نمایش یک سطح رقمی شده به وسیلهٔ وجوه مثلثی شکل

بهروز قلی زاده*
دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف
(دریافت مقاله: ۱۳۷۴/۵/۲۳ - دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۷۵/۱/۲۸)

چکیده – در این مقاله، روشی برای مثلث بندی یک جسم رقمی شده، که نقاط رقمی شدهٔ آن در یک شبکهٔ منظم توپولوژیکی توزیع شده‌اند، ارائه می‌شود. اساس روش مزبور بر تقسیم تکراری و تطابقی وجوه مثلثی شکل یک چند وجهی اولیه قرار دارد. با فرض یک رابطهٔ دوسویی بین سطح رقمی شده و سطح تقریبی آن، افرازی بر روی مبنای داده‌ها صورت می‌پذیرد. روش ارائه شده دارای امکان اندازه گیری کیفیت موضعی تقریب است و می‌تواند مانع پیدایش مثلثهای باگوشه های تند شود. پایین بودن پیچیدگی محاسباتی آن، امکان تقریب یک سطح را با مجموعه ای بسیار وسیع از داده‌ها می‌دهد.

Representation of a Digitized Surface by Triangular Faces

B.Gholizadeh
Department of Computer Engineering, Sharif University of Technology

ABSTRACT- *This paper proposes a triangulation method for a digitized surface whose points are located on a regular lattice. The method relies on an iterative and adaptive splitting of triangular faces of an initial polyhedral surface. Assuming a bijection between the digitized surface and its approximation, a partition of the data base is performed. The method allows the measurement of the local quality of the approximation and avoids the generation of triangles with sharp corners. Its low computational complexity permits the approximation of very large sets of points.*

۱ – مقدمه

مسئلهٔ بسیار مهم در زمینه های متفاوت تحقیقاتی و کاربردی مانند شناسایی الگوها، هوش مصنوعی، روباتیک، طراحی به کمک‌کامپیوتروتصاویرسنتزوغیره، ضبط[1] و نمایش[2] شکلهای سه بعدی است [۱].

سیستمهای بسیاری بر اساس نظریه های گوناگون برای ضبط داده‌های توصیف کنندهٔ اجسام سه بعدی ایجاد شده‌اند. به علاوه کارهای تحقیقاتی بسیار وسیعی به نمایش اجسام سه بعدی، از روی چنین داده‌هایی اختصاص داده شده است. سیستم ضبط داده‌های مورد اشاره در این مقاله، یک سیستم ضبط ویدئولیزر سه بعدی است‌که قادر است در عرض چند ثانیه حدود چند صد هزار نقاط دادهٔ توزیع شده بر روی یک شبکهٔ منظم از مدارها و نصف‌النهارهای

* استادیار

واقع بر روی سطح یک جسم صلب سه بعدی را رقمی کند [۲].
برای نمایش شکلهای سه بعدی دو نوع مدل اساسی وجود دارد: نمایش سطحی و نمایش حجمی.

نمایش سطحی یک جسم، یا به وسیلهٔ شبکه ای از چند ضلعیها(سطوح مسطح) و یا به وسیلهٔ شبکه ای از وصله ها[۳] (سطوح خمیده) امکانپذیر است. نمایش حجمی یک جسم نیز می‌تواند به وسیلهٔ شبکه ای از چند وجهیها، هشت درختیها[۴]، استوانه های عمومی[۵] و یا روش ساختار هندسی جسم صلب[۶] صورت پذیرد[۳]. انتخاب یک مدل نمایش به عوامل متعددی بستگی دارد. ذخیره سازی، پیچیدگی نمایشها، دستکاری روی نمایشها، کاربرد و هدف نهایی از جمله عواملی هستند که می‌توانند در این انتخاب مؤثر باشند. نمایش یک جسم به وسیلهٔ شبکه ای از مثلثها (مثلث بندی [۴-۵])، به دلیل سادگی اش، بیشترین کاربرد را در میان مدلهای نام برده شده، دارد. با وجود این، مسئلهٔ مثلث بندی یک جسم سه بعدی فقط در حالت خاصی که یک ساختار از پیش تعریف شده بر روی نقاط داده‌ها اعمال شود، نتایج مطلوبی به دست می‌دهد. به عنوان مثال در توموگرافی[۷] رقمی در علم پزشکی، نقاط رقمی شدهٔ جسم بر روی برشهای مسطح موازی قرار دارند. برای چنین حالت خاصی، روشهای مثلث بندی به روش برشهای موازی با نتایج خوبی ارائه شده‌اند [۶ و ۷]. برای حالت خاصی نیز که نقاط داده‌ها از روی سطح یک جسم محدب اندازه گیری شده باشند، روشهای بهینه ای ارائه شده‌اند که بر اساس نظریهٔ مثلث بندی دلونی[۸] پایه گذاری شده‌اند [۵ و ۸-۱۰]. راه حل مسئله در حالت عمومی بسیار مشکل است.

تنها یک روش عمومی که در واقع تعمیم تقریب یک منحنی ساده به وسیلهٔ یک چند ضلعی به فضای سه بعدی است در مرجع [۱۱] ارائه شده است. ایراد عمدهٔ این روش، گذشته از بالا بودن پیچیدگی محاسباتی آن $O(n^2 \log n)$ (که در آن n تعداد نقاط داده‌هاست)، امکان ایجاد یک سری مثلثهای باگوشه های تند است. این روش مثلث بندی، اضلاع قدیمی را محفوظ نگاه می‌دارد، هر چند که نمایش تقریب خوبی نباشند.

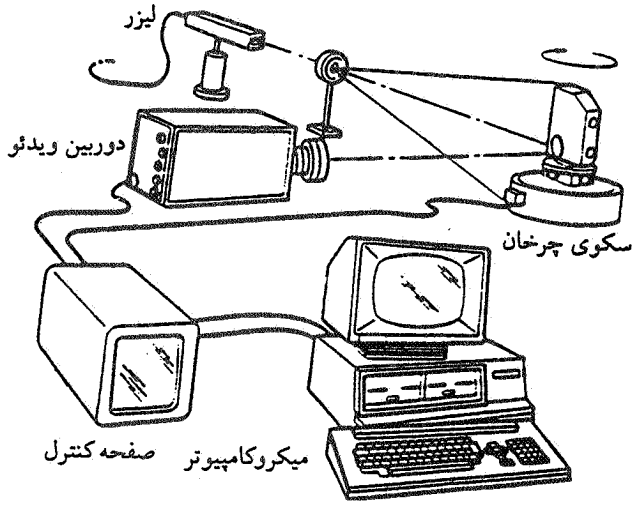
در این مقاله، روش جدیدی برای مثلث بندی یک سطح رقمی شده ارائه می‌دهیم که دارای پیچیدگی محاسباتی کمتر و دارای مثلثهای خوش تعریف است. به عبارت دیگر، الگوریتم اگر در مرحله ای تشخیص دهد که ضلعی تقریب خوبی به دست نمی دهد، آن ضلع را می‌شکند و با اضلاع جدیدی با تقریب بهتر جایگزین می‌کند.

۲- سیستم رقمی کنندهٔ جسم سه بعدی

از آنجایی‌که روش مثلث بندی ما بر روی نقاط داده‌های رقمی شده‌ای اعمال خواهد شد که حاصل از سیستم رقمی کننده ای است که قبلاً در مورد آن بحث شد، لازم است که به طور مختصر به عملکرد سیستم فوق بپردازیم.

جسمی که باید رقمی شود بر روی یک سکو با موتور چرخان گام به گام قرار داده و به وسیلهٔ یک سطح نوری لیزری روشن می‌شود (شکل ۱). محل تلاقی این سطح نوری با جسم یک منحنی نورانی (مدار) به دست می‌دهد که به وسیلهٔ یک (یا چند) دوربین ویدیویی مشاهده می‌شود. از سیگنال ویدیویی حاصل از این دوربین، می‌توان موقعیت منحنی نورانی را بر روی یک صفحه مانیتور استخراج کرد و در نتیجه اطلاعات به اندازهٔ کافی دقیق برای محاسبهٔ مواضع حدود ۶۰۰۰ نقطه روی سطح جسم واقع در سیستم مختصات - جسم را به دست آورد. سپس با یک گام چرخش، جسم‌درموقعیت جدید قرار می‌گیرد و اندازه گیری جدیدی برای مدارجدیدی‌صورت‌می‌پذیرد. بدین‌ترتیب‌می‌توان‌مختصات حدود ۲۰۰۰۰۰ نقطهٔ‌مربوط به ۳۶۰ مدارراانداز‌ه‌گیری‌کرد.

این روش رقمی سازی، استخراج مختصات $(\theta, Z, R(\theta, z))$ روی سطح جسم را در یک دستگاه مختصات استوانه ای امکانپذیر می‌سازد. حال فرض کنید که F_0 و Z_0 به ترتیب گامهای نمونه گیری در زاویهٔ چرخش و روی محور Z ها باشند و M تعداد چرخشهای سیستم رقمی کننده باشد. فرض شده است که تعداد نقاط رقمی شده روی هر مدار m_i، $1 \le i \le M$ یکسان و برابر N است. بدین ترتیب $M \times N$ نقطهٔ رقمی شدهٔ روی سطح جسم را می‌توان به وسیلهٔ یک تصویر $M \times N$ نمایش داد که در آن عنصر (i, j) حاوی شعاع $R(iF_0, jZ_0)$ و در نتیجه نمایش دهندهٔ نقطه به‌مختصات $(iF_0, jZ_0, R(iF_0, jZ_0))$ روی سطح جسم است. سطرها و ستونهای این تصویر به ترتیب نمایش دهندهٔ کانتورهای



شکل ۱ - سیستم ضبط داده‌های سه بعدی

بستهٔ نصف النهارها و کانتورهای مدارها هستند [۲].

۳ - فرضیات روی سطح رقمی شده

یک نقطه در فضای اقلیدسی سه بعدی به وسیلهٔ سه مؤلفهٔ x y و z آن تعریف می‌شود. نقطهٔ مزبور می‌تواند به وسیلهٔ سه مؤلفهٔ دیگر در یک دستگاه مختصات دیگر تعریف شود. برای یک دستگاه مختصات (a ،b ،c) داده شده، فرض بر این است که:

الف - سطح جسم را می‌توان صریحاً در داخل مرزهای حوزهٔ تعریف D(S)، با بیان یکی از مؤلفه ها (مثلاً c) به صورت تابعی از دو مؤلفهٔ دیگر تعریف کرد: c=s(a،b)، که در آن s یک تابع پیوستهٔ از مرتبهٔ صفر است. یعنی به ازای هر جفت مؤلفهٔ (a ، b) متعلق به D(S) تنها و تنها یک نقطه از رویه وجود دارد که به وسیلهٔ ((a ، b)s ، a ، b) تعریف می‌شود.

ب - نمونه گیری سطح جسم برروی یک شبکهٔ منظم درمیدان (a ، b) از دستگاه مختصات (a ، b، c) انجام پذیرفته است. این نظم، صرفاً یک نظم توپولوژیکی است. شبکه می‌تواند مشبکه ای منظم از الگوهای سه گانهٔ مثلث، مربع و یا شش ضلعی باشد. این طریقهٔ نمونه گیری ما را قادر می‌سازد تا همسایهٔ هر نقطهٔ رقمی شده را تصریح کنیم. این روند، سبب ایجاد یک ساختار گراف‌گونه بر روی مجموعه نقاط داده‌ها می‌شود: G = (V ، E) که G گراف، V مجموع نقاط داده‌ها به عنوان رئوس، و E مجموعهٔ یالهایی است که هر جفت رأس همسایه را به هم پیوند می‌دهد.

رابطه دو سویی بین رویهٔ جسم و سطح چند وجهی

درروش فوق ماعلاقه‌مند به‌سطوح چندوجهی هستیم که در حوزهٔ تعریف D(S) دارای همان خواصی باشند که رویهٔ جسم دارد. یعنی تابعی مثل p موجوداست به‌گونه‌ای که به‌ازای هر (a ، b) ∈ D(S) تنها یک نقطه از سطح چند وجهی وجود دارد که مختصات آن (a ، b ، p(a ، b)) است. چنین سطح چند وجهی باید دارای شرایط خاصی باشد و متعلق به کلاس ویژه ای است که ما به اختصار آن را با PS نمایش می‌دهیم. در الگوریتم ما یک PS اولیه طبق شرایط فوق باید داده شده باشد. بنابراین تعریف دوسویی بین رویهٔ رقمی شده و سطح چند وجهی متعلق به PS کار ساده‌ای‌ست. برای هر (a ، b) از D(S) دو سویی فوق نقاط ، (a ، b ، s(a، b)) و (a ، b ، p(a ، b)) را به هم ربط می‌دهد. این دوسویی کلید الگوریتم است زیرا ما را قادر می‌سازد که:

۱- یک معیار کیفی تقریب را برای خطای موضعی، که فاصلهٔ بین یک نقطهٔ رقمی (a ، b ، c) و متناظر آن (a ، b، p(a ، b)) روی PS است، تعریف کنیم.

۲- به‌راحتی بتوانیم برای هر PS مجموعه‌ای از مؤلفه‌های همبند گراف G وابسته به اضلاع PS و یا سطوح PS را تعریف کنیم.

این دو سویی وسیلهٔ قدرتمندی فراهم می‌آورد تا برای یک PS داده شده، افرازی بر روی مجموعهٔ نقاط داده‌های رقمی شده تعریف کرد. بدین ترتیب از جستجوی ترکیباتی پرهزینه جلوگیری به‌عمل آورد و به طور قابل ملاحظه‌ای پیچیدگی محاسباتی لازم برای تعیین افراز را کاهش داد. این امکان نیز فراهم می‌شود تا برای یک مبنای دادهٔ وسیع (حدود چند صد هزار نقطه) بتوان یک تقریب چند وجهی پیدا کرد.

۴- روش اتخاذ شده برای پیاده سازی برنامه

نمایش در دستگاه مختصات استوانه‌ای

جسم مورد مطالعهٔ ما در یک دستگاه محورهای مختصات استوانه‌ای (R ، Z ، θ) تعریف شده است، که در آن R > ۰ و $0 \le \theta < 2\pi$ و $-\infty < Z < \infty$ (برای R = ۰ مقدار θ تعریف نشده است). نقاط رقمی شده روی یک شبکهٔ منظم توپولوژیکی در حوزهٔ تعریف (Z ، θ) توزیع شده‌اند. این شبکه، یک شبکهٔ منظم هندسی نیز هست زیرا که مقادیر نمونه گیری به کار رفته در

جهات Z، θ ثابت هستند. اگر یک دوران کامل حول محور Z ها انجام پذیرد حوزهٔ تعریف D(S) به قسمت مستطیل شکلی از حوزهٔ (Z, θ) کاهش می‌یابد ($Zmin \leq Z \leq Zmax$ و $0 \leq \theta < 2\pi$). نقاط رقمی $S_{ij} = (\theta_j, Z_j, R_{ij})$ به طور منظم در D(S) توزیع شده‌اند: $\theta_i = 2\pi i/NM$، $(i = 0, ..., NM - 1)$، $Z_j = Zmin + j(Zmax - Zmin)/NP$، $(j = 0, ..., NP - 1)$. NM و NP به ترتیب نمایشگر تعداد نصف النهارها و مدارهای حاصل از ضبط داده‌ها هستند. بدین ترتیب نمایش رویهٔ رقمی شده در حوزهٔ (Z, θ) دقیقاً مثل یک تصویر رقمی است که در آن سطرها و ستونها به ترتیب متناظر با مدارها و نصف النهارهای روی سطح جسم هستند و مقدار پیکسل در مکان (i, j) برابر با فاصلهٔ R_{ij} نقطهٔ S_{ij} از محور Z هاست. منظم بودن شبکه این امکان را به ما می‌دهد تا برای هر نقطه در این شبکه همسایگیهای ۴ یا ۸- مرتبط تعریف کرد و مجموعه E از یالها را در گراف G مشخص کنیم.

انتخاب یک چند وجهی اولیه

در حدود حوزهٔ تعریف D(S) مشکلی برای تعیین یک PS اولیه نیست: ساده ترین راه این است که سه نقطه روی مدار اول به نحوی انتخاب کرد که مثلث حاصل از این سه نقطه محور Z ها را در درون مثلث تلاقی نکند. مثلث مشابهی را نیز می‌توان روی مدار آخر تشکیل داد. بدین طریق یک PS اولیه با ۶ وجه مثلثی با به هم پیوستن صحیح این دو مجموعهٔ سه نقطه ای، به وسیلهٔ ۶ ضلع حاصل می‌شود. تقسیم تکراری این PS اولیه، در عمل این اطمینان را به ما خواهد داد تا برای هر PS حاصل، تابع $P(\theta, Z)$ در حوزهٔ تعریف D(S) وجود داشته باشد.

رابطهٔ دوسویی

با توجه به مطالب فوق، رابطهٔ دوسویی بین رویهٔ جسم و تقریب چند وجهی، تصویر استوانه ای یکی بر روی دیگری خواهد بود (شکل ۲). به ویژه نقطهٔ رقمی $S_{ij} = (\theta_i, Z_j, R_{ij})$ به نقطهٔ M از PS با رابطهٔ $M = (\theta_i, Z_j, p(\theta_i, Z_j))$ مربوط می‌شود. بنابراین خطای تقریب بین S_{ij} و نقطهٔ همانند آن M، به صورت قدر مطلق تفاضل شعاعهای آنها تعریف می‌شود:

$$|R_{ij} - P(\theta_i, Z_j)| \qquad (۱)$$

بدیهی است که مقدار این خطا برای نقاطی از مبنای داده‌ها که به عنوان رئوس چند وجهی انتخاب می‌شوند برابر صفر است.

افراز مبنای داده‌ها

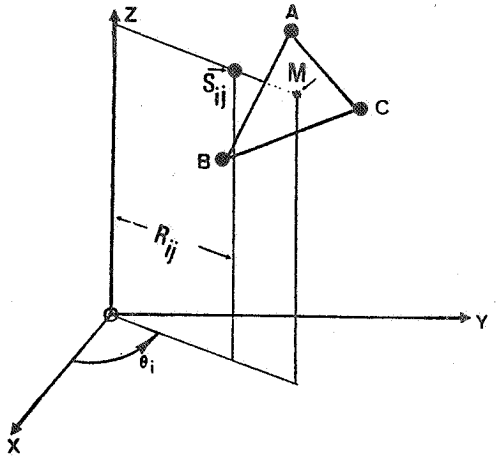
اکنون می‌خواهیم تناظر بین رئوس، اضلاع و سطوح یک PS وگراف G را در مجموعهٔ نقاط S_{ij} به طور واضحتر بیان کنیم.

- رئوس PS

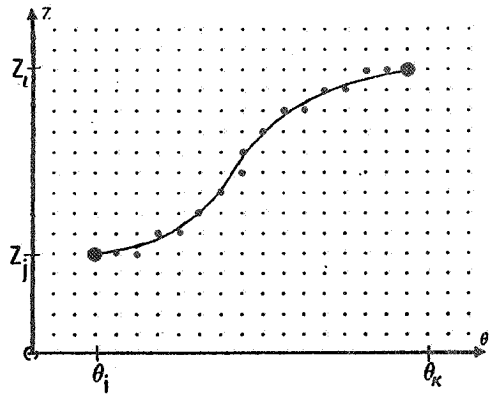
نقاطی از بین نقاط رقمی شده که در ضمن رئوس G را نیز تعریف می‌کنند.

- اضلاع PS

درحالت خاصی که ضلع L موازی یا عمود بر محور Z ها باشد، تصویر L در میدان (Z, θ) یک عبارت خطی از θ و Z است. در حالت عمومی، مختصات θ یک نقطه M بر روی خط L یک تابع آرکتانژانت از Z است. فرض کنیم PSE ضلعی از PS باشد که دو نقطهٔ رقمی شدهٔ $S_{ij} = (\theta_i, Z_j, R_{ij})$ و $S_{kl} = (\theta_k, Z_l, R_{kl})$ را به هم وصل می‌کند. PSE به صورت قطعهٔ منحنی آرکتانژانت در حوزهٔ تعریف (Z, θ) تعریف می‌شود که دو نقطهٔ تصویر (θ_i, Z_j) و (θ_k, Z_l) را به هم وصل می‌کند. برای روند شکستن مثلثها نیاز داریم که PSE را به مسیری از گراف G که دو راس PSE را به هم مرتبط می‌سازد، وابسته سازیم. این امر به شرطی امکانپذیر است که پیوستگی درجهٔ صفر تابع $s(\theta, Z)$ و خاصیت همبند بودن شبکه نمونه گیری شده را در نظر داشته باشیم. قطعهٔ منحنی سه بعدی روی رویه جسم را در نظر داشته باشیم که در ارتباط دو سویی با PSE به وسیلهٔ تصویر استوانه ای ست. فرض کنیم s(PSE) این قطعه خط منحنی باشد. این خط خطوط ژئودزیک[9] رسم شده روی رویهٔ جسم به وسیلهٔ شبکه را قطع می‌کند و یک زیر مجموعه از نقاط S_{ij} ۸- همسایه که در دو سوی s(PSE) قرار دارند تعریف می‌کند. بنابراین این‌امکان به وجود می‌آید که PSE را به یک مسیر از نقاط مرتبط S_{ij} که در همسایگی بلافاصلهٔ تصویر استوانه ای s(PSE) قرار دارند، وابسته ساخت. زیر مجموعه نقاط ۸- همسایه را بنابراین می‌توان در حوزهٔ تعریف (Z, θ) به سادگی تعریف کرد، چرا که PSE و s(PSE) دارای تصاویر همسانی در D(s) هستند:



شکل ۲ -تصویر استوانه‌ای یک نقطهٔ رقمی شده برروی نقطهٔ تقریب کنندهٔ آن

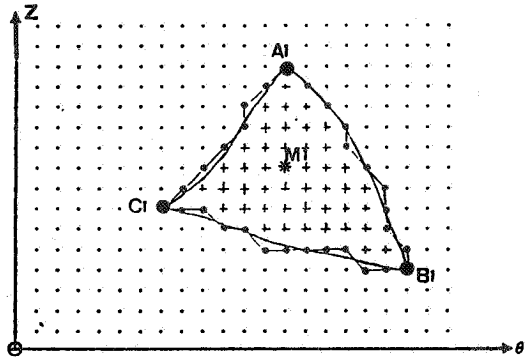


شکل ۳ - مسیر ۸- مرتبط منسوب به یک ضلع

قطعه ای از یک آرکتانژانت (شکل ۳). بدین ترتیب نقاط فوق را می‌توان مستقیماً با نمونه گیری از قطعه ای از آرکتانژانت با مقادیر گسستهٔ θ_i و Z_j در شبکهٔ منظم به وجود آورد.

- سطوح PS

در میدان (θ , Z)، سه PSE یک وجه مثلثی PS، به وسیلهٔ سه قطعه آرکتانژانت تعریف می‌شوند. به علت منحصر به فرد بودن تابع $P(\theta , Z)$، این سه قطعه منحنی همدیگر را به جز در سه رأس PS قطع نخواهند کرد. این سه قطعه منحنی یک ناحیهٔ داخلی را تعریف می‌کنند که تصویر سطح PS است، (شکل ۴). سه مسیر ۸- مرتبط وابسته به PSE یک مدار تشکیل می‌دهند که گراف G را به دو مؤلفهٔ همبند مجزا می‌کند. یکی از مؤلفه ها در درون ناحیهٔ داخلی قرار می‌گیرد که ما رئوس مربوطه را رئوس داخلی وجه PS می‌نامیم. مجموعهٔ رئوس داخلی ممکن است خالی باشد، که این در حالتی



شکل ۴ - نقاط داخلی منسوب به یک مثلث

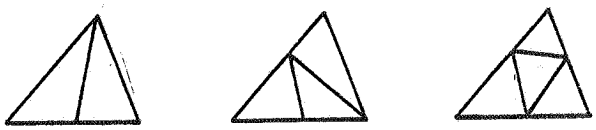
الف - زاویهٔ بخش ناپذیر ب - زاویهٔ بخش پذیر

شکل ۵

است که سه رأس مثلث نسبت به هم ۸- همسایه باشند. این چنین مثلثی بهترین تقریب مسطح موضعی برای رویهٔ جسم است و احتیاجی به شکسته شدن بیشتر ندارد. به این ترتیب افرازی از مجموعهٔ نقاط رقمی شدهٔ S_{ij} به صورت نقاط، مسیرهای ۸- مرتبط و مؤلفه های همبند داخلی که به ترتیب وابسته به رئوس، اضلاع و وجوه PS هستند، به دست می‌آوریم.

- تعریف زاویهٔ «بخش پذیر» و «بخش ناپذیر»

یک وجه مثلثی PS و تصویر آن را در D(S) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که A یکی از سه رأس PS آن باشد. دو PSE که از رأس A در D(s) شروع می‌شوند تشکیل یک زاویهٔ منحنی الخط می‌دهند که تصویر گوشهٔ متناظر مثلث است. در حین روند شکستن مثلث امکان پدید آمدن یک ضلع جدید بین A و PSE مقابل وجود دارد. تصویر این ضلع جدید در D(S) زاویه فوق را دو قسمت می‌کند. ما تنها زمانی اجازه به وجود آمدن چنین ضلع جدیدی را خواهیم داد که زاویهٔ A به اندازهٔ کافی «منفرجه» باشد: تنها زمانی که مسیر ۸- مرتبط جدید، رأس مشترکی در A با دو مسیر - همبند مربوط به دو ضلع مشترک در A، نداشته باشد. بنابراین «زاویهٔ بخش ناپذیر» را بدین صورت تعریف می‌کنیم که دو مسیر محدود کنندهٔ آن در



شکل ۶ - تقسیم یک مثلث به ۲، ۳ و یا ۴

همسایگی رأس مشترک، ۴- همسایه باشند، در غیر این‌صورت زاویه «بخش پذیر» است (شکل ۵).

۵- ساختار برنامه

- آماده سازی

برنامه با یک مرحلهٔ آماده سازی شروع می‌شود. از روی یک PS اولیه داده شده افرازی بر روی مجموعهٔ نقاط رقمی S_{ij} اعمال می‌شود. به هر PSE، یک مسیر ۸- مرتبط وابسته می‌شود. به هر وجه PS، یک مؤلفه همبند دارای رئوس داخلی و برای تک تک زوایای آن نیز یک شاخص بخش پذیری و بخش ناپذیری نسبت داده می‌شود. بعد وجوه PS در دو مجموعهٔ مجزا قرار می‌گیرند: مجموعهٔ وجوه «خوب» که یک معیار کیفی را ارضا می‌کنند (تمام نقاط منسوب دارای تراز خطایی پایینتر از مقدار داده شده ε هستند) و مجموعهٔ وجوه «بد» PS که به طور رضایتبخشی رویهٔ جسم را تقریب نمی‌کنند.

- مرحلهٔ تکرار

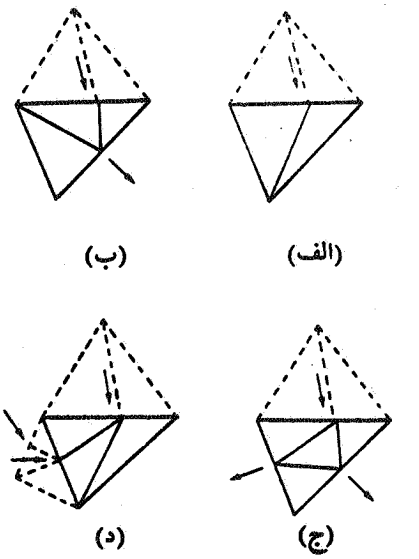
مجموعهٔ وجوه «بد» در یک صف قرار می‌گیرند. این وجوه به طور تکراری تقسیم می‌شوند تا زمانی که همهٔ آنها یک معیار کیفی را ارضا کنند. حلقهٔ اصلی را می‌توان به سه مرحله تقسیم کرد:

i - مثلث «بد» T را از سر صف بردار. آن را با شکستن یک یا چند تا از اضلاع تقسیم کن.

ii - همچنین مثلثهای مجاوری را که در یک ضلع شکسته شده با T سهیم هستند، تقسیم کن. روند تقسیم را تا زمانی که اضلاع تازه‌ای شکسته می‌شوند ادامه بده.

iii - توسط یک معیار کیفی تمام زیر مثلثهای تولید شده در داخل حلقهٔ تکرار را آزمایش کن.

مثلثهای دارای ترازخطای بیشتر از ε را در ته صف قرار بده و



شکل ۷ - اثر توسعه تقسیم یک مثلث

دیگر مثلثها را در مجموعهٔ وجوه «خوب» ذخیره کن.

تا زمانی که صف تهی نیست حلقهٔ اصلی تکرار می‌شود.

- استراتژی تقسیم مثلثها

یک مثلث ممکن است با دوقید زیر به ۲، ۳ و یا ۴ مثلث تقسیم شود (شکل ۶).

i - بخش پذیری زوایای آن

ii - سهیم بودن در اضلاع شکسته شده توسط مثلثهای قبلاً تقسیم شده (اثر توسعه). برای محدود کردن اثر توسعه، اولویت اساسی به شکستن مثلث به دو قسمت داده می‌شود چراکه تنها یک ضلع شکسته می‌شود.

- انتخاب یک ضلع برای شکسته شدن در یک مثلث

برای مثلث T برداشته شده از بالای پشته در آغاز حلقه، طولانی‌ترین PSE را پیدا می‌کنیم. اگر رأس مقابل بخش پذیر بود آن گاه ضلع مزبور شکسته و مثلث T به دو قسمت تقسیم می‌شود در غیر این صورت دو ضلع دیگر T بررسی می‌شوند. اگر هیچکدام از رئوس مثلث بخش پذیر نبودند، مثلث T با شکستن هر سه ضلع آن، به چهار زیر مثلث تقسیم می‌شود. برای یک مثلث مجاور با یک ضلع قبلاً شکسته شده، اگر زاویهٔ مقابل بخش پذیر باشد، مثلث فوق به دو قسمت تقسیم می‌شود و بنابراین عمل توسعه در این

جهت خاتمه می‌یابد (شکل ۷ - الف). اگر این زاویه بخش ناپذیر ولی یکی دیگر از زوایای آن بخش پذیر باشد مثلث به سه قسمت تقسیم می‌شود(شکل ۷ - ب). عمل تقسیم باید به ورای ضلع شکسته شدهٔ جدید توسعه یابد. اگر هیچ یک از زوایا بخش پذیر نبودند، باید مثلث را به چهار زیر مثلث تقسیم کنیم و عمل تقسیم را برای هر دو ضلع جدید شکسته شده توسعه دهیم (شکل ۷ - ج). در حین توسعهٔ تقسیم، ممکن است قید روی یک مثلث تغییر یافته و با ۲ (یا حتی ۳) ضلع شکسته شده محکمتر شود. تقسیم چنین مثلثی باید، درصورت نیاز با تقسیم نمودن آن به سه قسمت بهنگام درآید (شکل ۷ - د).

انتخاب یک رأس برای شکستن یک ضلع

نقطهٔ میانی مسیر وابسته به PSE کاندیدای خوبی برای شکستن ضلع است، چراکه در حالت تقسیم مثلث به ۲ زیر مثلث، ضلع جدید رابط بین آن نقطه و رأس مقابل PS، زاویهٔ مزبور را تقریباً به دو زاویهٔ مساوی تقسیم می‌کند. این استراتژی بخش پذیری، زوایای جدید را مساعدتر می‌سازد و خط مربوط به مشترک بودن رئوس در مسیرهای مجاور را کاهش می‌دهد.

۶- نتایج

برنامهٔ پیاده سازی شده این امکان را به دست می‌دهد تا با دقت داده شدهٔ ε یک تقریب چند وجهی از سطح رقمی شدهٔ جسم با کنترل دقیق موضعی از کیفیت آن به دست آوریم. این برنامه همچنین به ما این امکان را می‌دهد تا با تعداد مثلثهای خواسته شده، بهترین تقریب را نتیجه بگیریم. این عمل، به وسیلهٔ تکرار بدنهٔ اصلی برنامه با یک سری از تراز خطاهای نزولی ε_i انجام پذیر است. چند وجهی حاصل از یک مرحلهٔ تکرار با تراز خطای ε_i به عنوان یک چند وجهی اولیه برای تراز خطای کوچکتر ε_{i+1} به کار می‌رود. با انتخاب مناسب تفاضل $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ در هر مرحله، می‌توان بر روی افزایش تعداد مثلثها کنترل داشت و در نتیجه تعداد آنها را به مقدار خواسته شده نزدیک کرد. چنین نحوهٔ عمل برای شکستن مثلثها دارای سه مزیت عمدهٔ زیر است:

۱- اجتناب از مرتب سازی پرهزینهٔ مثلثها بر حسب تراز خطای ماکزیمم آنها در هر مرحلهٔ تکرار.

۲- به دست آوردن تقریبهای چند وجهی متوالی با یک کیفیت هموژن از سطح جسم در کلیهٔ نقاط.

۳- دوباره‌سازی سلسله مراتبی جسم با ترازهای کیفی صعودی. چراکه وجوه مثلثی در یک مرحلهٔ تکرار به مثلثهای کوچکتر برای مرحلهٔ بعد تبدیل می‌شوند.

این روش قابل تطبیق برای سطوح تعریف شده با ویژگیهای قید شده در قبل، در هر دستگاه مختصات سه بعدی است. برای نمونه، نتیجهٔ اجرای این برنامه بر روی دو سطح تعریف شده در دستگاه مختصات استوانه ای و دکارتی به ترتیب در اشکال (۸) و (۹) آورده شده‌اند. در هرکدام از این مثالها تعداد ۷۲۰۰=۶۰×۱۲۰ نقطهٔ توزیع شده روی سطح جسم در یک شبکهٔ منظم توپولوژیکی انتخاب شده‌اند. از روی این ۷۲۰۰ نقطه، ۱۴۱۶۰ مثلث مقدماتی (کوچکترین مثلثی که بر روی نقاط داده‌های انتخاب شده می‌توان تشکیل داد) می‌توان تولید کرد. سپس بر روی این نقاط انتخاب شده مراحل مختلف مثلث بندی اعمال شده است.

شکل (۸) اجرای مراحل مختلف برنامهٔ مثلث بندی را برای یک گلدان تعریف شده در یک دستگاه مختصات استوانه ای نشان می‌دهد. چند وجهی اولیه دارای ۳۲ وجه مثلثی است، (شکل ۸ - الف). در شکلهای (۸ - ب) الی (۸ - د) تقریبهای متوالی که به ترتیب دارای ۲۰۲، ۴۰۱ و ۲۰۰۲ مثلث هستند، به تصویر کشیده شده‌اند.

درشکل(۹)، مراحل مزبور بر روی سطح $z = \sin(y)$ تعریف شده در شبکهٔ [۲..۰ و ۲..۰] نشان داده شده‌اند. دراینجا نیز چند وجهی اولیه دارای ۳۲ مثلث است (شکل ۹-الف). شکلهای (۹-ب) الی (۹-د) تقریبهای متوالی را به ترتیب با ۲۰۱، ۴۱۰ و ۸۱۱ مثلث نشان می‌دهند.

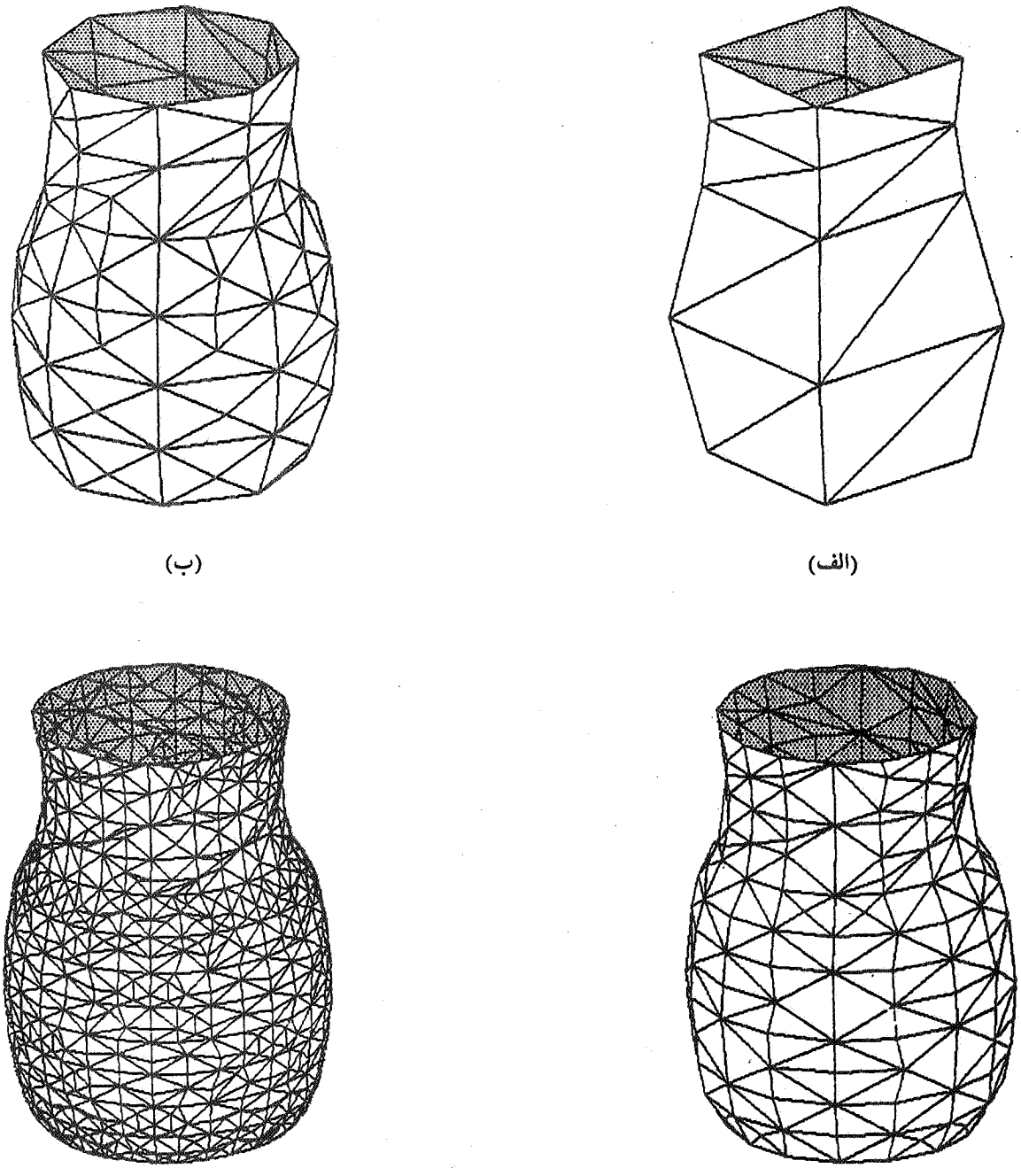
برنامه به زبان توربوپاسکال نوشته شده و در محیط یک میکرو کامپیوتر سازگار با IBM PC با ریز پردازندهٔ DX۲ ۴۸۶ با پالس ساعتی ۶۶ مگاهرتز اجراشده است. زمان محاسبات برای شکلهای(۸) درجدول(۱) آورده شده است. می‌توان نشان داد که پیچیدگی محاسباتی برنامه از مرتبهٔ O(nt) است که در آن n تعداد نقاط انتخاب شده (رقمی شده) روی سطح جسم و t تعداد مثلثهای به دست آمده است.

برای حذف سطوح مخفی، با توجه به ویژگیهای خاص اجسام مورد مطالعه در این پروژه، تلفیقی از الگوریتم نقاش[۱۰] [۱۲] استفاده شده است. نخست سطوح مثلثی شکل بر حسب فاصلهٔ ماکزیمم آنها از ناظر به صورت نزولی مرتب می‌شوند. سپس، این سطوح بر

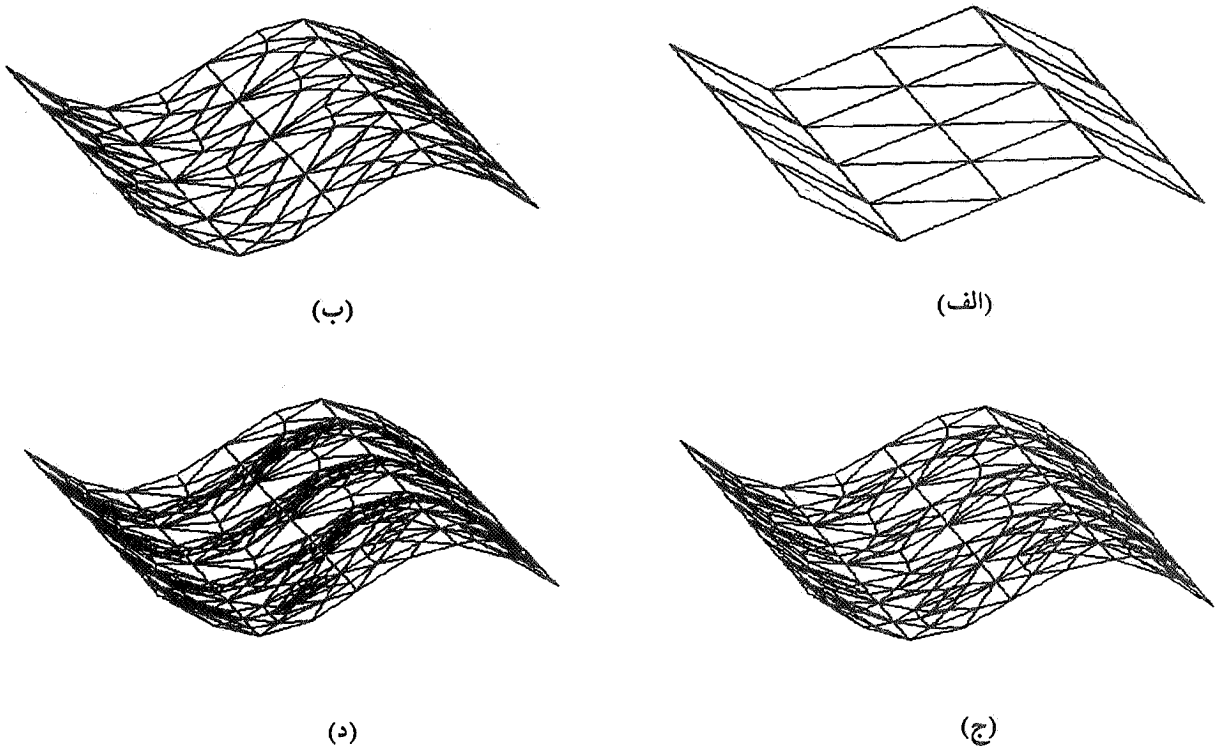
جدول ۱ - زمان اجرای برنامه

شکل (۸)	تعداد مثلثها	CPU برحسب ثانیه
ب - ۱	۲۰۲	۱۸
ج - ۱	۴۰۱	۱۸ + ۱۸ = ۳۶
د - ۱	۲۰۰۲	۴۷ + ۳۶ = ۸۳

حسب فاصله شان از ناظر، به ترتیب بر روی صفحهٔ دید ترسیم می‌شوند. پیچیدگی محاسباتی این قسمت برابر O(n log n) است.



شکل ۸ - نتیجه اجرای چند مرحله از برنامه بر روی یک سطح تعریف شده در سیستم مختصات استوانه ای



(الف) (ب)

(ج) (د)

شکل ۹ - نتیجهٔ اجرای چند مرحله از برنامه بر روی یک سطح تعریف شده در سیستم مختصات دکارتی

واژه نامه

1. acquisition
2. representation
3. patch
4. octree
5. generalized cylinder
6. constructive solid geometry
7. tomography
8. Delaunay triangulation
9. geodesic
10. painter's algorithm

مراجع

1. Chen, X., and Schmitt, F., "Surface Modelling of Range Data by Constrained Triangulation", *CAD*, Vol. 26, No. 8, pp. 632-645, Aug. 1994.
2. Schmitt, F., Maitre, H., Clainchard, A. and Lopez-Krahe, J., "Aquisition and Representation of Real Object Surface Data," *SPIE Proc.*, Vol. 602 *of Biosterometrics Conference*, Cannes, France, 2-6 Dec. 1985.
3. Watt, A., *3D Computer Graphics*, Addison-Wesley, 1993.
4. Boissonat, J. D., "Representing Objects by Triangulation Points in 3D Space, " *IEEE., 6th International Conference on Pattern Recognition*, Munich, Germany, pp. 19-22, Oct. 1982.
5. Hermlin, F., "Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension N, " RAIRO, *Analyse Numérique/Numerical Analysis*, Vol. 16, No. 3, 1982.
6. Pauchon, Eric., "Reconstruction de la surface à partir dés coupes," Thèse de Paris-Sud, Sept. 1983.
7. Gholizadeh, B., "Representation par triangulation de la surface d'objets 3D," Thèse de Paris-Sud, Dec. 1985.
8. Day, A., "The Implementation of an Algorithm to Find the Convex Hull of a Set of 3D Points, " *ACM*, Vol. 9, No. 1, Jan. 1990.
9. Preparata, F. P., and Shamos, M. I., *Computational*

Geometry, Springer Verlag, 1988.

10. Barry, J., "Construction of Three Dimensional Delaunay Triangulation Using Local Transformations," *CAGD*, Vol. 8, No. 2, pp. 123-142, May 1991.
11. Faugeras, O. D. and Herbert, M., "Polyhedral Approximation of 3D Objects without Hules," *CVGIP*, Vol. 25, pp. 169-183, 1984.
12. Hill Jr., F. S., *Computer Graphics*, McMillan Publishing Company, 1990.