

## نگرش تحلیلی نوین به معادله‌های پرواز

جعفر حیرانی نوبری\*، حمید مومنی\*\* و محمدعلی معصوم‌نیا\*\*\*

بخش برق دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۷۸/۱۲/۱۱ - دریافت نسخه نهایی: ۷۹/۵/۶)

چکیده - معادله‌های شش درجه پرواز در شکل مرسوم و کلاسیک خود به دلیل تداخلهای زیاد مفهوم فیزیکی ملموسی را القا نمی‌کنند. در ضمن نقش مهم زوایای حمله در این معادله‌ها ناپیداست. در این تحقیق سعی شده است آنچه از معادله‌های ساده شتاب جانبی  $a_N = v\omega_y$  و شتاب مماسی  $a_t = \dot{v}$  برداشت می‌شود، به معادله‌های کامل شتابها در فضا منتهی می‌شوند. برای این منظور مختصات چسبیده به بردار سرعت، به گونه‌ای که زوایای حمله نیز مطرح شوند، پیش کشیده شده است. دو زاویه حمله، پل ارتباطی دستگاه مختصات چسبیده به بدنه و دستگاه مختصات چسبیده به بردار سرعت شده‌اند؛ در واقع دو زاویه اولر ارتباط دهنده‌اند و زاویه سوم اولر به دلخواه قابل انتخاب مانده است که با انتخابهای متفاوت تعابیر متفاوتی استنتاج پذیر است. به این ترتیب معادله‌های شتابها به صورت ساده  $a_t = \dot{v}$ ،  $a_{Nz} = v\omega_{zy}$  و  $a_{Ny} = v\omega_{yy}$  در آمده‌اند.  $\omega_z$  و  $\omega_y$  نیز که مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای بردار سرعت‌اند برحسب سرعت زوایای حمله و سرعت زوایای pitch، yaw و roll بدنه داده شده‌اند. از طرف دیگر می‌دانیم که معادله‌های گشتاور برحسب زوایای pitch، yaw و roll بدنه به دست می‌آیند. به این ترتیب زوایای حمله نقش پل ارتباط معادله‌های شتاب (که در مختصات سرعتی نوشته شده‌اند) و معادله‌های گشتاور (که در مختصات بدنه نوشته شده‌اند) را بازی می‌کنند.

برای موشکهای متقارن که بدون roll هستند معادله‌ها ساده‌تر شده و تقریباً به صورت خطی درمی‌آیند. علاوه بر این اثر عناصر ناخواسته مانند roll در معادله‌های جدید به راحتی تجزیه و تحلیل پذیر شده‌اند. چگونگی رفتار دینامیکی بین گشتاور، چرخش بدنه و چرخش بردار سرعت به طور دقیق قابل مشاهده شده است. به این ترتیب نقش هر یک از ضرایب آیرودینامیکی در رفتار دینامیکی پرواز بدون هیچ صرف نظر کردن، معین می‌شوند و لذا این نگرش نه تنها برای طراحان اتوپیلوت بلکه برای طراحان بدنه و آیرودینامیک نیز می‌تواند نقش اساسی ایفا کند. ( $\omega_y$ ، سرعت زاویه‌ای بردار سرعت است).

## A New Analytical Approach to Flight Equations

J. Heirani Nobari, H. Momeni, and M. A. Masoumnia

Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Tarbiat Modarres University

Department of Electrical Engineering, Sharif University of Technology

**ABSTRACT-** *The six-degree equations of flight in their classic form do not provide a proper physical*

\*\*\*- دانشیار

\*\* - استادیار

\* - دانشجوی دکترا

preception due to a number of interferences. Nor do they render visible the important role of attack angles. In this study, attempts have been made to develop a complete set of 3D acceleration equations from the equations of normal and tangential acceleration  $\alpha_N = v\omega_v$ ,  $\alpha_t = \dot{v}$ . For this purpose, a coordinate set stuck to the velocity vector is introduced such that the angles of attack act as a bridge between the coordinate introduced and that of the body. Thus,  $\alpha_{Ny} = v\omega_z$  and  $\alpha_{Nz} = v\omega_y$ , are obtained, where  $\omega_{vz}$  and  $\omega_{vy}$  are the components of angular velocity vector given in terms of attack angles and  $p, q, r$  (the angular velocity of body in the body coordinate). It is also known that momentum equations are written in terms of  $p, q, r$ . Thus, the angles of attack play the role of a bridge between the force equations (now written in velocity coordinate) and the momentum equations (already written in the body coordinate).

For symmetric missiles without roll, these equations become simpler and nearly linear. The undesired and nonlinear effects also become easier to analyze. The dynamic behavior among the momentum, the rotation of the body and the rotation of the velocity vector become completely visible. Thus, the aerodynamic coefficients appear directly in the dynamic equations. It follows that this new approach should help not only the auto pilot designer but also the aerodynamic body designer.

فهرست علائم		
$\dot{a}$ مشتق زاویه $\alpha$ نسبت به زمان	محورهای $z$ و $y$	$P_{IV}$ مشتق نسبت به زمان بردار $v$ از دید دستگاه I
$\cos(a) C_a$	$M_{zd}, M_{yd}$ گشتاور میرایی حاصل از سرعت چرخش حول محورهای $z$ و $y$	$S_a$ $\sin(a)$ دستگاه
$F$ نیرو	$m^{\delta y}$ ضریب نهایی تغییرات $M_{yc}$ نسبت به $\delta$	$t_a$ $\tan(a)$ بردار $v$ بیان شده در دستگاه B
$L_a$ ضریب نهایی تغییرات $L$ نسبت به $a$	$m^{\delta y}$ ضریب نهایی تغییرات $M_{ys}$ نسبت به $a$	$\underline{v}^B$ بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه B نسبت به I
$M$ گشتاور	$m^{\delta y}$ ضریب نهایی تغییرات $M_{yd}$ نسبت به $q$	$\underline{\omega}_{IB}$ بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه B نسبت به I
$M_{zc}, M_{yc}$ گشتاور سطوح کنترلی حول محورهای $z$ و $y$		
$M_{zs}, M_{ys}$ گشتاور سطوح پایدارساز حول محورهای $z$ و $y$		

شده است.

### ۱- مقدمه

معادله‌های مرسوم شش درجه آزادی در بسیاری از بررسیهای پرواز موشکها اساس کار هستند. چون این معادله‌ها تماماً در مختصات بدنه نوشته می‌شوند [۱ و ۲]، دارای تداخلهای عمده بین متغیرهای حالت‌اند. از جانب دیگر زاویه حمله یا زوایای حمله که اثر جدی روی پرواز دارند، در معادله‌ها محسوس نیستند. در اینجا سعی شده است با طرحی نوین و نگاهی جدید به این معادله‌ها تا حدودی این مقوله محسوستر جلوه کند. اصل کار، نوشتن معادله‌های شتابهای خطی در یک دستگاه دیگر است که دستگاه سرعتی نامیده شده است. زوایای حمله پل ارتباطی دو دستگاه بدنه و دستگاه سرعتی خواهند بود. پس از معرفی اصول کار و معادله‌های مربوط به حالت کلی، یک موشک متقارن که از لحاظ آیرودینامیکی نیز پایدار است و از سطوح کنترلی در آن استفاده می‌شود به عنوان مثال بحث شده است. در پایان مزایای خاصی از این نگاه نوین ارائه

### ۲- بررسی معادله‌ها به شکل مرسوم

در شکل مرسوم، معادله‌های شتابهای خطی و همین‌طور معادله‌های شتابهای زوایای در دستگاه چسبیده به بدنه معروف به مختصات بدنه نوشته می‌شوند. فرض می‌شود سرعت زاویه‌ای این مختصات نسبت به مختصات اینرسی را داریم که مؤلفه‌های آن را در همان مختصات بدنه به نام  $p, q, r$  می‌شناسند. اگر تغییر جرم به صورت نیروی پیش رانش مدل شود، معادله‌های نیروهای خطی به صورت زیر در می‌آیند:

$$\sum \underline{F} = m P_{IV} = m (P_B \underline{v} + \omega_{BI} \times \underline{v})$$

$$\underline{v}^B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \omega_{BI}^B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow$$

بررسی می‌کنیم. در شکل (۱) چنین دستگاهی را نسبت به مختصات  $\alpha_B$  و  $\gamma_B$  می‌بینیم. در شکل زاویه حمله  $\alpha_1$  و زاویه حمله  $\beta_1$  به نمایش گذارده شده‌اند. لازم به ذکر است که در شکل دو جفت از زوایای حمله  $(\alpha_1, \beta_1)$  و  $(\alpha_2, \beta_2)$  داده شده‌اند که هر کدام می‌توانند استفاده شوند. در نظر داشته باشید که در بخش (۵) به این شکل مراجعه خواهیم کرد تا ارتباط بین مختصات سرعتی و مختصات بدنه را به دست آوریم. توجه شود که در اینجا زاویه سوم اوپلر [۳] را آزاد گذاریم.

### ۵- به دست دادن شتابهای خطی در دستگاه مختصات سرعتی به جای مختصات بدنه

سرعت زاویه‌ای این دستگاه را نسبت به اینرسی  $\omega_{VI}$  می‌نامیم.

حال برای معادله‌های نیروها داریم

$$\sum \underline{F} = m P_1 \underline{v} = m [P_v \underline{v} + \omega_{VI} \times \underline{v}] \quad (۴)$$

حال اگر توجه کنید داریم

$$[v]^v = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و فرض می‌کنیم

$$(\omega_{VI})^v = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

با توجه به مطالب بالا نهایتاً خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix}^v = m \left[ \begin{bmatrix} \dot{v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = m \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v\omega_3 \\ -v\omega_2 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

چنانچه دقت شود، معادله‌های به دست آمده در حقیقت تفکیک شتاب خطی به شتاب مماسی و شتاب جانبی است. در حقیقت  $m\dot{v}$  نیروی شتاب دهنده یا بازدارنده مماسی و  $m[v\omega_3 - v\omega_2]$  در حقیقت نیروی ایجادکننده و یا بازدارنده شتاب جانبی خواهد بود. یکی از نکات قابل توجه در معادله‌ها این است که  $\omega_1$  هیچ تأثیری روی نتایج مربوط به شتابها ندارد و این موضوع عجیب نیست چون سرعت زاویه‌ای بردار سرعت همواره بر این بردار عمود

$$\begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix}^B = m \left[ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right] \quad (۱)$$

$$= m \begin{bmatrix} \dot{u} + [qw - rv] \\ \dot{v} + [ru - pw] \\ \dot{w} + [pv - qu] \end{bmatrix}$$

چون فقط معادله‌های فوق‌الذکر را تغییر خواهیم داد، روش به دست آوردن معادله‌های مربوط به گشتاورها را تکرار نکرده (به [۱] و [۲] مراجعه کنید) و فقط نتایج نهایی را می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \sum M_x \\ \sum M_y \\ \sum M_z \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} \dot{p}I_x - \dot{r}J_{xz} + qr(I_z - I_y) - pqJ_{xz} \\ \dot{q}I_y + pr(I_x - I_z) + (p^2 - r^2)J_{xz} \\ \dot{r}I_z - \dot{p}J_{xz} + pq(I_y - I_x) + qrJ_{xz} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

### ۳- ساده‌سازی معادله‌ها براساس مقارن بودن موشک در دو محور

هر چند بحث مورد نظر در این مقاله مستقل از موشکهای مقارن نیز قابل بررسی است، با این حال چون در اینجا بررسیهای جلوتر مخصوص این نوع موشکها انجام شده است، اثر مقارن را روی معادله‌های گشتاور می‌نویسم. مقارن، باعث می‌شود ممان اینرسیها شرایط زیر را پیدا کنند [۱]

$$J_{xz} = 0 \quad I_z = I_y$$

و در نتیجه به دست می‌آید که

$$\begin{bmatrix} \sum M_x \\ \sum M_y \\ \sum M_z \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} I_x \dot{p} \\ I_y \dot{q} + (I_x - I_z) pr \\ I_z \dot{r} + (I_y - I_x) pq \end{bmatrix} \quad (۳)$$

### ۴- معرفی دستگاه مختصات سرعتی و زوایای حمله

در ادامه دستگاه مختصاتی را معرفی می‌کنیم که اساس کار خواهد بود. دستگاهی را در نظر بگیرید که محورهای آن همواره به بردار سرعت چسبیده باشد و طبیعتاً دو محور دیگر آن در صفحه‌ای عمود بر بردار سرعت خواهد بود. نام این دستگاه را دستگاه مختصات سرعتی می‌نامیم و آن را با زیرنویس  $v$  نمایش می‌دهیم. برای نمایش بهتر، این دستگاه را نسبت به دستگاه مختصات بدنه

حال به سادگی می توان  $[\omega_{vB}]^V$  در مختصات سرعتی را یافت

$$[\omega_{vB}]^V = [\omega_{vI}]^V - R_B^V [\omega_{BI}]^B = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} - R_B^V \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 - [pC_{\beta_1}C_{\alpha_1} + qS_{\beta_1}C_{\alpha_1} - rS_{\alpha_1}] \\ \omega_2 - [p[C_{\beta_1}S_{\alpha_1}S_{\gamma_1} - S_{\beta_1}C_{\gamma_1}] + q[S_{\beta_1}S_{\alpha_1}S_{\gamma_1} + C_{\beta_1}C_{\gamma_1}] + r[C_{\alpha_1}S_{\gamma_1}]] \\ \omega_3 - [p[C_{\beta_1}S_{\alpha_1}C_{\gamma_1} + S_{\beta_1}S_{\gamma_1}] + q[S_{\beta_1}S_{\alpha_1}C_{\gamma_1} - C_{\beta_1}S_{\gamma_1}] + r[C_{\alpha_1}C_{\gamma_1}]] \end{bmatrix} \quad (V)$$

چنانچه می دانیم  $\alpha_1$ ،  $\beta_1$  و  $\gamma_1$  زوایای معروف اوپلرند که دو دستگاه بدنه و دستگاه سرعتی را به هم مربوط می سازند که معمولاً اینها را در کتابهای مرجع به نمادهای  $\Theta$ ،  $\Phi$  و  $\Psi$  نشان می دهند [۱ و ۲]. از طرف دیگر  $[\omega_{vB}]^V$  در حقیقت سرعت زاویه ای دستگاه سرعتی (دوم) نسبت به دستگاه بدنه (اول) در دستگاه سرعتی (دوم) است، که مؤلفه های این را نیز در کتابهای مرجع با  $P$ ،  $Q$  و  $R$  نمایش می دهند [۱ و ۲]. رابطه بین این متغیرها در تمام کتابهای مرجع وجود دارد که داریم

$$\Theta = QC_{\Phi} - RS_{\Phi} \quad (۸)$$

$$\dot{\Phi} = P + QS_{\Phi}\dot{\Theta} + RC_{\Phi}\dot{\Theta} = P + \dot{\Psi}S_{\Theta}$$

$$\dot{\Psi} = Q \frac{S_{\Phi}}{C_{\Theta}} + R \frac{C_{\Phi}}{C_{\Theta}}$$

حال با جاگذاری  $\alpha_1$ ،  $\beta_1$  و  $\gamma_1$  به جای  $\Theta$ ،  $\Phi$  و  $\Psi$  و مؤلفه های  $[\omega_{vB}]^V$  که در معادله (۷) به دست آمده اند به جای  $P$ ،  $Q$  و  $R$  و ساده سازی مفصلی که لازم است، معادله های زیر به دست می آیند

$$\dot{\alpha}_1 = pS_{\beta_1} - qC_{\beta_1} + \omega_2C_{\gamma_1} - \omega_3S_{\gamma_1} \quad (۹)$$

$$\dot{\beta}_1 = -pC_{\beta_1}t_{\alpha_1} - qS_{\beta_1}t_{\alpha_1} - r + \omega_2S_{\gamma_1}/C_{\alpha_1} + \omega_3C_{\gamma_1}/C_{\alpha_1}$$

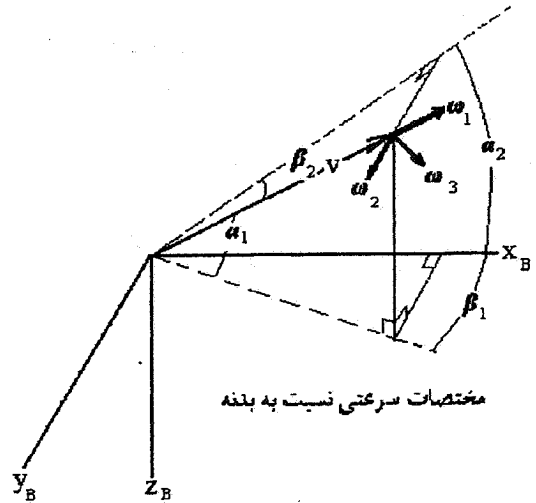
$$\dot{\gamma}_1 = -pC_{\beta_1}/C_{\alpha_1} - qS_{\beta_1}/C_{\alpha_1} + \omega_1 + \omega_2S_{\gamma_1}t_{\alpha_1} + \omega_3C_{\gamma_1}t_{\alpha_1}$$

حال چنانچه دقت شود:

الف - طرف چپ معادله های نیرو (معادله ۶) در تشخیص جهت های خود نیاز به  $\alpha_1$ ،  $\beta_1$  و  $\gamma_1$  دارند که از این معادله ها به دست می آیند.

ب - طرف چپ معادله های گشتاور (معادله ۳) نیز نیاز به  $\alpha_1$  و  $\beta_1$  به عنوان زوایای حمله دارند که از این معادله ها به دست می آیند.

ج - این معادله ها خود نیاز به  $p$ ،  $q$  و  $r$  دارند که از معادله های گشتاور



شکل ۱- مختصات سرعتی نسبت به بدنه

است و همان سرعت زاویه ای است که در شتابهای جانبی موثر است و در نتیجه تنها مؤلفه های مؤثر از سرعت زاویه ای، مؤلفه های عمود بر بردار سرعت خواهند بود.

این سادگی زیبا در معادله ها با توجه به این نکته که جهت های دقیق متغیرهای حالت  $\omega_2$  و  $\omega_3$  معین نیستند، تیره می شود. اما جای نگرانی نیست، در ادامه با بررسی اوضاع نسبی دو دستگاه بدنه و سرعتی خواهید دید که این موضوع به زیباییهای این نگرش خواهد افزود.

### ۶- به دست آوردن ارتباط بین معادله های شتابهای خطی و شتابهای زاویه ای از طریق زوایای حمله

حال معادله های شتابهای خطی در مختصات سرعتی و معادله های شتابهای زاویه ای در مختصات بدنه اند. آنچه هم اکنون مهم است به دست دادن ارتباط بین دو دستگاه است.

فرض می کنیم که مختصات سرعتی را به اندازه  $\beta_1$  حول محور  $Z_B$  دوران دهیم و سپس به اندازه  $\alpha_1$  حول محور  $Y_B$  دوران دهیم آن گاه محورهای  $X_B$  و  $X_{\beta}$  یکی شده اند و حال برای تطابق کامل دو دستگاه کافی است به اندازه  $\gamma_1$  (زاویه سوم اوپلر) نیز حول محور  $X$  دوران دهیم. با این اوصاف ماتریس دوران تبدیل دو دستگاه خواهد بود [۳]

$$R_B^V = \begin{bmatrix} C_{\beta_1}C_{\alpha_1} & S_{\beta_1}C_{\alpha_1} & -S_{\alpha_1} \\ C_{\beta_1}S_{\alpha_1}S_{\gamma_1} - S_{\beta_1}C_{\gamma_1} & S_{\beta_1}S_{\alpha_1}S_{\gamma_1} + C_{\beta_1}C_{\gamma_1} & C_{\alpha_1}S_{\gamma_1} \\ C_{\beta_1}S_{\alpha_1}C_{\gamma_1} + S_{\beta_1}S_{\gamma_1} & S_{\beta_1}S_{\alpha_1}C_{\gamma_1} - C_{\beta_1}S_{\gamma_1} & C_{\alpha_1}C_{\gamma_1} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

به دست می‌آیند.

می‌کردیم  $\gamma$  ی مورد نظر نیز متفاوت شده و در معادله‌ها درست اتفاق معکوس می‌افتاد. در ادامه این موضوع به شکل ملموستری بررسی شده است.

در واقع با روشی که ما دستگاه مختصات سرعتی را ساختیم محور  $Y$  آن همواره موازی صفحه  $OXB$   $Y_B$  باقی می‌ماند، لذا اثر مستقیم  $r$  روی  $\alpha_1$  صفر خواهد شد. معادله‌ها در حالت معکوس یعنی برای زوایای  $\beta_2, \alpha_2$  و  $\gamma_2$  به صورت مشابه به دست آمده و اگر شرط  $\dot{\gamma}_2=0$  را دوباره اعمال کنیم روابط مشابهی برای  $\beta_2$  و  $\alpha_2$  به دست می‌آیند، اما این بار  $\beta_2$  اثری از  $q$  نخواهد یافت و برعکس این بار در  $\alpha_2$  اثر  $r$  به صورت جزئی ظاهر خواهد شد چرا که  $z$  آن همواره موازی صفحه  $OXB$   $Z_B$  باقی می‌ماند. اگر شما  $\beta_2$  و  $\alpha_1$  را به عنوان زوایای حمله خود انتخاب کنید، محور  $\omega_2$  و  $\omega_3$  به ترتیب موازی صفحات بدنه خواهند بود اما  $\omega_2$  و  $\omega_3$  مربوط دیگر بر هم عمود نخواهند بود چون هر یک با یکی از صفحات جانبی بدنه موازی باقی مانده‌اند. این بدین معنی خواهد بود که می‌توان این معادله‌ها را حتی برای  $\omega_2$  و  $\omega_3$  نامتعامل نوشت اما باید توجه داشت که گشتاورهای به دست آمده مؤلفه‌هایی روی یکدیگر خواهند داشت. این موضوع فقط در اینجا مقدمه سازی شده است. بحث بیشتر را به تحقیقات و مقاله‌های دیگر وامی‌گذاریم. در صورت نیاز، معادله ساده زیر بین این زوایای حمله بسیار مفید خواهد بود

$$t_{\alpha_1} = [C_{\beta_1}] t_{\alpha_2} \quad (11)$$

$t_{\beta_2} = [C_{\alpha_2}] t_{\beta_1}$   
در ادامه معادله‌ها را برای دستگاه متعامد با  $\alpha_1$  و  $\beta_1$  می‌دهیم و نه با  $\alpha_2$  و  $\beta_2$  و نهایتاً دوباره شتابهای زاویه‌ای و خطی را با هم می‌نویسیم تا معادله‌های این دیدگاه جدید یک جا قابل دیدن باشند

$$m\dot{v} = [\sum F_x]^v = \text{Drag} + \text{Thrust} (C_{\alpha_1} C_{\beta_1})$$

$$(m\dot{v})\omega_3 = [\sum F_y]^v = \text{Lift} + \text{Thrust} (-S_{\beta_1})$$

$$-(m\dot{v})\omega_2 = [\sum F_z]^v = \text{Lift} + \text{Thrust} (C_{\beta_1} S_{\alpha_1})$$

$$\dot{\alpha}_1 = \omega_2 - [C_{\beta_1}] q + [S_{\beta_1}] p$$

$$\dot{\beta}_1 = [1/C_{\alpha_1}] \omega_3 - r + [-C_{\beta_1} t_{\alpha_1}] p + [-S_{\beta_1} t_{\alpha_1}] q$$

د - این معادله‌ها دوباره نیاز به  $\omega_1, \omega_2$  و  $\omega_3$  دارند که فقط  $\omega_2$  و  $\omega_3$  از معادله‌های نیرو به دست می‌آیند و  $\omega_1$  آزاد است و قیدی ندارد.

در نتیجه این معادله‌ها دارای یک درجه آزادی در  $\omega_1$  هستند و با انتخابهای متفاوت و دلخواه آن می‌توان معادله‌های بالا را به صورت‌های مختلف ساده کرد. در ادامه به ساده‌سازی که در اینجا بیشتر مورد نظر بوده است، می‌پردازیم و بحثهای خود را روی آن تعمیم می‌دهیم.

### ۷- حذف $\gamma_1$

می‌توان  $\gamma_1$  را هر مقداری فرض کرده و معادله‌ها را از  $\gamma_1$  مستقل کرد که البته این عمل  $\omega_1$  را به شکل خاص تحمیل خواهد کرد. به عبارت ساده‌تر چون  $\omega_1$  اختیاری است می‌توان مثلاً، آن را طوری انتخاب کرد که  $\gamma_1$  مقدار ثابتی باشد و این یعنی  $\dot{\gamma}_1=0$  حال با فرض  $\gamma_1=0$  معادله‌ها را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega_2 - [C_{\beta_1}] q + [S_{\beta_1}] p \\ \dot{\beta} &= [1/C_{\alpha_1}] \omega_3 - r - [S_{\beta_1} t_{\alpha_1}] q - [C_{\beta_1} t_{\alpha_1}] p \\ \omega_1 &= p \left[ \frac{C_{\beta_1}}{C_{\alpha_1}} \right] + q \left[ \frac{S_{\beta_1}}{C_{\alpha_1}} \right] - \omega_3 [t_a] \end{aligned} \quad (10)$$

معادله  $\omega_1$  نقشی ایفا نخواهد کرد و به آن نیازی نداریم بلکه فقط برای آنکه معلوم باشد چه اتفاقی افتاده است، ارائه شده است.

برای محاسبه مسیر حرکت نیز دو راه وجود دارد یا از  $p, q$  و  $r$  و مقدار  $\alpha_1$  و  $\beta_1$  استفاده کرد و یا با در دست داشتن  $\omega_1, \omega_2$  و  $\omega_3$  و مسیر را محاسبه کنیم که در صورت اخیر نیاز به معادله  $\omega_1$  در بالا خواهید داشت.

نکات مهمی در این معادله‌ها وجود دارد که عبارت‌اند از:

۱- نقش  $p$  (چرخش موشک) در زوایای حمله ظاهر شده و دیگر در معادله‌های شتاب نیامده است.

۲- معادله مربوط به  $\alpha$  هیچ اثری از  $\omega_3$  و  $r$  ندارد و این مطلوب است در حالی که  $\beta_1$  از  $q$  متأثر است (هر چند اندک). این تفاوت به دلیل این است که دستگاه سرعتی را ما ابتدا حول  $\alpha_B$  به اندازه  $\beta_1$  دوران دادیم و سپس حول  $\gamma_B$  به اندازه  $\alpha_1$  اگر بر عکس عمل

$$\dot{\alpha}_1 = \omega_2 - q$$

$$(mv)\omega_2 = T [-C_{\beta_1} S_{\alpha_1}] - L (\alpha_1, \beta_1)$$

$$[I_y] \dot{q} = M_{zc} + M_{zs} + M_{zd}$$

$$\dot{\beta} = \omega_3 - r$$

$$(mv)\omega_3 = T [-S_{\beta_1} S_{\alpha_1}] - L (\alpha_1, \beta_1)$$

$$[I_z] \dot{r} = M_{zc} + M_{zs} + M_{zd} \quad (13)$$

دوباره توجه کنید که  $(C_{\beta_1})$  ضریب است که مطابق آنچه در بالا گفته شد، می‌تواند صرف نظر شود و همین طور به جای  $\sin \alpha$  می‌توان  $\alpha$  را در نظر گرفت.

معمولاً lift در راستای  $y_v$  را متأثر از  $\beta$  در نظر می‌گیرند. همین طور lift در راستای  $z_v$  را متأثر از  $\alpha$  در نظر می‌گیرند. چنانچه lift در راستای  $y_v$  به  $\alpha_1$  و در نتیجه در راستای  $z_v$  به  $\beta_1$  نیز بستگی داشته باشد تداخل خواهیم داشت ولی عموماً چنین فرضی نشده و لذا به دو دسته معادله‌ها در دو راستای شتاب جانبی می‌رسیم که هر یک به طور مجزا قابل بررسی و کاملاً مشابه یکدیگرند. در ادامه فقط یکی از آن دو را بررسی می‌کنیم.

$$(mv)\omega_2 = -T\alpha_1 - L\alpha_1 \cdot \alpha_1$$

$$\dot{\alpha}_1 = \omega_2 - q$$

$$(I_y) \dot{q} = m\dot{\delta} - m\ddot{\gamma} \alpha_1 = m\ddot{\gamma} q \quad (14)$$

ابتدا که زاویه حمله‌ای نیست،  $\omega_2$  به وجود نمی‌آید و لذا شتاب جانبی نداریم و لابد  $\omega_2 = q = 0$ . حال اگر سطوح کنترل فعال شوند آن گاه  $\delta$  ابتدا  $q$  به وجود می‌آورد و سپس بلافاصله  $\alpha$  تولید می‌شود.  $\alpha$  تولید شده  $\omega_2$  و شتاب جانبی به وجود می‌آورد و در ضمن  $\alpha$  تولید شده حالت برگرداننده فتری را برای  $q$  ایجاد شده خواهد داشت. در ادامه  $\omega_2$  به وجود آمده باعث کاهش  $\alpha$  خواهد شد.

تغییرات ضرایب  $L$  و  $mv$  و  $I_y$  و  $m\dot{\delta}$  و  $m\ddot{\gamma}$  را می‌توان به صورت ضرایب متغیر با زمان در نظر گرفت و سیستم خطی دارای توابع تبدیل زیر خواهد بود که  $\delta$  زاویه انحراف سطوح کنترلی است

$$I_x \dot{p} = \sum M_x$$

$$I_y \dot{q} = \sum M_y + [I_z - I_x] pr$$

$$I_z \dot{r} = \sum M_z + [I_x - I_y] pq \quad (12)$$

توجه کنید که هیچ ساده‌سازی صورت نپذیرفته و این معادله‌ها کاملاً صحیح‌اند و می‌دانیم که با داشتن اندازه  $v$  و  $\omega$  مسیر حرکت در اختیار است.

توجه کنید که نیروها و ممانها همگی توابعی از زوایای حمله‌اند که هم اکنون نقش مؤثر آنها در معادله‌ها مشخص است. زیبایی معادله‌ها در این است که هم اکنون، زوایای حمله به عنوان پل ارتباطی مختصات بدنه و سرعتی نشسته‌اند و چون نیروها در مختصات سرعتی و ممانها در مختصات بدنه نوشته شده‌اند در حقیقت از لحاظ ریاضی نیز پل ارتباطی معادله‌های ممانها و نیروها، زوایای حمله‌اند.

به خصوص موقعی مهم است که توجه کنیم زوایای حمله عموماً بسیار کوچک‌اند و معادله‌های ارتباط دهنده سرعت زوایای بدنه و سرعت زاویه‌ای بردار سرعت، بسیار ساده‌تر خواهند شد. خواهیم دید که وقتی اثر  $P$  کم فرض شود معادله‌ها تقریباً خطی ظاهر خواهند شد.

## ۸- معادله‌ها برای موشکهای با سرعت چرخش صفر و زاویه چرخش صفر با سطوح کنترل [۴]

حال اگر سیستم کنترلی در موشک سعی کند  $p$  و  $\int p dt$  را صفر نگه دارد آن گاه عبارتهای  $p[S_{\beta_1}]$  و  $p[C_{\beta_1} \alpha_1]$  می‌توانند به صورت اختلالاتی ناخواسته با دامنه کم فرض شوند. عبارتهای  $pr$  و  $pq$  نیز از این امر مستثنا نبوده و معادله‌ها بسیار ساده‌تر خواهند شد.

در ضمن اگر توجه شود که عموماً زوایای حمله بسیار کوچک‌اند، در نتیجه عبارتهای  $C_{\beta_1}$  که ضریب ظاهراً متغیری برای  $q$  در  $\dot{\alpha}_1$  و  $\sec \alpha_1$  که ضریبی ظاهراً متغیر برای  $\omega_3$  در  $\dot{\beta}_1$  هستند می‌توانند ثابت فرض شده و تقریباً واحد فرض شوند (توجه کنید:  $C_{20^\circ} = 0.94$  و  $C_{10^\circ} = 0.9854$ ). به این ترتیب معادله‌های  $\dot{\alpha}_1$  و  $\dot{\beta}_1$  به صورت زیر ساده می‌شوند

بیشترین تفاوت مقدار  $b$  است. اثبات ریاضی این موضوع را صرف نظر می‌کنیم و در ادامه فرض می‌کنیم  $b$  مقدار ثابت داشته و متغیر با زمان نیست.

در تحلیل بخش قبل فرض کردیم  $b=1$  حال فرض کنید به صورت اغراق آمیز  $b=C_{20}=0.94$  یعنی در تخمین  $b$  مثلاً ۶ درصد خطا داشته‌ایم و می‌خواهیم ببینیم این خطا چه مقدار خطا در کل محاسبه پارامترهای حرکت و مسیر موشک خواهد داشت.

$$q' \triangleq bq \rightarrow \dot{q}' = b\dot{q} \rightarrow \begin{cases} I_{yy} \frac{1}{b} \dot{q}' = m\delta\delta - m\alpha\alpha_1 - (m^q/b) q' \\ \dot{\alpha}_1 = \omega_2 - q' \end{cases}$$

$$\Rightarrow a'_4 = ba_4 \quad a'_3 = ba_3 \quad a'_2 = a_2 \quad a'_1 = a_1$$

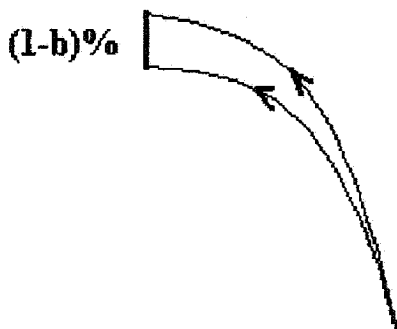
$$\Rightarrow \omega_2(s) = \frac{ba_1a_4}{s^2 + [a_1+a_2]s + [a_1a_2 - ba_3]} \delta(s)$$

$$q(s) = \frac{a_4 [s+a_4]}{s^2 + [a_1+a_2]s + [a_1a_2 - ba_3]} \delta(s)$$

$$\frac{\omega_2}{q}(s) = \frac{ba_1}{s+a_1} \quad (16)$$

چنانچه ملاحظه می‌شود  $\omega_2$  و  $\alpha_1$  نیز نسبت به حالت حقیقی حداکثر به همان میزان ۶ درصد خطایی که در  $b$  فرض شده دارای خطا در محاسبه خواهند بود.

حال برای یافتن خطای کل در محاسبه مسیر موشک برای سادگی فرض می‌کنیم به یک  $\omega$  ثابت رسیده‌ایم. در یک صفحه مسیر خواهیم داشت



شکل ۲ - خطای محاسبه مسیر

$$\omega_2(s) = \frac{a_1a_4}{s^2 + [a_1+a_2]s + [a_1a_2 - a_3]} \delta(s)$$

$$-\alpha(s) = \frac{a_4}{s^2 + [a_1+a_2]s + [a_1a_2 - a_3]} \delta(s)$$

$$q(s) = \frac{a_4(s+a_1)}{s^2 + [a_1+a_2]s + [a_1a_2 - a_3]} \delta(s)$$

$$\frac{\omega_2(s)}{q(s)} = \frac{a_1}{s+a_1}$$

$$a_1 \triangleq \frac{T+L\alpha_1}{mv} \quad a_2 \triangleq \frac{m\dot{y}}{I_y}$$

$$a_3 \triangleq \frac{m\ddot{y}}{I_y} \quad a_4 \triangleq \frac{m\dot{\delta}}{I_y} \quad (15)$$

یعنی با یک ورودی  $\delta$  به یک  $\alpha$  ثابت می‌رسیم و  $\alpha$  بالاخره صفر شده و  $\omega_2$  با یک ثابت زمانی،  $q$  را دنبال می‌کند و پس از حالت گذرا  $\omega_2$  و  $q$  یکی خواهند شد و یعنی بردار سرعت به دنبال بدنه می‌رود و بدنه که می‌پیچد بردار سرعت هم به دنبال آن می‌پیچد.

## ۹- بررسی اثر ضریب غیرخطی کننده $C_{\beta 1}$

### ۹-۱- خطای حلقه باز معادله‌ها

یکی از امکاناتی که این معادله‌های جدید ایجاد می‌کنند بررسی عوامل غیرخطی و سادگی مقایسه آن با حالت خطی است. در اینجا عوامل غیرخطی به صورت ضرایبی مانند  $C_{\beta 1}$  در  $q$  و یا  $[1/C_{\alpha 1}]$  در  $\omega_3$  ظاهر شده‌اند که در ادامه خطای ایجاد شده در محاسبات را توسط این ضرایب مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با توجه به اینکه  $\beta_1$  در حال تغییر است ضریب  $b \triangleq C_{\beta 1}$  نیز تغییراتی خواهد داشت. با نگاهی به اصول معادله‌های دیفرانسیل و انتگرال می‌توان نشان داد که در معادله‌های مربوطه، تغییرات لحظه‌ای  $b$  به صورت انتگرال مؤثر است و به عبارت بهتر خطای حاصل از تغییرات لحظه‌ای  $b$  کمتر از خطای حاصل از متوسط  $b$  است که به طریق اولی خطای حاصل از تغییرات  $b$  قطعاً کوچکتر از خطای مطلق حاصل از

معادله‌ها یعنی نیروها نشان دهند که این بحث در معادله‌های کلاسیک نیز موجود است. تداخل زاویه چرخش موشک در رفتار دو مؤلفه جانبی شتاب به طور دقیق داده شده است. بسته به شرایط کنترل موشک این تداخل می‌تواند به صورت یک ورودی ناخواسته در هر مؤلفه دیده شود و یا اینکه به صورت یک ورودی، اثر آن روی هر دو مؤلفه به طور جداگانه قابل بررسی شده است. چنانچه در حالت عدم چرخش دو مؤلفه جانبی به طور کامل از هم جدا شده و هر یک به تنهایی قابل بررسی شده‌اند.

در اینجا دیگر لازم نیست معادله‌ها فقط حول یک نقطه کار خطی سازی شوند بلکه معادله‌ها خود به صورت تقریباً خطی در آمده‌اند و کافی است فقط سرعت موشک را به صورت یک ضریب متغیر با زمان (در صورت نیاز) در نظر گرفت. در حالی که این معادله‌ها به طور دقیق مسیر حرکت را می‌دهند در عین حال آنچه از لحاظ دینامیکی صورت می‌پذیرد از طریق زوایای حمله است و معادله‌هایشان کاملاً ملموس شده‌اند.

از بین رفتن تداخل این الهام را می‌بخشد که می‌توان دو سیستم کنترل کاملاً مشابه را که هیچ ارتباطی هم با یکدیگر ندارند در طراحیها استفاده کرد. حال اگر توجه کنیم که مسیر عبارت است از اندازه سرعت و سرعت زاویه آن که همواره بر آن عمود است. پس کنترل عبارت می‌شود از کنترل روی اندازه سرعت (اگر امکانپذیر است) و کنترل روی سرعت زاویه‌ای بردار سرعت. حال اگر متقاعد شده باشیم که کنترل دو مؤلفه سرعت زاویه‌ای نیز از یکدیگر مستقل‌اند، آن گاه بررسی حرکت موشک در فضا می‌تواند به راحتی تبدیل شود به حرکت آن روی صفحه و تمام تحلیل‌های مربوط در صفحه عیناً در فضا نیز صادق خواهند ماند. به عبارت ساده‌تر کنترل و هدایت و مسائل مربوط به آنها در فضا دقیقاً مشابه صفحه خواهد بود ولی گویا این صفحه در حال حرکت است.

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

$$\begin{cases} v_x = vC_\theta = vC_{(\omega t + \theta_0)} \\ v_y = vS_\theta = vS_{(\omega t + \theta_0)} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} x = \frac{v}{\omega} S_{(\omega t + \theta_0)} \\ y = \frac{-v}{\omega} C_{(\omega t + \theta_0)} \end{cases} \quad (18)$$

$$x'_{\max} = \frac{v}{b\omega} \rightarrow \frac{x_{\max}}{x'_{\max}} = b \quad (18)$$

و خطای در مسیر نیز حداکثر به همان میزان خطا در  $C\beta_1$  خواهد بود و نه بیشتر. به عنوان مثال برای زوایای حمله کوچکتر از  $20^\circ$  خطای محاسبه قطعاً کوچکتر از ۶ درصد و برای زوایای حمله کوچکتر از  $10^\circ$  خطا کمتر از  $1/5$  درصد و برای زوایای حمله کوچکتر از  $5^\circ$  خطا قطعاً کمتر از  $0/4$  درصد است.

#### ۹-۲- خطای حلقه بسته معادله‌ها

باید در نظر داشت که خطای به دست آمده در بالا در حالی است که معادله‌های حرکت موشک تحت هیچ اتوپایلوتی نیست و به صورت حلقه باز در نظر گرفته شده است. چنانچه خطای محاسبه هنگام وجود یک اتوپایلوت بررسی شود نتایج بسیار جالبتر خواهد شد به طوری که برای اتوپایلوت یک موشک خاص که این محاسبه انجام شده است خطای ۶ درصد در حلقه باز به خطای  $1/5$  درصد در حلقه بسته رسیده است. این به دلیل وجود فیدبک در اتوپایلوت است که موجب تقلیل خطا در محاسبه خواهد شد. حال چنانچه علاوه بر حلقه بسته اتوپایلوت حلقه بسته هدایت نیز در نظر گرفته شود خطای حاصل از محاسبه باز هم بسیار کاهش خواهد یافت.

#### ۱۰- نتیجه گیری

پر واضح است که معادله‌های شتابهای خطی فوق‌العاده ساده‌تر شده و تداخل بین مؤلفه‌های مختلف آن تقریباً از بین رفته است. تداخل ذاتی می‌توانند در صورت وجود خود را در طرف دیگر این



## مراجع

1. Blakelock, J. H., *Automatic Control of Air craft and Missiles*, John Wielely, 1991.
  2. Mclean, D., *Automatic Flight Control Systems*, Prentic Hall, 1995.
  3. Craig, J. J., *Introduction to ROBOTICS*, Addison Wesley, 1989, 1986.
- ۴- مدارک مربوط به یک موشک.