** مقاله آموزشی **

# گرامیان ها و تحققهای بالانس شده و استفاده آنها در تقلیل درجه سیستمها

محمدعلی معصوم نیا *

**چکیده**

در این مقالهٔ آموزشی ، گرامیان های کنترل پذیری ومشاهده پذیری را موردبررسی قرار داده ، روش محاسبهٔ آنها را ذکرخواهیم کرد . سپس دربارهٔ تحقق های بالانس شده واستفادهٔ آنها درتقلیل درجهٔ سیستمهای خطی ثابت با زمان ، توضیحاتی ارائه خواهیم کرد . درانتها ، حداکثر خطای تقلیل درجه دراین روش را ذکرکرده وبا استفاده از این کران بالا دربارهٔ چگونگی انتخاب درجهٔ مناسب برای سیستم تقلیل یافته پیشنهاداتی ارائه می کنیم .

**مقدمه**

یکی ازروشهائی که بوفوردرتجزیه وتحلیل سیستمهای دینامیکی پیچیده موردا ستفاده قرار میگیرد ، تقریب رفتار آنها با مدلهای ساده تر وسیستمهای درجهٔ پائین ترمی باشد . پرواضح است که بررسی رفتار یک سیستم پیچیده بمراتب مشکل تر از بررسی رفتار سیستم ساده شدهٔ معادل آن می باشد وباین دلیل تقلیل درجه همواره موردتوجه بوده است .

دراین مقالهٔ آموزشی ، یکی ازمهمترین روشهای موجودبرای تقلیل درجهٔ سیستمهای خطی ثابت با زمان با بعدمحدود را براساس استفاده از

---

* استادیار دانشکدهٔ مهندسی برق ـ دانشگاه صنعتی شریف ـ تهران

نشریه تحقیقاتی فنی ـ مهندسی استقلال ، دانشگاه صنعتی اصفهان ، شماره ۱۰ شهریور ۷۵

تحقق های بالانس شده[1]، موردبررسی قرار خواهیم داد [۱]. از نظر کیفی می‌توان گفت که در این روش سعی می‌شود تا با انتخاب مناسب پایه‌های فضای حالت، هریک از متغیرهای حالت سیستم را به همان اندازه‌ای که کنترل پذیر است، مشاهده‌پذیر سازیم وسپس با حذف متغیرهای حالتی که کنترل پذیری و مشاهده‌پذیری آنها کم است، تعداد متغیرهای حالت را تقلیل داده و درنتیجه بعد فضای حالت و درجه معادلات حالت بیان کنندهٔ رفتار سیستم را کاهش دهیم. برای تشخیص جزء کنترل‌پذیرتر و مشاهده‌پذیرتر فضای حالت، مفاهیم گرامیان های[2] کنترل پذیری و مشاهده‌پذیری را معرفی خواهیم کرد. آنگاه تاثیر تغییر پایه‌های فضای حالت را بر روی گرامیان ها بررسی کرده و تحقق های بالانس شده را معرفی می‌کنیم. برای مقایسهٔ تقریب‌های مختلف یک سیستم احتیاج به تعریف فاصلهٔ دوسیستم از یکدیگر خواهیم داشت تا تقریبی را قابل قبول بدانیم که فاصلهٔ آن از سیستم موردنظر در مقایسه با دیگر تقریب ها تا حد امکان کمتر باشد. با این دلیل نرم (اندازه) یک سیستم خطی ثابت با زمان را تعریف می‌کنیم وسپس مراحل مختلف تقلیل درجه با استفاده از تحقق های بالانس شده را برخواهیم شمرد.

## گرامیان ها

تحقق زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t)+B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= C\underline{x}(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

---

1. Balanced Realization
2. Gramians

دراینجا $\underline{x}$ بردار حالت با بعد $n$ ، $\underline{u}$ بردار ورودی با بعد $m$ و $\underline{y}$ بردار خروجی با بعد $l$ بوده و ماتریسهای $A$ و $B$ و $C$ نیزدارای ابعاد متناظری می باشند. برای این تحقق، گرامیان دسترس پذیری[1] ( کنترل پذیری ) را بصورت زیرتعریف می‌کنند:

$$W_r(0,t_f)=\int_0^{t_f} e^{A\tau}\, B\, B^T\, e^{A^T\tau}\, d\tau \qquad (۲)$$

می‌توان نشان دادکه این ماتریس برای هرزمان محدود $t_f$ معکوس پذیر است اگروفقط اگرجفت ($A$ و $B$) دسترس پذیر ( کنترل پذیر ) باشد [۲]. حال اگرزمان $t_f$ را به بینهایت میل دهیم واگرتمام مقادیرویژه ماتریس $A$ درسمت چپ محور $j\omega$ قرارداشته باشند $(Re[\lambda_i(A)]<0\ ,\ \forall i)$، آنگاه ماتریس $W_r \triangleq W_r(0,\infty)$ حل یکتای معادله لیاپونف[2]:

$$AW_r + W_r A^T + B B^T=0 \qquad (۳)$$

خواهدبود. برای اثبات این مطلب، با استفاده ازتعریف $W_r$ در (۲) داریم [۳]:

$$A\int_0^\infty e^{A\tau}\, BB^T\, e^{A^T\tau}\, d\tau + \int_0^\infty e^{A\tau}\, BB^T\, e^{A^T\tau}\, A^T\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{d\tau}\left[ e^{A\tau}\, BB^T\, e^{A^T\tau}\right] d\tau = e^{A\tau}\, BB^T\, e^{A^T\tau}\Big|_0^\infty \qquad (۴)$$

---

1. Reachability    2. Lyapunov

بعلاوه چون تمامی مقادیر ویژه‌ٔ $A$ درسمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند، پس :

$$e^{A\tau}\ BB^T\ e^{A^T\tau}\ \Big|_0^{\infty} = -BB^T \qquad (۵)$$

و $W_r$ در (۳) صدق می‌کند. توجه کنید که حل معادلهٔ لیاپونف با فرض اینکه مقادیر ویژهٔ $A$ سمت چپ محور $j\omega$ می‌باشند، یکتاست. چون اگر $W_2$ و $W_1$ دوجواب معادله (۳) باشند، آنگاه داریم :

$$A(W_1-W_2)+(W_1-W_2)A^T = 0 \qquad (۶)$$

پس :

$$\frac{d}{dt}\left[\ e^{At}\ (W_1-W_2)e^{A^Tt}\right] = 0 \qquad (۷)$$

بعبارت دیگر برای تمام زمانهای $t$ ترم داخل کروشه مقداری ثابت است :

$$e^{At}\ (W_1-W_2)\ e^{A^Tt} = Constant \qquad (۸)$$

بخصوص رابطهٔ (۸) برای $t=0$ و $t=\infty$ برقرار است و چون مقادیر ویژهٔ $A$ سمت چپ محور $j\omega$ می‌باشند پس $W_1=W_2$ بوده و حل معادلهٔ (۳) یکتا خواهد بود. البته می‌توان نشان داد که در حالت کلی معادلهٔ ماتریسی :

$$FX + XG + C = 0 \qquad (۹)$$

یک جواب یکتا برای ماتریس مجهول $X$ دارد گروفقط اگرماتریسهای $F$ و $G$ فاقدمقادیرویژه مشترک باشند [۴] . همینطورا گرداشته باشیم :

$$Re\,[\lambda_i\,(F)] + Re\,[\lambda_j\,(G)] < 0\,,\quad \forall\, i,j \tag{۱۰}$$

آنگاه این جواب یکتا را می‌توان بصورت $X = \int_0^\infty e^{Ft}\,C\,e^{Gt}\,dt$ نوشت [۳] .

بعلاوه گرامیان دسترس پذیری $W_r\,(0\ \text{و}\ t_f)$ که در رابطهٔ (۲) تعریف شده است برای هرزمان $t_f$ حداقل مثبت نیمه معین می‌باشدچون داریم :

$$\underline{w}^T\,W_r(0\ \text{و}\ t_f)\,\underline{w} = \int_0^{t_f} \underline{z}^T(\tau)\underline{z}(\tau)d\tau > 0 \tag{۱۱}$$

$$\underline{z}(\tau) = B^T\,e^{A^T\tau}\,\underline{w}$$

وچنانچه جفت ( $B$ و $A$ ) دسترس پذیرباشد ، آنگاه ماتریس $W_r(0\ \text{و}\ t_f)$ برای تمام زمانهای $t_f$ مثبت معین خواهدبود .

بهمین منوال ، گرامیان مشاهده پذیری[1] را بصورت زیرتعریف می‌کنند :

$$W_o(0,t_f) = \int_0^{t_f} e^{A^T\tau}\,C^TC\,e^{A\tau}\,d\tau \tag{۱۲}$$

این ماتریس نیزبرای تمام زمانهای $t_f$ معکوس پذیراست ، اگروفقط اگرجفت $(C\ \text{و}\ A)$ مشاهده پذیرباشد . بعلاوه اگرزمان $t_f$ را به بینهایت

---

1. Observability

میل دهیم واگرتمام مقادیرویژهٔ ماتریس $A$ درسمت چپ محور $j\omega$ واقع باشند، آنگاه بسادگی می توان نشان داد که ماتریس $W_o \triangleq W_o(0,\infty)$ حل یکتای معادلهٔ لیاپونف :

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \qquad (۱۳)$$

خواهد بود. چگونگی حل معادلهٔ لیاپونف درمرجع [۵] ارائه شده است. با استفاده از برنامهٔ MATLAB نیزمی توان معادلهٔ لیاپونف را بسادگی حل نمود [۶].

درادامه به تعبیرفیزیکی گرامیان ها خواهیم پرداخت. درابتدا فرض کنیدکه بخواهیم حالت سیستم را ازمرکزصفحهٔ حالت $(\underline{x}=\underline{0})$ درزمان $t=-T$ به نقطهٔ $\underline{x}=\underline{x}_0$ درزمان $t=0$ هدایت نمائیم بگونه ای که انرژی ورودی مینیمم شود. بعبارت دیگرمی خواهیم مسئلهٔ بهینه سازی :

$$\text{minimize} \quad J=\int_{-T}^{0} \underline{u}^T(t)\, \underline{u}(t)\, dt \qquad (۱۴)$$

را با شرایط مرزی زیرحل کنیم :

$$\underline{x}(-T) = \underline{0}\,, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

البته رابطهٔ بین ورودی وحالت نیزطبق معادله (۱) بوده واین رابطه حکم قیدمسئلهٔ بهینه سازی را دارد. می توان نشان دادکه ورودی بهینه $\underline{u}^*(t)$ با فرض دسترس پذیری بصورت زیربوده [۲]؛

$$\underline{u}^*(t) = B^T e^{-A^T t}\, [W_r(0,T)]^{-1}\, \underline{x}_0 \qquad (۱۵)$$

مقدا رتا بع هزینه بهینه ( ا نرژی مینیمم ) برای این ورودی بهینه بصورت

$$J^{*}= \underline{x}_0^T\ [W_r(0,T)\ ^{-1}]\underline{x}_0 \qquad (۱۶)$$

می باشد. البته اگر $T$ را به سمت بینهایت میل دهیم ، با فرض اینکه مقا دیر ویژه $A$ درسمت چپ محور $j\omega$ واقع با شند ، داریم :

$$J^{*}= \underline{x}_0^T\ \ W_r^{-1}\ \ \underline{x}_0 \qquad (۱۷)$$

توجه کنید که اگر $\underline{x}_0$ درا متدا دبردا رویژه $W_r$ با مقدا رویژه " کوچک " قرا ردا شته با شد ، آنگا ه $J^*$ " بزرگ " خوا هدبود ودرنتیجه دست یا فتن به این حا لت مستلزم استفا ده ا زمقدا رزیا دی ا نرژی است . پس این قسمت ا زفضا ی حا لت به سختی دسترس پذیربوده ویا به عبا رت دیگردسترس پذیری آن کم است . پس نزدیک بودن $W_r$ به تکینگی[1] شما یا نگرنزدیک بودن جفت ( $A$ و $B$ ) به دسترس نا پذیری است .

بهمین ترتیب می توا ن تعبیری دیگربرا ی گرا میا ن مشاهده پذیری ا را ئه کرد . تحقق (۱) را درنظرگرفته وفرض کنیدورودی $\underline{u}(t)$ برا ی $t\geqslant 0$، صفربا شد ، آنگا ه وا ضح است که دا ریم :

$$\underline{y}\ (t)= C\ e^{At}\ \underline{x}_0\ \ ,\quad t\geqslant 0 \qquad (۱۸)$$

که درا ینجا $\underline{x}_0$ حا لت ا ولیه می با شد . ا نرژی خروجی نیزبصورت زیرا ست :

$$E^{*}\ = \int_0^T\ \underline{y}^T(t)\underline{y}(t)dt\ =\ \underline{x}_0^T\ \ W_o\ (0,T)\underline{x}_0 \qquad (۱۹)$$

1. Singularity

همینطوراگر $T$ را به‌سمت بینهایت میل دهیم ، با فرض پایداری (۱) ، خواهیم داشت :

$$E^* = \underline{x}_0^T \; W_o \; \underline{x}_0 \tag{۲۰}$$

حال اگر $\underline{x}_0$ درجهت بردار ویژهٔ $W_o$ متناظربا مقدار ویژه " کوچک "باشد ، آنگاه انرژی خروجی $E^*$ " کوچک " خواهدبودوبعبارت دیگراثراین شرایط اولیه‌درخروجی کم مشاهده‌خواهدشدوازروی خروجی به‌سختی می‌توان $\underline{x}_0$ را محاسبه‌نمود . پس جزئی ازفضای حالت که‌متناظربااین مقدارویژهٔ " کوچک " می باشدبه‌سختی مشاهده‌پذیرمی باشدونزدیک بودن $W_o$ به تکینگی نمایانگرنزدیک بودن جفت ( $A$ و $C$ ) به‌مشاهده‌ناپذیری است .

درریاضیات گرامیان‌بردارهای $\underline{w}_1$ , ... , $\underline{w}_n$ را دترمینان ماتریس گرام[1] $G$ (Gram Matrix) بافرم زیرتعریف می کنند :

$$G = \begin{bmatrix} \langle \underline{w}_1 , \underline{w}_1 \rangle & \cdots & \langle \underline{w}_1 , \underline{w}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{w}_n , \underline{w}_1 \rangle & \cdots & \langle \underline{w}_n , \underline{w}_n \rangle \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

$\langle \underline{w}_i , \underline{w}_j \rangle$ نمایانگرضرب داخلی دوبردار $\underline{w}_i$ و $\underline{w}_j$ است . می‌توان نشان دادکه‌دترمینان $G$ صفراست اگروفقط اگربردارهای $\underline{w}_1$ و... و $\underline{w}_n$ وابسته‌خطی باشند . اگرچه‌بردارهای $\underline{w}_1$ و ... و $\underline{w}_n$ می توانندمتعلق به هرفضای برداری باشند ، درمسئلهٔ مشاهده‌پذیری می خواهیم استقلال

خطی ستونهای $Ce^{At}$ را بررسی کنیم ودرحقیقت گرامیان مشاهده پذیری همان ماتریس گرام مربوط به ستونهای مختلف $Ce^{At}$ می باشد. دراینجا لت $\underline{W}_i$ ستون $i$ ام ماتریس $Ce^{At}$ است.

## تاثیر پایه های فضای برداری بر گرامیان ها

دراین قسمت نشان خواهیم دادکه با انتخاب صحیح پایه های فضای برداری میتوان گرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری را قطری وبرابر یکدیگر نمود. برای این منظورمتغیرحالت جدید $\underline{z}$ را برحسب متغیرحالت $\underline{x}$ بصورت زیرتعریف کنید:

$$\underline{x} = T\underline{z} \tag{۲۲}$$

با جایگزینی (۲۲) در(۱) داریم:

$$\dot{\underline{z}} = T^{-1} AT \, \underline{z} + T^{-1} B\underline{u} = \hat{A} \, \underline{x} + \hat{B}\underline{u} \tag{۲۳}$$

$$\underline{y} = CT\underline{z} = \hat{C}\underline{x}$$

حال اگرگرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری تحقق (۲۳) را با $\hat{W}_r$ و $\hat{W}_o$ نمایش دهیم، آنگاه، با فرض وقوع مقادیرویژهٔ $A$ درسمت چپ محور $j\omega$، خواهیم داشت:

$$\hat{W}_r = \int_0^\infty e^{\hat{A}\tau} \hat{B}\hat{B}^T e^{\hat{A}^T\tau} d\tau$$

$$= T^{-1}\left( \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau \right)(T^{\tau})^{-1} \tag{۲۴}$$

$$= T^{-1} W_r \, T^{-T}$$

بطریق مشابه می‌توان نشان داد:

$$\hat{W}_o = T^T W_o T \qquad (۲۵)$$

با توجه به (۲۴) و (۲۵)، واضح است که با انتخاب $T$ مناسب می‌توان خواص ماتریسهای $\hat{W}_r$ و $\hat{W}_o$ را بصورت قابل ملاحظه‌ای تغییر داد و حتی مقادیر ویژهٔ $\hat{W}_r$ و $\hat{W}_o$ را نیز عوض نمود.

نکتهٔ جالبی که باید به آن توجه داشت این است که اگرچه مقادیر ویژهٔ $W_r(W_o)$ و $\hat{W}_r(\hat{W}_o)$ لزوما" یکسان نمی‌باشند ولی مقادیر ویژهٔ $\hat{W}_r \hat{W}_o$ همانند مقادیر ویژهٔ $W_r W_o$ هستند و با تغییر پایه‌های فضای برداری عوض نمی‌شوند، زیرا دو ماتریس $\hat{W}_r \hat{W}_o$ و $W_r W_o$ متشابه[1] می‌باشند:

$$\hat{W}_r \hat{W}_o = T^{-1} W_r T^{-T} T^T W_o T = T^{-1} W_r W_o T \qquad (۲۶)$$

عموما" به جذر مقادیر ویژهٔ ماتریس $W_r W_o$، مقادیر استثنائی هنکل[2] [۸] یا مودهای درجهٔ دوم [۱] گفته می‌شود. از آنجا که برای هر دو ماتریس دلخواه $M$ و $N$ با ابعاد مناسب، مقادیر ویژهٔ غیرصفر ماتریس‌های $MN$ و $NM$ با یکدیگر برابرند، مقادیر استثنائی هنکل، جذر مقادیر ویژهٔ $W_o W_r$ نیز می‌باشند. بعلاوه چون تمامی تحقق های مینیمال (هم دسترس پذیر و هم مشاهده‌پذیر) یک تابع تبدیل بوسیلهٔ تبدیل (۲۳) با یکدیگر در ارتباط می‌باشند [۳]، حاصلضرب گرامیان های مشاهده‌پذیری و دسترس پذیری این تحقق ها متشابه خواهند بود. بنابراین مقادیر استثنائی

---

1. Similar 2. Hankel Singular Values

هنکل به تحقق بخصوص بستگی نداشته وبه این علت به مقادیر استثنائی هنکل تابع تبدیل نیز معروفند وآنها را با $\sigma_i$ نمایش داده وبصورت نزولی مرتب می کنند :

$$\sigma_i[G(S)] \triangleq \lambda_i^{\frac{1}{2}}\ (W_r W_o),\ i=1,2,\ldots,n \qquad (۲۷)$$

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n > 0$$

دراینجا $\lambda_i(F)$ نمایانگر $i$ امین مقدار ویژهٔ ماتریس $F$ است . عموماً $\sigma_i$ ها را درماتریس قطری $\Sigma$ بصورت زیرقرار می دهند :

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

درادامه نشان خواهیم داد که می توان ماتریس $T$ را بگونه ای انتخاب کردتا :

$$\hat{W}_r = \hat{W}_o = \Sigma, \qquad (۲۹)$$

به تحقق ( $\hat{C}$،$\hat{B}$،$\hat{A}$ ) که درآن گرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری هردوقطری وبا یکدیگربرابر باشند ، تحقق بالانس شده می گویند [۱]،چون بطورکیفی دراین تحقق هریک ازمتغیرهای حالت به یک اندازه دسترس پذیرو مشاهده پذیرمی باشد .

چون $W_r$ مثبت معین $(W_r > 0)$ وهمینطورمتقارن می باشد ، می توان یک سری بردارهای ویژهٔ متعامد برای آن پیدا کرد . پس ماتریس متعامد $V_r$ وجودخواهدداشت بطوریکه [۹] :

$$V_r^T \; W_r \; V_r = \Lambda_r^2 \tag{۳۰}$$

در اینجا $\Lambda_r$ یک ماتریس قطری با المانهای مثبت می‌باشد. حال ماتریس متقارن و مثبت معین $P$ را بصورت زیر تعریف کنید:

$$P = (V_r \; \Lambda_r)^T \; W_o (V_r \; \Lambda_r) \tag{۳۱}$$

نکتهٔ جالب این است که مقادیرویژهٔ $P$ همان مقادیرویژهٔ $W_r W_o$ می‌باشند چون داریم:

$$\begin{aligned} \lambda_i(P) &= \lambda_i \; (V_r \; \Lambda_r \; \Lambda_r^T \; V_r^T \; W_o) \\ &= \lambda_i \; (W_r \; W_o) = \sigma_i^2 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

اگرماتریس مودال $P$ را $U$ بنامیم، آنگاه:

$$U^T P U = \Sigma^2 = U^T (V_r \; \Lambda_r)^T \; W_o (V_r \; \Lambda_r U) \tag{۳۳}$$

خواهدشد. حال اگرطرفین رابطهٔ (۳۳) را از راست و از چپ در $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ ضرب کنیم:

$$\Sigma = \Sigma^{-\frac{1}{2}} (V_r \; \Lambda_r \; U)^T \; W_o (V_r \Lambda_r U) \; \Sigma^{-\frac{1}{2}} \tag{۳۴}$$

با مقایسهٔ (۳۴) و (۲۵) نتیجه می‌گیریم که با انتخاب:

$$T = V_r \Lambda_r U \Sigma^{-\frac{1}{2}} \qquad (۳۵)$$

میتوان گرامیان مشاهده‌پذیری را قطری کرده وبرابر $\Sigma$ قرارداد. به عبارت دیگر $\hat{W}_o = \Sigma$ . برای نشان دادن اینکه $\hat{W}_r = \Sigma$ می باشد رابطهٔ (۳۵) را در (۲۴) جایگزین می کنیم . پس از این عمل داریم :

$$\hat{W}_r = \Sigma^{\frac{1}{2}} U^T \Lambda_r^{-1} V_r^T W_r V_r \Lambda_r^{-1} U \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma \qquad (۳۶)$$

البته روشهای دیگری برای محاسبهٔ ماتریس $T$ وجود دارد که از نظر عددی خواص بسیار بهتری دارند وبرای آشنائی با آنها مرجع[ ۹ ] مفید است .با استفاده از دستور BALREAL دربرنامهٔ MATLAB [ ۶ ] نیز می توان تحقق بالانس شدهٔ یک تحقق داده شده را محاسبه کرد. البته این دستورداری اشکالاتی می باشد که تصحیح شدهٔ آن درضمیمه آمده است .

اگر ماتریس $T$ را بصورت زیر تعریف کنیم :

$$T = T_o \triangleq V_r \Lambda_r U \qquad (۳۷)$$

بسادگی می توان نشان داد که $\hat{W}_r = I$ و $\hat{W}_o = \Sigma^2$ می شود. به این دستگاه مختصات بخصوص ، نرمالیزه شده درورودی[1] گفته می شود و درآن تمامی متغیرهای حالت ، به یک میزان دسترس پذیر می باشند [۱].

همینطوراگرماتریس $T$ را بصورت زیر تعریف کنیم :

$$T = T_I \triangleq V_r \Lambda_r U \Sigma^{-1} \qquad (۳۸)$$

---

1. Input Normal

آنگاه $I=\hat{W}_o$ و $\hat{W}_r=\Sigma^2$ خواهدشد. به این دستگاه مختصات بخصوص، نرمالیزه شده در خروجی[1] گفته می شود و در آن تمام متغیرهای حالت به یک میزان مشاهده پذیر می باشند [۱].

البته مهمترین دستگاه مختصات برای تجزیه و تحلیل سیستمها همان دستگاه مختصات بالانس شده می باشد که در آن گرامیان های مشاهده پذیری ودسترس پذیری هردوقطری وبرابر یکدیگر می باشند.

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که تبدیل $T$ که در (۳۵) آمده است یکتا نمی باشد چون بطور مثال عناصر هر یک از ستونهای $V_r$ را می توان در ۱- ضرب کرد و ماتریس $T$ به دست آمده باز هم تحقق داده شده را به یک تحقق بالانس شده تبدیل خواهد کرد. البته اگر $\sigma_i$ها غیرتکراری باشند، آنگاه تمام $T$ های ممکن از ضرب کردن (۳۵) در یک ماتریس قطری با المانهای ۱ یا ۱- بدست خواهند آمد ولی اگر بعضی از $\sigma_i$ ها تکراری باشند، آنگاه بینهایت ماتریس $T$ وجود خواهد داشت که یک تحقق داده شده را بالانس می کنند [۸].

## نرم یا اندازهٔ یک سیستم

همانگونه که در مقدمه توضیح داده ایم ،برای مقایسهٔ تقریب های مختلف یک سیستم احتیاج به معیاری اندازه گیری فاصلهٔ دو سیستم از یکدیگر داریم . بهمین منظور ، ابتدا دو معیار متفاوت برای محاسبهٔ اندازه ( یا بزرگی) یک سیستم یا تابع تبدیل آن ارائه خواهیم کرد وسپس فاصلهٔ دو تابع تبدیل را براساس اندازهٔ تفاضل آنها محاسبه خواهیم نمود.

براساس مطالبی که تاکنون ذکر کرده ایم یک نرم ( یا اندازه) رایج برای تابع تبدیل گویا ، پایدار و اکیداً "سره"[2] $G(S)$، نرم هنکل آن می باشد که آنرا با $\|G(S)\|_H$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند :

---

1. Output Normal 2. Strictly Proper

$$\|G(S)\|_H \triangleq \sigma_1 \qquad (۳۹)$$

که‌درآن $\sigma_1$ بزرگترین مقدا را ستثنا ئی هنکل $G(S)$ است (تابع تبدیلی اکیدا " سره‌می با شدکه‌برای آن دا شته‌با شیم :

$$\lim_{S \to \infty} G(S)=0 \qquad (۴۰)$$

یا بعبا رت دیگرورودی این سیستمها نبا یدمستقیما " برروی خروجی آنها اثرگذارد). می‌توان نشا ن دا دکه‌نرم هنکل $G(S)$ را با را بطهٔ زیرنیز می‌توان تعریف نمود [۸] :

$$\|G(S)\|_H = \sup_{\underline{u}(t)\varepsilon L_2(-\infty,0)} \frac{\|\underline{y}(t)\| L_2(0,\infty)}{\|\underline{u}(t)\| L_2(-\infty,0)} \qquad (۴۱)$$

درا ینجا $\sup$ نما یا نگرسوپرمم[1] ( یا ماکزیمم ) می با شدو $L_2(-T_1 \text{ و } T_2)$ نمایانگرتمام‌توابع $\underline{r}(t)$ است‌که‌برای‌آنها $\int_{-T_1}^{T_2} \underline{r}^T(t)\underline{r}(t)\,dt$ محدودا ست . چون ورودی $\underline{u}(t)$ برای $t\geqslant 0$ ، صفرفرض شده‌ودررا بطهٔ (۴۱) ، خروجی $\underline{y}(t)$ فقط برای $t>0$ موردنظرمی با شد ، پس $\underline{y}(t)$ فقط به حالت اولیهٔ $\underline{x}_0$ بستگی دا شته‌وبا استفا ده‌ا زتعریف گرا میا ن دسترس‌پذیری درمسئلهٔ مینیمم انرژی خوا هیم دا شت :

---

1. Supremum

$$\| G(S) \|_H = \sup_{\underline{x}_0 \neq \underline{0}} \frac{(\underline{x}_0^T \; W_0 \; \underline{x}_0)^{\frac{1}{2}}}{(\underline{x}_0^T \; W_r^{-1} \; \underline{x}_0)^{\frac{1}{2}}} \tag{۴۲}$$

همینطور اگر فاکتور کلسکی[1] ماتریس $W_r^{-1}$ را با $L$ نمایش دهیم

$$L^T L = W_r^{-1} \tag{۴۳}$$

آنگاه خواهیم داشت :

$$\| G(S) \|_H = \sup_{\underline{x}_0 \neq \underline{0}} \left[ \frac{\underline{x}_0^T \, W_0 \; \underline{x}_0}{\underline{x}_0^T \, L^T L \; \underline{x}_0} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۴۴}$$

$$= \sup_{\underline{y}_0 \neq \underline{0}} \left[ \frac{\underline{y}_0^T \;\; L^{-T} \; W_0 \;\; L^{-1} \;\; \underline{y}_0}{\underline{y}_0^T \;\; \underline{y}_0} \right]^{\frac{1}{2}} , \quad \underline{y}_0 \triangleq L\underline{x}_0$$

$$= \lambda_{max}^{\frac{1}{2}} \;\; (L^{-T} \;\; W_0 \;\; L^{-1})$$

$$= \lambda_{max}^{\frac{1}{2}} \;\; (L^{-1} \;\; L^{-T} \;\; W_0 \;) = \sigma_1$$

---

1. Cholesky

دراینجا $\lambda_{max}(F)$ نمایانگر بزرگترین مقدار ویژهٔ ماتریس $F$ می باشد.
البته تعریف نرم هنکل کمی غیرطبیعی بنظر می رسد ولی بسادگی می توان نشان داد که تمام خواص یک تابع نرم را دارا می باشد. درادامه نرم دیگری را تعریف خواهیم کرد که مفهوم سیستمی بسیار واضحی داشته و از آن کرارا " استفاده خواهد شد.
فرض کنید سیستم تک ورودی ـ تک خروجی پایداری با تابع تبدیل گویا و سره[1] $g(s)$ داده شده باشد. نرم بینهایت $g(s)$ را با $\|g(s)\|_\infty$ نمایش داده و آنرا بصورت زیر تعریف می کنند [۱۰]:

$$\|g(s)\|_\infty \triangleq \sup_{s\in C_+} |g(s)| \qquad (۴۵)$$

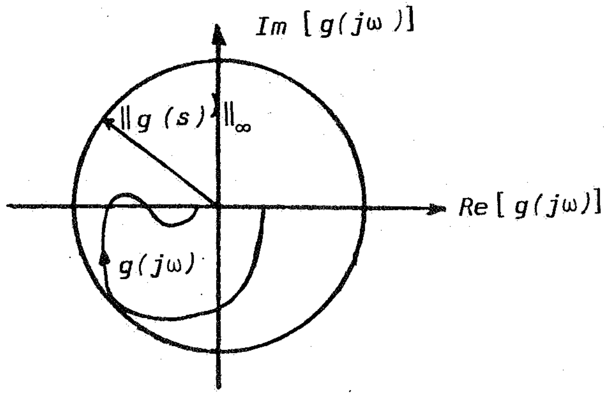
دراینجا $C_+$ نمایانگر تمام نقاط صفحهٔ مختلط واقع درسمت راست یا روی محور $j\omega$ است. چون $g(s)$ درنقاط $C_+$ تحلیلی می باشد، با استفاده از قضیهٔ اصل حداکثر قدر مطلق[2] [۱۱]، می دانیم که ماکزیمم $|g(s)|$ برای $s\in C_+$ برروی محور $j\omega$ اتفاق خواهد افتاد، یابعبارت دیگر:

$$\|g(s)\|_\infty = \sup_{\omega\in(-\infty,\infty)} |g(j\omega)| \qquad (۴۶)$$

ودرحقیقت نرم بینهایت شعاع کوچکترین دایره ای است که دیاگرام نایکوئیست یک سیستم را دربرمی گیرد ( شکل ۱).

---

1. Proper    2. Maximum Modulus Principle




شکل ۱ـ دیاگرام نایکوئیست و نرم بینهایت یک سیستم نمونه

برای سیستمهای چندمتغیره که تمامی قطبهای آنها درسمت چپ محور قرار داشته و سره می باشند ، نرم بینهایت را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\| G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{s\in C_+} \bar{\sigma}(G(s)) \qquad (۴۷)$$

که در آن نمایش $\bar{\sigma}(F)$, بمعنای بزرگترین مقدار استثنائی ماتریس مختلط $F$ بوده ، و بصورت زیر تعریف می شود :

$$\bar{\sigma}(F) = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}} (F^H F) \qquad (۴۸)$$

دراینجا $H$ نمایانگر هرمیشن[1] یک ماتریس می باشد. برای هرمقدار مختلط $s$، ماتریس $G(s)$ یک ماتریس مختلط بوده، $\bar{\sigma}\,(G(s))$ تابعی از متغیر مختلط $s$ خواهد بود. می توان نشان داد که مقدار ماکزیمم $\bar{\sigma}\,(G(s))$ برای $s\varepsilon C_+$ برروی محور $j\omega$ اتفاق می افتد [۱۰]، یا بعبارت دیگر:

$$\| G(s) \|_\infty = \sup_{\omega\varepsilon(-\infty,\infty)} \bar{\sigma}\,(G(j\omega)) \qquad (۴۹)$$

حال که با مفهوم اندازهٔ یک سیستم آشنا شده ایم، بسادگی می توان فاصلهٔ دوسیستم را ازیکدیگر تعریف کرد. فرض کنید دوسیستم $m$ ورودی و تک خروجی پایدار با توابع تبدیل $G_1(s)$ و $G_2(s)$ داده شده باشند، آنگاه تفاضل $G_2(s)-G_1(s)$ نیز سیستمی پایدار خواهد بود و می توان فاصلهٔ دو سیستم $G_1(s)$ و $G_2(s)$ را اندازهٔ سیستم تفاضل $G_2(s)-G_1(s)$ تعریف نمود. بطور مثال فاصلهٔ دوسیستم $G_1(s)$ و $G_2(s)$ برحسب نرم بینهایت به صورت زیراست:

$$d(G_2(s),G_1(s)) \triangleq \| G_2(s) - G_1(s) \|_\infty \qquad (۵۰)$$

درقسمت بعد، ازاین معیار برای محاسبهٔ فاصلهٔ یک سیستم وتقریب آن استفاده کرده، دربارهٔ چگونگی استفاده ازتحقق های بالانس شده در تقلیل درجهٔ سیستمها صحبت خواهیم کرد.

---

1. Hermition

## تقلیل درجه براساس تحقق های بالانس شده

فرض کنیدکه سیستم $m$ ورودی وتک خروجی خطی ثابت با زمان پایدار با تابع تبدیل اکیدا " سره" $G(s)$ داده شده باشد ومعادلات حالت (۱) تحققی مینیمال وبالانس شده برای این سیستم باشد. (اگر تحقق مینیمالی راکه دراختیار داریدبالانس نمی باشدبا انتخاب پایه های جدید برای فضای حالت وماتریس $T$ (رابطه‌ٔ (۳۵)) معادلات حالت را بالانس نمائید). همینطور $r$ مؤلفه‌ٔ اول بردار حالت را $\underline{x}_1$ وباقی مؤلفه های آنرا $\underline{x}_2$ نام گذاری کرده ومعادلات حالت (۱) را بصورت زیربازنویسی کنید :

$$\begin{array}{r}\text{سطر } r \\[2em] \text{سطر } n-r\end{array}\begin{bmatrix}\dot{\underline{x}}_1 \\ --- \\ \dot{\underline{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{array}{c}\begin{array}{cc} r\ \text{ستون} & n-r\ \text{ستون}\end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right]\end{array}\begin{bmatrix}\underline{x}_1 \\ --- \\ \underline{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1 \\ --- \\ B_2\end{bmatrix}\underline{u} \qquad (\text{۵۱})$$

$$\underline{y} = \begin{array}{c}\begin{array}{cc} r\ \text{ستون} & n-r\ \text{ستون}\end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2\end{array}\right]\end{array}\begin{bmatrix}\underline{x}_1 \\ \\ \underline{x}_2\end{bmatrix}$$

گرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری این تحقق راکه با یکدیگر برابر ومساوی $\Sigma$ می باشد، مطابق بردار حالت بصورت زیرتفکیک می‌کنیم :

$$\Sigma = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r \text{ ستون} & n-r \text{ ستون} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} r \text{ سطر} \\ n-r \text{ سطر} \end{array} \end{array} \qquad (۵۲)$$

$$\Sigma_1 = diag\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \quad , \quad \Sigma_2 = diag\ (\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$$

نکته‌ٔ جالب این است که اگر جزء $\underline{x}_2$ از بردار حالت را بکلی حذف کرده وتحقق :

$$\dot{\underline{z}} = A_{11}\ \underline{z} + B_1\ \underline{u} \qquad (۵۳)$$

$$\underline{y} = C_1\ \underline{z}$$

را درنظربگیریم ، آنگاه این تحقق با لانس شده‌بوده‌وگرامیان مشاهده پذیری ودسترس پذیری آن هردو $\Sigma_1$ خواهدبود. این را بطه‌را می توان بسادگی با جایگزینی (۵۱)و (۵۲) درمعادلات لیاپونف (۳۱ و ۱۳) نتیجه گرفت . همینطورا گر $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ باشد، آنگاه تمامی مقادیرویژهٔ $A_{11}$ در سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند [۸]، یعنی :

$$Re\ \left[\lambda_i\ (A_{11})\right] < 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, r \qquad (۵۴)$$

بعبارت دیگرتحقق (۵۳) خودنیزپایدارمجانبی خواهدبودوبعلاوه این تحقق هم دسترس پذیروهم مشاهده‌پذیراست . نکتهٔ بسیارجالب دیگر این است که فاصلهٔ دوتحقق (۵۳)و (۵۱) همواره‌درنامساوی زیر

صدق می کند [۸].

$$\| C(sI-A)^{-1} B-C_1 (sI-A_{11})^{-1} B_1 \|_\infty \leqslant 2(\sigma_{r+1}+\ldots+\sigma_n) \tag{۵۵}$$
$$= 2trace\ (\Sigma_2)$$

پس اگر مقدار $2trace\ (\Sigma_2)$ درسمت راست رابطهٔ (۵۵) کوچک باشد، آنگاه تحقق (۵۳) با درجه $r$ تقریب خوبی برای تحقق (۵۱) با درجه $n$ خواهد بود. همینطوردر [۸] نشان داده شده است که تمام تقریب های درجهٔ $r$ ممکن برای (۵۱) حداقل خطایی برابر $\sigma_{r+1}$ خواهند داشت یا بعبارت دیگر:

$$\| C(sI-A)^{-1} B - H(s)\|_\infty \geqslant \sigma_{r+1} \tag{۵۶}$$

که در اینجا $H(s)$، هر تابع تبدیل سره پایدار داده شده با درجهٔ مک میلان[1] $r$ است. عموما " در رابطهٔ (۵۶) تساوی برقرار نمی باشد و مقدار خطا عموما " بمراتب از $\sigma_{r+1}$ بیشتر است [۸]. حال از مقایسهٔ $\sigma_{r+1}$ و $2trace(\Sigma_2)$ می توان نتیجه گرفت که خطای تقلیل مرتبه با استفاده از تحقق بالانس شده تا چه حد قابل قبول است.

کرانی که برای خطا در (۵۵) مشخص شده، مطلق است. دربعضی مواقع، محاسبه نسبت خطا به کمیت تقریب زده شده مطلوب می باشد. بعبارت دیگر می خواهیم نسبت:

$$\frac{\| C(sI-A)^{-1}B-C_1(sI-A_{11})^{-1} B_1 \|_\infty}{\| C(sI-A)^{-1} B \|_\infty} \tag{۵۷}$$

1. Macmillan

را محاسبه‌کرده‌ویا کرانی برای آن پیدا کنیم . خوشبختانه‌اینکار بسادگی قابل انجام است ومی توان نشان دادکه‌برای تابع تبدیل پایدار $G(s)$، نرم هنکل هیچگاه‌از نرم بینهایت بزرگتر نبوده‌ونرم بینهایت نیزازدوبرابر مجموع مقادیراستثنائی هنکل بزرگترنمی باشد :[۸]

$$\| C(sI-A)^{-1} B \|_H = \sigma_1 \leqslant \| C(sI-A)^{-1} B \|_\infty \leqslant 2trace(\Sigma) \qquad (۵۸)$$

بااستفاده‌از (۵۸) و (۵۵) :

$$\frac{\| C(sI-A)^{-1}B - C_1(sI-A_{11})^{-1} B_1 \|_\infty}{\| C(sI-A)^{-1} B \|_\infty} \leqslant \frac{2trace(\Sigma_2)}{\sigma_1} \qquad (۵۹)$$

توجه‌کنیدکه‌روابط (۵۵)، (۵۶)و (۵۹) می توانندد‌را نتخاب درجهٔ $r$ مناسب برای تقلیل درجهٔ سیستم مورداستفاده‌قرارگیرند. درابتدای کارعموما " درجه‌تقریبی سیستم موردنظرمعلوم نمی باشدولی .با توجه به (۵۶) تمامی تقریب‌های درجهٔ $r$، حداقل خطایی برابر $\sigma_{r+1}$ خواهند داشت و $r$ را بایدبگونه‌ای انتخاب کنیم تا سمت راست روابط (۵۵)و (۵۹) مقادیری کوچک اختیارکنند. البته‌دربعضی موارد‌تمامی $\sigma_i$ ها بقدری به‌یکدیگرنزدیک میباشندکه‌تقریب سیستم با یک سیستم درجهٔ پایین تر همواره‌خطای قابل ملاحظه‌ای پدیدخواهدآورد.

اگرتابع تبدیل موردنظرپایداروسره‌بوده‌ولی اکیدا " سره‌نباشد، آنگاه‌تحقق آن دارای‌جزء مستقیم ورودی وبطورمثال بصورت زیر خواهدبود :

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \qquad (۶۰)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \longrightarrow \text{جزء مستقیم}$$

دراینجا لت نیزمی توان ازروشی که شرح آن رفت استفاده کرد. برای این منظورکافی است که جزء اکیدا " سره تحقق یعنی $C(sI-A)^{-1}B$ رابا $C_1(sI-A_{11})^{-1}B1$ تقریب زده وسپس جزء مستقیم را به حاصل اضافه نمود. بعبارت دیگرتقریب درجهٔ ۲ سیستم (۶۰) بصورت $C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1+D$ می باشد.

درمرجع [۱۲] روش بسیار مناسبی برای محاسبهٔ تحققی که لزوما " بالانس شده نمی باشد ولی تابع تبدیلی برابر تحقق تقلیل یافتهٔ (۵۳) دارد، ارائه شده است. این روش دارای خواص بسیار خوب عددی بوده و درمسائل پیچیدهٔ با درجهٔ بالا می توان د مورد استفاده قرار گیرد. درادامه برای روشن شدن مطالب وچگونگی استفاده از تحقق بالانس شده درتقلیل درجه به ذکریک مثال خواهیم پرداخت.

### مثال

دراین مثال با استفاده از تحقق های بالانش شده، تقریب مناسبی برای تابع تبدیل پایدار

$$g(s) = \frac{200\,(s+2)(s+0.8)}{(s+0.9)(s+4)(s^2+6s+50)} \qquad (۶۱)$$

بدست خواهیم آورد. یک تحقق دسترس پذیر و مشاهده پذیر برای $g(s)$ به صورت زیر است:

(۶۲)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -10.9 & -83 & -266.6 & -180 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 200 & 560 & 320 \end{bmatrix} \underline{x}$$

با استفاده از دستور BALREAL دربرنامه MATLAB [۶]، یک ماتریس $T$ بالانس کننده برای این تحقق به فرم

$$T = \begin{bmatrix} 0.0394 & -0.1754 & 0.1963 & 0.0609 \\ 0.0156 & 0.0005 & -0.0222 & -0.0243 \\ 0.0006 & 0.0041 & 0.0023 & 0.0184 \\ -0.0004 & 0.0007 & 0.0035 & -0.0178 \end{bmatrix} \qquad (۶۳)$$

وتحقق بالانس شده مربوطه بصورت زیرخواهدبود :

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} -1.9095 & -6.7590 & 2.6865 & 0.2615 \\ 6.7590 & -2.1290 & 2.6964 & 0.3634 \\ -2.6865 & 2.6964 & -5.6044 & -1.1782 \\ -0.2615 & 0.3634 & -1.1782 & -1.2571 \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} 3.3122 \\ -2.6064 \\ 2.0314 \\ 0.2252 \end{bmatrix} u \qquad (۶۴)$$

$$y = \begin{bmatrix} 3.3122 & 2.6064 & -2.0314 & -0.2252 \end{bmatrix} \underline{z}$$

گرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری این تحقق نیزبصورت زیر می باشند :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.8726 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5954 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3681 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0202 \end{bmatrix} \qquad (۶۵)$$

با توجه به (۵۸) ، نرم بینهایت $g(s)$ از $9.7126$ بیشترنبوده واز $2.8726$ نیزکمترنخواهدبود. دیاگرام بردانداز ه‌ٔ $g(j\omega)$ درشکل (۲) رسم شده است واین مقادیربا استفاده ازاین دیاگرام قابل تأییداست ، زیرا داریم :

$$\| g(j\omega) \|_\infty \simeq 4.5309 \qquad (۶۶)$$

همینطوربا توجه به المان های قطراصلی $\Sigma$ میدانیم که حداقل خطای ممکن درتقریب $g(s)$ با یک سیستم درجه‌ٔ سوم برابر $\sigma_4 = 0.0202$ ، وبا یک سیستم درجه‌ٔ دوم برابر $\sigma_3 = 0.3681$ است. البته با توجه به $\Sigma$ تمام تقریب های درجه‌ٔ اول ممکن برای $g(s)$ خطای قابل ملاحظه‌ای (اقلاً $1.5954$ ) بوجودآورده وقابل قبول نخواهندبود.

با توجه به تحقق بالانس شده (۶۴) ، یک تقریب درجه‌ٔ سوم قابل‌قبول با حذف متغیرحالت چهارم بدست خواهدآمدکه تابع تبدیل آن بصورت :

(۶۷)

$$g_3(s) = \frac{0.05073\ (s+1.6709)(s+3912.0)}{(s+3.6072)(s^2+6.0356\ s+ 50.5575\ )}$$

می باشد. دیاگرام بردا ندازهٔ $g_3(j\omega)$ و اندازهٔ خطای $g(j\omega)-g_3(j\omega)$ درشکل (۲) رسم شده اندو واضح است که درمحدودهٔ فرکانسی نمایش داده شده، $g_3(s)$ تقریب بسیار خوبی برای $g(s)$ است. با استفاده از (۵۵) داریم :

$$\| g(s)-g_3(s)\|_\infty \leqslant 0.0404 \qquad (۶۸)$$

وبا توجه به شکل ۲ نرم بینهایت خطا به حدبالای 0.0404 بسیار نزدیک می باشد.

همینطوراگرمتغیرهای حالت سوم وچهارم تحقق (۶۴) را حذف کنیم، آنگاه تحقق یک سیستم درجهٔ دوم بدست آمده و تابع تبدیل آن نیز به صورت زیرخواهدبود :

$$g_2(s) = \frac{4.1772(s+30.423)}{s^2+ 4.0385\ s\ +\ 49.7496} \qquad (۶۹)$$

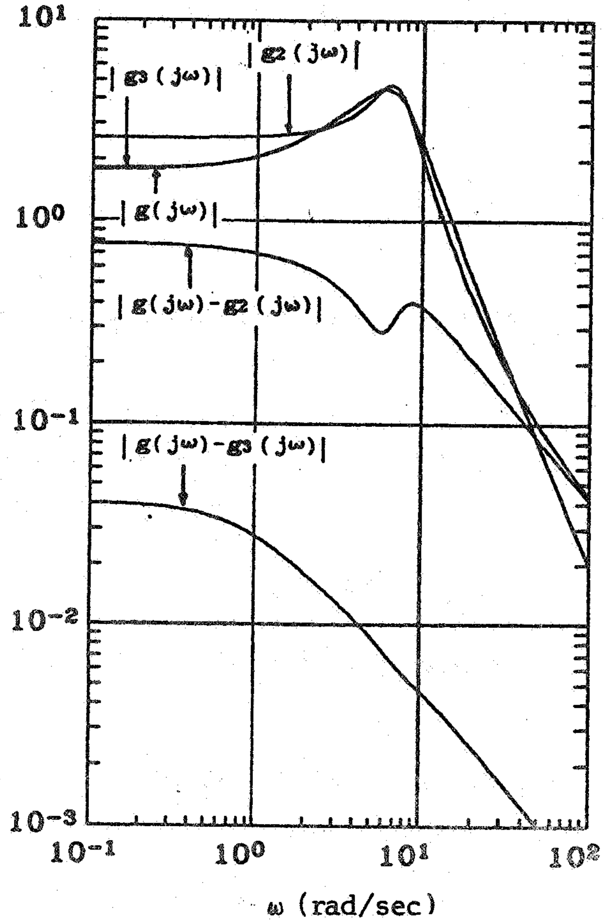
دیاگرام بردا ندازهٔ $g_2(j\omega)$ و اندازهٔ خطای $g(j\omega)-g_2(j\omega)$ نیز در شکل ۲ رسم شده اندوبا استفاده از (۵۵) داریم :

(۷۰)

$$\|g(s)-g_2(s)\|_\infty \leqslant 0.7766$$

با توجه به این شکل ، واضح است که نرم بینهایت خطا به حد بالای 0.7766 نزدیک می باشد و رابطه (۵۵) بخوبی اندازه خطا را پیش بینی کرده است .

در این مسئله بنظر می رسد که $g_3(s)$ یک تقریب مناسب برای $g(s)$ است ، درحالیکه تقریب $g(s)$ با $g_2(s)$ خطای به مراتب بیشتری دارد . البته با توجه به مقادیر قطر اصلی Σ این مطلب از ابتدا قابل پیش بینی بود.




شکل (۲)ـ پاسخ فرکانسی $g(s)$ وتقریب های آن

البته تقلیل درجه با استفاده از تحقق های بالانس شده فقط یکی از روشهای نوین موجود است وروشهای متعدد دیگری برای این منظور وجود دارند. بطور نمونه یک سیستم پایدار وسره $G(s)$ با درجهٔ $n$ را درنظر بگیرید، آنگاه برای تقریب $G(s)$ با یک سیستم درجهٔ $r$ پایدار می توان مسئلهٔ بهینه سازی زیر را حل نمود:

$$\underset{\hat{G}(s)}{\text{minimize}} \| G(s)-\hat{G}(s) \|_{\infty} \quad (\text{درجهٔ } \hat{G}(s) = r) \qquad (۷۱)$$

البته حل این مسئله مشکل می باشد [۱۳] وروش تقلیل درجه ای که در اینجا ارائه شده درحقیقت یک حل تقریبی (Suboptimal) برای مسئلهٔ ذکر شده است. نکتهٔ مهم دیگری که باید به آن توجه کنیم، تفاوت اهمیت خطا درفرکانس های مختلف می باشد. عموما" خطا هائی که درفرکانسهای پایین درطی تقلیل درجه بوجود می آیند بسیار مهمتر از خطا های فرکانس بالا می باشند. برای درنظرگرفتن اهمیت فرکانسهای مختلف می توان وزنهٔ فرکانسی مناسبی به صورت $W(s)$ انتخاب کرد که دارای اندازه ای بزرگ درفرکانسهای پایین و اندازه ای کوچک درفرکانسهای بالا باشد وسپس مسئلهٔ بهینه سازی زیر را حل نمود [۱۳]:

$$\underset{\hat{G}(s)}{\text{minimize}} \| (G(s)-\hat{G}(s)) W(s) \|_{\infty} \quad (\text{درجهٔ } \hat{G}(s) = r) \qquad (۷۲)$$

درتقلیل درجه با استفاده از تحقق های بالانس شده نیز می توان وزنه های فرکانسی مناسبی را درنظر گرفت. برای آشنایی با این روش

می توانید به مرجع [۱۳] مراجعه کنید. مزیت استفاده از تحقق های بالانس شده، سادگی نسبی انجام محاسبات در بدست آوردن سیستم درجهٔ پائین‌تر می باشد و به این دلیل بوفور مورد استفاده قرار می گیرد.

البته روش دیگری که اخیراً با موفقیت بسیار روبرو بوده است، تقلیل درجه با استفاده از نرم هنکل می باشد. در این روش برای یک سیستم پایدار و اکیداً سره $G(s)$ با درجهٔ $n$ می خواهیم سیستم پایدار $\hat{G}(s)$ با درجهٔ $r$ را بگونه‌ای پیدا کنیم تا تابع هزینه زیر کمینه شود:

$$J = \|G(s) - \hat{G}(s)\|_H \tag{۷۳}$$

گلاور[1] این مسئله را بصورت کامل حل کرده است و نشان داده است که مقدار مینیمم تابع هزینه (۷۳) برابر $\sigma_{r+1}$ است [۸]. توجه کنید که نرم استفاده شده در (۷۳) نرم هنکل بوده و نرم بینهایت نمی باشد. بعلاوه گلاور نشان داده است که برای تقریب بهینه هنکل $G(s)$، می توان ماتریس ثابت $D$ را بگونه‌ای یافت که:

$$\|G(s) - (\hat{G}(s) + D)\|_\infty \leqslant \sigma_{r+1} + \cdots + \sigma_n \tag{۷۴}$$

با توجه به این رابطه، تقریب هنکل عموماً خطای کمتری از تقریب حاصل از تحقق های بالانس شده دارد. البته توجه کنید که در اینجا تقریب $G(s)$ بصورت $\hat{G}(s)+D$ می باشد که لزوماً اکیداً سره نخواهد بود در حالیکه در تقلیل درجه با استفاده از تحقق های بالانس شده اگر سیستم اکیداً سره باشد، آنگاه تقریب آن نیز اکیداً سره خواهد بود. بعلاوه مراحل محاسبات تقریب هنکل بمراتب پیچیده تر از تقریب براساس تحقق‌های بالانس‌شده می باشد.

---

1. Glover

## نتیجه‌گیری

در این مقاله‌ٔ آموزشی ، یکی از روشهای بسیار رایج و موفق در تقلیل درجهٔ سیستمهای خطی ثابت با زمان را که براساس تحقق های بالانس شده استوار است ، به تفصیل موردبررسی قرارداده ومزایا ومحدودیت های آنرا برشمردیم .

درسرتاسر این مقاله تنها درباره‌ٔ تقلیل درجهٔ سیستمهای پایدار صحبت کردیم . البته می‌توان یک سیستم ناپایدار داده‌شده را به‌دوجزء پایدار $G_s(s)$ وکاملاً ناپایدار $G_u(s)$ تفکیک کرده ، سپس با استفاده ازروشهای ارائه‌شده جزء پایدار $G_s(s)$ را با یک سیستم درجهٔ پایین‌تر تقریب زده‌وحاصل را به $G_u(s)$ اضافه کنیم . البته‌درروشهای دیگر[۱۴]، سیستم داده‌شده‌را بصورت کسردوسیستم پایدار نوشته ( این عمل همواره امکان پذیراست )وسپس این دوسیستم پایدار را با یکی ازروشهای مطرح شده‌دراینجا تقلیل درجه می دهندوسپس تقریب نهایی را بدست می آورند.

یکی ازکاربردهای اساسی تقلیل درجه‌درطراحی کنترل کننده‌های با درجهٔ پایین است‌چون کنترل کننده‌هائی که‌با استفاده‌ازروشهای نوین طراحی می شوندعموماً " درجه‌ای برابربادرجهٔ سیستم تحت‌کنترل خودداشته‌ونسبتاً " پیچیده‌می باشند. با استفاده‌ازروشهای تقلیل می توان این کنترل کننده‌ها را با یک کنترل کنندهٔ درجهٔ پایین مناسب تقریب زد. درمرجع [۱۳]روشهای مختلفی برای تقلیل درجهٔ کنترل کننده‌موردبررسی قرارگرفته‌است . البته‌درتقلیل درجهٔکنترل کننده‌باید‌به‌نکات بسیارمهمی ازقبیل پایداری سیستم حلقه‌بسته‌که ممکن است‌درطی تقریب‌کنترل کننده‌ازدست برودتوجه‌خاصی داشته‌و بویژه‌برروی استفاده‌ازوزنه‌های فرکانسی مناسب‌درطی مراحل تقلیل درجه‌تأکیدداشت .

**ضمیمه**

در دستور BALREAL در برنامهٔ MATLAB [۶]، مقادیر استثنائی هنکل بصورت نزولی مرتب نشده و در نتیجه عمل تقلیل درجه از روی تحقق محاسبه شده به سهولت انجام نمی پذیرد. بعلاوه به خاطر گرد شدن اعداد در طی انجام محاسبات، ماتریس هایی که از نظر تئوری متقارن می باشند، در طی محاسبات تقارن خود را از دست داده و در نتیجه ممکن است مقادیر ویژهٔ محاسبه شدهٔ آنها مختلط شوند. برای پرهیز از این مسائل، این دستور به صورت زیر تصحیح شده است. البته برای محاسبه تحقق های بالانس شده و تقلیل درجه با استفاده از آنها برای سیستمهای با درجهٔ بالا بهتر است از الگوریتم‌های پیشنهادی [۹] و [۱۲] استفاده شود.

```
function [ab,bb,cb,m,T] = balreal(a,b,c)
%  BALREAL  Balanced state-space realization and model reduction.
%  [Ab,Bb,Cb] = BALREAL(A,B,C) returns a balanced state-space
%  realization of the system (A,B,C).
%  [Ab,Bb,Cb,m,T] = BALREAL(A,B,C) also returns a vector m
%  containing the diagonal of the gramian of the balanced
%  realization, and matrix T, the similarity transformation
%  used to convert (A,B,C) to (Ab,Bb,Cb).  If the system (A,B,C)
%  is normalized properly, small elements in gramian m indicate
%  states that can be removed to reduce the model to lower order.

%       J.N. Little 3-6-86
%       Copyright (c) 1986 by the MathWorks, Inc.

Gc = gram(a,b);    % Compute the reachability gramian
Go = gram(a',c');  % Compute the observability gramian
R = chol(Gc);
RGR = R*Go*R';
RGR = tril(RGR) + tril(RGR,-1)';  % Make RGR exactly symmetric.
[V,D] = eig(RGR);
m=diag(real(D)).^(.5);
T = R'*V*diag(m.^(-.5));
[m index]=sort(-m);  % Sort the diagonal elements of the gramian
m=-m;
T=T(:,index);
ab = T\a*T;  % Compute the balanced realization
bb = T\b;
cb = c*T;
```

## مراجع

1. Moore, B., " Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction", IEEE TAC, Vol. 26, No. 1, pp. 17-31, Feb 1981.

2. Luenberger, D., <u>Introduction to Dynamic Systems</u>, Wiley, 1979.

3. Kailath, T., <u>Linear Systems</u>, Prentice-Hall, 1980.

4. Gontmacher, <u>Matrix Theory</u>, Vol. I, Chelsea, 1977.

5. Hammarling, " Numerical Solution of the Stable, Non-negative Definite Lyapunov Equation", IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 2, pp. 303-323, 1982.

6. MATLAB Software, The MATHWORKS Inc., 21 Elliot Street, South Natick, MA 01760, U.S.A.

7. Luenberger, D., <u>Optimization by Vector Space Methods</u>, Wiley, 1969.

8. Glover, K., "All Optimal Hankel-Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and Their $L_\infty$ Error Bounds", International Journal of Control", Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193, 1984.

9. Laub A., et.al, " Computation of Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms", IEEE TAC, Vol.32, pp.115-122, 1987.

10. Vidyasagar, Control System Synthesis, M.I.T. Press, 1985.

11. Paliouras, Complex Variables for Scientists and Engineers, Macmillan, 1975.

12. M. Safanov and Chiang, " A Schur Method for Balanced-Truncation Model Reduction", IEEE TAC, Vol.34, No.7, July 1989, pp. 729-733

13. Anderson and Liu, " Controller Reduction: Concepts and Approaches", IEEE TAC, Aug 1989, Vol.34, No. 8, pp. 802 -812

14. Mcfarlane et.al. "Reduced-Order Controller Design Using Coprime Factor Model Reduction", IEEE TAC, March 1990, Vol. 3, No. 3, pp. 369-373