

## تابع انتقال شتاب مطلق سیستمهای ثانویه تحت اثر مؤلفه‌های چندگانه زلزله

محسن غفوری آشتیانی\* و علیرضا فیوض\*\*

پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله  
بخش مهندسی عمران-سازه، دانشگاه تربیت مدرس

(دریافت مقاله: ۷۹/۱۰/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۸۱/۱/۲۶)

چکیده - اهمیت عملکرد و رفتار مناسب سیستمهای ثانویه یا تجهیزاتی متصل به سازه اصلی در هنگام زلزله زمینه تحقیقاتی گسترده‌ای را فراهم کرده است. در کلیه این تحقیقات زلزله به صورت تک مؤلفه‌ای و در اکثر آنها، سیستم اولیه به صورت برشی در نظر گرفته شده و بیشترین تحقیقات روی پاسخ سیستم ثانویه و طیف طبقه متمرکز بوده است. در این مقاله تابع انتقال شتاب مطلق سیستمهای ثانویه مورد توجه قرار گرفته است.

تابع انتقال رابطه بین توابع چگالی طیفی ورودی و خروجی یک سیستم دینامیکی است، بنابراین برای بررسی خصوصیات دینامیکی سیستم بسیار مناسب است. علاوه بر تابع انتقال، توابع خودهمبستگی و چگالی طیفی شتاب مطلق سیستمهای ثانویه نیز به دست آمده است. زلزله به صورت چند مؤلفه‌ای در نظر گرفته شده و روابط لازم برای محاسبه این توابع و همچنین زاویه بحرانی در دو حالت، بدون در نظر گرفتن اندرکنش و با در نظر گرفتن اندرکنش بین دو سیستم اولیه و ثانویه، ارائه شده است. در حالت بدون اندرکنش میرایی سیستم به صورت متناسب و در حالت با اندرکنش میرایی سیستم مرکب به صورت نامتناسب در نظر گرفته شده است. برای بررسی خصوصیات سیستم، یک قاب ۱۰ طبقه پیچشی در نظر گرفته شده و پارامترهای مختلفی نظیر خروج از محوری، همبستگی بین مؤلفه‌های زلزله، هم فرکانسی، اندرکنش و نامتناسب بودن میرایی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که در نظر نگرفتن چند مؤلفه‌ای بودن زلزله می‌تواند خطاهای بزرگی، به خصوص در خروج از محوری‌های زیاد به وجود آورد.

واژگان کلیدی: تابع انتقال، ارتعاشات پیشا، سیستمهای ثانویه، زاویه بحرانی، اندرکنش، میرایی نامتناسب

## Absolute Acceleration Transfer Function of Secondary Systems Subjected to Multi-Component Earthquakes

M. Ghafoori-Ashtiani and A. Foyooz

**Abstract:** *The importance of the equipment and secondary systems in seismic design and performance evaluation is well recognized and has been the subject of many studies. In all of these studies, earthquake is considered as a single component, and in most of them the primary system is considered as shear building. Most attention has been concentrated on the response of secondary system and its response spectrum. In this paper, the transfer function for absolute acceleration of the secondary system is obtained.*

\*\* - دانشجوی دکترا

\* - استاد

*The squared modulus of transfer function relates the power spectral density function of the input (excitation) to the output (response), which is useful in the study of the various dynamic parameters of the system. In addition to the transfer function, the autocorrelation and power spectral density functions of absolute acceleration of the secondary system are obtained. Earthquake is considered as a multi-component system and the necessary formulation is developed for the calculation of these functions as well as the critical angle with and without interaction between the two systems. The damping of the system is considered as proportional in the decoupled analysis, and nonproportional in the coupled analysis. The formulation developed has been illustrated by considering a ten-story torsional building. Various parameters such as eccentricity, correlation between components, tuning interaction and nonproportional damping are studied. Results show that eliminating the effect of multicomponentness of earthquake can cause large errors especially at large eccentricities.*

**Keywords:** transfer function, Random vibration, secondary systems, critical angle, interaction, nonproportional damping

## ۱- مقدمه

سیستم‌های اولیه و ثانویه با یکدیگر اختلاف زیادی دارند، تحلیل دینامیکی معمولی برای محاسبه خواص دینامیکی و پاسخ سیستم مرکب، با ناپایداری عددی روبرو می‌شود و خطاهای زیادی دارد. سوارز و سینگ [۲] یک روش دقیق برای محاسبه مقادیر و بردارهای مشخصه سیستم مرکب بر حسب فرکانسها و شکل مودهای سیستم‌های اولیه و ثانویه ارائه کردند. در بین روشهای تقریبی روشهای مبتنی بر تکنیک پرتوریشن، که برای سیستم‌های ثانویه سبک که تغییرات کمی در فرکانس و شکل مودهای سیستم مرکب ایجاد می‌کنند، بیش از همه محبوبیت دارد و توسط محققانی نظیر ساکن و کلی [۳]، درکیورگیان و همکاران [۴] و [۵]، وایگوسا و درکیورگیان [۶] مورد استفاده قرار گرفته است. مسئله دیگر برای سیستم‌های مرکب این است که دلیل اختلاف میرایی سیستم‌های اولیه و ثانویه، میرایی سیستم مرکب به صورت نامتناسب است و باید روشهایی برای تحلیل انتخاب شوند که نامتناسب بودن میرایی را در نظر بگیرد. روش مستقیم و دقیق محاسبه مقادیر و بردارهای مشخصه سیستم‌های با میرایی نامتناسب بر اساس بردار حالت توسط فاس [۷] تدوین شد و سپس توسط محققان زیادی از جمله سینگ و سوارز [۸] مورد استفاده قرار گرفت.

در روش ارتعاشات پیشا مهمترین قدم در محاسبه پاسخ حداکثر سیستم ثانویه و طیف طبقه، به دست آوردن تابع چگالی طیفی آن است. تابع چگالی طیفی پاسخ سیستم از حاصلضرب تابع چگالی طیفی ورودی سیستم و مربع اندازه تابع انتقال به دست می‌آید. به عبارت دیگر تابع انتقال رابطه بین تابع چگالی طیفی ورودی و خروجی سیستم است و در آن فقط خصوصیات دینامیکی سیستم نقش دارد، از این رو برای مطالعه

معمولاً طرح لرزه‌ای سیستم‌های ثانویه با استفاده از طیف طبقه صورت می‌گیرد. طیف طبقه حداکثر پاسخ یک سری سیستم‌های یک درجه آزاد با فرکانس و میرایی‌های مختلف است که روی طبقه مورد نظر قرار گرفته اند. چون زلزله یک فرایند پیشا است، مناسب است که پاسخ سیستم (اولیه و ثانویه) با روشهای پیشا به دست آید. در نظریه ارتعاشات پیشا حداکثر پاسخ سیستم‌های خطی با پارامترهای نامتغیر با زمان که تحت اثر فرایندهای مانا با تابع چگالی طیفی احتمال گاوسی قرار دارند، با محاسبه لنگرهای طیفی از تابع چگالی طیفی پاسخ به دست می‌آید. مهمترین لنگر طیفی، لنگر صفرام یا همان میانگین مربعات است که با ضرب آن در ضریب اوج، طیف طبقه به دست می‌آید. سینگ با استفاده از روش ارتعاشات پیشا و بر اساس یک تحلیل غیر درگیر، طیف طبقه را مستقیماً بر حسب طیف زمین به دست آورد [۱]. وی ورودی سیستم ثانویه را خروجی سیستم اولیه قرار داده بود، بنابراین اندرکنش بین دو سیستم در نظر گرفته نمی‌شد. این روش هر چند بسیار ساده است و مورد استفاده زیادی دارد، ولی نتایج آن به خصوص وقتی که جرم سیستم ثانویه خیلی کوچک نباشد و فرکانس سیستم ثانویه به فرکانس یکی از مودهای سیستم اولیه نزدیک باشد، بسیار بزرگتر از مقدار واقعی می‌شود. برای در نظر گرفتن اندرکنش لازم است دو سیستم اولیه و ثانویه به طور همزمان و به صورت یک سیستم مرکب اولیه-ثانویه تحلیل شوند که این موضوع خود مسائل جدیدی به وجود می‌آورد. یکی از این مسائل این است که چون خصوصیات دینامیکی

پارامترهای مختلف سیستم بسیار مناسب است. به همین دلیل اخیراً توجه بیشتری به تابع انتقال شده است. گوپتا [۹] تابع انتقال سیستمهای ثانویه را با فرض اینکه سیستم اولیه دارای میرایی متناسب است به دست آورد. در روش ارائه شده توسط وی از شکل مودهای سیستم اولیه بدون در نظر گرفتن اندرکنش استفاده شده است. همچنین برنال [۱۰] با استفاده از روش زیرسازه تابع انتقال سیستم ثانویه را به دست آورد. سیستم در نظر گرفته شده توسط برنال شامل محیط خاک، سازه اولیه و سیستم ثانویه است.

در روشهای ارائه شده برای تحلیل سیستمهای ثانویه، زلزله به صورت تک مؤلفه‌ای در نظر گرفته شده است، ولسی واقعیت این است که زلزله دارای سه مؤلفه شتاب انتقالی و سه مؤلفه شتاب دورانی است [۱۱] و سازه باید به طور همزمان تحت اثر این شش مؤلفه قرار گرفته و تحلیل شود. البته سه مؤلفه دورانی را می‌توان بر حسب مشتقات سه مؤلفه انتقالی و سرعت امواج برشی بیان کرد [۱۲ و ۱۳]. سه مؤلفه انتقالی شتاب در حالت کلی همبسته‌اند، ولی می‌توان امتدادهایی را یافت که در آن امتدادها، مؤلفه‌های زلزله ناهمبسته می‌شوند [۱۴]. ویلسن و باتن [۱۵] با فرض اینکه طیف دو مؤلفه افقی زلزله با یکدیگر رابطه خطی دارند، روش ترکیب مربعی کامل را برای محاسبه پاسخ سازه در برابر هر یک از مؤلفه‌های زلزله را تدوین کرده و بر اساس آن زاویه بحرانی را به دست آوردند. آشتیانی و سینگ [۱۳] زلزله را به صورت شش مؤلفه‌ای در نظر گرفته و با استفاده از روش ارتعاشات پیشا پاسخ سازه را به دست آوردند. لویز و تورس [۱۶] سازه را به صورت قابهای ساختمانی سه بعدی با کف صلب که تحت اثر دو مؤلفه افقی زلزله قرار گرفته در نظر گرفتند و پاسخ سازه را بر حسب زاویه‌های مؤلفه‌ها با امتدادهای اصلی سازه به دست آورده، سپس زاویه بحرانی و پاسخ حداکثر را محاسبه کردند.

مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه سیستمهای ثانویه نشان می‌دهد که توجه خیلی کمی به اثر پیچش سیستم اولیه و خروج از محوری سیستم ثانویه شده است. یانگ و هوانگ

[۱۷] با استفاده از روش پرتوریشن عباراتی به شکل بسته برای محاسبه خواص مودی سیستم مرکب به دست آورده و روشی شبیه به روش ترکیب مربعی کامل برای محاسبه پاسخ سیستمهای ثانویه واقع بر قابهای پیچشی تدوین کردند. ایشان همچنین در تعمیمی از تحقیق خود [۱۸] اثر جداسازهای پایه را بر این گونه ساختمانها بررسی کردند. برنال [۱۰] نیز در مقاله خود مثالی ارائه داده که سیستم ثانویه روی قاب پیچشی با خروج از محوری قرار گرفته است.

در این مقاله توابع خودهمبستگی، چگالی طیفی و انتقال شتاب مطلق سیستمهای ثانویه تحت اثر مؤلفه‌های چندگانه شتاب زلزله با استفاده از روش ارتعاشات پیشا به دست آمده است. زلزله به صورت دو مؤلفه افقی ناهمبسته و یک مؤلفه عمودی در نظر گرفته شده است. این توابع در دو حالت بدون اندرکنش و با اندرکنش به دست آمده و در حالت با اندرکنش اثر نامتناسب بودن میرایی در نظر گرفته شده و در هر دو مورد زاویه بحرانی محاسبه شده است. هر چند روابط ارائه شده کلی و برای هر نوع سازه‌ای قابل کاربرد است، ولی در این مقاله به عنوان مثال قابهای ساختمانی پیچشی در نظر گرفته شده و پارامترهای مختلفی مانند خروج از محوری، هم فرکانسی، اندرکنش، ضریب همبستگی مؤلفه‌ها و نامتناسب بودن میرایی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

## ۲- تابع انتقال شتاب بدون در نظر گرفتن اندرکنش

### بین سیستمهای اولیه و ثانویه

معادله حرکت یک سازه N درجه آزاد که تحت اثر جا به جایی پایه قرار گرفته، عبارت است از:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{0\} \quad (1)$$

که در آن [M]، [C] و [K] به ترتیب ماتریسهای جرم، میرایی و سختی سازه اولیه‌اند که فرض می‌شود ثابت بوده و با زمان تغییر نمی‌کنند،  $\{U\}$  بردار شتاب مطلق و  $\{\dot{Y}\}$  و  $\{Y\}$  به ترتیب بردارهای سرعت و تغییر مکان نسبی درجات آزادی سازه اولیه‌اند. بردار تغییر مکانهای مطلق بر حسب بردارهای تغییر

مکانهای نسبی و تغییر مکانهای زمین،  $\{x'_g\}$ ، برابر است با:

$$\{U\} = \{Y\} + [r] \{x'_g\} \quad (2)$$

که در آن  $\{x'_g\}$  بردار تغییر مکانهای زمین در امتدادهای اصلی سازه است که سه مؤلفه‌ای و به صورت  $\{x'_g\} = [x'_{g1} \ x'_{g2} \ x'_{g3}]^T$  در نظر گرفته شده و فرض می‌شود فرایندهای پیشای مانا با میانگین صفر هستند.  $x'_{g1}$ ،  $x'_{g2}$  و  $x'_{g3}$  تغییر مکانهای زمین در امتدادهای ۱، ۲ و ۳ سازه‌اند. به عنوان مثال برای سازه‌های پیچشی با کف صلب، امتدادهای ۱ و ۲ افقی و در امتدادهای اصلی سازه و امتداد ۳ عمودی‌اند.  $[r]$  یک ماتریس  $N \times 3$  است که بیانگر تأثیر هر یک از مؤلفه‌های زلزله بر روی درجات آزادی سازه است و عبارت است از:

$$[r] = [\{r_1\} \ \{r_2\} \ \{r_3\}] \quad (3)$$

که در آن  $\{r_1\}$ ،  $\{r_2\}$  و  $\{r_3\}$  به ترتیب بردارهای تأثیر زلزله در امتدادهای ۱، ۲ و ۳ سازه‌اند. با استفاده از معادله (۲)، شتاب مطلق درجه آزادی دلخواه  $m$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ddot{U}_m = \ddot{Y}_m + \sum_{l=1}^3 r_{ml} \ddot{x}'_{gl} \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

با قرار دادن معادله (۲) در معادله (۱)، معادله حرکت می‌شود:

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = -[M][r]\{\ddot{x}'_g\} \quad (5)$$

در روش مودهای طبیعی، تغییر مکان‌های نسبی،  $\{Y\}$ ، بر حسب مختصات طبیعی،  $\{V\}$ ، به صورت معادله (۶) بسط داده می‌شوند:

$$\{Y\} = [\Phi]\{V\} \quad (6)$$

که در آن  $[\Phi]$  ماتریس شکل مودهاست. اگر فرض شود میرایی سیستم متناسب است، با پیش ضرب طرفین معادله (۵) در  $\{\Phi_j\}^T$  و استفاده از خاصیت تعامد مودها معادله زیر به دست می‌آید:

$$\ddot{V}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{V}_j + \omega_j^2 V_j = -\sum_{l=1}^3 \gamma_{jl} \ddot{x}'_{gl} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

که در آن  $\omega_j$  و  $\xi_j$  به ترتیب فرکانس و نسبت میرایی مود  $j$ ،

و  $\ddot{V}_j$ ،  $\dot{V}_j$  و  $V_j$  به ترتیب شتاب، سرعت و تغییر مکان مودی زام هستند. ضریب اشتراک مود  $j$  در جهت ۱ است که برابر است با:

$$\gamma_{j1} = \{\varphi_j\}^T [M] \{r_1\} / (\{\varphi_j\}^T [M] \{\varphi_j\}) \quad (8)$$

$j=1, 2, \dots, N$  ,  $l=1, 2, 3$

حل معادله (۷) با استفاده از انتگرال دوهمال عبارت است از:

$$V_j(t) = \sum_{l=1}^3 \gamma_{jl} \int_0^t \ddot{x}'_{gl}(\tau) h_j(t-\tau) d\tau \quad (9)$$

که در آن  $h_j$  تابع پاسخ ضربه واحد مود  $j$  است. اگر از معادله (۷)،  $\ddot{V}_j$  به دست آید و در مشتق دوم معادله (۶) قرار داده شود و نتیجه حاصل برای  $\ddot{Y}_m$  در معادله (۴) جایگزین شود، با کمی محاسبه معادله (۱۰) برای شتاب مطلق درجه آزادی  $m$ ، که فرض می‌شود ماناست، به دست می‌آید.

$$\ddot{U}_m(t) = -\sum_{j=1}^N \varphi_{mj} \left( 2\xi_j \omega_j \dot{V}_j(t) + \omega_j^2 V_j(t) \right) + \sum_{l=1}^3 \left[ r_{ml} - \sum_{j=1}^N \varphi_{mj} \gamma_{jl} \right] \ddot{x}'_{gl}(t) \quad (10)$$

که در آن  $\varphi_{mj}$  درایه  $m$  از ستون  $j$  ماتریس شکل مودهاست. از معادله (۱۰) شتاب مطلق درجه آزادی  $m$  بر حسب سرعت مودی،  $\dot{V}_j$ ، و تغییر مکان مودی،  $V_j$ ، در دامنه زمان به دست می‌آید. برای سازه‌های واقعی که نسبت میرایی در آنها کوچک است جمله اول معادله (۱۰) نسبت به جمله دوم آن مقدار کوچکی است، بنابراین روش مبتنی بر این معادله، روش مود تغییر مکان نامیده می‌شود. در پیوست الف نشان داده شده است که جمله دوم معادله (۱۰) برابر صفر است، بنابراین شتاب مطلق درجه آزادی  $m$  فقط از جمله اول این معادله به دست می‌آید.

برای محاسبه تابع انتقال لازم است تابع چگالی طیفی پاسخ سازه و سیستم ثانویه به دست آید. برای محاسبه تابع چگالی طیفی سازه ابتدا با استفاده از معادله (۱۰) تابع خود همبستگی آن به صورت معادله (۱۱) به دست می‌آید.

$$E[\ddot{U}_m(t_1)\ddot{U}_m(t_2)] = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \varphi_{mj} \varphi_{mk} \left\{ \omega_j^2 \omega_k^2 E[V_j(t_1)V_k(t_2)] + \right.$$

در معادله (۱۶)،  $S_p(\omega)$  تابع چگالی طیفی شتاب در امتداد اصلی زلزله،  $p$  است. با جایگذاری معادله (۱۶) در معادله (۱۵) و قرار دادن نتیجه حاصل در معادله (۱۲) و با فرض مانا بودن فرایند، با کمی محاسبات معادله (۱۷) به دست می آید:

$$E[V_j(t_1)V_k(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{kn} d_{lp} d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} S_p(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} H_j H_k^* d\omega \quad (17)$$

که در آن  $H_j$  تابع پاسخ فرکانسی مود  $j$  و  $H_k^*$  مزدوج تابع پاسخ فرکانسی مود  $k$  هستند. به این ترتیب اولین تابع خودهمبستگی معادله (۱۱) محاسبه گردید. سایر توابع خود همبستگی معادله (۱۱) نیز به همین ترتیب محاسبه می شوند که عبارت اند از:

$$E[\dot{V}_j(t_1)\dot{V}_k(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{kn} d_{lp} d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega) S_p(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} H_j H_k^* d\omega \quad (18)$$

$$E[V_j(t_1)\dot{V}_k(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{kn} d_{lp} d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\omega) S_p(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} H_j H_k^* d\omega \quad (19)$$

$$E[\dot{V}_j(t_1)\dot{V}_k(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{kn} d_{lp} d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_p(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} H_j H_k^* d\omega \quad (20)$$

با جایگذاری معادلات (۱۷) تا (۲۰) در معادله (۱۱)، معادله (۲۱) به دست می آید.

$$E[\ddot{U}_m(t_1)\ddot{U}_m(t_2)] = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Phi_{mj} \Phi_{mk} \left[ \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{kn} d_{lp} d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \omega_j^2 \omega_k^2 + 2i\xi_j \omega_j \omega_k^2 \omega - 2i\xi_k \omega_k \omega_j^2 \omega + 4\xi_j \xi_k \omega_j \omega_k \omega^2 \right) S_p(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} H_j H_k^* d\omega \right] \quad (21)$$

$$2\xi_j \omega_j \omega_k^2 E[\dot{V}_j(t_1)V_k(t_2)] + 2\xi_k \omega_k \omega_j^2 E[V_j(t_1)\dot{V}_k(t_2)] + 4\xi_j \xi_k \omega_j \omega_k E[\dot{V}_j(t_1)\dot{V}_k(t_2)] \quad (11)$$

که در آن  $E[\dots]$  به معنی میانگین است. توابع خودهمبستگی و همبستگی متقاطع تغییر مکان و سرعتهای مودی که در معادله (۱۱) وجود دارند با استفاده از معادله (۹) قابل محاسبه است. به عنوان مثال اولین جمله معادله (۱۱) عبارت است از:

$$E[V_j(t_1)V_k(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{kn} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[\ddot{x}'_{gl}(\tau_1)\ddot{x}'_{gn}(\tau_2)] h_j(t_1-\tau_1) h_k(t_2-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (12)$$

در معادله (۱۲)،  $E[\ddot{x}'_{gl}(\tau_1)\ddot{x}'_{gn}(\tau_2)]$  تابع همبستگی متقاطع شتابهای زلزله در امتدادهای اصلی سازه،  $n$  و  $l$  است. این شتابها در حالت کلی همبسته اند ولی نشان داده می شود که امتدادهایی وجود دارند که در آن امتدادها شتابهای زلزله از یکدیگر مستقل اند، [۱۴]، و این امتدادها، امتدادهای اصلی زلزله نامیده می شود. معادله بین شتابهای همبسته،  $\{\ddot{x}'_g\}$  و شتابهای ناپسته زلزله،  $\{\ddot{x}'_g\}$ ، توسط ماتریس کسینوسهای هادی  $[d]$  بیان می شود.

$$\{\ddot{x}'_g\} = [d]\{\ddot{x}_g\} \quad (13)$$

با استفاده از معادله (۱۳) تابع همبستگی متقاطع شتابهای زلزله در امتدادهای اصلی سازه بر حسب تابع همبستگی متقاطع شتابهای زلزله در امتدادهای اصلی زلزله به دست می آید.

$$E[\ddot{x}'_{gl}(\tau_1)\ddot{x}'_{gn}(\tau_2)] = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 d_{lp} d_{nq} E[\ddot{x}_{gp}(\tau_1)\ddot{x}_{gq}(\tau_2)] \quad (14)$$

چون شتابهای زلزله در امتدادهای اصلی آن ناپسته اند، معادله (۱۴) به صورت معادله (۱۵) نوشته می شود.

$$E[\ddot{x}'_{gl}(\tau_1)\ddot{x}'_{gn}(\tau_2)] = \sum_{p=1}^3 d_{lp} d_{np} E[\ddot{x}_{gp}(\tau_1)\ddot{x}_{gp}(\tau_2)] \quad (15)$$

که در آن  $E[\ddot{x}_{gp}(\tau_1)\ddot{x}_{gp}(\tau_2)]$  تابع خودهمبستگی شتاب در امتداد اصلی زلزله است که می تواند بر حسب تابع چگالی طیفی آن نوشته شود.

$$E[\ddot{x}_{gp}(\tau_1)\ddot{x}_{gp}(\tau_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_p(\omega) e^{i\omega(\tau_1-\tau_2)} d\omega \quad (16)$$

مزیت معادله (۲۴) بر معادله (۲۱) این است که در معادله (۲۴) اثر اندرکنش مودها به تفکیک دیده می‌شود.

سیستم ثانویه به صورت یک سیستم خطی یک درجه آزاد با پارامترهای لایتغیر نسبت به زمان در نظر گرفته می‌شود که به درجه آزادی  $m$  سازه متصل شده است. در این قسمت فرض شده است که سازه و سیستم ثانویه با یکدیگر اندرکنش ندارند، یعنی می‌توان حرکات سازه، که به طور مستقل از سیستم ثانویه به دست آمده است، را به عنوان ورودی سیستم ثانویه در نظر گرفت. اگر ورودی یک سیستم یک درجه آزاد، فرایند پیشایی با تابع چگالی طیفی  $S_{\ddot{U}_m}(\omega)$  باشد، خروجی آن نیز یک فرایند پیشا خواهد بود که تابع چگالی طیفی شتاب مطلق آن از معادله (۲۵) به دست می‌آید.

$$S_{\ddot{U}_s}(\omega) = S_{\ddot{U}_m}(\omega) \left( 4\xi_s^2 \omega_s^2 \omega^2 + \omega_s^4 \right) |H_s|^2 \quad (25)$$

که در آن  $\omega_s$  و  $\xi_s$  به ترتیب فرکانس و نسبت میرایی سیستم ثانویه‌اند و  $|H_s|^2$  اندازه تابع پاسخ فرکانسی سیستم ثانویه است. از جایگذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۵)، تابع چگالی طیفی سیستم ثانویه مستقیماً بر حسب تابع چگالی طیفی شتاب زلزله در امتدادهای اصلی آن به دست می‌آید.

هر چند روابطی که در این قسمت ارائه شد برای هر نوع سازه‌ای قابل کاربرد است، ولی در اینجا به عنوان مثال تابع انتقال شتاب مطلق سیستم‌های ثانویه واقع بر سازه‌های پیچشی به دست می‌آید. سقف‌این نوع سازه‌ها به صورت صلب در نظر گرفته می‌شود، بنابراین هر طبقه دو درجه آزادی انتقال افقی و یک درجه آزادی پیچشی دارد. همچنین فرض می‌شود زلزله دارای دو مؤلفه افقی و یک مؤلفه قائم است. پس ماتریس کسینوسهای هادی بین امتدادهای اصلی زلزله و سازه عبارت است از:

$$[d] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

که در آن  $\theta$  زاویه بین امتدادهای اصلی سازه و زلزله است. از دو مؤلفه زلزله در امتدادهای اصلی افقی آن، یکی بزرگتر و دیگری کوچکتر است. مرسوم است که مؤلفه کوچک زلزله را

معادله (۲۱) تابع خودهمبستگی شتاب مطلق درجه آزادی  $m$  سازه است، که با استفاده از معادله بین توابع چگالی طیفی و خودهمبستگی فرایندهای پیشا، تابع چگالی طیفی آن خواهد شد.

$$S_{\ddot{U}_m}(\omega) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \varphi_{mj} \varphi_{mk} \left[ \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{kn} d_{lp} d_{np} \left( \omega_j^2 \omega_k^2 + 2i\xi_j \omega_j \omega_k^2 \omega - 2i\xi_k \omega_k \omega_j^2 \omega + 4\xi_j \xi_k \omega_j \omega_k \omega^2 \right) S_p(\omega) H_j H_k^* \right] \quad (22)$$

چنانچه ملاحظه می‌شود تابع چگالی طیفی شتاب مطلق درجه آزادی  $m$  سازه بر حسب خصوصیات مودی سازه (فرکانسها، نسبت‌های میرایی، شکل مودها و ضرایب اشتراک)، تابع پاسخ فرکانسی و تابع چگالی طیفی زلزله در امتدادهای اصلی آن بیان شده است. معادله (۲۲) یک جمع دوگانه به صورت  $\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N$  روی مودهای سازه دارد، که می‌توان آن را به دو جمع به صورت  $\sum_{j=1}^N$  و  $\sum_{k=j+1}^{N-1}$  تبدیل کرد.

$$S_{\ddot{U}_m}(\omega) = \sum_{j=1}^N \varphi_{mj}^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{jn} d_{lp} d_{np} \left( \omega_j^4 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2 \right) |H_j|^2 S_p(\omega) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \varphi_{mj} \varphi_{mk} \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \gamma_{jl} \gamma_{kn} d_{lp} d_{np} N(\omega) |H_j|^2 |H_k|^2 S_p(\omega) \quad (23)$$

که در آن  $|H_j|^2$  مربع اندازه تابع پاسخ فرکانسی مود  $j$  است  $\left( |H_j|^2 = 1 / \left[ \left( \omega_j^2 - \omega \right)^2 + \left( 2\xi_j \omega_j \omega \right)^2 \right] \right)$  و  $N(\omega)$  نیز برابر است با:

$$N(\omega) = \left( \omega_j^2 \omega_k^2 + 4\xi_j \xi_k \omega_j \omega_k \omega^2 \right) \left[ \left( \omega^2 - \omega_j^2 \right) \left( \omega^2 - \omega_k^2 \right) + 4\xi_j \xi_k \omega_j \omega_k \omega^2 \right] + 4\omega^2 \omega_j \omega_k \left( \omega_k \xi_j - \omega_j \xi_k \right) \left[ \xi_j \omega_j \left( \omega_k^2 - \omega^2 \right) - \xi_k \omega_k \left( \omega_j^2 - \omega^2 \right) \right] \quad (24)$$

معادله (۲۹) تابع انتقال شتاب مطلق سیستم ثانویه بر حسب زاویه بین امتدادهای اصلی سازه و زلزله است. در واقع برای محاسبه تابع انتقال باید این زاویه مشخص باشد. برای مقاصد طراحی سازه و مطالعات موردی که امتداد گسل منطقه و امتداد استقرار سازه مشخص است این زاویه را تا حدودی می توان مشخص کرد، ولی در حالت کلی این زاویه مشخص نیست. برای طرح سیستمهای ثانویه مهم و حساس بهتر است این احتمال در نظر گرفته شود که مؤلفه های زلزله تحت هر زاویه ای ممکن است به سازه اثر کنند. در اینجا این زاویه طوری پیدا می شود که تابع انتقال حداکثر شود و در این صورت زاویه بحرانی نامیده می شود. برای به دست آوردن زاویه بحرانی، مشتق معادله (۲۹) نسبت به  $\theta$  برابر صفر قرار داده می شود که از آنجا دو زاویه به صورت زیر به دست می آیند:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{H_{cs}}{H_c - H_s} \right) \text{ و } \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{H_{cs}}{H_c - H_s} \right) \quad (۳۳)$$

یکی از این زوایا مربوط به حداکثر تابع انتقال و دیگری مربوط به حداقل آن است.

از معادلات فوق مشاهده می شود که اگر  $\alpha=1$  باشد،  $|H(\omega)|$  به زاویه  $\theta$  بستگی ندارد. به عبارت دیگر در صورتی که توابع چگالی طیفی شتاب زلزله در امتدادهای اصلی آن با یکدیگر مساوی باشند، تابع انتقال مستقل از زاویه می شود.

### ۳- تابع انتقال شتاب با در نظر گرفتن اندرکنش بین سیستمهای اولیه و ثانویه

در قسمت قبل تابع انتقال شتاب بدون در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین سیستمهای اولیه و ثانویه به دست آمد. ولی اندرکنش بین دو سیستم یک واقعیت است که در بعضی موارد، به خصوص وقتی که جرم سیستم ثانویه زیاد باشد یا هم فرکانسی وجود داشته باشد، در نظر نگرفتن آن خطای قابل توجهی را به وجود می آورد. برای در نظر گرفتن اندرکنش لازم است دو سیستم اولیه و ثانویه به صورت یک سیستم مرکب

به صورت ضریبی از مؤلفه بزرگ آن در نظر می گیرند. به همین ترتیب می توان تابع چگالی طیفی مؤلفه بزرگ را نیز به صورت ضریبی از تابع چگالی طیفی مؤلفه کوچک در نظر گرفت، یعنی:

$$S_2 = \alpha S_1 \quad (۲۷)$$

که در آن  $\alpha$  ضریب تناسب بین توابع چگالی طیفی مؤلفه های بزرگ و کوچک زلزله است.

اگر جملات  $\sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3$  در معادله (۲۳) بسط داده شود و

به جای ضرایب  $d$  از معادله (۲۶) و به جای  $S_2$  از معادله (۲۷) قرار داده شده و نتیجه به دست آمده در معادله (۲۵) جایگذاری شود، معادله (۲۸) به دست می آید:

$$S_{\ddot{U}_s}(\omega) = |\overline{H}(\omega)|^2 S_1(\omega) \quad (۲۸)$$

که در آن  $|\overline{H}(\omega)|^2$  تابع انتقال شتاب مطلق سیستم ثانویه است و برابر است با:

$$|\overline{H}(\omega)|^2 = \left( \omega_s^4 + 4\xi_s^2 \omega_s^2 \omega^2 \right) |H_s|^2 \left[ H_c \cos^2(\theta) + H_s \sin^2(\theta) + H_{cs} \cos(\theta) \sin(\theta) \right] \quad (۲۹)$$

که در آن:

$$H_c = \sum_{j=1}^N \varphi_{mj}^2 |H_j|^2 \left( \omega_j^4 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2 \right) (\gamma_{j1}^2 + \alpha \gamma_{j2}^2) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \varphi_{mj} \varphi_{mk} N(\omega) |H_j|^2 |H_k|^2 (\gamma_{j1} \gamma_{k1} + \alpha \gamma_{j2} \gamma_{k2}) \quad (۳۰)$$

$$H_s = \sum_{j=1}^N \varphi_{mj}^2 |H_j|^2 \left( \omega_j^4 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2 \right) (\gamma_{j2}^2 + \alpha \gamma_{j1}^2) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \varphi_{mj} \varphi_{mk} N(\omega) |H_j|^2 |H_k|^2 (\gamma_{j2} \gamma_{k2} + \alpha \gamma_{j1} \gamma_{k1}) \quad (۳۱)$$

$$H_{cs} = \sum_{j=1}^N \varphi_{mj}^2 |H_j|^2 \left( \omega_j^4 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2 \right) (2\gamma_{j1} \gamma_{j2}) (-1 + \alpha) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \varphi_{mj} \varphi_{mk} N(\omega) |H_j|^2 |H_k|^2 (\gamma_{j1} \gamma_{k2} + \gamma_{j2} \gamma_{k1}) (-1 + \alpha) \quad (۳۲)$$

$$[C_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_s & \dots & 0 & -C_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -C_s & \dots & 0 & C_s \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_s & \dots & 0 & -K_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -K_s & \dots & 0 & K_s \end{bmatrix} \quad (39)$$

که در آنها  $C_s$  و  $K_s$  به ترتیب میرایی و سختی سیستم ثانویه‌اند و چون این سیستم به درجه آزادی  $m$  سیستم اولیه متصل است، در سطر و ستون  $m$  و  $N+1$  ماتریسهای  $[C_c]$  و  $[K_c]$  قرار می‌گیرند. همچنین در معادله (۳۴)، بردار تغییر مکانهای نسبی سیستم مرکب است که به صورت معادله (۴۰) نوشته می‌شود.

$$\{\bar{Y}\} = \begin{Bmatrix} \{Y\} \\ Y_s \end{Bmatrix} \quad (40)$$

که در آن  $\{Y\}$  بردار تغییر مکانهای نسبی سیستم اولیه و  $Y_s$  تغییر مکان نسبی سیستم ثانویه‌اند.  $[r]$  در معادله (۳۴)، ماتریس تأثیر نیروی زلزله بر سیستم اولیه است که در معادله (۳) تعریف شده و  $[r_s]$  ماتریس تأثیر نیروی زلزله بر سیستم ثانویه است که چون سیستم ثانویه یک درجه آزاد و زلزله سه مؤلفه‌ای در نظر گرفته شده‌اند، یک سطر و سه ستون دارد.

معادله ارتعاش آزاد سیستم مرکب اولیه-ثانویه، با استفاده از معادله (۳۴) عبارت است از:

$$[\bar{M}]\{\ddot{\bar{Y}}\} + [\bar{K}]\{\bar{Y}\} = \{0\} \quad (41)$$

با حل معادله مشخصه معادله (۴۱) فرکانسها و شکل مودهای سیستم مرکب به دست می‌آید، ولی چون سیستم ثانویه بسیار سبکتر از سیستم اولیه است، درایه‌های ماتریس  $[\bar{M}]$  با یکدیگر بسیار متفاوت خواهند شد در نتیجه معادله مشخصه ناپایداری عددی دارد و استفاده از روش مستقیم برای حل آن خطای

اولیه-ثانویه در نظر گرفته شوند، که در این صورت چون پارامترهای دینامیکی دو سیستم با یکدیگر بسیار متفاوت‌اند، ماتریسهای سیستم مرکب دارای ناپایداری عددی می‌شوند و تحلیل مقدار ویژه خطای زیادی خواهد داشت. در این قسمت یک روش برای تحلیل مقدار ویژه سیستم مرکب ارائه خواهد شد به طوری که این تقیصه برطرف شود. مسئله دیگری که سیستمهای مرکب دارند نامتناسب بودن میرایی آنهاست. چون خواص میرایی سیستمهای اولیه و ثانویه با یکدیگر متفاوت است، میرایی سیستم مرکب نامتناسب خواهد شد و باید این اثر به نحوی در تحلیل منظور شود. در روشی که در این قسمت ارائه شده نامتناسب بودن میرایی نیز با استفاده از بردار حالت در نظر گرفته شده است.

معادله حرکت سیستم مرکب اولیه-ثانویه، با فرض اینکه سیستم ثانویه  $N+1$  امین درجه آزادی سیستم مرکب است و به درجه آزادی  $m$  سیستم اولیه متصل است، به صورت معادله (۳۴) نوشته می‌شود.

$$[\bar{M}]\{\ddot{\bar{Y}}\} + [\bar{C}]\{\dot{\bar{Y}}\} + [\bar{K}]\{\bar{Y}\} = -\begin{Bmatrix} [M][r] \\ m_s[r_s] \end{Bmatrix} \{\ddot{x}'_g\} \quad (34)$$

که در آن  $[\bar{M}]$ ،  $[\bar{C}]$  و  $[\bar{K}]$  به ترتیب ماتریسهای جرم، میرایی و سختی سیستم مرکب‌اند که نسبت به زمان لایتغیر فرض می‌شوند و برابرند با:

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} [M] & \{0\} \\ [0] & m_s \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} [C] & \{0\} \\ [0] & 0 \end{bmatrix} + [C_c] \quad (36)$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [K] & \{0\} \\ [0] & 0 \end{bmatrix} + [K_c] \quad (37)$$

در معادله‌های فوق  $[C_c]$  و  $[K_c]$  ماتریسهایی هستند که تأثیر اندرکنش دو سیستم را به ترتیب روی ماتریسهای میرایی و سختی سیستم مرکب نشان می‌دهند و از معادله‌های (۳۸) و (۳۹) به دست می‌آیند.



عددی زیادی خواهد داشت. برای رفع این مشکل از روشی که سوارز و سینگ ارائه کرده‌اند [۱۹] استفاده می‌شود. ایشان از تغییر متغیر زیر استفاده کرده‌اند:

$$\{\bar{Y}\} = [U]\{q\} \quad (42)$$

که در آن با توجه به اینکه  $[\Phi]$  ماتریس شکل مود سیستم اولیه است که نسبت به ماتریس جرم همپایه شده و  $\varphi_s = 1/\sqrt{m_s}$  است،  $[U]$  برابر است با:

$$[U] = \begin{bmatrix} [\Phi] & \{0\} \\ [0] & \varphi_s \end{bmatrix} \quad (43)$$

با جایگذاری معادله (۴۲) در معادله (۴۱) و پیش ضرب معادله به دست آمده در  $[U]^T$ ، معادله زیر به دست می‌آید:

$$[\hat{M}]\{\ddot{q}\} + [\hat{K}]\{q\} = \{0\} \quad (44)$$

که در آن  $[\hat{M}]$  و  $[\hat{K}]$  از معادله‌های (۴۵) و (۴۶) به دست می‌آیند.

$$[\hat{M}] = [U]^T [\bar{M}] [U] \quad (45)$$

$$[\hat{K}] = [U]^T [\bar{K}] [U] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_p^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} + [U]^T [K_c] [U] \quad (46)$$

$\omega_p$  فرکانس سیستم اولیه است و

$$[U]^T [K_c] [U] = K_s \{\eta\} \{\eta\}^T \quad (47)$$

در معادله (۴۷)،  $\{\eta\}$  برابر است با:

$$\{\eta\}^T = [\varphi_{m1} \quad \varphi_{m2} \quad \cdots \quad \varphi_{mm} \quad \cdots \quad \varphi_{mN} \quad -\varphi_s] \quad (48)$$

به این ترتیب به کمک تغییر متغیر معادله (۴۲)، معادله (۴۱) به معادله (۴۴) که معادله مشخصه آن در معادله (۴۹) داده شده، تبدیل می‌شود.

$$\left( [\hat{K}] - \omega_j^2 [\hat{M}] \right) \{\hat{\phi}_j\} = \{0\}; j=1,2,\dots,N+1 \quad (49)$$

در این معادله شرایط بدوضعیتی حاکم بر معادله (۴۱) از بین رفته است، در نتیجه معادله (۴۹) بدون اینکه شرایط حساسیت وجود داشته باشد حل می‌شود. با حل این معادله و با کمک معادله (۴۲) فرکانسها و شکل مودهای سیستم مرکب به

دست می‌آید.

پس از محاسبه فرکانسها و شکل مودهای سیستم مرکب می‌توان معادله (۳۴) را حل کرد. در اینجا نیز برای حل این معادله از روش مودهای طبیعی استفاده شده و بردار تغییر مکانهای نسبی سیستم مرکب،  $\{\bar{Y}\}$ ، به صورت معادله (۵۰) بسط داده می‌شود.

$$\{\bar{Y}\} = [\bar{\Phi}]\{V\} \quad (50)$$

که در آن  $[\bar{\Phi}]$  ماتریس شکل مودهای سیستم مرکب است. این ماتریس، ماتریسهای جرم و سختی سیستم مرکب را قطری خواهد کرد ولی چنانچه قبلاً گفته شد نامتناسب بودن میرایی از خصوصیات ذاتی سیستمهای مرکب است و این نکته به این مفهوم است که ماتریس  $[\bar{\Phi}]$ ، ماتریس میرایی سیستم مرکب را قطری نخواهد کرد. بنابراین با جایگذاری معادله (۵۰) در معادله (۳۴) و پیش ضرب معادله حاصل در  $[\bar{\Phi}]^T$  معادله (۵۱) به دست می‌آید.

$$\ddot{V}_j + \sum_{i=1}^{N+1} \hat{C}_{ij} \dot{V}_i + \omega_j^2 V_j = -[\gamma_j] \{\ddot{x}'_g\}; j=1,2,\dots,N+1 \quad (51)$$

که در آن  $\hat{C}_{ij}$  برابر است با:

$$\hat{C}_{ij} = \{\bar{\phi}_i\}^T [\bar{C}] \{\bar{\phi}_j\} \quad (52)$$

در معادله (۵۱)،  $[\gamma_j]$ ، ماتریس ضرایب اشتراک سیستم مرکب، برابر است با:

$$[\gamma_j] = \{\bar{\phi}_j\}^T \begin{bmatrix} [M][r] \\ m_s [r_s] \end{bmatrix} \quad (53)$$

چنانچه ملاحظه می‌شود معادله (۵۱) یک معادله درگیر است که برای حل آن معمولاً از بردار حالت که به صورت معادله (۵۴) تعریف می‌شود استفاده می‌شود.

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{V}\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} \quad (54)$$

استفاده از بردار حالت این حسن را دارد که معادله اصلی غیر درگیر شده و حل مودی آن امکانپذیر می‌شود ولی این عیب را دارد که ابعاد معادله حاصل دو برابر می‌شود. با این تعریف معادله (۵۱) به معادله (۵۵) تبدیل می‌شود.

بنابراین مراحل تحلیل سیستمهای مرکب در دامنه زمان به این ترتیب می شود که ابتدا باید معادله (۶۰) حل و  $\{x\}$  محاسبه شود، آن گاه  $\{x\}$  در معادله (۵۹) جایگزین شود تا  $\{Z\}$  به دست آید.  $(N+1)$  سطر دوم  $\{Z\}$ ، همان  $\{V\}$  است که با قرار دادن آن در معادله (۵۰)، تغییر مکانهای نسبی سیستم مرکب یعنی  $\{\bar{Y}\}$  به دست می آید.

پاسخی از سیستم که برای طراحی بسیار کاربرد دارد شتاب مطلق آن است. در اینجا شتاب مطلق سیستم ثانویه با استفاده از شتاب نسبی آن محاسبه می شود. با توجه به اینکه سیستم ثانویه در درجه آزادی  $(N+1)$  قرار دارد، شتاب نسبی سیستم ثانویه،  $\ddot{Y}_s$ ، از معادله (۵۰) و به صورت زیر به دست می آید.

$$\ddot{Y}_s = \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \ddot{V}_j \quad (62)$$

که در آن  $\bar{\varphi}_{N+1,j}$ ،  $N+1$  امین درایه بردار شکل مود زام سیستم مرکب است. چون  $\{\ddot{V}\}$ ،  $N+1$  سطر بالایی  $\{\ddot{Z}\}$  است، با استفاده از معادله (۵۹) شتاب مودی زام خواهد شد:

$$\ddot{V}_j = \dot{Z}_j = \sum_{a=1}^{2(N+1)} \psi_{ja} \dot{x}_a \quad (63)$$

حال اگر از معادله (۶۰)،  $\dot{x}_a$  محاسبه و در معادله (۶۳) قرار داده شود و نتیجه حاصل در معادله (۶۲) جایگزین شود، معادله (۶۴) به دست می آید:

$$\ddot{Y}_s = \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \left[ \sum_{a=1}^{2(N+1)} \psi_{ja} (\lambda_a x_a + [F_a] \{\ddot{x}'_g\}) \right] \quad (64)$$

از این معادله شتاب سیستم ثانویه نسبت به زمین محاسبه می شود. شتاب مطلق سیستم ثانویه برابر است با شتاب نسبی آن به اضافه شتاب زمین:

$$\ddot{U}_s = \ddot{Y}_s + [r_s] \{\ddot{x}'_g\} \quad (65)$$

با جایگذاری معادله (۶۴) در معادله (۶۵) و دسته بندی معادله حاصل، نتیجه خواهد شد:

$$\ddot{U}_s = \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \left[ \sum_{a=1}^{2(N+1)} \psi_{ja} \lambda_a x_a \right] + \left( [r_s] \{\ddot{x}'_g\} + \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \left[ \sum_{a=1}^{2(N+1)} \psi_{ja} [F_a] \{\ddot{x}'_g\} \right] \right) \quad (66)$$

$$[A] \{\dot{Z}\} + [B] \{Z\} = -[D] \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \{\ddot{x}'_g\} \quad (55)$$

در معادله فوق ماتریسهای  $[A]$ ،  $[B]$  و  $[D]$  عبارتند از:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ [I] & [\hat{C}] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -[I] & [0] \\ 0 & [\Omega^2] \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (56)$$

که در آن  $[I]$  ماتریس واحد است و  $[\Omega^2]$  و  $[\hat{C}]$  از معادله های (۵۷) به دست می آیند.

$$[\hat{C}] = [\bar{\varphi}]^T [\bar{C}] [\bar{\varphi}], \quad (57)$$

$$[\Omega^2] = [\bar{\varphi}]^T [\bar{K}] [\bar{\varphi}] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

که در آن  $\omega$  فرکانس سیستم مرکب است. به منظور حل مودی معادله (۵۵) ابتدا باید معادله مشخصه آن که به صورت معادله (۵۸) است، حل شود.

$$\left( \lambda_i [A] + [B] \right) \{\psi_i\} = \{0\}; \quad i = 1, 2, \dots, 2(N+1) \quad (58)$$

از حل این معادله مشخصه،  $2(N+1)$  مقدار مشخصه،  $\lambda_i$ ، و بردار مشخصه،  $\{\psi_i\}$ ، به دست می آید که به دلیل این که ماتریس  $[B]$  مثبت معین نیست، این مقادیر و بردارهای مشخصه، موهومی خواهند شد و دو به دو مزدوج یکدیگر می شوند. در مورد بردارهای مشخصه موهومی نیز معادله تعامل مودها نسبت به ماتریسهای  $[A]$  و  $[B]$  وجود دارد.

برای حل معادله (۵۵) به روش مودی، مجدداً بردار  $\{Z\}$  بسط داده می شود، ولی این بار بر حسب ماتریس مشخصه موهومی:

$$\{Z\} = [\psi] \{x\} \quad (59)$$

با جایگذاری معادله (۵۹) در معادله (۵۵) و پیش ضرب معادله منتجه در  $\{\psi_a\}^T$  و استفاده از خاصیت تعامل مودهای موهومی، معادله (۶۰) به دست می آید.

$$\dot{x}_a - \lambda_a x_a = [F_a] \{\ddot{x}'_g\}; \quad a=1, 2, \dots, 2(N+1) \quad (60)$$

که در آن  $[F_a]$  برابر است با:

$$[F_a] = - \left( \{\psi_a\}^T [D] \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \right) / \left( \{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\} \right) \quad (61)$$

$$\int_0^{t_2} E[\ddot{x}'_{gl}(\tau_1)\ddot{x}'_{gn}(\tau_2)]e^{\lambda_a(t_1-\tau_1)}e^{\lambda_b(t_2-\tau_2)}d\tau_1d\tau_2 \quad (70)$$

با جایگزینی معادله‌های (۱۵) و (۱۶) به جای تابع خود همبستگی سمت راست معادله (۷۰)، معادله (۷۱) به دست می‌آید.

$$E[x_a(t_1)x_b(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 F_{al}F_{bn}d_{lp}d_{np} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} S_p(\omega)e^{\lambda_a(t_1-\tau_1)}e^{\lambda_b(t_2-\tau_2)}e^{i\omega(\tau_1-\tau_2)}d\tau_1d\tau_2d\omega \quad (71)$$

با فرض مانا بودن فرایند، حدود انتگرالهای اول و دوم معادله (۷۱) را می‌توان به  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر داد که پس از محاسبه آنها، معادله (۷۱) به صورت معادله (۷۲) خواهد شد.

$$E[x_a(t_1)x_b(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 F_{al}F_{bn}d_{lp}d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_p(\omega)e^{i\omega(t_1-t_2)}}{(\lambda_a - i\omega)(\lambda_b + i\omega)}d\omega \quad (72)$$

بنابراین اولین تابع خودهمبستگی معادله (۷۲) محاسبه شد. سایر توابع خودهمبستگی این معادله نیز به همین روش محاسبه می‌شوند که برابرند با:

$$E[x_a^*(t_1)x_b^*(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 F_{al}^*F_{bn}^*d_{lp}d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_p(\omega)e^{i\omega(t_1-t_2)}}{(\lambda_a^* - i\omega)(\lambda_b^* + i\omega)}d\omega \quad (73)$$

$$E[x_a(t_1)x_b^*(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 F_{al}F_{bn}^*d_{lp}d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_p(\omega)e^{i\omega(t_1-t_2)}}{(\lambda_a - i\omega)(\lambda_b^* + i\omega)}d\omega \quad (74)$$

$$E[x_a^*(t_1)x_b(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 F_{al}^*F_{bn}d_{lp}d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_p(\omega)e^{i\omega(t_1-t_2)}}{(\lambda_a^* - i\omega)(\lambda_b + i\omega)}d\omega \quad (75)$$

در پیوست ب نشان داده شده است که جمله دوم معادله (۶۶) برابر صفر است. با توجه این نکته و اینکه مقادیر و بردارهای مشخصه، مزدوج موهومی یکدیگرند شتاب مطلق سیستم ثانویه به صورت معادله (۶۷) در می‌آید.

$$\ddot{U}_s(t) = \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \left[ \sum_{a=1}^{N+1} (\psi_{ja}\lambda_a x_a(t) + \psi_{ja}^* \lambda_a^* x_a^*(t)) \right] \quad (67)$$

که در آن علامت (\*) به معنی مزدوج موهومی است. با استفاده از این رابطه شتاب مطلق سیستم ثانویه در دامنه زمان به دست می‌آید. این رابطه اساس روابط بعدی برای محاسبه توابع آماری سیستم ثانویه خواهد بود.

با داشتن تابع زمانی پاسخ سیستم ثانویه می‌توان توابع آماری آن را به دست آورد. اولین تابع آماری که در اینجا محاسبه می‌شود تابع خودهمبستگی است. تابع خودهمبستگی شتاب مطلق سیستم ثانویه با استفاده از معادله (۶۷) به صورت معادله (۶۸) در می‌آید.

$$E[\ddot{U}_s(t_1)\ddot{U}_s(t_2)] = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \bar{\varphi}_{N+1,k} \left\{ \sum_{a=1}^{N+1} \sum_{b=1}^{N+1} \psi_{ja}\lambda_a \psi_{kb}\lambda_b E[x_a(t_1)x_b(t_2)] + \sum_{a=1}^{N+1} \sum_{b=1}^{N+1} \psi_{ja}^* \lambda_a^* \psi_{kb}^* \lambda_b^* E[x_a^*(t_1)x_b^*(t_2)] + \sum_{a=1}^{N+1} \sum_{b=1}^{N+1} \psi_{ja}^* \lambda_a^* \psi_{kb}\lambda_b E[x_a^*(t_1)x_b(t_2)] + \sum_{a=1}^{N+1} \sum_{b=1}^{N+1} \psi_{ja}\lambda_a \psi_{kb}^* \lambda_b^* E[x_a(t_1)x_b^*(t_2)] \right\} \quad (68)$$

در معادله (۶۸) چهار تابع خودهمبستگی وجود دارد. این توابع از حل معادله (۶۰) که به صورت معادله (۶۹) است به دست می‌آیند.

$$x_a(t) = \sum_{l=1}^3 F_{al} \int_0^t \ddot{x}'_{gl}(\tau)e^{\lambda_a(t-\tau)}d\tau \quad (69)$$

در اینجا به عنوان مثال اولین تابع خودهمبستگی معادله (۶۸) محاسبه می‌شود.

$$E[x_a(t_1)x_b(t_2)] = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 F_{al}F_{bn} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2}$$

$$B_{jkabln} = A'_{jkabln} + B'_{jkabln} \left( -\omega_a^2 - \omega_b^2 + 4\xi_a \xi_b \omega_a \omega_b \right) - 2C'_{jkabln} (\xi_b \omega_b - \xi_a \omega_a) \quad (81)$$

$$C_{jkabln} = A'_{jkabln} \left( -\omega_a^2 - \omega_b^2 + 4\xi_a \xi_b \omega_a \omega_b \right) + B'_{jkabln} \omega_a^2 \omega_b^2 - 2C'_{jkabln} \left( -\xi_b \omega_a^2 \omega_b + \xi_a \omega_b^2 \omega_a \right) \quad (82)$$

$$D_{jkabln} = A'_{jkabln} \omega_a^2 \omega_b^2 \quad (83)$$

$$A'_{jkabln} = 4\omega_a^2 \omega_b^2 a_{ja1} a_{kbn} \quad (84)$$

$$B'_{jkabln} = 4\omega_a \omega_b \left[ \xi_a \xi_b a_{jal} a_{kbn} + \sqrt{(1-\xi_a^2)(1-\xi_b^2)} b_{jal} b_{kbn} + \xi_a \sqrt{1-\xi_b^2} a_{jal} b_{kbn} + \xi_b \sqrt{1-\xi_a^2} b_{jal} a_{kbn} \right] \quad (85)$$

$$C'_{jkabln} = 4\omega_a \omega_b \left[ a_{jal} a_{kbn} (\xi_a \omega_b - \xi_b \omega_a) + \omega_b \sqrt{1-\xi_a^2} a_{kbn} b_{jal} - \omega_a \sqrt{1-\xi_b^2} a_{jal} b_{kbn} \right] \quad (86)$$

پارامترهای معادله‌های (۷۸) تا (۸۶) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} a_{ja1} &= \operatorname{Re}(\psi_{ja} F_{a1}) & \text{و} & \quad b_{ja1} = \operatorname{Im}(\psi_{ja} F_{a1}) \\ a_{kbn} &= \operatorname{Re}(\psi_{kb} F_{bn}) & \text{و} & \quad b_{kbn} = \operatorname{Im}(\psi_{kb} F_{bn}) \\ \omega_a^2 &= |\lambda_a|^2 & \text{و} & \quad \xi_a = \frac{-\operatorname{Re}(\lambda_a)}{|\lambda_a|^2} \end{aligned} \quad (87)$$

معادله (۷۷) تابع خودهمبستگی شتاب مطلق سیستم ثانویه است که با در نظر گرفتن اندرکنش و با نامتناسب گرفتن میرایی سیستم مرکب به دست آمده است. تابع چگالی طیفی آن با توجه به معادله بین توابع چگالی طیفی و خودهمبستگی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} S_{\ddot{U}_s}(\omega) &= \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \bar{\varphi}_{N+1,k} \left\{ \sum_{a=1}^{N+1} \left[ \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 d_{lp} \right. \right. \\ & d_{np} \left( A_{jka ln} \omega_a^4 + B_{jka ln} \omega_a^2 \omega^2 \right) \left. \left. \right] H_a \right|^2 S_p(\omega) \left. \right\} \\ & + 2 \sum_{a=1}^N \sum_{b=a+1}^{N+1} \left[ \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 d_{lp} d_{np} \left( A_{jkab ln} \omega^6 + B_{jkab ln} \omega^4 \right. \right. \\ & \left. \left. + C_{jkab ln} \omega^2 + D_{jkab ln} \right) \right] H_a \right|^2 \left. \left. \right] H_b \right|^2 S_p(\omega) \left. \right\} \quad (88) \end{aligned}$$

با جایگذاری معادله‌های (۷۲) تا (۷۵) در معادله (۶۸)، تابع خودهمبستگی شتاب مطلق سیستم ثانویه خواهد شد:

$$\begin{aligned} E[\ddot{U}_s(t_1) \ddot{U}_s(t_2)] &= \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \bar{\varphi}_{N+1,k} \left\{ \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{lp} d_{np} \right. \\ & \left. \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_a \psi_{ja} F_{al} \lambda_b \psi_{kb} F_{bn}}{(\lambda_a - i\omega)(\lambda_b + i\omega)} + \frac{\lambda_a^* \psi_{ja}^* F_{al}^* \lambda_b^* \psi_{kb}^* F_{bn}^*}{(\lambda_a^* - i\omega)(\lambda_b^* + i\omega)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\lambda_a \psi_{ja} F_{al} \lambda_b^* \psi_{kb}^* F_{bn}^*}{(\lambda_a - i\omega)(\lambda_b^* + i\omega)} + \frac{\lambda_a^* \psi_{ja}^* F_{al}^* \lambda_b \psi_{kb} F_{bn}}{(\lambda_a^* - i\omega)(\lambda_b + i\omega)} \right] \right. \\ & \left. S_p(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \right\} \quad (76) \end{aligned}$$

در این رابطه اگر جملات اول و دوم با هم و جملات سوم و چهارم نیز با هم جمع شوند و عبارت  $\sum_{a=1}^{N+1} \sum_{b=1}^{N+1}$  به دو عبارت

$$\sum_{a=1}^N \sum_{b=a+1}^{N+1} \quad \text{و} \quad \sum_{a=1}^{N+1}$$

تبدیل شود پس از کمی محاسبات جبری معادله (۷۷) نتیجه خواهد شد.

$$\begin{aligned} E[\ddot{U}_s(t_1) \ddot{U}_s(t_2)] &= \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \bar{\varphi}_{N+1,k} \left\{ \sum_{a=1}^{N+1} \left[ \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 d_{lp} d_{np} \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{-\infty}^{+\infty} \left( A_{jka ln} \omega_a^4 + B_{jka ln} \omega_a^2 \omega^2 \right) \right] H_a \right|^2 S_p(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \left. \right\} \\ & + 2 \sum_{a=1}^{N+1} \sum_{b=1}^{N+1} \left[ \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 d_{lp} d_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( A_{jkab ln} \omega^6 + \right. \right. \\ & \left. \left. B_{jkab ln} \omega^4 + C_{jkab ln} \omega^2 + D_{jkab ln} \right) \right] H_a \right|^2 \left. \left. \right] H_b \right|^2 S_p(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \left. \right\} \quad (77) \end{aligned}$$

که در آن:

$$A_{jka ln} = 4a_{ja1} a_{kan} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} B_{jka ln} &= 4 \left[ b_{jal} b_{kan} + \xi_a^2 (a_{jal} a_{kan} - b_{jal} b_{kan}) + \right. \\ & \left. \xi_a \sqrt{1-\xi_a^2} (a_{jal} b_{kan} + b_{jal} a_{kan}) \right] \quad (79) \end{aligned}$$

$$A'_{jkab ln} = B'_{jkab ln} \quad (80)$$

امتدادهای اصلی سازه و زلزله است. یعنی اگر زاویه بین امتدادهای اصلی سازه و زلزله مشخص باشد می‌توان با استفاده از معادله (۸۹) تابع انتقال شتاب مطلق سیستم ثانویه را محاسبه کرد. برای پیدا کردن زاویه بحرانی می‌توان از معادله‌های (۳۳) استفاده کرد و پس از محاسبه زاویه بحرانی تابع انتقال حداکثر را از معادله (۸۹) به دست آورد.

#### ۴- نتایج عددی

برای نشان دادن تاثیر چند مؤلفه‌ای بودن زلزله روی تابع انتقال، یک قاب پیچشی ۱۰ طبقه (شکل ۱)، تحلیل شده و مواردی نظیر خروج از محوری، ضریب همبستگی بین مؤلفه‌ها، هم فرکانسی، اندرکنش، و نامتناسب بودن میرایی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این قاب تعمیمی از مثال مرجع [۹] است. در مثال مرجع [۹] قاب به صورت برشی است در حالی که در اینجا برای در نظر گرفتن اثر خروج از محوری و چند مؤلفه‌ای بودن زلزله، قاب به صورت پیچشی در نظر گرفته شده است. خروج از محوری در هر دو جهت مساوی است و برای به دست آوردن خروج از محوری، سختی ستونها ثابت گرفته شده و مرکز جرم طبقات تغییر داده شده‌اند. فرکانس موده‌های مختلف قاب با خروج از محوری‌های مختلف در جدول (۱) آورده شده است. لازم به ذکر است که کف طبقات به صورت مربع، سختی ستونها در هر طبقه برابر و خروج از محوری جرم طبقات در هر دو جهت مساوی در نظر گرفته شده‌اند، در نتیجه سازه نسبت به یک قطر کف طبقات تقارن دارد و چون یکی از مدهای ارتعاشی قاب در جهت قطر آن است، بنابراین تغییر در خروج از محوری فرکانس آن مد را تغییر نمی‌دهد.

تابع انتقال به سه صورت محاسبه شده است: (الف) زلزله به صورت تک مؤلفه‌ای در نظر گرفته شده و این مؤلفه در امتداد اصلی سازه وارد می‌شود. تابع انتقال این حالت، در منحنیهای ارائه شده با  $h_0$  نشان داده خواهد شد. (ب) زلزله به صورت تک مؤلفه‌ای در نظر گرفته شده و این مؤلفه در امتداد زاویه بحرانی به سازه وارد می‌شود. تابع انتقال این حالت، در منحنیهای

حال با بسط عبارات  $\sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3$  و استفاده از معادله‌های (۲۶)، (۲۷) و (۲۸)، تابع انتقال شتاب مطلق سیستم ثانویه با در نظر گرفتن اندرکنش دو سیستم و نامتناسب بودن میرایی سیستم مرکب خواهد شد:

$$|H(\omega)|^2 = H'_c \cos^2(\theta) + H'_s \sin^2(\theta) + H'_{cs} \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (۸۹)$$

که در آن:

$$H'_c = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \bar{\varphi}_{N+1,k} \left\{ \sum_{a=1}^{N+1} |H_a|^2 \left[ \left( A_{jka11} \omega_a^4 + B_{jka11} \omega_a^2 \omega^2 \right) + \alpha \left( A_{jka22} \omega_a^4 + B_{jka22} \omega_a^2 \omega^2 \right) \right] + 2 \sum_{a=1}^N \sum_{b=a+1}^{N+1} \left[ \left( A_{jka1l} \omega^6 + B_{jka1l} \omega^4 + C_{jka1l} \omega^2 + D_{jka1l} \right) + \alpha \left( A_{jkab22} \omega^6 + B_{jkab22} \omega^4 + C_{jkab22} \omega^2 + D_{jkab22} \right) \right] \right\} |H_a|^2 |H_b|^2 \quad (۹۰)$$

$$H'_s = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \bar{\varphi}_{N+1,k} \left\{ \sum_{a=1}^{N+1} |H_a|^2 \left[ \left( A_{jka22} \omega_a^4 + B_{jka22} \omega_a^2 \omega^2 \right) + \alpha \left( A_{jka11} \omega_a^4 + B_{jka11} \omega_a^2 \omega^2 \right) \right] + 2 \sum_{a=1}^N \sum_{b=a+1}^{N+1} \left[ \left( A_{jkab22} \omega^6 + B_{jkab22} \omega^4 + C_{jkab22} \omega^2 + D_{jkab22} \right) + \alpha \left( A_{jkab11} \omega^6 + B_{jkab11} \omega^4 + C_{jkab11} \omega^2 + D_{jkab11} \right) \right] \right\} |H_a|^2 |H_b|^2 \quad (۹۱)$$

$$H'_{cs} = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \bar{\varphi}_{N+1,k} \left\{ \sum_{a=1}^{N+1} \left( A_{jka12} \omega_a^4 + B_{jka12} \omega_a^2 \omega^2 + A_{jka21} \omega_b^4 + B_{jka21} \omega_b^2 \omega^2 \right) (\alpha - 1) |H_a|^2 + 2 \sum_{a=1}^N \sum_{b=a+1}^{N+1} \left( A_{jka21} \omega_a^4 + B_{jka21} \omega_a^2 \omega^2 + A_{jka12} \omega_b^4 + B_{jka12} \omega_b^2 \omega^2 \right) (\alpha - 1) |H_a|^2 |H_b|^2 \right\} \quad (۹۲)$$

معادله (۸۹) تابع انتقال شتاب مطلق سیستم ثانویه با در نظر گرفتن اثر اندرکنش و با میرایی نامتناسب بر حسب زاویه بین

جدول ۱- فرکانسهای طبیعی قاب با خروج از محوری های مختلف (rad/sec)

| شماره مود | e=0    | e=0.05 | e=0.10 | e=0.15 | e=0.20 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ۱         | ۶/۴۰   | ۶/۳۵   | ۶/۲۲   | ۶/۰۳   | ۵/۷۹   |
| ۲         | ۶/۴۰   | ۶/۴۰   | ۶/۴۰   | ۶/۴۰   | ۶/۴۰   |
| ۳         | ۱۱/۰۸  | ۱۱/۱۷  | ۱۱/۴۰  | ۱۱/۷۷  | ۱۲/۲۴  |
| ۴         | ۱۹/۰۰  | ۱۸/۸۶  | ۱۸/۴۶  | ۱۷/۸۹  | ۱۷/۲۰  |
| ۵         | ۱۹/۰۰  | ۱۹/۰۰  | ۱۹/۰۰  | ۱۹/۰۰  | ۱۹/۰۰  |
| ۶         | ۳۱/۰۱  | ۳۰/۷۸  | ۳۰/۱۴  | ۲۹/۲۰  | ۲۸/۰۷  |
| ۷         | ۳۱/۰۱  | ۳۱/۰۱  | ۳۱/۰۱  | ۳۱/۰۱  | ۳۱/۰۱  |
| ۸         | ۳۲/۹۰  | ۳۳/۱۵  | ۳۳/۸۵  | ۳۴/۹۴  | ۳۶/۳۴  |
| ۹         | ۴۲/۱۵  | ۴۱/۸۴  | ۴۰/۹۷  | ۳۹/۶۹  | ۳۸/۱۶  |
| ۱۰        | ۴۲/۱۵  | ۴۲/۱۵  | ۴۲/۱۵  | ۴۲/۱۵  | ۴۲/۱۵  |
| ۱۱        | ۵۲/۲۹  | ۵۱/۹۱  | ۵۰/۸۳  | ۴۹/۲۴  | ۴۷/۳۴  |
| ۱۲        | ۵۲/۲۹  | ۵۲/۲۹  | ۵۲/۲۹  | ۵۲/۲۹  | ۵۲/۲۹  |
| ۱۳        | ۵۳/۷۱  | ۵۴/۱۱  | ۵۵/۲۶  | ۵۷/۰۴  | ۵۵/۵۷  |
| ۱۴        | ۶۱/۳۹  | ۶۰/۹۴  | ۵۹/۶۷  | ۵۷/۸۱  | ۵۹/۳۳  |
| ۱۵        | ۶۱/۳۹  | ۶۱/۳۹  | ۶۱/۳۹  | ۶۱/۳۹  | ۶۱/۳۹  |
| ۱۶        | ۶۹/۳۴  | ۶۸/۸۲  | ۶۷/۴۰  | ۶۵/۲۹  | ۶۲/۷۷  |
| ۱۷        | ۶۹/۳۴  | ۶۹/۳۴  | ۶۹/۳۴  | ۶۹/۳۴  | ۶۸/۷۱  |
| ۱۸        | ۷۳/۰۱  | ۷۳/۵۵  | ۷۳/۷۷  | ۷۱/۴۷  | ۶۹/۳۴  |
| ۱۹        | ۷۵/۹۰  | ۷۵/۳۴  | ۷۵/۱۱  | ۷۵/۹۰  | ۷۳/۱۵  |
| ۲۰        | ۷۵/۹۰  | ۷۵/۹۰  | ۷۵/۹۰  | ۷۶/۰۹  | ۷۵/۸۹  |
| ۲۱        | ۸۰/۸۰  | ۸۰/۲۰  | ۷۸/۵۴  | ۷۷/۵۴  | ۷۵/۹۰  |
| ۲۲        | ۸۰/۸۰  | ۸۰/۸۰  | ۸۰/۸۰  | ۷۸/۹۴  | ۸۰/۶۵  |
| ۲۳        | ۸۳/۸۳  | ۸۳/۲۱  | ۸۱/۴۸  | ۸۰/۸۰  | ۸۰/۸۰  |
| ۲۴        | ۸۳/۸۳  | ۸۳/۸۳  | ۸۳/۸۳  | ۸۳/۸۳  | ۸۳/۸۳  |
| ۲۵        | ۹۰/۵۷  | ۹۱/۲۴  | ۹۳/۱۸  | ۹۶/۱۸  | ۱۰۰/۰۴ |
| ۲۶        | ۱۰۶/۳۳ | ۱۰۷/۱۱ | ۱۰۹/۳۹ | ۱۱۲/۹۱ | ۱۱۷/۴۵ |
| ۲۷        | ۱۲۰/۰۹ | ۱۲۰/۹۸ | ۱۲۳/۵۵ | ۱۲۷/۵۳ | ۱۳۲/۶۵ |
| ۲۸        | ۱۳۱/۴۶ | ۱۳۲/۴۳ | ۱۳۵/۲۴ | ۱۳۹/۶۰ | ۱۴۵/۲۱ |
| ۲۹        | ۱۳۹/۹۵ | ۱۴۰/۹۹ | ۱۴۳/۹۸ | ۱۴۸/۶۲ | ۱۵۴/۵۹ |
| ۳۰        | ۱۴۵/۲۰ | ۱۴۶/۲۷ | ۱۴۹/۳۷ | ۱۵۴/۱۹ | ۱۶۰/۳۸ |

سختی طبقه اول  $K_x = K_y = 3.5 \times 10^5 \text{ KN/m}$

سختی سایر طبقات  $K_x = K_y = 3.15 \times 10^5 \text{ KN/m}$

سختی پیچشی طبقه اول  $K_\theta = 6.3 \times 10^6 \text{ KN-m}$

سختی پیچشی سایر طبقات  $K_\theta = 5.67 \times 10^6 \text{ KN-m}$

جرم طبقه اول  $m = 210 \text{ ton}$

جرم سایر طبقات  $m = 175 \text{ ton}$

لنگر اینرسی طبقه اول  $I_0 = 1260 \text{ ton-m}^2$

لنگر اینرسی سایر طبقات  $I_0 = 1050 \text{ ton-m}^2$



شکل ۱- قاب ۱۰ طبقه پیچشی

فاصله بین منحنیهای  $h_0$  و  $h_1$  زیادتر شده، و بنابراین اهمیت در نظر گرفتن چندمؤلفه‌ای بودن زلزله بیشتر می‌شود. برای تأکید بر اهمیت چندمؤلفه‌ای بودن زلزله، خطاهای ناشی از در نظر نگرفتن آن روی تابع انتقال در شکل (۳) نشان داده شده‌اند. در این شکل دیده می‌شود که بیشترین خطاها در حالت هم فرکانسی اتفاق می‌افتد. در خروج از محوریهای کوچک، خطاها فقط در حالت هم فرکانسی زیاد است، در صورتی که در خروج از محوری های بزرگ چه در حالت هم فرکانسی و چه در حالت غیر هم فرکانسی خطاها بزرگ است و لازم است حتماً اثر چندمؤلفه‌ای بودن در نظر گرفته شود. همچنین دیده می‌شود که خطای  $e_1$  بسیار کمتر از  $e_0$  است. در نتیجه در حالت‌های غیر هم فرکانسی می‌توان تنها یک مؤلفه را در نظر گرفت ولی باید آن مؤلفه را در امتداد زاویه بحرانی به سازه وارد کرد.

همچنین برای واضح شدن نتایج، مقادیر تابع انتقال برای خروج از محوریهای ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد در جدول (۲) آورده شده است. مقادیر تابع انتقال در فرکانس های  $6/4$  و  $19/0$  (هم فرکانس با مودهای اول و دوم) و  $6/0$  و  $12/5$  (غیر هم فرکانس) رادیان بر ثانیه و برای طبقات ۱، ۵، و ۱۰ در این جدول نوشته شده است. سیستم ثانویه در نظر گرفته شده دارای فرکانس  $6/4$  رادیان بر ثانیه و ضریب میرایی ۲ درصد است و تحلیل بدون اندرکنش انجام شده است. در هر سطر مربوط به

ارائه شده با  $h_1$  نشان داده خواهد شد. (ج) زلزله به صورت دو مؤلفه‌ای در نظر گرفته شده و این مؤلفه‌ها در امتداد زاویه بحرانی به سازه وارد می‌شود. این حالت در منحنیهای ارائه شده با  $h$  نشان داده خواهند شد. در نظر گرفتن زلزله به صورت چند مؤلفه‌ای سبب می‌شود که تابع انتقال بیشتر از وقتی شود که زلزله به صورت تک مؤلفه‌ای در نظر گرفته می‌شود. به بیان دیگر در نظر نگرفتن چند مؤلفه‌ای بودن زلزله باعث می‌شود خطایی در برآورد واقعی مقدار تابع انتقال به وجود آید. این مقدار خطا در منحنیهایی که ارائه خواهند شد برای  $h_0$  و  $h_1$  نسبت به  $h$ ، به ترتیب با  $e_0$  و  $e_1$  نشان داده شده‌اند.

### الف - اثر خروج از محوری

برای بررسی تأثیر خروج از محوری روی تابع انتقال، این تابع برای طبقات و خروج از محوری های مختلف به دست آمده است. به عنوان نمونه تابع انتقال طبقه پنجم برای خروج از محوری های ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد، در شکل ۲ ترسیم شده است. در این شکل سیستم بدون اندرکنش، میرایی سیستم متناسب (با ضریب میرایی  $\xi_p = \xi_s = 0.02$ )، فرکانس سیستم ثانویه برابر با  $6/4$  رادیان بر ثانیه، یعنی هم فرکانس با مود اول، و ضریب همبستگی بین مؤلفه ها برابر  $1/0$  در نظر گرفته شده است. چنانچه در شکل دیده می‌شود، با افزایش خروج از محوری

جدول ۲- اثر خروج از محوری

| خروج از محوری | فرکانس (rad/ sec) | طبقه اول |          |       | طبقه پنجم |          |       | طبقه دهم |          |
|---------------|-------------------|----------|----------|-------|-----------|----------|-------|----------|----------|
|               |                   | $ h_0 $  | Error(%) | $ h $ | $ h_0 $   | Error(%) | $ h $ | $ h_0 $  | Error(%) |
|               |                   |          |          |       |           |          |       |          |          |
| ٪ ۵           | ۶/۰               | ۱۸/۰     | ۱۸/۰     | ۱۸/۰  | ۵۷/۷      | ۵۷/۸     | ۵۷/۹  | ۸۱/۰     | ۸۱/۱     |
|               |                   | ۰/۰      | ۰/۰      | ۰/۰   | ۰/۱       | ۰/۰      | ۰/۱   | ۰/۱      | ۰/۰      |
|               | ۶/۴               | ۱۰/۲     | ۱۰/۳     | ۱۰/۴  | ۵۱/۰      | ۵۱/۰     | ۵۱/۸  | ۷۵/۵     | ۷۵/۶     |
|               |                   | ۱/۶      | ۱/۳      | ۱/۵   | ۱/۶       | ۱/۵      | ۱/۶   | ۱/۶      | ۱/۵      |
|               | ۱۲/۵              | ۰/۳۴     | ۰/۳۴     | ۰/۳۴  | ۰/۰       | ۰/۰      | ۰/۰   | ۰/۳۶     | ۰/۳۶     |
|               |                   | ۰/۰      | ۰/۰      | ۰/۰   | ۰/۰       | ۰/۰      | ۰/۰   | ۰/۰      | ۰/۰      |
| ۱۹/۰          | ۰/۵۴              | ۰/۵۴     | ۰/۵۵     | ۱/۰۵  | ۱/۰۵      | ۱/۰۷     | ۱/۲۸  | ۱/۲۸     |          |
|               | ۱/۶               | ۱/۳      | ۱/۵      | ۱/۶   | ۱/۵       | ۱/۶      | ۱/۶   | ۱/۶      |          |
| ٪ ۱۰          | ۶/۰               | ۲۰/۲     | ۲۰/۴     | ۲۰/۵  | ۶۹/۵      | ۷۱/۱     | ۷۱/۴  | ۹۸/۷     | ۱۰/۱     |
|               |                   | ۱/۳      | ۰/۳      | ۰/۴   | ۲/۷       | ۰/۴      | ۰/۴   | ۲/۹      | ۰/۴      |
|               | ۶/۴               | ۷۲/۳     | ۸۱/۸     | ۸۴/۸  | ۳۷۳       | ۴۰۳      | ۴۳۳   | ۵۵۵      | ۵۹۷      |
|               |                   | ۱۴/۷     | ۰/۳      | ۰/۳   | ۱۳/۸      | ۶/۹      | ۶/۹   | ۱۳/۷     | ۷/۲      |
|               | ۱۲/۵              | ۰/۳      | ۰/۳      | ۰/۳   | ۰/۰۲      | ۰/۰۲     | ۰/۰۳  | ۰/۳۸     | ۰/۳۸     |
|               |                   | ۰/۰      | ۰/۰      | ۰/۰   | ۸/۲       | ۸/۳      | ۸/۲   | ۰/۰      | ۰/۰      |
| ۱۹/۰          | ۰/۳۸              | ۰/۴۳     | ۰/۴۵     | ۰/۷۹  | ۰/۸۴      | ۰/۹۰     | ۰/۹۴  | ۱/۰۲     |          |
|               | ۱۴/۶              | ۳/۷      | ۳/۷      | ۱۳/۲  | ۷/۶       | ۷/۶      | ۱۳/۷  | ۷/۱      |          |
| ٪ ۲۰          | ۶                 | ۷/۸      | ۱۲/۹     | ۱۴/۳  | ۲۷/۷      | ۶۰/۶     | ۶۵/۵  | ۴۱/۹     | ۹۰/۶     |
|               |                   | ۴۵/۲     | ۹/۶      | ۹/۶   | ۵۷/۸      | ۷/۶      | ۷/۶   | ۵۷/۰     | ۶/۹      |
|               | ۶/۴               | ۵۸/۵     | ۷۹/۰     | ۷۹/۰  | ۲۸۲       | ۳۸۱      | ۳۸۶   | ۴۱۸      | ۵۶۴      |
|               |                   | ۲۶/۰     | ۰/۰      | ۰/۰   | ۲۷/۰      | ۱/۱      | ۱/۱   | ۲۶/۹     | ۱/۴      |
|               | ۱۲/۵              | ۰/۳۴     | ۰/۳۴     | ۰/۳۴  | ۰/۱۵      | ۰/۲۱     | ۰/۲۱  | ۰/۵۶     | ۰/۶۰     |
|               |                   | ۰/۳      | ۰/۳      | ۰/۳   | ۲۸/۵      | ۰/۴      | ۰/۴   | ۸/۲      | ۱/۴      |
| ۱۹            | ۰/۳۱              | ۰/۴۱     | ۰/۴۱     | ۰/۵۹  | ۰/۷۸      | ۰/۸۰     | ۰/۷۱  | ۰/۹۶     |          |
|               | ۲۶/۰              | ۰/۰      | ۰/۰      | ۲۶/۳  | ۲/۲       | ۲/۲      | ۲۷/۰  | ۱/۴      |          |

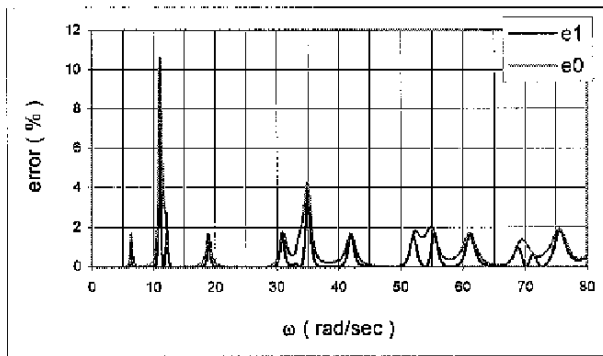
محاسبه شده است. لازم به ذکر است که تابع انتقال در حالت  $h_1$  برابر با وقتی است که ضریب همبستگی بین مؤلفه های زلزله صفر باشد. نتایج حاصل برای تابع انتقال در شکل (۴) و خطاهای در نظر نگرفتن چند مؤلفه ای بودن زلزله در شکل (۵) نشان داده شده است. نتیجه ای که از بررسی این دو شکل گرفته می شود این است که تغییر در ضریب  $\alpha$  تغییر زیادی در مقدار تابع انتقال نمی دهد. حتی اگر  $\alpha=0$  باشد خطای در نظر نگرفتن چند مؤلفه ای بودن زلزله به جز در حالت های هم فرکانسی خیلی زیاد نیست. این نتیجه تأکیدی بر نتیجه قبلی است که در موارد غیر هم فرکانسی اگر زلزله به صورت تک مؤلفه ای در نظر گرفته شده و این مؤلفه در امتداد زاویه بحرانی به سیستم اولیه وارد شود خطاها کم و قابل چشم پوشی است.

ستونهای  $|h_0|$  و  $|h_1|$ ، دو ردیف وجود دارد که ردیف بالا مقدار تابع انتقال و ردیف پایین خطای نسبی آن نسبت به  $|h|$  است. با افزایش خروج از محوری خطاها افزایش می یابند. در طبقات مختلف خطاها تقریباً ثابت می ماند، به عبارت دیگر اثر چند مؤلفه ای بودن تقریباً برای کلیه طبقات برابر است. در اکثر خروج از محورها در حالت های هم فرکانسی، خطاها بیشتر از حالت های غیر هم فرکانسی است.

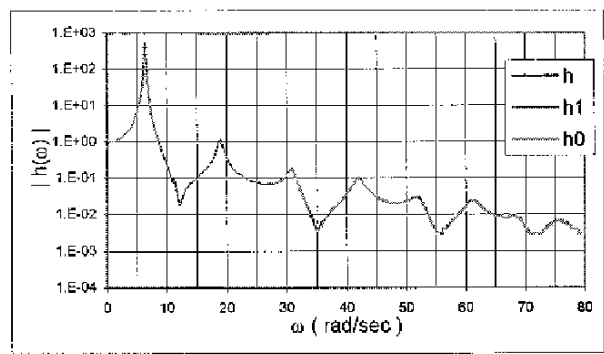
#### ب - اثر همبستگی بین مؤلفه های زلزله

برای بررسی اثر همبستگی بین مؤلفه ها، چهار ضریب همبستگی ۱/۰، ۰/۷۵ و ۰/۵ و ۰/۲۵ در نظر گرفته شده و برای خروج از محوری ۲۰ درصد تابع انتقال طبقه ۵ برای سیستم بدون اندرکنش، با میرایی متناسب و با ضریب میرایی ۰/۰۲

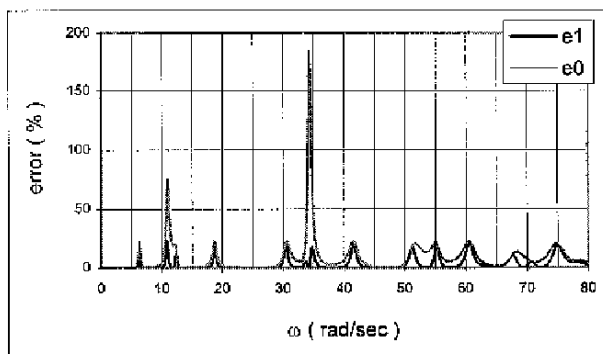




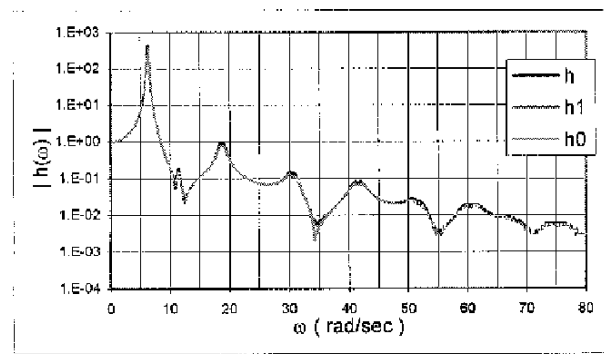
الف- خروج از محوری ۵%



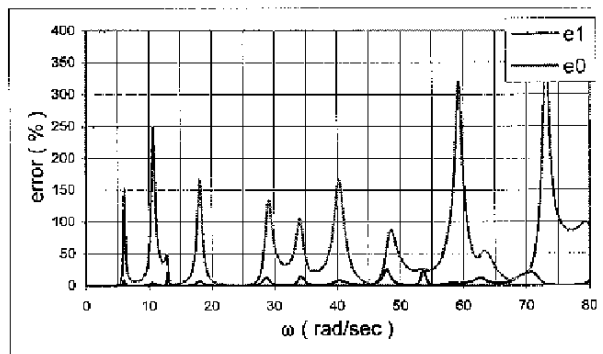
الف- خروج از محوری ۵%



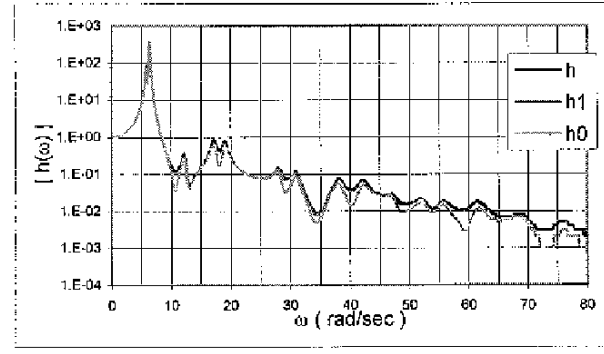
ب- خروج از محوری ۱۰%



ب- خروج از محوری ۱۰%



ج- خروج از محوری ۲۰%



ج- خروج از محوری ۲۰%

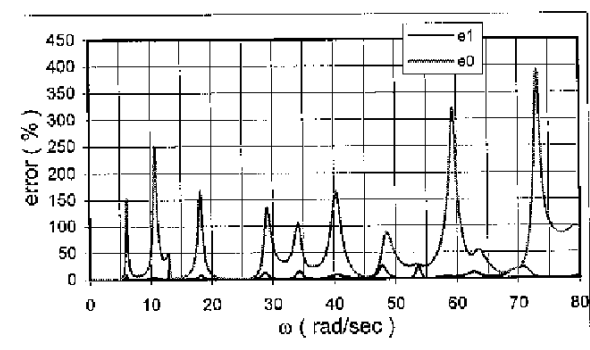
شکل ۳. خطاهای خروج از محوری

شکل ۲- تأثیر خروج از محوری روی تابع انتقال

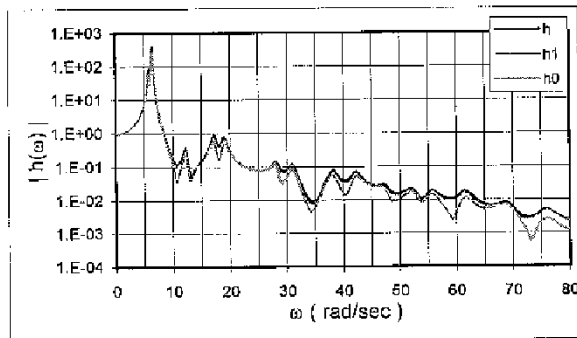
محاسبه شده است. تابع انتقال برای حالت هم فرکانسی با مود اول در شکل (۲-ج) و برای دو حالت دیگر در شکل (۶) و خطاهای آن ها نیز به ترتیب در شکل‌های (۳-ج) و (۷) ترسیم شده است. بررسی شکل‌های (۲-ج) و (۶) نشان می‌دهد که هم فرکانسی با مود اول، مقدار تابع انتقال را بسیار بیشتر از هم فرکانسی با مود دوم یا غیر هم فرکانسی افزایش می‌دهد. به طور مثال برای سیستم هم فرکانس با مود اول، مقدار تابع انتقال در

### ج - اثر هم فرکانسی

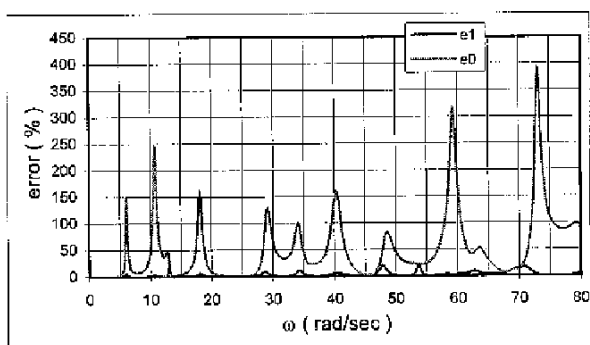
به منظور مطالعه اثر هم فرکانسی با مودهای مختلف فرکانس سیستم ثانویه،  $6/4$  رادیان بر ثانیه، یعنی هم فرکانس با مود اول،  $15/0$  رادیان بر ثانیه، یعنی غیر هم فرکانس، و  $19/0$  رادیان بر ثانیه، یعنی هم فرکانس با مود دوم، در نظر گرفته شده و برای سیستم بدون اندرکنش و با میرایی متناسب تابع انتقال طبقه پنجم و خطاهای آن برای خروج از محوری ۲۰ درصد



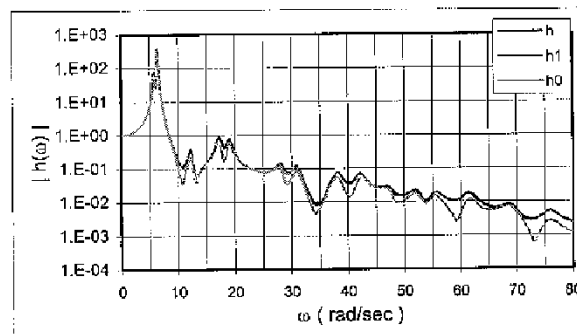
الف -  $\alpha=1$



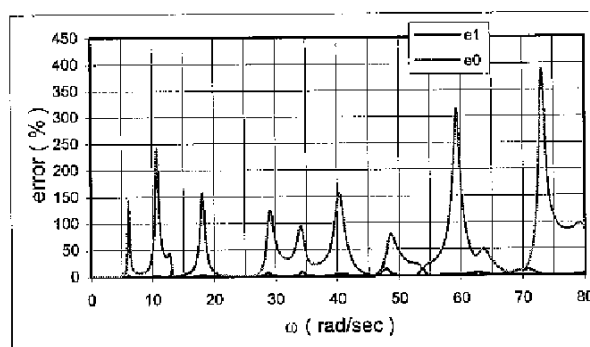
الف -  $\alpha=1$



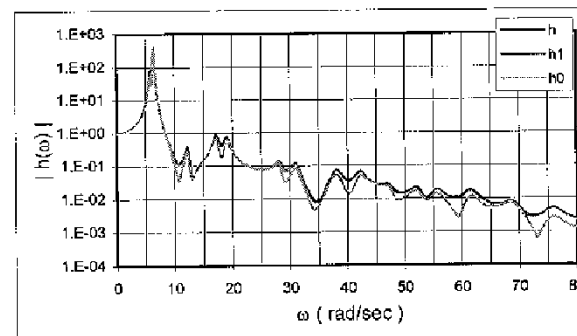
ب -  $\alpha=0.75$



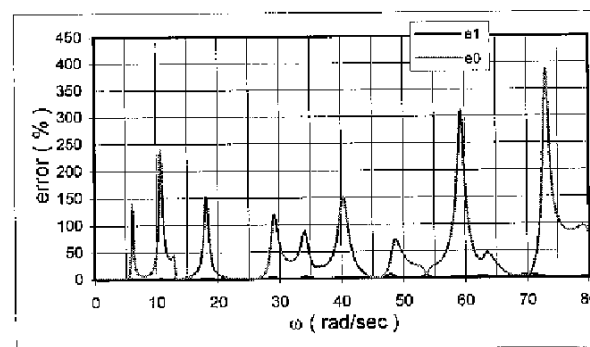
ب -  $\alpha=0.75$



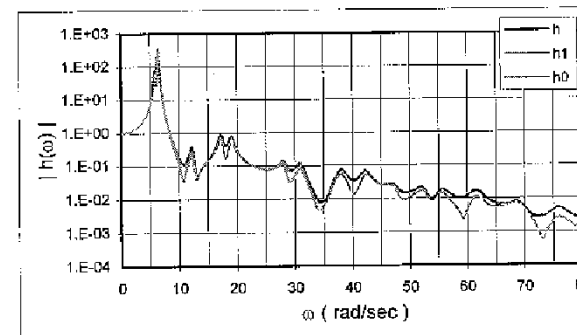
ج -  $\alpha=0.50$



ج -  $\alpha=0.50$



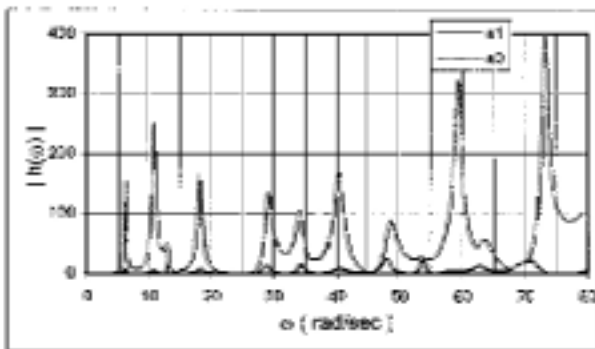
د -  $\alpha=0.25$



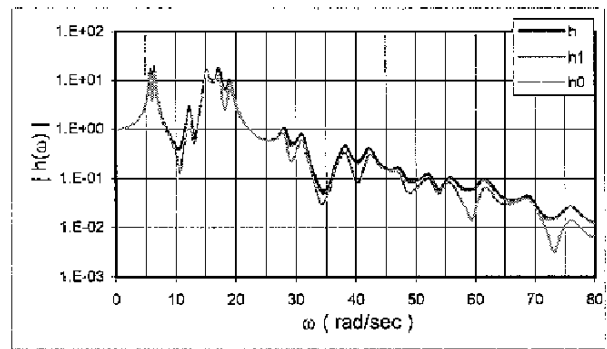
د -  $\alpha=0.25$

شکل ۵- خطاهای ضرب همبستگی بین مؤلفه‌ها

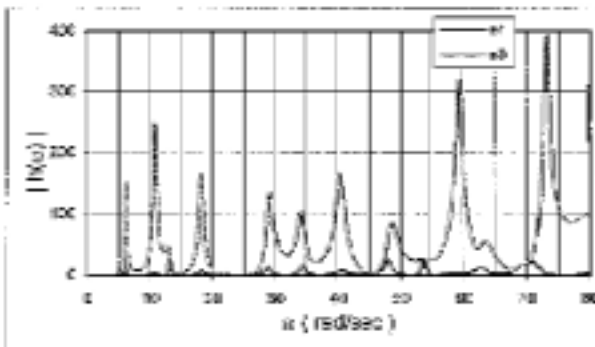
شکل ۴- تأثیر ضرب همبستگی بین مؤلفه‌ها



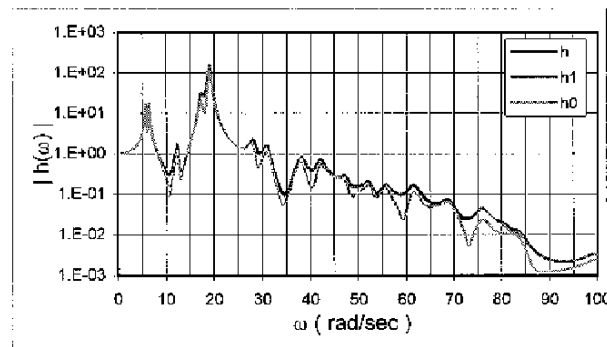
الف- فرکانس سیستم ثانویه ۱۵ رادین بر ثانیه



الف- فرکانس سیستم ثانویه ۱۵ رادین بر ثانیه



ب- فرکانس سیستم ثانویه ۱۹ رادین بر ثانیه



ب- فرکانس سیستم ثانویه ۱۹ رادین بر ثانیه

شکل ۷- خطاهای هم فرکانسی

شکل ۶- تأثیر هم فرکانسی روی تابع انتقال

می‌کند. در این قسمت ابتدا اثر اندرکنش روی فرکانسهای سیستم مرکب و سپس روی تابع انتقال مورد بحث قرار می‌گیرد. عامل مهم در موضوع اندرکنش، نسبت جرم سیستم ثانویه به جرم طبقه و فرکانس سیستم ثانویه است. برای بررسی این دو عامل، فرکانسهای سیستم مرکب بدون در نظر گرفتن اثر اندرکنش و با در نظر گرفتن اثر اندرکنش، با نسبتهای جرم ۰/۰۰۱، ۰/۰۱، ۰/۱، و برای هم فرکانسی با مود اول و دوم (فرکانس های ۶/۴ و ۱۹/۰ رادین بر ثانیه) و غیر هم فرکانسی (فرکانس ۱۵/۰ رادین بر ثانیه) محاسبه شده است. خروج از محوری سیستم برابر ۲۰٪ و سیستم ثانویه در طبقه پنجم قرار داده شده است. برای مقایسه فرکانسهای ۸ مود اول سیستم مرکب در جدول (۳) آورده شده است. نکته‌ای که در این جدول دیده می‌شود این است که سیستم ثانویه یک مود جدید در سیستم مرکب به وجود می‌آورد. در حالت هم فرکانسی، این مود جدید فقط فرکانس مودهای نزدیک به مود هم فرکانس را

فرکانس ۶/۴ برابر با ۳۸۶ است، در حالی که برای سیستم هم فرکانس با مود دوم در فرکانس ۱۹/۰ برابر با ۱۵۵/۲ و برای سیستم غیر هم فرکانس در فرکانس ۱۵/۰ برابر با ۱۶/۹ است. بررسی شکل‌های (۳-ج) و (۷) نشان می‌دهد که تغییر در فرکانس سیستم ثانویه تغییری در خطای  $e_0$  و  $e_1$  به وجود نمی‌آورد. این موضوع چه برای هم فرکانسی و چه برای غیر هم فرکانسی صادق است. به بیان دیگر مقدار خطای در نظر نگرفتن چند مؤلفه‌ای بودن زلزله با تغییر دادن فرکانس سیستم ثانویه تغییر زیادی نمی‌کند.

#### د- اثر اندرکنش

موضوع دیگری که مورد بررسی قرار گرفته است، اثر اندرکنش است. در نظر گرفتن اندرکنش بین دو سیستم، روی خصوصیات دینامیکی سیستم مرکب تأثیر می‌گذارد و چون تابع انتقال به این خصوصیات وابسته است، تابع انتقال نیز تغییر

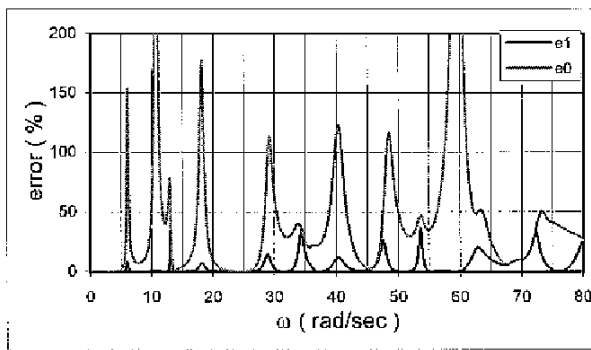
جدول ۳- فرکانسهای سیستم مرکب

| فرکانس سیستم ثانویه | نسبت جرم = ۰ | نسبت جرم = ۰/۰۰۱ | نسبت جرم = ۰/۰۱ | نسبت جرم = ۰/۱ |
|---------------------|--------------|------------------|-----------------|----------------|
| ۶/۴                 | ۵/۷۹         | ۵/۷۹             | ۵/۷۹            | ۵/۷۳           |
|                     | ۶/۴۰         | ۶/۳۸             | ۶/۳۴            | ۶/۲۳           |
|                     | ۱۲/۲۴        | ۶/۴۲             | ۶/۴۷            | ۶/۶۴           |
|                     | ۱۷/۲۰        | ۱۲/۲۴            | ۱۲/۲۴           | ۱۲/۲۴          |
|                     | ۱۹/۰۰        | ۱۷/۲۰            | ۱۷/۲۰           | ۱۷/۲۱          |
|                     | ۲۸/۰۷        | ۱۹/۰۰            | ۱۹/۰۰           | ۱۹/۰۰          |
|                     | ۳۱/۰۱        | ۲۸/۰۷            | ۲۸/۰۷           | ۲۸/۰۸          |
|                     | ۳۶/۳۴        | ۳۱/۰۱            | ۳۱/۰۱           | ۳۱/۰۱          |
| ۱۵/۰                | ۵/۷۹         | ۵/۷۹             | ۵/۷۹            | ۵/۷۸           |
|                     | ۶/۴۰         | ۶/۴۰             | ۶/۴۰            | ۶/۳۸           |
|                     | ۱۲/۲۴        | ۱۲/۲۴            | ۱۲/۲۴           | ۱۲/۲۴          |
|                     | ۱۷/۲۰        | ۱۵/۰۰            | ۱۴/۹۸           | ۱۴/۸۴          |
|                     | ۱۹/۰۰        | ۱۷/۲۰            | ۱۷/۲۱           | ۱۷/۳۳          |
|                     | ۲۸/۰۷        | ۱۹/۰۰            | ۱۹/۰۰           | ۱۹/۰۹          |
|                     | ۳۱/۰۱        | ۲۸/۰۷            | ۲۸/۰۷           | ۲۸/۰۹          |
|                     | ۳۶/۳۴        | ۳۱/۰۱            | ۳۱/۰۱           | ۳۱/۰۳          |
| ۱۹/۰                | ۵/۷۹         | ۵/۷۹             | ۵/۷۹            | ۵/۷۸           |
|                     | ۶/۴۰         | ۶/۴۰             | ۶/۴۰            | ۶/۳۸           |
|                     | ۱۲/۲۴        | ۱۲/۲۴            | ۱۲/۲۴           | ۱۲/۲۴          |
|                     | ۱۷/۲۰        | ۱۷/۱۹            | ۱۷/۱۷           | ۱۶/۹۴          |
|                     | ۱۹/۰۰        | ۱۸/۹۳            | ۱۸/۷۸           | ۱۸/۴۴          |
|                     | ۲۸/۰۷        | ۱۹/۰۷            | ۱۹/۲۴           | ۱۹/۸۳          |
|                     | ۳۱/۰۱        | ۲۸/۰۷            | ۲۸/۰۸           | ۲۸/۱۱          |
|                     | ۳۶/۳۴        | ۳۱/۰۱            | ۳۱/۰۱           | ۳۱/۰۴          |

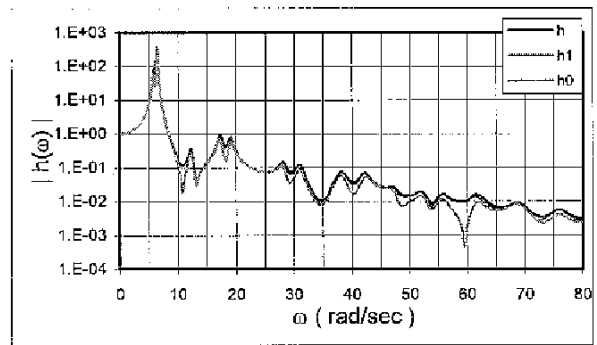
تغییر می‌دهد و فرکانس سایر مودها تحت تأثیر قرار نمی‌گیرند. تغییر به وجود آمده برای سیستمهای ثانویه سبک بسیار کم و برای سیستمهای ثانویه سنگین بیشتر است. در حالت غیر هم فرکانسی، فرکانسهای سیستم اولیه تغییر نمی‌کند و فقط یک مود جدید به وجود می‌آید که فرکانس آن با فرکانس سیستم ثانویه برابر است.

مقادیر تابع انتقال برای نسبتهای مختلف جرم در شکل (۸) ترسیم شده است. در این شکل سیستم ثانویه در طبقه پنجم قرار داده شده و فرکانس آن برابر با ۶/۴ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است. میرایی سیستمهای اولیه و ثانویه ۰/۰۲ و خروج از

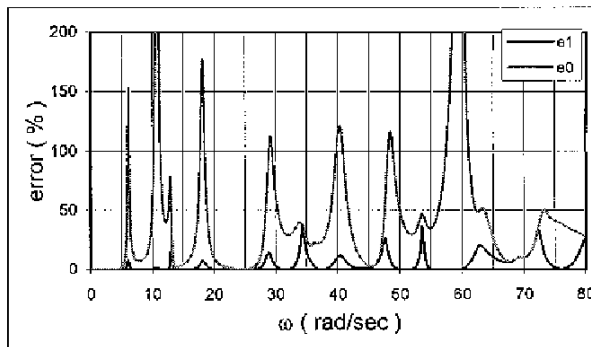
محوری ۲۰٪ است. با مقایسه این شکل و شکل (۲-ج)، که برای سیستم بدون اندرکنش است، نتیجه می‌شود که در نظر گرفتن اندرکنش مقدار تابع انتقال را کاهش می‌دهد. در حالت هم فرکانسی و برای نسبتهای بزرگ جرم مقدار کاهش تابع انتقال بسیار زیاد بوده و قابل چشم پوشی نیست. مثلاً مقدار تابع انتقال در فرکانس ۶/۴ بدون در نظر گرفتن اندرکنش برابر با ۳۸۵/۸ ولی با منظور داشتن اندرکنش و برای نسبت های جرم ۰/۰۰۱، ۰/۰۱ و ۰/۱ به ترتیب برابر با: ۳۷۴/۵، ۲۹۹/۷ و ۹۹/۴ می‌شود. در این مورد نیز در نظر گرفتن چند مؤلفه‌ای بودن زلزله در حالتهای هم فرکانسی مهم می‌شود. برای نشان دادن



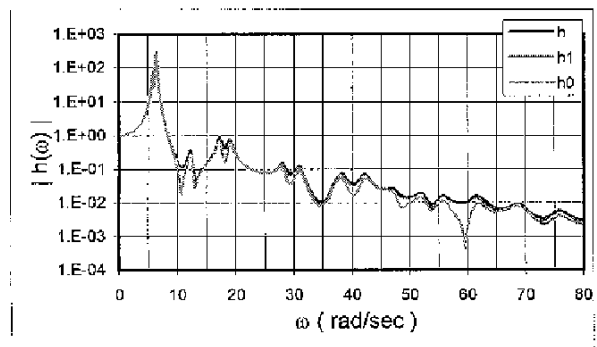
الف - نسبت جرم ۰/۰۱



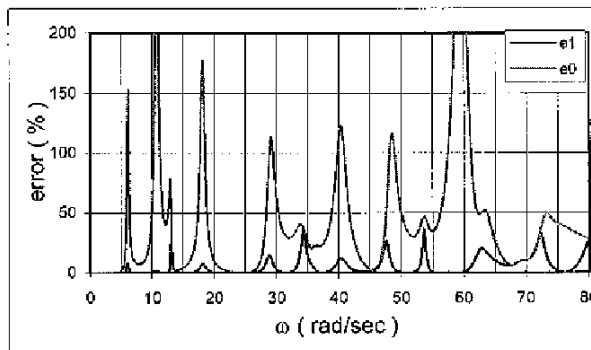
الف - نسبت جرم ۰/۰۱



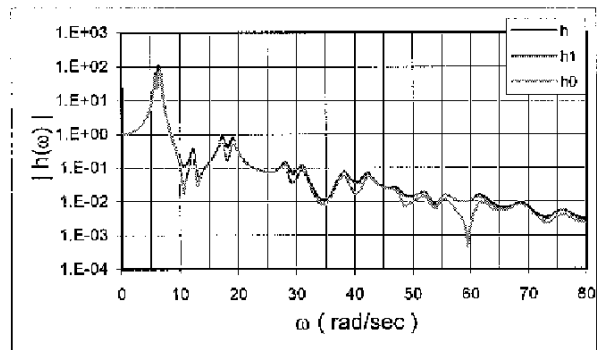
ب- نسبت جرم ۰/۱



ب- نسبت جرم ۰/۱



ج- نسبت جرم ۰/۱



ج- نسبت جرم ۰/۱

شکل ۹- خطاهای نسبت جرم

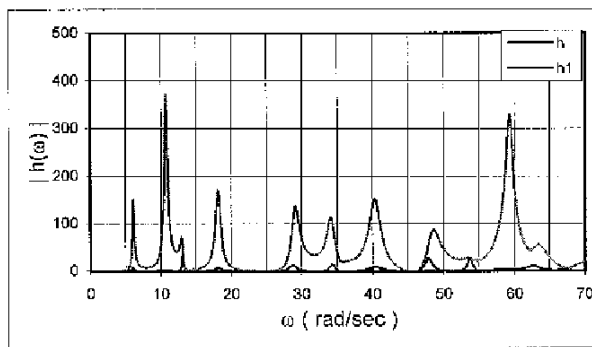
شکل ۸- تأثیر نسبت جرم

چند خطای ناشی از در نظر نگرفتن چند مؤلفه‌ای بودن زلزله زیاد است ولی برای نسبت‌های مختلف جرم مقدار آن تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

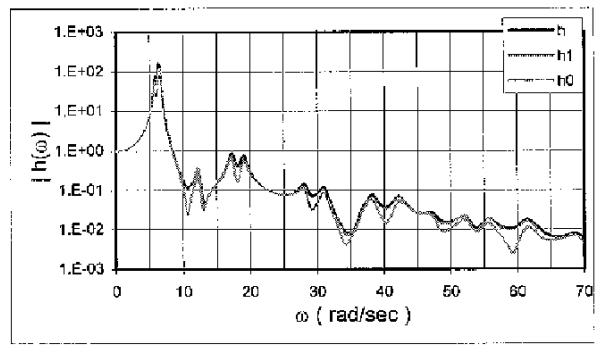
#### ه - اثر نامتناسب بودن میرایی

معمولاً میرایی سیستم‌های مرکبی که در آنها بین دو سیستم، اندرکنش وجود دارد و خصوصیات میرایی دو سیستم با یکدیگر متفاوت است، به صورت نامتناسب است. برای بررسی

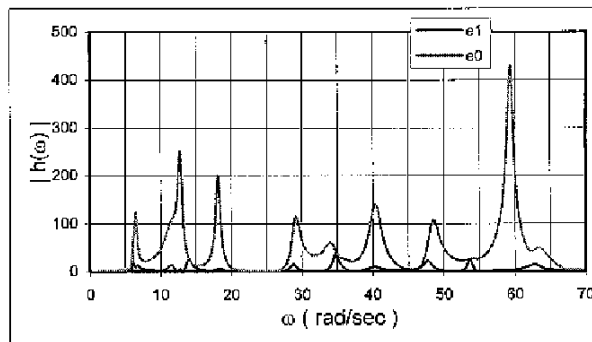
اهمیت چند مؤلفه‌ای بودن زلزله خطاهای ناشی از در نظر نگرفتن آن در شکل (۹) ترسیم شده است. خطاها در حالت هم فرکانسی بسیار زیاد و غیر قابل صرف نظر کردن است ولی در حالت غیر هم فرکانسی در حالت‌هایی که مؤلفه بزرگ زلزله در امتداد زاویه بحرانی به سیستم وارد شود، یا زلزله به صورت چند مؤلفه‌ای در نظر گرفته شود، مقدار تابع انتقال تغییر زیادی نمی‌کند. نکته دیگر اینکه در این مورد نیز مثل مورد هم فرکانسی با تغییر نسبت جرم خطاها تغییر نمی‌کند. پس می‌توان گفت هر



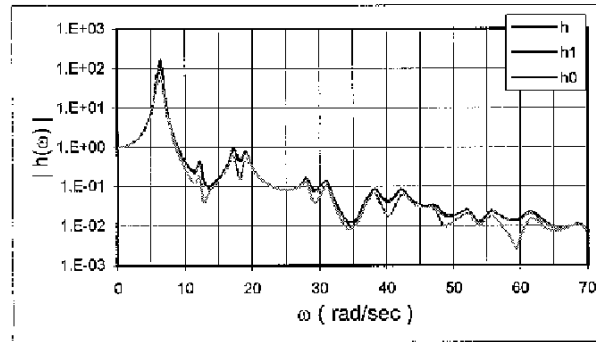
الف -  $\xi_p=0.02, \xi_s=0.02$



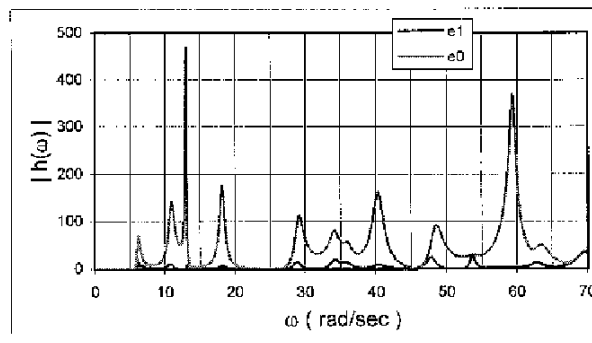
الف -  $\xi_p=0.02, \xi_s=0.02$



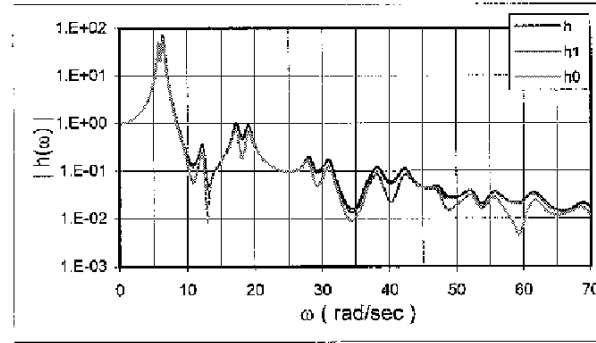
ب -  $\xi_p=0.02, \xi_s=0.05$



ب -  $\xi_p=0.02, \xi_s=0.05$



ج -  $\xi_p=0.02, \xi_s=0.10$



ج -  $\xi_p=0.02, \xi_s=0.10$

شکل ۱۱- خطاهای میرایی نامتناسب

وجود دارد استفاده شده است. ماتریس میرایی سیستم مرکب هم در معادله‌های (۳۶) و (۳۸) داده شده است. تابع انتقال در شکل (۱۰) و خطای در نظر نگرفتن چند مؤلفه‌ای بودن زلزله در شکل (۱۱) ترسیم شده است. در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود که هر چه میزان نامتناسب بودن میرایی سیستم مرکب بیشتر شود، مقدار تابع انتقال کمتر می‌شود. البته کاهش تابع انتقال بیشتر مربوط به مود هم فرکانس است و در سایر مودها

شکل ۱۰- تأثیر میرایی نامتناسب

اثر نامتناسب بودن میرایی، سیستم مرکب هم فرکانس با مود اول در نظر گرفته شده و سیستم اولیه دارای خروج از محوری ۲۰٪ بوده و جرم سیستم ثانویه، که در طبقه پنجم قرار دارد، ۰/۰۵ جرم سیستم اولیه است. نسبت میرایی سیستم اولیه ۲ درصد و نسبت میرایی سیستم ثانویه ۲، ۵ و ۱۰ درصد در نظر گرفته شده است. ماتریس میرایی سیستم اولیه به صورت متناسب گرفته شده و برای محاسبه آن از روشی که در مرجع [۲۰]

این کاهش قابل توجه نیست. مثلاً مقدار تابع انتقال در فرکانسهای ۶/۴، ۱۵ و ۱۹ رادیان بر ثانیه به ترتیب برای سیستم با میرایی متناسب ۱۶۱/۷۲، ۰/۱۶ و ۰/۸۰، برای سیستم ثانویه با میرایی ۰/۰۵ برابر ۱۵۲/۱، ۰/۱۵ و ۰/۸۰، و برای سیستم ثانویه با میرایی ۰/۱۰ برابر ۶۹/۸، ۰/۱۵ و ۰/۷۱ هستند. خطای در نظر نگرفتن چند مؤلفه‌ای بودن زلزله در مورد h1 در حالت‌های غیر هم فرکانسی کم و قابل صرف نظر کردن است ولی خطای h0 تقریباً در کلیه فرکانسها زیاد و غیر قابل چشم پوشی است.

## ۵- نتیجه گیری

در تحلیل سیستمهای ثانویه مرسوم است که زلزله به صورت تک مؤلفه‌ای در نظر گرفته می‌شود و این مؤلفه در هر یک از امتدادهای اصلی سازه به طور جداگانه وارد شده و پاسخ سیستم ثانویه به دست می‌آید. در این مقاله سعی شده کمی دقیقتر به مسئله پرداخته شود، و فرض شده است که زلزله دارای چند مؤلفه است و این مؤلفه‌ها می‌توانند در امتدادهایی غیر از امتدادهای اصلی سازه به آن وارد شوند. در این مقاله تابع انتقال سیستمهای ثانویه تحت اثر مؤلفه‌های چندگانه زلزله به دست آمده است و در مقاله دیگری طیف پاسخ سیستم ثانویه

تحت اثر مؤلفه‌های چندگانه زلزله ارائه شده است. مهمترین نتایج به دست آمده به طور خلاصه عبارت‌اند از:

۱. چند مؤلفه‌ای بودن زلزله برای سیستمهایی که دارای خروج از محوری هستند اهمیت می‌یابد. مخصوصاً برای تحلیل دقیق سیستمهای ثانویه حساس و مهم، مثل سیستمهایی که در نیروگاهها به کار برده می‌شوند، حتماً باید زلزله به صورت چند مؤلفه‌ای در نظر گرفته شود.

۲- اهمیت چند مؤلفه‌ای بودن زلزله در حالت‌های هم فرکانسی بسیار بیشتر می‌شود و در چنین حالت‌هایی در نظر نگرفتن آن خطاهای بزرگی را در برآورد تابع انتقال به وجود می‌آورد.

۳- در حالت‌های غیر هم فرکانسی می‌توان تنها مؤلفه بزرگ زلزله را در نظر گرفت و این مؤلفه را در امتداد زاویه بحرانی به سازه وارد کرد.

۴- خطاهای به وجود آمده بر اثر در نظر نگرفتن چند مؤلفه‌ای بودن زلزله، هر چند زیاد است، ولی با تغییر فرکانس سیستم ثانویه و نسبت جرم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

۵- نامتناسب بودن میرایی نیز در حالت‌های هم فرکانسی اهمیت پیدا می‌کند و هر چه میزان نامتناسب بودن بیشتر شود میزان تابع انتقال کمتر می‌شود.

## مراجع

1. Singh, M. P., "Generation of Seismic Floor Spectra," *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 101, No. EMS, pp. 595-607, 1975.
2. Suarez, L. E., and Singh, M. P., "Seismic Response of SDF Equipment-Structure System," *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 113, No. 1, pp. 16-30, 1987.
3. Sackman, J. L., and Kelly, J. M., "Seismic Analysis of Internal Equipment and Components in Structures," *Eng. Str.*, Vol. 1, pp. 179-190, 1979.
4. Sackman, J. L., Derkiureghian, A., and Nour-Omid, B., "Dynamic Analysis of Light Equipment in Structures: Modal Properties of the Combined System," *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 109, No. 1, pp. 73-89, 1983.
5. Derkiureghian, A., Sackman, J. L., and Nour-Omid, B., "Dynamic Analysis of Light Equipment in Structures: Response to Stochastic Input," *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 109, No. 1, pp. 90-110, 1983.
6. Igusa, T., and Derkiureghian, A., "Generation of Floor Response Spectra Including Oscillator-Structure Interaction," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 13, pp. 661-676, 1985.
7. Foss, K. A., "Coordinates Which Uncouple the Equation of Motion of Damped Linear Dynamic System," *J. Appl. Mech.*, 25, pp. 361-364, 1958.
8. Singh, M. P., and Suarez, L. P., "A Perturbation Analysis of Eigenproperties of Equipment-Structure Systems," *Nuclear Eng. Des.*, Vol. 97, pp. 167-185, 1986.
9. Gupta, V. K., "Acceleration Transfer Function of Secondary System," *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 123, No. 7, pp. 678-685, 1997.

10. Bernal, D. "A Dynamic Stiffness Formulation for the Analysis of Secondary Systems," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 28, pp. 1295-1308, 1999.
11. Rosenblueth, E. F., "Tall Buildings Under Five-Component Earthquake," *J. Str. Div., ASCE*, Vol. 102, No. ST2, pp. 455-459, 1975.
12. Castellani, A., and Boffi, G., "On the Rotational Component of Seismic Motion," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 108, pp. 785-797, 1989.
13. Ghafory-Ashtiani, M., and Singh, M. P., "Structural Response for Six Correlated Earthquake Components," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 14, pp. 103-119, 1986.
14. Penzien, J., and Watabe, M., "Characteristics of 3-Dimensional Earthquake Ground Motion," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 3, pp. 365-373, 1975.
15. Wilson, E. L., and Butten, M. R., "Three-Dimensional Dynamic Analysis for Multi-Component Earthquake Spectra," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 10, pp. 471-476, 1982.
16. Lopez, O. A., and Torres, R., "The Critical Angle of Seismic Incidence and the Maximum Structural Response," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 26, pp. 881-894, 1997.
17. Yang, Y. B., and Huang, W. H., "Seismic Response of Light Equipment in Torsional Buildings," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 22, pp. 113-128, 1993.
18. Yang, Y. B., and Huang, W. H., "Equipment-Structure Interaction Considering the Effect of Torsion and Base Isolation," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 27, pp. 155-171, 1998.
19. Suarez, L. E., and Singh, M. P., "Floor Response Spectra with Structure-Equipment Interaction Effects by a Mode Synthesis Approach," *Eq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 15, pp. 141-158, 1987.
20. Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, P. 634, McGraw-Hill, 1975.



### پیوست الف - اثبات صفر بودن جمله دوم معادله (۱۰)

چون بردارهای شکل مودها خواص متعامد و مستقل بودن را دارند، بنابراین می توان از آنها به عنوان بردارهای پایه در یک فضای N بعدی استفاده کرد. به عبارت دیگر می توان هر بردار N بعدی را بر حسب بردارهای شکل مودها بسط داد ( دقیقاً شبیه به معادله ۶ ). از جمله بردار تأثیر زلزله در جهت 1 را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$\{r_1\} = [\phi]\{\beta\} \quad (\text{الف-۱})$$

که در آن  $\{\beta\}$  ضریب بسط اند. بنابراین درایه m ام بردار  $\{r_1\}$  برابر می شود با :

$$r_{m1} = \sum_{j=1}^N \phi_{mj} \beta_j \quad (\text{الف-۲})$$

همچنین معادله (الف-۱) را به صورت گسترده زیر نیز می توان نوشت:

$$\{r_1\} = \sum_{i=1}^N \beta_i \{\phi_i\} \quad (\text{الف-۳})$$

از جایگذاری معادله (الف-۳) در معادله (۸)، ضریب اشتراک مود j در جهت 1 به صورت زیر می شود:

$$\gamma_{j1} = \frac{\{\phi_j\}^T [M] \left( \sum_{i=1}^N \beta_i \{\phi_i\} \right)}{\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\}} \quad (\text{الف-۴})$$

که با استفاده از خاصیت تعامد مودها به صورت زیر در می آید:

$$\gamma_{j1} = \frac{\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\}}{\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\}} \beta_j \Rightarrow \gamma_{j1} = \beta_j \quad (\text{الف-۵})$$

از قرار دادن این معادله در معادله (الف-۲)، معادله زیر به دست می آید :

$$r_{m1} = \sum_{j=1}^N \phi_{mj} \gamma_{j1} \Rightarrow r_{m1} - \sum_{j=1}^N \phi_{mj} \gamma_{j1} = 0 \quad (\text{الف-۶})$$

در نتیجه عبارت درون کروشه جمله دوم معادله (۱۰) صفر می شود و چون اثبات صفر بودن این کروشه مستقل از 1 است پس این کروشه برای کلیه 1 ها برابر صفر است. بنابراین جمله دوم معادله (۱۰) صفر می شود.

### پیوست ب - اثبات صفر بودن جمله دوم معادله (۶۶)

چون درجه آزادی سیستم ثانویه N+1 است، جمله دوم معادله (۶۶) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\sum_{l=1}^3 \left[ r_{N+1,l} + \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\phi}_{N+1,j} \left( \sum_{a=1}^{2(N+1)} \psi_{ja} F_{al} \right) \right] \ddot{x}'_{gl} \quad (\text{ب-۱})$$

اگر [D] از معادله (۵۶) در معادله (۶۱) جایگزین شود، معادله زیر برای  $[F_a]$  (که ابعاد آن ۱×۳ است) به دست می آید :

$$[F_a] = - \frac{\{\psi_a\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ \gamma \end{bmatrix}}{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}} = - \frac{\{\psi_a\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix}}{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}} \quad (\text{ب-۲})$$

بنابراین درایه 1 ام  $[F_a]$  خواهد شد:

$$F_{al} = - \frac{\{\psi_a\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix}}{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}} \quad (3-ب)$$

ابعاد بردار شکل مودهای موهومی  $\{\psi_a\}$ ،  $2(N+1)*1$  است که می توان قسمتهای بالا و پایین آن را به صورت زیر از یکدیگر تفکیک کرد:

$$\{\psi_a\} = \begin{Bmatrix} \psi_a^u \\ \psi_a^l \end{Bmatrix} \quad (4-ب)$$

که در آن  $\{\psi_a^u\}$ ،  $(N+1)$  سطر بالایی و  $\{\psi_a^l\}$ ،  $(N+1)$  سطر پایینی بردار  $\{\psi_a\}$  هستند. با قرار دادن این معادله در معادله (ب-3)،  $F_{al}$  خواهد شد:

$$F_{al} = - \frac{\{\psi_a^l\}^T \{\gamma_1\}}{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}} \quad (5-ب)$$

این معادله را به صورت معادله زیر می توان نوشت:

$$F_{al} = - \frac{\begin{Bmatrix} \psi_a^u \\ \psi_a^l \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ [I] & \hat{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}} \quad (6-ب)$$

و یا با استفاده از معادله (56):

$$F_{al} = - \frac{\{\psi_a\}^T [A] \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}} \quad (7-ب)$$

چون بردار شکلهای موهومی نیز متعامد و مستقل اند، هر بردار و از جمله بردار  $\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$  را می توان بر حسب آنها بسط داد.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [\psi] \beta = \sum_{a=1}^{2(N+1)} \beta_a \{\psi_a\} \quad (8-ب)$$

که در آن  $\beta$  ها ضریب بسط اند که از جایگذاری معادله (ب-8) در معادله (ب-7) می توان آنها را به دست آورد:

$$F_{al} = - \frac{\{\psi_a\}^T [A] [\psi] \beta}{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}} \quad (9-ب)$$

و یا با استفاده از خاصیت تعامد مودهای موهومی نسبت به ماتریس  $[A]$ ،

$$F_{al} = - \frac{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}}{\{\psi_a\}^T [A] \{\psi_a\}} \beta_a = -\beta_a \quad (10-ب)$$

سطر زام معادله (ب-8) عبارت است از:

$$\gamma_{jl} = \sum_{a=1}^{2(N+1)} \beta_a \psi_{ja} \quad (11-ب)$$

که از جایگذاری معادله (ب-10) در آن به صورت زیر در می آید:

$$\gamma_{jl} = - \sum_{a=1}^{2(N+1)} F_{al} \psi_{ja} \quad (12-ب)$$

اگر این معادله در معادله (ب-۱) قرار داده شود، معادله (ب-۱۳) به دست می آید.

$$\sum_{l=1}^3 \left( r_{N+1,l} - \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\varphi}_{N+1,j} \gamma_{jl} \right) \ddot{x}_{gl} \quad (\text{ب-۱۳})$$

در پیوست الف نشان داده شد که عبارت درون پرانتز این معادله برابر صفر است. بنابراین جمله دوم معادله (۶۶) برابر صفر است.