تحلیلی با استفاده از تفاوت محدود، تحلیل حساسیت خطا داری به دست می‌دهد. افزون بر این، زمان محاسبه مشتق تحلیلی کوتاهتر از روشهای عددی است [۱]. در مرجع [۱]، یک جزء درجه سه با پنجاه درجه آزادی ارائه شده است و مشتقهای آن به صورت تحلیلی و با رایانه حساب شده‌اند. از این جزء در تحلیل صفحه خمشی و نیز پوسته‌های با مواد مرکب استفاده می‌شود. سازه‌های نازک و ضخیم که دارای مواد همگن و یا لایه ای هستند را می‌توان با جزء مزبور تحلیل کرد. اثرهای درون و بیرون

از این نظر ایجاد نمی‌شود. بر خلاف این، در بهینه سازی شکل سازه‌ها، شبکه اجزای محدود نیز تغییر می‌کند و سبب تغییر مرزهای سازه می‌شود. بهینه سازان تنش در مرزها را در صورت امکان کاهش داده و طرح شکل سازه را ممکن می‌سازند. باید دانست که برای بیشتر مسایل، بهینه سازی شکل، مؤثرتر از بهینه سازی اندازه است. از روش اجزای محدود، برنامه ریزی ریاضی و تحلیل حساسیت در بهینه سازی شکل سازه‌ها استفاده می‌شود. در یک بهینه سازی خوب باید تحلیل حساسیت، محدودیت و متغیرهای طراحی، تابع هدف و سرانجام روش حل برنامه ریزی مناسب به کار رود. تحلیل حساسیت همان محاسبه مشتقهای پاسخ معادله‌های حاکم نسبت به متغیرهای طراحی است. این کار یا پیش از شبکه بندی سازه به اجزاء و یا پس از آن انجام می‌گیرد. شایان توجه است که یکی از هزینه‌های اصلی بهینه سازی را همین تحلیل حساسیت تشکیل می‌دهد. بر این اساس، روش به کار رفته در تحلیل حساسیت ارزش شایسته ای دارد. از روشهای مختلفی برای انجام تحلیل حساسیت استفاده می‌شود. از آن میان می‌توان روشهای تحلیلی، تفاوت محدود، حساب تغییرات و ... را نام برد. در این نوشته به تحلیل حساسیت صفحه‌های خمشی می‌پردازیم. باید دانست که بهینه سازی صفحه‌های خمشی در مقایسه با سایر سازه‌ها بسیار محدود انجام شده است. دلیل این کار در پیچیدگی روابط اجزای خمشی، تحلیل حساسیت و بهینه سازی این نوع سازه‌هاست. به عنوان نمونه، درایه‌های ماتریس سختی اجزای خرابایی و غشایی، به ترتیب، متناسب با سطح مقطع و ضخامت است، در صورتی که در جزء خمشی متناسب با توان سوم ضخامت است. در سازه‌های قابی نیز درایه‌های ماتریس سختی تابعی از سطح مقطع و لنگر لختی‌اند. با چهار نوع انتخاب متغیر طراحی، بهینه سازی شکل انجام



شکل ۱

تحلیل است. رابطه‌های صریح ارائه شده، تحلیل حساسیت دقیق را انجام می‌دهد. بر خلاف آن، روشهای عددی دارای خطا بوده و اگر تحلیلگر به این ویژگی توجه کافی نکند، نتیجه‌های خطاداری را به دست می‌آورد. باید افزود، تواناییهای نامبرده دو مشکل را در کنار دارند. یکی این است که تحلیلگر باید همه رابطه‌های صریح مورد نیاز را حساب کند و دیگری در باره آماده سازی برنامه رایانه ای است که رابطه‌های مزبور را به کار می‌گیرد. آن گونه که در ادامه می‌آید همه رابطه‌های تحلیل حساسیت جزء مثلثی با شش درجه آزادی به صورت صریح، فشرده و مناسب برنامه رایانه ای ارائه خواهد شد. افزون بر آن، نویسندگان مقاله چند هزار خط برنامه رایانه ای برای این منظور نوشته اند و با بهینه سازی چند صفحه خمشی، کاربری رابطه‌های ارائه شده را به نظر خوانندگان می‌رسانند. دانستنی است که برای انجام تحلیل حساسیت مستقیم نمی‌توان از برنامه‌های رایانه ای آماده استفاده کرد. در واقع، برای انجام تحلیل حساسیت مستقیم هر جزء، باید تحلیلگر برنامه رایانه ای خاص آن جزء را خود بنویسد.

## ۲- جزء مثلثی ساده

در این بخش به تحلیل حساسیت صفحه خمشی با یک جزء ساده می‌پردازیم. با روش دقیق تحلیلی، مشتقهای درایه‌های ماتریس سختی جزء مزبور حساب شده و از آن در بهینه سازی صفحه خمشی استفاده می‌شود. رابطه‌های جزء مثلثی ساده تاکنون

صفحه ای و نیز هر دوی آنها در این جزء در نظر گرفته شده‌اند و اثر برشی وارد محاسبات می‌شود. با استفاده از برنامه‌های رایانه ای که عملیات جبری انجام می‌دهند زیرروالهای رابطه‌های مورد نیاز به دست آمده‌اند. استفاده از این رابطه‌ها، تحلیل حساسیت دقیق و سریع را به انجام می‌رساند. در مقایسه با روشهای تابع اولیه گیری عددی، روش تحلیلی مقاله مورد بحث به طور تقریب هفت برابر سریعتر کار می‌کند. در ضمن، بر اساس نتیجه‌های عددی مشخص شده است که در روش نیمه تحلیلی باید مقادیرهای نمو متغیرهای طراحی نه بزرگ انتخاب شوند و نه کوچک، بلکه به گونه ای تنظیم شوند که دقت لازم به دست آید. ویژگی مزبور، ضعف روشهای نیمه تحلیلی را در برابر روشهای تحلیلی مشخص می‌سازد.

ادامه به چند نکته مهم در باره روش گسسته تحلیل حساسیت جزء خمشی مثلثی که دارای شش درجه آزادی است تأکید می‌شود. نخست، درایه‌های ماتریس سختی و همچنین رابطه‌های لازم برای انجام تحلیل حساسیت مستقیم به صورت صریح ارائه خواهد شد. از این رو، هنگام استفاده از این رابطه‌ها، نیازی نیست که رایانه به صورت عددی و برای هر جزء جسم و هر مسأله این محاسبات زمان بر را بارها تکرار کند. با این حساب، روش این مقاله تحلیل بهینه را با سرعت به انجام می‌رساند. اگر رابطه‌ها صریح ارائه نشوند، باید تحلیل حساسیت عددی را به کار برد. در این نوع تحلیل، ماتریس سختی و مشتق گیری از معادلات به صورت عددی انجام می‌شود که بسیار وقتگیر است. دومین نکته در باره دقت

برقرار خواهد بود:

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3$$

$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A \quad (1)$$

$$A = \frac{1}{4} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)]$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (2)$$

اینک رابطه سازی جزء مثلثی ساده با فرض تابع درجه دوم زیر برای خیز جزء آغاز می شود.

$$w = \alpha_1 L_1^2 + \alpha_2 L_2^2 + \alpha_3 L_3^2 + \alpha_4 L_1 L_2 + \alpha_5 L_1 L_3 + \alpha_6 L_2 L_3 \quad (3)$$

همان گونه که دیده می شود، این تابع دارای شش ضریب مجهول  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  است که برای به دست آوردن آنها، شش رابطه مورد نیاز است. این رابطه ها را می توان با برآورده کردن شرایط تغییر مکانی جزء در درجه های آزادی آن  $(w_1, w_2, w_3, \partial w_4 / \partial n, \partial w_5 / \partial n, \partial w_6 / \partial n)$  بر پا کرد. برای این منظور، نخست، رابطه دوران عمود بر میان پهلوها ارائه می شود:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \psi \quad (4)$$

در رابطه اخیر  $\psi$  زاویه میان محور  $x$  و عمود بر میان پهلوهاست که مانند شکل (۱) ساعتگرد اندازه گیری می شود. دورانهای  $\frac{\partial w}{\partial x}$  و  $\frac{\partial w}{\partial y}$

به روشهای مختلفی به دست آمده اند [۲]. مورلی آن را با استفاده از اصل کارمایه (انرژی) مکمل<sup>۸</sup> و نیز روش تغییر مکان که در آن کار مایه نهفته کل<sup>۹</sup> کمینه<sup>۱۰</sup> می شود، ارائه کرده است [۳، ۴]. جزء مورد بحث، ساده ترین جزء خمشی بوده و به نام جزء مثلثی خمشی با لنگر ثابت معروف است.

جزء خمشی به کار رفته شش درجه آزادی دارد که مطابق شکل (۱) شامل سه تغییر مکان جانبی در گوشه ها  $(w_1, w_2, w_3)$  و سه تغییر مکان زاویه (یاشیب) عمود بر میان پهلوها  $(\partial w_4 / \partial n, \partial w_5 / \partial n, \partial w_6 / \partial n)$  است. این جزء نیاز به تابع تغییر مکان جانبی مربعی کامل دارد. بر این اساس، جزء مورد بحث در مقایسه با سایر اجزاء بسیار ساده بوده و توانایی همگرایی به پاسخ را دارد، هر چند جزء ناسازگار<sup>۱۱</sup> است. ناسازگاری برای تغییر مکانها و نیز شیب قائم در پهلو اجزاست، با وجود این، لنگر خمشی در راستای عمود بر پهلو جزء، پیوستگی بین دو جزء پهلو هم را برقرار می کند. باید آگاه بود که این جزء برای همگرایی به شبکه ریز نیاز دارد و این کار سبب ارائه خوب شکل هندسی سازه می شود. در هر نقطه داخل جزء، لنگر خمشی ثابت است.

تابع میدان جزء یک تابع درجه دوم کامل با شش جمله است. به این دلیل، انحنا و لنگر آن در سطح جزء ثابت اند. ماتریس سختی جزء، نرمتر از سختی سازه واقعی است و بنابراین تغییر مکانهای حاصل از آن از مقدار واقعی خود بیشتر است. ساده تر است که تابعهای درون یاب جزء بر حسب مختصات سطحی نوشته شوند. مورلی تابعهای شکل مورد بحث را از مجموع دو بخش به دست آورد [۴]. بخش نخست، خیز جسم صلب و بخش دوم خیز نسبی جزء است. یادآوری می کند، هنگامی که جزء بر روی تکیه گاه ساده در سه گوشه اش قرار گیرد خیز نسبی دارد. همین خیز، انحنا و کارمایه کرنشی<sup>۱۲</sup> جزء را تولید می کند [۵].

در این بخش رابطه های جزء مثلثی با لنگر ثابت به روش متفاوتی به دست می آیند و نتیجه ها با رابطه های دیگران مقایسه می شوند. با توجه به اینکه در رابطه سازی این جزء از دستگاه مختصات سطحی بهره گرفته شده است، نخست به ارائه رابطه های میان این دستگاه و دستگاه مختصات متعامد  $x$  و  $y$  پرداخته می شود. چنانچه مختصات یک نقطه از جزء در دستگاه مختصات سطحی با  $L_1$  و  $L_2$  و  $L_3$  و مساحت جزء با  $A$  نشان داده شوند، رابطه های زیر

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  را بر پا کرد. سه معادله نخست این دستگاه با جایگزین کردن مختصات سطحی گره‌های ۱، ۲ و ۳ در رابطه (۳) به دست می‌آیند. سه معادله دیگر نیز از جایگزین کردن مختصات سطحی گره‌های ۴، ۵ و ۶ در رابطه (۶) نتیجه می‌شوند. با تشکیل دستگاه مزبور و حل آن، مجهولهای مورد نظر به فرارزیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_1 = w_1; \quad \alpha_2 = w_2; \quad \alpha_3 = w_3$$

$$\alpha_4 = -\gamma A \left( \frac{q}{d_1} + \frac{r}{d_2} \right); \quad \alpha_5 = -\gamma A \left( \frac{p}{d_2} + \frac{q}{d_1} \right);$$

$$\alpha_6 = -\gamma A \left( \frac{p}{d_2} + \frac{r}{d_2} \right) \quad (9)$$

$$p = \frac{(b_1 b_2 + c_1 c_2)}{\gamma A d_2} w_1 + \frac{(b_2 b_2 + c_2 c_2)}{\gamma A d_2} w_2 + \frac{\partial w_2}{\partial n}$$

$$q = \frac{(b_1 b_2 + c_1 c_2)}{\gamma A d_1} w_2 + \frac{(b_2 b_2 + c_2 c_2)}{\gamma A d_1} w_3 + \frac{\partial w_3}{\partial n}$$

$$r = \frac{(b_1 b_2 + c_1 c_2)}{\gamma A d_2} w_1 + \frac{(b_2 b_2 + c_2 c_2)}{\gamma A d_2} w_2 + \frac{\partial w_2}{\partial n} \quad (10)$$

اینک به ارائه تابعهای شکل جزء محدود پرداخته می‌شود. برای این منظور، نخست تابع تغییر مکان جزء بر حسب تابعهای شکل آن نوشته می‌شود. سپس، با مقایسه رابطه حاصل و رابطه‌های (۳) و (۹)، تابعهای شکل جزء محدود نتیجه می‌شوند. رابطه‌های مورد نیاز به شرح زیر است:

$$(11)$$

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 \frac{\partial w_4}{\partial n} + N_5 \frac{\partial w_5}{\partial n} + N_6 \frac{\partial w_6}{\partial n}$$

$$N_1 = L_1^v - \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{d_1^v} (L_2^v - L_1^v) - \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{d_1^v} (L_3^v - L_1^v)$$

$$N_2 = L_2^v - \frac{b_2 b_2 + c_2 c_2}{d_2^v} (L_3^v - L_2^v) - \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{d_1^v} (L_1^v - L_1^v)$$

$$N_3 = L_3^v - \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{d_1^v} (L_1^v - L_1^v) - \frac{b_2 b_2 + c_2 c_2}{d_2^v} (L_2^v - L_2^v)$$

نیز با استفاده از رابطه مشتق زنجیری به قرار زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial y} \quad (5)$$

اینک با جایگزین کردن رابطه‌های (۵) در (۴) و ساده کردن آنها رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial L_1} \frac{\partial w}{\partial L_2} \frac{\partial w}{\partial L_3} \right\} \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix} \quad (6)$$

باید اشاره کرد که مقادیر  $\cos \psi$  و  $\sin \psi$  با توجه به جهت مثبت در نظر گرفته شده برای زاویه  $\psi$  بسادگی قابل محاسبه اند. همچنین، با در اختیار داشتن رابطه میان مختصات سطحی  $L_1$  و  $L_2$  و  $L_3$  مختصات متعامد  $x$  و  $y$  مشتقهای  $\partial L_i / \partial x$  ( $i = 1, 2, 3$ ) را می‌توان به صورت صریح ارائه کرد. چنانچه اندازه پهلویی از مثلث که در مقابل گره قرار دارد برابر با  $d_i$  باشد، رابطه‌های مورد نیاز به شرح زیر خواهد بود:

$$\sin \psi_4 = -\frac{c_2}{d_1}; \quad \sin \psi_5 = -\frac{c_1}{d_1}; \quad \sin \psi_6 = -\frac{c_2}{d_2}$$

$$\cos \psi_4 = -\frac{b_2}{d_1}; \quad \cos \psi_5 = -\frac{b_1}{d_1}; \quad \cos \psi_6 = -\frac{b_2}{d_2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{b_1}{\gamma A} = \frac{y_2 - y_1}{\gamma A}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{c_1}{\gamma A} = \frac{x_2 - x_1}{\gamma A}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{b_2}{\gamma A} = \frac{y_3 - y_2}{\gamma A}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{c_2}{\gamma A} = \frac{x_3 - x_2}{\gamma A}$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{b_2}{\gamma A} = \frac{y_1 - y_2}{\gamma A}, \quad \frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{c_2}{\gamma A} = \frac{x_2 - x_1}{\gamma A} \quad (8)$$

اینک با در اختیار داشتن رابطه‌های  $w$  و  $\partial w / \partial n$  در سطح جزء، می‌توان دستگاه معادله‌های لازم برای محاسبه ضریبهای مجهول

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 N_6}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 N_6}{\partial y^2} \\ -\gamma \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & \dots & -\gamma \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & \dots & -\gamma \frac{\partial^2 N_6}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (18)$$

در رابطه‌های اخیر، عوامل  $\{d\}$  و  $\{D\}$  به ترتیب عملگر مشتق و بردار تغییر مکانهای گرهی جزء هستند. درایه‌های ماتریس  $[B]$  با مشتق‌گیری از تابعهای شکل جزء محدود نسبت به مختصات  $x$  و  $y$  به دست می‌آیند. این مشتقها را می‌توان با استفاده از رابطه مشتق زنجیری محاسبه کرد. برای نمونه، در ادامه به ارائه رابطه  $\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}$  پرداخته می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial L_1} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial L_\gamma} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial L_\gamma} \\ &= \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} \\ \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 N_i}{\partial L_1^2} \left( \frac{\partial L_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 N_i}{\partial L_\gamma^2} \left( \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 N_i}{\partial L_\gamma^2} \left( \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \right)^2 + \\ &\quad \gamma \frac{\partial^2 N_i}{\partial L_1 \partial L_\gamma} \left( \frac{\partial L_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial^2 N_i}{\partial L_\gamma \partial L_\gamma} \left( \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \right) \\ &\quad + \gamma \frac{\partial^2 N_i}{\partial L_\gamma \partial L_1} \left( \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

بر پایه محاسبات اخیر می‌توان رابطه‌های ساده‌تر زیر را برای محاسبه درایه‌های ماتریس  $[B]$  به کار برد.

$$B_{ij} = -\frac{1}{\gamma A} \sum_{k=1}^{\gamma} R_k \frac{b_j b_k + c_j c_k}{d_k^2}; \quad j = 1, 2, 3$$

$$B_{ij} = \frac{-R_k}{A d_k}; \quad k = \frac{1}{\gamma} (\gamma j^2 - \gamma j + \gamma^2); \quad j = 4, 5, 6$$

سرانجام به ارائه ماتریس سختی جزء محدود پرداخته می‌شود.

$$N_\gamma = -\frac{\gamma A}{d_\gamma} (L_\gamma - L_\gamma')$$

$$N_\delta = -\frac{\gamma A}{d_1} (L_1 - L_1')$$

$$N_\epsilon = -\frac{\gamma A}{d_\gamma} (L_\gamma - L_\gamma') \quad (12)$$

در ادامه به ارائه رابطه‌های تنش و کرنش جزء محدود پرداخته می‌شود. به طور معمول، در رابطه‌های تحلیل صفحه‌های خمشی، لنگر را جایگزین تنش و انحنا را جایگزین کرنش می‌کنند. به این ترتیب، رابطه‌های زیر برای جزء محدود مورد نظر برقرار خواهند بود:

$$\{\sigma\} = \{M\} = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T \quad (13)$$

$$\{\epsilon\} = \{k\} = \{k_x \ k_y \ k_{xy}\}^T \quad (14)$$

$$\{\sigma\} = [D_m] \{\epsilon\} \quad (15)$$

$$[D_m] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

در رابطه‌های درج شده،  $t$  ضخامت صفحه،  $E$  عامل کشسانی<sup>۱۳</sup> (ضریب الاستیسته) و  $\nu$  نسبت پواسون<sup>۱۴</sup> هستند. اینک به ارائه ماتریس کرنش پرداخته می‌شود. چنانچه کرنشهای جزء بر حسب تغییر مکانهای گرهی آن نوشته شوند، رابطه‌های زیر برقرار خواهد بود:

$$\{\epsilon\} = \{d\} w$$

$$w = \{N\} \{D\}$$

$$\{\epsilon\} = \{d\} \{N\} \{D\}$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{D\}$$

$$[B] = \{d\} \{N\} \quad (17)$$

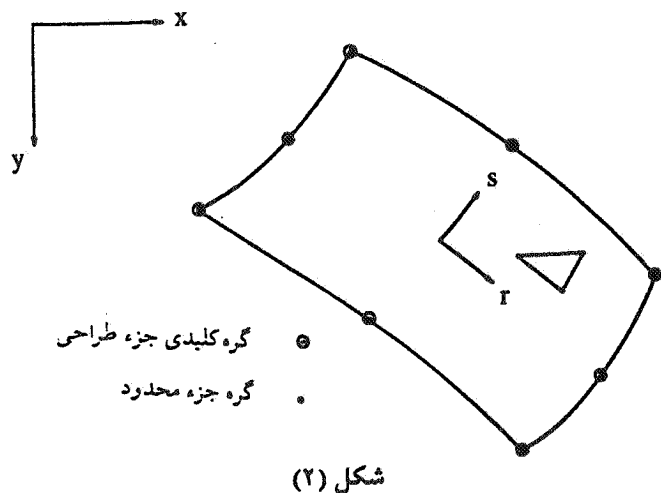
به نوع متغیرهای طراحی به کار رفته در فرایند بسطی سازی بستگی دارد. در این نوشته، نمایش شکل هندسی سازه بر پایه روش جزء طراحی بوده و مختصات گره‌های کلیدی این جزء به عنوان متغیرهای طراحی انتخاب شده‌اند. از این رو، محاسبه مشتق ماتریس سختی جزء محدود نسبت به مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی مورد نظر است. تغییر مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی سبب تغییر مختصات گره‌های اجزای محدود داخل آن می‌شود و این امر به نوبه خود تغییر ماتریس سختی این اجزای محدود را به همراه دارد. بنابراین، چنانچه وابستگی میان ماتریس سختی جزء محدود و مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی در دست باشد، محاسبه تغییرات ماتریس سختی و مشتق این ماتریس به سادگی امکانپذیر است. در روش جزء طراحی، این وابستگی از طریق نگاشت هم عامل میان مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی و گره‌های اجزای محدود داخل آن برقرار می‌شود. چنانچه یک جزء طراحی  $m$  گره‌ی با محورهای محلی  $r$  و  $s$  و توابع شکل  $f_i(r, s)$  مانند شکل (۲)، در نظر گرفته شود، مختصات جزء محدود  $(x, y)$  مطابق رابطه زیر به مختصات گره‌های کلیدی جزء طراحی  $(x_i, y_i)$  وابسته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m f_i(r, s) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_i \quad (23)$$

اینک با در اختیار داشتن رابطه میان مختصات گره‌های جزء طراحی و مختصات گره‌های جزء محدود، می‌توان ماتریس سختی جزء محدود را مطابق رابطه (۲۲) بر حسب عوامل آن محاسبه کرد و مشتق این ماتریس را نسبت به مختصات گره‌های جزء طراحی به دست آورد. چنانچه مختصه  $x$  یا  $y$  گره کلیدی  $k$ ام جزء طراحی با  $\alpha$  نشان داده شود و خواص مصالح تشکیل دهنده جزء ثابت فرض شوند، رابطه مورد نیاز به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right]_e &= \left( \left[ \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right]^T [D_m][B] + [B]^T [D_m] \left[ \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] \right) A \\ &+ [B]^T [D_m][B] \frac{\partial A}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (24)$$

همان گونه که مشاهده می‌شود، برای محاسبه مشتق ماتریس سختی سازه، مشتقهای  $[B]/\partial \alpha$  و  $\partial A/\partial \alpha$  مورد نیاز است. این مشتقها را می‌توان به ترتیب، با توجه به رابطه‌های (۲۰) و (۲)، به



$$R_k = r_{i1} b_k^y + r_{i2} c_k^y + \gamma r_{i3} b_k c_k$$

$$r_{i1} = \frac{1}{4}(i-2)(i-3)$$

$$r_{i2} = -(i-3)(i-1)$$

$$r_{i3} = \frac{1}{4}(i-1)(i-2) \quad (20)$$

در روش اجزای محدود، ماتریس سختی جزء با محاسبه تابع اولیه رابطه (۲۱) نتیجه می‌شود. از ویژگیهای جزء خمشی ساده آن است که ماتریس کرنش آن در تمام سطح جزء ثابت بوده و محاسبه تابع اولیه آن به سادگی امکانپذیر است. از این رو، ماتریس سختی جزء خمشی ساده به صورت صریح قابل ارائه است و نیاز به محاسبه تابع اولیه به صورت عددی ندارد.

$$[S]_e = \int_A [B]^T [D_m][B] dA \quad (21)$$

$$[S]_e = [B]^T [D_m][B] A \quad (22)$$

### ۳- مشتق ماتریس سختی

نخستین گام محاسباتی فرایند تحلیل حساسیت طرح به روش مستقیم، محاسبه مشتق ماتریس سختی اجزای محدود است. مشتق مزبور برای محاسبه بارکاذب مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه ماتریس سختی جزء مثلثی ساده به صورت صریح در اختیار است، می‌توان مشتق ماتریس سختی آن را نیز به صورت صریح ارائه کرد. باید توجه داشت که چگونگی محاسبه مشتق ماتریس سختی

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \alpha} = \left( -\frac{\gamma}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right) B_{ij} - \frac{1}{\gamma A^\gamma} \left\{ \sum_{k=1}^{\gamma} \left( \frac{\partial R_k}{\partial \alpha} \cdot \frac{b_j b_k + c_j c_k}{d_k^\gamma} + R_k \frac{\left( \frac{\partial b_j}{\partial \alpha} b_k + b_j \frac{\partial b_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial c_j}{\partial \alpha} c_k + c_j \frac{\partial c_k}{\partial \alpha} \right) d_k - \gamma \frac{\partial d_k}{\partial \alpha} (b_j b_k + c_j c_k) \right) \right\}; j = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \alpha} = \frac{\frac{\partial R_k}{\partial \alpha} (A d_k) - R_k \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha} d_k + A \frac{\partial d_k}{\partial \alpha} \right)}{(A d_k)^\gamma};$$

$$k = \frac{1}{\gamma} (\gamma^2 - \gamma j + 1); j = 4, 5, 6 \quad (25)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} c_\gamma + b_1 \frac{\partial c_\gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial b_\gamma}{\partial \alpha} c_1 - b_\gamma \frac{\partial c_1}{\partial \alpha} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial b_\gamma}{\partial y_k} = f_k(r_\gamma, s_\gamma) - f_k(r_1, s_1)$$

$$\frac{\partial b_\gamma}{\partial x_k} = f_k(r_1, s_1) - f_k(r_\gamma, s_\gamma)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial b_i}{\partial y_k} \quad (30)$$

با در اختیار داشتن رابطه‌های اخیر، تمام اجزای لازم برای به دست آوردن مشتق ماتریس سختی جزء محدود محاسبه شده است. با به کار بردن رابطه (24)، مشتق ماتریس سختی نسبت به متغیر طراحی مورد نظر را می‌توان نتیجه گرفت.

#### ۴- نمونه‌های عددی

نخستین نمونه عددی که با استفاده از جزء مثلثی ساده حل شده است، تیر یکسرگرداری است که در شکل (۳) نشان داده شده است. لنگر متمرکز  $M = 50/86$  نیوتن متر در سر آزاد آن وارد می‌شود. طول تیر برابر با  $L = 254$  میلی متر و پهنای آن  $b = 25/4$  میلی متر و ضخامت آن (۴) مطابق جدول (۱) در نظر گرفته شده است. همچنین عامل کشسانی مصالح و تنش مجاز آن، به ترتیب برابر با،  $E = 0.7 \times 10^5$  و  $\sigma = 206$  نیوتن بر میلی متر مربع و نسبت پواسان برابر با  $\nu = 0/3$  اختیار شده است.

همان گونه که مشاهده می‌شود، در رابطه‌های اخیر، مشتقهای  $\partial R_k / \partial \alpha$ ،  $\partial d_k / \partial \alpha$ ،  $\partial b_i / \partial \alpha$  و  $\partial c_i / \partial \alpha$  مورد نیازند. مشتق  $\partial R_k / \partial \alpha$  با توجه به تعریف  $R_k$  که در رابطه (۲۰) ارائه شده است، به دست می‌آید. مشتق  $\partial d_k / \partial \alpha$  نیز، با در اختیار داشتن طول پهلوهای جزء مثلثی، از رابطه (۲۸) قابل محاسبه است. همچنین مشتقهای  $\partial b_i / \partial \alpha$  و  $\partial c_i / \partial \alpha$  بسته به اینکه متغیر طراحی  $\alpha$  کدام یک از مختصات  $x$  یا  $y$  گره کلیدی جزء طراحی باشد، در ادامه درج شده‌اند:

$$\frac{\partial R_k}{\partial \alpha} = \gamma_{r_1} b_k \frac{\partial h_k}{\partial \alpha} + \gamma_{r_2} c_k \frac{\partial c_k}{\partial \alpha} + \gamma_{r_3} \left( b_k \frac{\partial c_k}{\partial \alpha} + c_k \frac{\partial h_k}{\partial \alpha} \right) \quad (27)$$

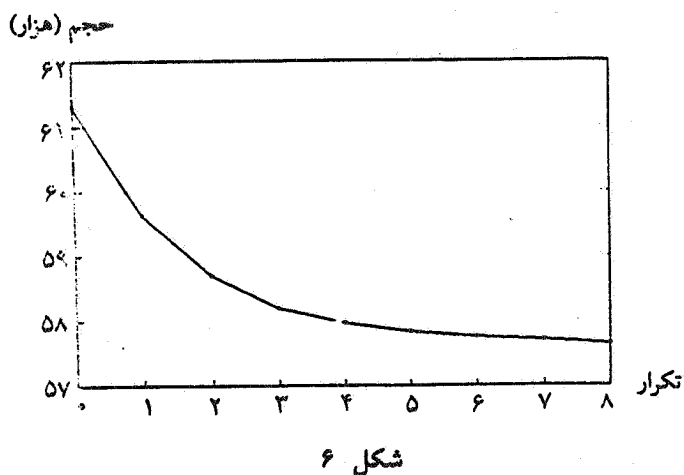
$$\frac{\partial d_k}{\partial \alpha} = \frac{b_k \frac{\partial b_k}{\partial \alpha} + c_k \frac{\partial c_k}{\partial \alpha}}{d_k} \quad (28)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_k} = \frac{\partial b_\gamma}{\partial x_k} = \frac{\partial b_\gamma}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_k} = \frac{\partial c_\gamma}{\partial y_k} = \frac{\partial c_\gamma}{\partial y_k} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial y_k} = f_k(r_\gamma, s_\gamma) - f_k(r_\gamma, s_\gamma)$$



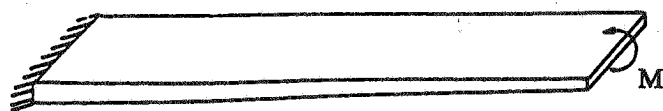


شکل ۶

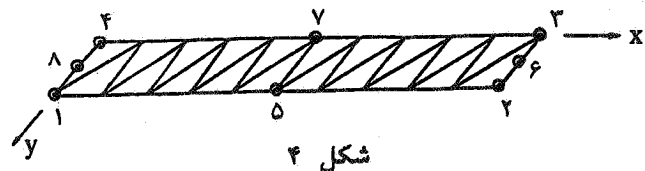
اجزای محدود در دست‌اند [۶، ۷]. نظر به روشهای متفاوت بپینه سازی و نیز داده‌های به کار رفته، پاسخهای مزبور قابل مقایسه با یکدیگرند.

دومین نمونه عددی حل شده با جزء مثلثی ساده، یک صفحه شش پهلوی مانند شکل (۷) است. صفحه در سه پهلوی خود بر روی تکیه گاه ساده قرار دارد و بار متمرکز قائم  $P = 6000$  نیوتن در مرکز آن وارد می‌شود. ابعاد سازه  $a = 10$ ،  $b = 2$  و  $t = 1$  سانتی متر بوده و عامل کشسانی مصالح  $E = 2/1 \times 10^7$  نیوتن بر سانتی متر مربع در نظر گرفته شده است. همچنین، نسبت پواسان  $\nu = 0/3$  و تنش مجاز بیشینه  $\sigma = 24000$  نیوتن بر سانتی متر مربع است. یادآوری می‌شود که صفحه مورد بحث برای نیروهای درون صفحه به وسیله پژوهشگران دیگر تحلیل شده است [۸].

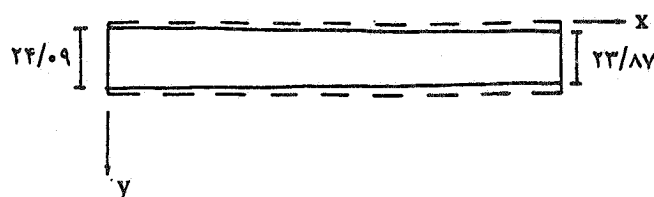
به دلیل تقارن، تنها یک ششم صفحه تحلیل می‌شود. به این منظور، سازه مانند شکل (۸) به ۲۰ جزء محدود تقسیم شده و مختصه لاگره‌های کلیدی ۴ و ۷ از جزء طراحی به عنوان متغیر طراحی اختیار شده‌اند. همچنین، محدودیت رفتاری مسأله سعبار تنش فون-میسز است که در اجزای محدود در نظر گرفته شده است. فرایند بپینه سازی پس از ۹ چرخه به طرح بپینه نشان داده شده در شکل (۹) همگرا شده است و حجم سازه از مقدار اولیه  $28/93$  به مقدار نهایی  $13/59$  سانتی متر مکعب کاهش یافته است. روند این کاهش در طی فرایند بپینه سازی در شکل (۱۰) ارائه شده است. سومین نمونه عددی، یک صفحه خمشی یکسرگردار است. این سازه زیر اثر بار متمرکزی بر وسط سر آزادش است. نیمی از این صفحه افقی در جزء طراحی شکل (۱۱) قرار گرفته و به ۶۰ جزء



شکل ۳



شکل ۴

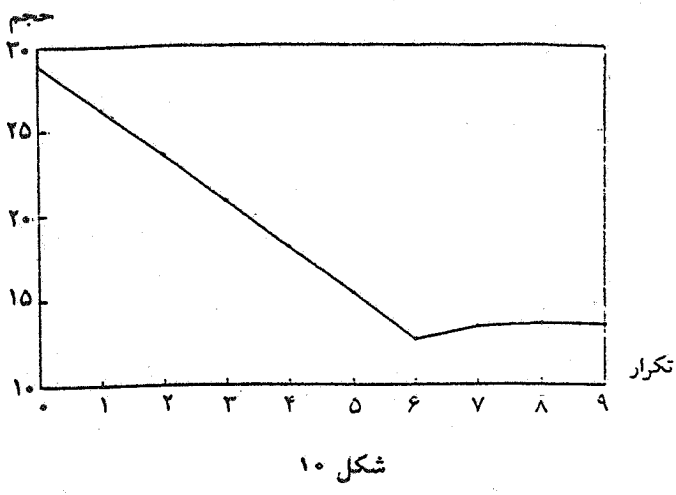


شکل ۵

جدول (۱)

x(mm)	ضخامت (mm)
$0/0 < x < 50/8$	۱۱/۰۰
$50/8 < x < 101/6$	۱۰/۲۵
$101/6 < x < 152/4$	۹/۵۰
$152/4 < x < 203/2$	۸/۷۵
$203/2 < x < 254/0$	۸/۰۰

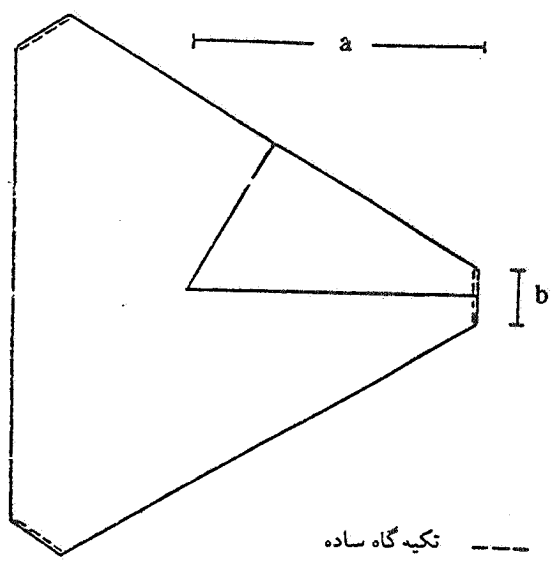
تحلیل سازه با تقسیم آن به ۲۰ جزء محدود مانند شکل (۴) انجام و مختصه لاگره‌های کلیدی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۷ به عنوان متغیر طراحی انتخاب شده است. محدودیت‌های رفتاری مسأله، شامل محدودیت خیز در انتهای آزاد و محدودیت تنش اصلی است. به این منظور، خیز سر آزاد تیر به ۱۲ میلی متر و تنشهای اصلی در اجزای محدود به مقدار تنش مجاز محدود شده است. طرح بپینه تیر پس از ۸ چرخه، مانند شکل (۵) به دست آمده است و حجم سازه از مقدار اولیه  $61290$  میلی متر مکعب به مقدار نهایی  $57640$  میلی متر مکعب رسیده است. روند کاهش حجم سازه در شکل (۶) مشاهده می‌شود. شایان توجه است که پاسخهای بپینه دیگری از این سازه با ضخامت متغیر و محدودیت تغییر مکان با روشهای تحلیلی و نیز



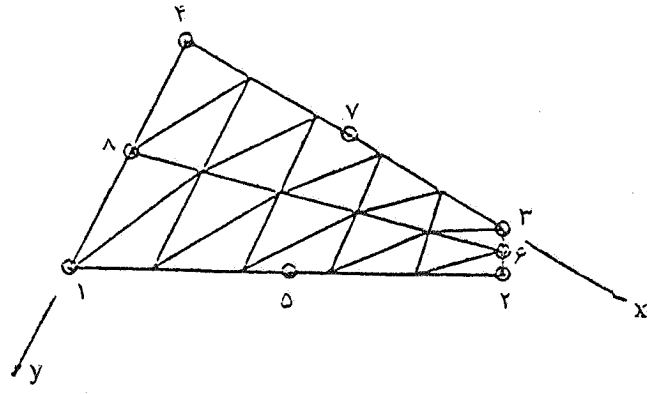
شکل ۱۰

ساده شبکه بندی می شود. بار قائم ۲۵۰ پوندی به گره ۳ وارد شده است. در شبکه بندی صفحه مزبور، X محور تقارن است و تکیه گاه گیردار سازه بر روی محور Y قرار دارد. مصالح صفحه خمشی از جنس فولاد با عامل کشسانی  $E = 3 \times 10^7$  و تنش مجاز  $3 \times 10^4$  پوند بر اینچ مربع و نسبت پواسان  $0/3$  است. طول، پهنا و ضخامت اولیه این صفحه، به ترتیب برابر با، ۲۵، ۸ و ۱ اینچ است.

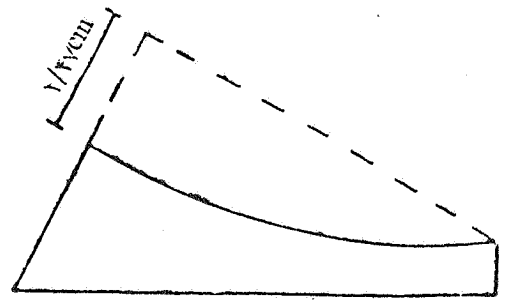
برای بهینه سازی صفحه مورد بحث، مختصه لاگره های کلیدی ۲، ۴، ۵ و ۷ به عنوان متغیرهای طراحی اختیار می شوند. این گره ها هدایت شکل صفحه به سوی طرح بهینه را بر عهده دارند. حجم صفحه، تابع هدف، و معیار تنش فون - میسز، به عنوان محدودیت رفتاری مسأله انتخاب خواهد شد. طرح بهینه صفحه به وسیله رابطه های صریح ارائه شده و پس از ۲۷ چرخه، مانند شکل (۱۲) به دست می آید. حجم سازه با  $87/35$  درصد کاهش از مقدار اولیه ۲۰۰ به پاسخ بهینه  $25/31$  اینچ مکعب رسیده است. روند کاهش حجم صفحه خمشی یکسرگیردار مزبور در شکل (۱۳) ارائه می شود. خاطر نشان می شود که شکل مستطیلی صفحه پس از آغاز اولین چرخه به سوی لبه های خمنداری تمایل پیدا می کند. در واقع،



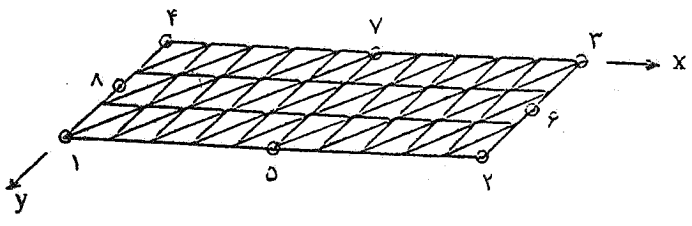
شکل ۷



شکل ۸



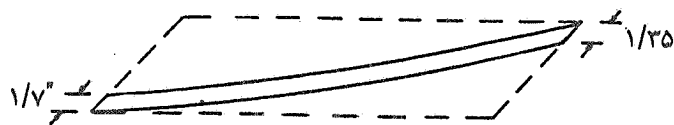
شکل ۹



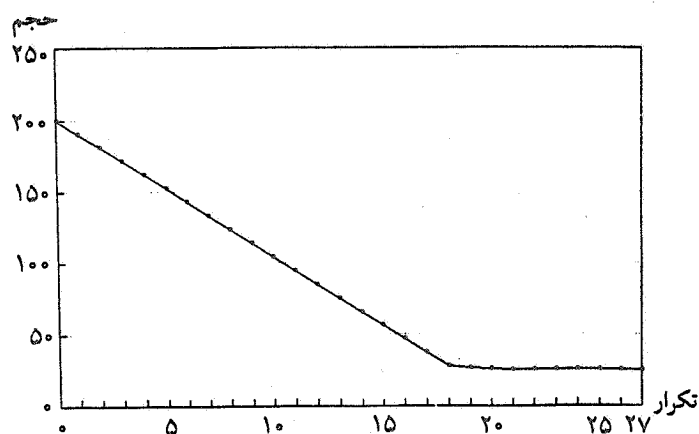
شکل ۱۱

سخن به میان آمد و با توجه به ویژگیهای خوب روش تحلیلی محاسبه مشتقهای حساسیت از آن بهره گیری شد. هر چند این روش نیاز به مشتق گیری صریح از رابطه های جزء دارد و باید زیرروالهای مورد نیاز تحلیل نوشته شوند، با وجود این، بهینه سازی با روش تحلیل حساسیت مستقیم سریع بوده و خطای محاسباتی ندارد. در برابر آن، روشهای نیمه تحلیلی وجود دارند که بهینه سازی با آنها زمان بر و گران است. افزون بر اینها، در روشهای نیمه تحلیلی باید مقادیر نمو متغیرهای طراحی نه بزرگ و نه کوچک انتخاب و به گونه ای تنظیم شوند تا دقت لازم را به دست آورد. این ویژگی، ضعف روشهای نیمه تحلیل را در برابر روشهای تحلیلی محاسبه مشتقهای حساسیت نمایان می سازد. باید افزود که روشهای نیمه تحلیلی را مانند روشهای تحلیلی نمی توان در برنامه های آماده بهینه سازی به کار گرفت.

بر اساس آنچه گذشت از جزء مثلثی ساده برای بهینه یابی شکل صفحه های خمشی استفاده شد. در این جزء شش درجه آزادی وجود دارد و انحنا و در نتیجه لنگر در تمام نقاط جزء ثابت است. معادله های مورد نیاز تحلیل حساسیت این جزء به صورت صریح حساب شد. برنامه رایانه ای که با رابطه های مورد بحث کار می کند، مهیا شد. با برنامه مزبور می توان شکل بهینه صفحه خمشی را پیدا کرد. این برنامه دارای چند هزار خط بوده که تشریح آن خارج از حد این مقاله است. مثالهایی که نشان دهنده توانایی روش است به نظر خوانندگان رسید. با توجه به تجربه های عددی مشخص شد که برای این جزء باید شبکه بندی ریزی آماده ساخت تا بتوان به طور مناسبی تغییر مکانها، تنشها و حساسیت آنها را حساب کرد.



شکل ۱۲



شکل ۱۳

همه چرخه های تحلیل حساسیت با لبه های منحنی شکل ادامه می یابد تا طرح بهینه نهایی به دست آید. روشن است که اگر با هر شکل نامنظم دیگری هم تحلیل آغاز می شد، جوهر اصلی رفتار سازه سبب می شد که به همین طرح بهینه منجر شود.

#### ۵- نتیجه گیری.

در این نوشته به تحولات گسترده بهینه سازی صفحه های خمشی اشاره شد. از روشهای متفاوت بهینه سازی شکل سازه ها

#### واژه نامه

- |                         |                           |                           |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. discrete             | 6. design element         | 11. non-conforming        |
| 2. sensitivity analysis | 7. subroutines            | 12. strain energy         |
| 3. computer             | 8. complementary energy   | 13. modulus of elasticity |
| 4. shape optimization   | 9. total potential energy | 14. Poisson's ratio       |
| 5. spline functions     | 10. minimum               |                           |

1. Beievicius, R., and Pedersen, P., "Analysis and Sensitivity Analysis by Computer Algebra for a Third-Order Plate Finite Element," *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 2, pp. 243-252, 1993.
2. Wood, R. D., "A Shape Function Routine for the Constant Moment Triangular Plate Bending Element," *Engineering Computing*, Vol. 1, pp. 189-197, June 1984.
3. Morley, L. S. D., "The Triangular Equilibrium Element in the Solution of Plate Bending Problems," *The Aeronautical Quarterly*, pp. 149-169, May 1968.
4. Morley, L. S. D., "The Constant-Moment Plate Bending Element," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 6, No. 1, pp. 20-24, 1971.
5. Dawe, D. J., *Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
6. Grandhi, R. V., Venugopal, N. S. and Venkayya, V. B., "Generalized Compound Scaling Algorithm and Application to Minimum Weight Design of Plate Structures," *ALAA Journal*, Vol. 30, No. 10, October 1992.
7. Prasad, B., and Haftka, R.T., "Optimal Structural Design with Plate Finite Elements," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 105, No. ST11, pp. 2367-2382, November 1979.
8. Mlejnk, H.P., Jehle, U., and Schirmacher, R., "Second Order Approximations in Structural Genesis and Shape Finding," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, pp. 853-872, 1992.