

ارائه الگوریتمی جدید برای مدلسازی پیشرو سه بعدی در مگنتوتلوریک

سید محمد ابطی*، نادر فتحیان پور** و حمید هاشم الحسینی**
دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۱۲/۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۹/۶/۲۹)

چکیده -

واژگان کلیدی :

A new algorithm for three dimensional magnetotelluric forward modeling

S. M. Abtahi, N. Fathianpour and H. Hashamalhoseini

Department of mining, Isfahan university of technology

Abstract: Due to the need for greater depth of investigation in petroleum and geothermal exploration and the complexity of the associated geological models often involved in any interpretation of magnetotelluric data, it would be inevitable to employ a

** - دانشیار

* - کارشناس ارشد

more robust and effective 3-D forward modeling engine capable of incorporating complex geological models. The newly developed algorithm presented in this paper uses the conventional finite difference technique of numerical methods but in a non-staggered scheme which enables solving the governing electromagnetic fields with the imposed boundary conditions simultaneously. Through dividing the air and earth half space into discrete blocky model the governing magnetotelluric equations are discretized to form a linear matrix equation which in turn is solved for the unknown magnetic and electric fields iteratively. Because of the frequency dependency of governing magnetic and electric fields and the finite size of the discretized model a number of problems such as oscillating phenomena in the final forward response in the course of solving such boundary value problems are observed. Also it happens that due to the conventional staggered scheme of forming discretized linear equations, a pseudo singularity appears which makes the iterative solvers to diverge. In order to address and remedy for these problems we have introduced an optimum mesh refining scheme to resolve the response oscillation problem. Also through using non staggered formalism which changes the shape of the final discretized matrix equation, it is shown that the pseudo singularity effect could be removed effectively.

Keywords: Magnetotelluric method, 3D forward modeling, Non-staggered methods, finite difference, discretization, pseudo-singularity.

A	بردار میدان (اعم از الکتریکی و مغناطیسی)	R_{xy}	مقاومت الکتریکی ویژه ظاهری، اهم متر
E	بردار میدان الکتریکی کل، ولت بر متر	ω	سرعت زاویه‌ای (رادیان) بر ثانیه
E_p	بردار میدان الکتریکی اولیه، ولت بر متر	μ_0	گذر دهی مغناطیسی خلأ، هانری بر متر
E_s	بردار میدان الکتریکی ثانویه، ولت بر متر	σ	رسانش الکتریکی زمین فاقد ناهمگنی، موهمتر
H	بردار میدان مغناطیسی کل، آمپر بر متر		
H_p	بردار میدان مغناطیسی اولیه، آمپر بر متر	σ_a	اختلاف رسانش الکتریکی زمین فاقد ناهمگنی با حالت فاقد ناهمگنی، موهمتر
H_s	بردار میدان مغناطیسی ثانویه، آمپر بر متر	ψ	شیب بردار میدان
k	عدد موج برای زمین فاقد ناهمگنی، عدد مختلط (توضیح در متن)	Φ	تابع پتانسیل میدان برداری
ka	عدد موج برای زمین دارای ناهمگنی، عدد مختلط (توضیح در متن)	i	ضریب جزء موهمومی

۱- مقدمه و سوابق تحقیق

از آنجا که در اکثر موارد زمین واقعی تحت مطالعه دارای پیچیدگی‌های ذاتی است لذا انجام مدل‌سازیهای یک بعدی و یا حتی دو بعدی برای نیل به مقاصد اکتشافی کافی نبوده و نیاز به انجام مدل‌سازی سه بعدی به خوبی احساس می‌شود. ولی به دلیل پیچیدگیهای محاسباتی موجود در فرایند مدل‌سازی پیشرو سه بعدی، انجام مدل‌سازی با مشکلات متعددی مواجه است. لذا تلاشهای زیادی برای تسهیل محاسبات مربوط به مدل‌سازی پیشرو صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به محاسبات مبتنی بر روش تفاضلات محدود مکی و همکاران (۱۹۹۴) و اسمیت (۱۹۹۶)، روش اجرای محدود و انامیکر و همکارانش (۱۹۸۷)، روشهای مبتنی بر معادلات انتگرال و انامیکر (۱۹۹۱) و

امروزه روش مگنتوتلوریک، به دلیل بهره مندی از بیشترین عمق تجسس در بین روشهای ژئوفیزیکی الکترومغناطیسی و همچنین کم هزینه بودن مراحل جمع آوری داده نسبت به روشهای لرزه نگاری، از اهمیتی روز افزون در امر پی جویی و اکتشاف منابع زیرزمینی برخوردار است. از جمله این کاربردها می‌توان به اکتشاف منابع هیدروکربوری و ژئوترمال اشاره کرد [۱ و ۲]. انجام مدل‌سازی معکوس مؤثر و توانمند برای استفاده از داده‌های برداشت شده و تفسیر آنها فرایندی ضروری و اجتناب ناپذیر است، فرایندی که موفقیت آن به‌طور مستقیم تابعی از صحت و دقت بالای نتایج مدل پیشروست.

در این تحقیق نخست نحوه مدل‌سازی عددی با بررسی چگونگی ایجاد مش درانجام حل عددی و شرایط مرزی مورد نیاز برای روشهای حل عددی بررسی می‌شود. در ادامه روش اصلی استفاده شده در تحقیق حاضر یعنی روش تفاضلات محدود سه بعدی به‌طور کامل تشریح شده و ضمن بررسی مشکلات موجود، تکنیکهای لازم برای حل آنها ارائه شده است.

۲- مدل‌سازی پیشرو مگنتوتلوریک به روش تفاضلات

محدود

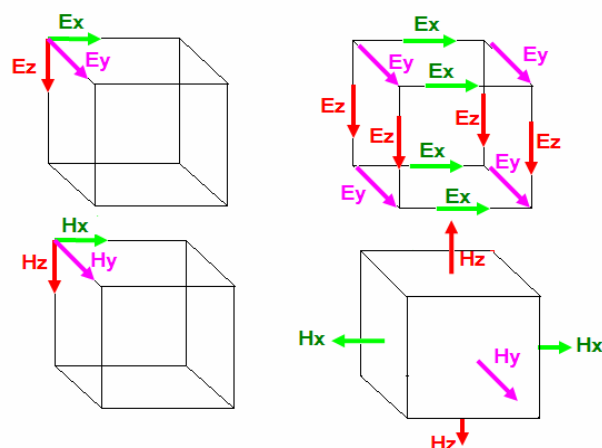
به طور کلی برای انجام مدل‌سازی پیشرو، توزیع مؤلفه‌های میدان بر روی شبکه مسئله به دو صورت زیر قابل تصور است،

شکل (۱)

در حالت هم مبدا، شکل (۱- چپ) بر روی هر نقطه واقع بر شبکه هر سه مؤلفه E_x, E_y, E_z میدان در نظر گرفته می‌شوند اما در حالت غیر هم مبدا، شکل (۱- راست) مؤلفه‌های E_x, E_y, E_z میدان منطبق بر هر یک از یالهای متوازی مربوط به خود (در شکل (۱) برای میدان الکتریکی) و یا به صورت عمود بر وجوه (در شکل (۱) برای میدان مغناطیسی) در نظر گرفته می‌شوند. بدین ترتیب واضح است همه مؤلفه‌های میدان در یک نقطه حاضر نخواهند بود.

روش ناهم مبدا نخستین بار توسط مکی همکارانش (۱۹۸۹) برای مدل‌سازی پیشرو سه بعدی مگنتوتلوریک به کار گرفته شد [۶] که در سالهای (۱۹۹۳) و (۱۹۹۴) بهبود یافت [۷] و از آن زمان مبنای انجام کلیه مدل‌سازیهای سه بعدی پیشرو مگنتوتلوریک به روش تفاضلات محدود قرار گرفته است. به عنوان مثال می‌توان به روش کورالت و همکارانش (۲۰۰۷) اشاره کرد [۸].

در روشهای ناهم مبدا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به صورت به هم وابسته ظاهر می‌شوند و درواقع با استفاده از یکی از آنها دیگری قابل محاسبه خواهد بود. اما اشکال عمده این روشها عدم امکان ارضای همزمان معادلات مربوط به این دو میدان است [۷]. همچنین خطای محاسبه میدانها به یکدیگر وابسته خواهند بود [۹]. ضمناً به دلیل ماهیت سه بعدی روش



شکل ۱- تصویر راست نمایش حالت ناهم مبدا و تصویر چپ حالت هم مبدا را برای توابع برداری E, H نشان می‌دهد.

روشهای مبتنی بر استفاده از چند جمله‌ایها پیر آندره چنگ (۱۹۹۹) اشاره کرد [۳ و ۴]. موارد یاد شده پیشگامان مدل‌سازی سه بعدی پیشرو مگنتوتلوریک محسوب می‌شوند و تلاش برای بهینه ساختن محاسبات عددی مورد نیاز براساس روشهای فوق همچنان در دستور کار محققان قرار دارد [۵].

از میان روشهای فوق، روشهای تفاضلات محدود به دلیل ساده بودن الگوریتم گسسته‌سازی برای تشکیل ماتریس ضرایب و قابلیت ساخت مدل‌های پیچیده از اهمیت بالایی برخوردار است. مکی و همکارانش (۱۹۹۶) با استفاده از روش گسسته‌سازی ناهم مبدا ارائه شده توسط یی (۱۹۵۶) الگوریتم مدل‌سازی پیشرو سه بعدی برای مگنتوتلوریک را ارائه کردند. از جمله مهمترین مشکلات این روش عدم امکان ارضای کامل معادلات ماکسول و عدم امکان استفاده از الگوریتم یاد شده در حالت دو بعدی به دلیل استفاده از انتگرالهای سه بعدی است. لازم به ذکر است که موثرترین روشهای مدل‌سازی پیشرو دو بعدی مگنتوتلوریک از طریق استفاده از روش اجزای محدود و در حالت هم مبدا حاصل شده‌اند [۶ و ۷].

با توجه به موارد یاد شده، این تحقیق به ارائه روشی نو در این خصوص می‌پردازد. روش حاضر بر پایه تفاضلات محدود در حالت هم مبدا اجرا شده و در طی آن از الگوریتمی برای دستیابی به پاسخ کاملاً سه بعدی مگنتوتلوریک استفاده می‌شود.

حل، اصولاً امکان استفاده از این روشها در حالت دو بعدی میسر نیست [۶ و ۷].

اما در حالت هم مبدا این امکان وجود دارد که بتوان مقادیر مربوط به میدانها را به طور مستقل از یکدیگر محاسبه کرد و در هر نقطه از محیط مسئله کلیه مؤلفه‌های میدان را به دست آورد. به دلایل یاد شده، برای نخستین بار، این روش مبنای مدل‌سازی پیشرو سه بعدی مگنتوتلوریک به روش تفاضلات محدود در تحقیق حاضر قرار گرفته است.

۲-۱- فرمولبندی مدل‌سازی پیشرو مگنتوتلوریک هم مبدا

در حالت هم مبدا لازم است روابط پایه مورد نیاز برای گسسته‌سازی هریک از میدانها به شکلی مستقل به دست آید. به عنوان مثال به دو رابطه ذیل که منتج شده از معادلات ماکسول‌اند اشاره می‌شود [۹]:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\sigma\mathbf{E} \quad (1)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{H} \right) = i\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (2)$$

در حالت کاملتر این امکان وجود دارد که میدانهای اولیه و ثانویه به صورت مجزا از یکدیگر مورد بررسی قرار گیرند. این امر در نهایت به ارائه تحلیلی بهتر از نتایج مسئله خواهد انجامید. از این رو، با فرض تخت بودن موج الکترومغناطیسی اولیه، روابط ارائه شده توسط هامن (۱۹۸۳) مبنای مدل‌سازی در تحقیق حاضر قرار گرفته است [۵]:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + \nabla \left(\mathbf{E}_s \cdot \frac{\nabla \sigma}{\sigma} \right) + k^2 \mathbf{E}_s = -k_a^2 \mathbf{E}_p - \nabla \left(\mathbf{E}_p \cdot \frac{\nabla \sigma_a}{\sigma} \right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H}_s + \sigma (\nabla \times \mathbf{H}_s) \times \nabla \left(\frac{1}{\sigma} \right) + k^2 \mathbf{H}_s \\ = -k_a^2 \mathbf{H}_p - \sigma \nabla \left(\frac{\sigma_a}{\sigma} \right) \times \mathbf{E}_p \end{aligned} \quad (4)$$

که در آنها $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ به ترتیب معرف میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، ω معرف سرعت زاویه‌ای، p و s به ترتیب معرف مؤلفه‌های اولیه و ثانویه، μ_0 گذردهی مغناطیسی خلأ، σ معرف رسانش الکتریکی و σ_a معرف اختلاف رسانش الکتریکی در هر نقطه از محیط مسئله با همان مقدار در حالت حذف توده

ناهمگن است. k و k_a نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma}$$

$$k_a = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_a}$$

۲-۲- گسسته‌سازی مورد نیاز برای تفاضلات محدود هم مبدا

به طور کلی دو روش برای گسسته‌سازی در روش تفاضلات محدود تاکنون پیشنهاد شده است، نخست روش گسسته‌سازی بلوکی ارائه شده توسط اریستاکلیو و هامن (۱۹۸۳) که از نظر مبنایی دارای ماهیتی نظیر اجزای محدود است و دوم روش گسسته‌سازی نقطه‌ای که روشی ساده‌تر و متداول در اکثر گسسته‌سازی‌هاست [۵ و ۱۰].

گسسته‌سازی به روش بلوکی یاد شده به کمک انتگرال‌گیری از روابط دیفرانسیلی امکانپذیر بوده و در حالت دو بعدی به خوبی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰]. همچنین اگر در مسائل شرط نیومان ظاهر شوند گسسته‌سازی بلوکی یکی از بهترین حالتها برای پوشش دادن چنین شرطهایی خواهد بود. اما در گسسته‌سازی بلوکی در حالت سه بعدی ممکن است بعضی از مؤلفه‌های مربوط به مشتقات ظاهر شده در معادلات (۳) و (۴) صفر شوند [۱۱]. در روش گسسته‌سازی نقطه‌ای چنین مشکلی ایجاد نخواهد شد. روش گسسته‌سازی نقطه‌ای بر مبنای ارائه سری تیلور و محاسبه تخمینی از تابع با حذف قسمتهایی از این سری استوار است که به عنوان مثال گسسته‌سازی جمله سمت چپ معادله (۳) برای مؤلفه x به صورت ارائه شده در پیوست انجام شده است.

لازم به ذکر است طراحی مش مورد نیاز برای گسسته‌سازی نیز بر اساس پیشنهادات ارائه شده توسط ویور (۱۹۷۴) و ونامیکر (۱۹۸۷) صورت گرفته و برای هوا نیز حداقل ۱۰ لایه برای حذف اثر قطبیدگی مغناطیسی لحاظ شده است [۴ و ۱۳].

۳- شرایط مرزی لازم برای انجام مدل‌سازی پیشرو مگنتوتلوریک

در حالت کلی دو دسته شرط برای حل مسائل مگنتوتلوریک

قابل تصور است. نخست شرط حاکم بر مرزهایی که محیطهای با مقاومت ویژه متفاوت را از هم تفکیک می کنند و دوم شرایطی که در مرزهای اطراف شبکه مسئله حاکم اند. شرطهای مربوط به مرزهای دارای تغییر در مقاومت ویژه الکتریکی با استفاده از روابط ارائه شده توسط تلفورد و همکاران (۱۹۷۴) تامین می شوند [۱۲]. اما در مورد مرزهای اطراف در مدلسازیهای پیشرو مگنتوتلوریک استفاده از شرط دیریکله امری معمول است [۴ و ۱۳]. از این رو به طور دلخواه از شرط مرزی میدان ثانوی برابر صفر در مرزهای شبکه استفاده شده است که این امر مستلزم گسترش بسیار زیاد ابعاد مسئله تا ۸ برابر عمق پوسته ای می شود (عمق پوسته برابر است با $500 \sqrt{\frac{1}{\sigma \cdot \text{freq}}}$). البته برای کاستن از ابعاد فضای مسئله مکی و همکارانش از مدلسازی معکوس دو بعدی در چهار پروفیل دو به دو متعامد در مرزهای جانبی استفاده کرده اند که از جمله محدودیت این راه حل، نیاز به در دست بودن داده های برداشت صحرائی محسوب می شود. همچنین لزوما فرض زمین دو بعدی در مرزهای نزدیک صحیح نخواهد بود. گرچه استفاده از روشهای چند شبکه ای نیز پیشنهاد شده اند [۷].

در تحقیق حاضر فرض بر استفاده از زمین همگن و شرط مرزی صفر برای میدانهای ثانویه است و مقاومت الکتریکی ویژه هوا نیز مقدار 10^6 اهم متر لحاظ شده است. برای اعمال کلیه شرایط مرزی از روش پیشنهاد شده توسط هوینر (۱۹۷۵) با اعمال ضرب یک عدد بزرگ دلخواه در کلیه مقادیر مربوط به مرزها در ماتریس ضرایب و بردار مقادیر استفاده شده است [۱۴].

۴- روش حل معادله ماتریسی نهایی

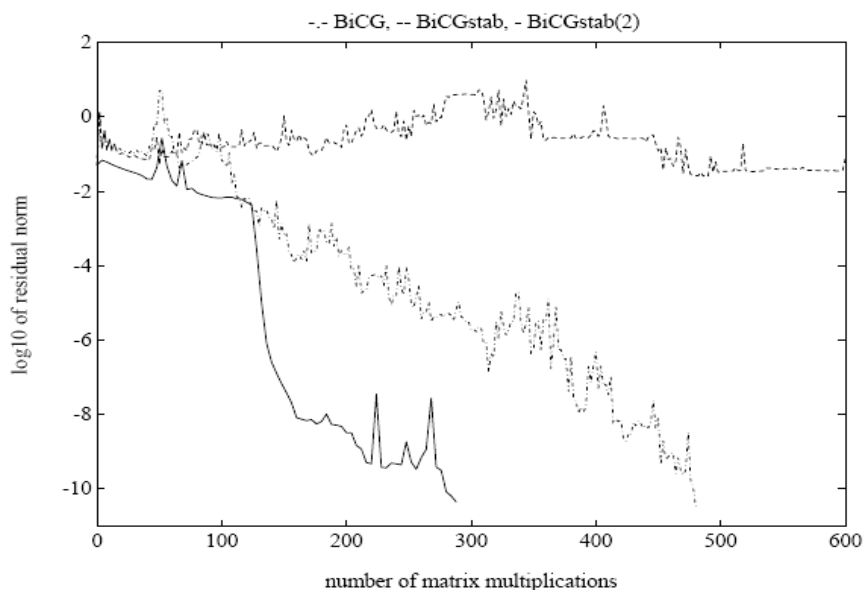
پس از تشکیل معادله ماتریسی نهایی و تامین شرایط مرزی، امکان حل معادله فراهم می شود. در حالت کلی دو دسته روشهای مستقیم و روشهای تکرار، قابل استفاده اند. توضیح آنکه در این بررسی کلیه روشهایی که می توانند به محاسبه ماتریس معکوس منجر شوند، جزو روشهای مستقیم طبقه بندی شده اند.

روشهای حل مستقیم در حال حاضر با توجه به پردازشگرهای فعلی رایانه های شخصی توصیه نمی شوند چرا که در انواع مختلف این روش حل یک معادله ماتریسی بسیار بزرگ که حاصل مدلسازی پیشرو سه بعدی مگنتوتلوریک است نیازمند تعریف اعداد بسیار بزرگ برای ذخیره سازی حاصلضربهای مورد نیاز برای روشهای مستقیم در حافظه رایانه خواهد بود. همچنین در صورت حضور خطا فقط در یکی از درایه ها این خطا به صورت حاصل ضرب به سایر درایه های مربوط به اعماق بیشتر تسری یافته و جواب مسئله را به کلی دگرگون می سازد [۶].

روشهای تکرار، عمومی ترین ابزار برای حل مدلسازیهای مگنتوتلوریک اند و مزایای اصلی آنها سرعت بالا و احتمال کمتر برای انتشار خطا، هستند. اما مشکل اصلی در کلیه این روشها واگرایی در مسئله است. در میان روشهای استفاده شده در این تحقیق، روشهای ژاکوبی و گوس-سایدل به کلی واگرا شده و فاقد نتیجه خواهند بود. روشهایی که مقاومت بهتری نسبت به واگرایی از خود بروز دادند از خانواده روشهای گرادیان مزدوج (CG) هستند. از مهمترین روشهای این خانواده می توان به Bi-CG، BiCGstab و BiCGstab(2) (حالت بهبود یافته BiCGstab) اشاره کرد، شکل (۲) [۱۵].

در این بین روش BiCGstab، از نظر همگرایی دارای وضعیتی نامعلوم است و امکان دارد رفتاری بهتر از Bi-CG از خود نشان دهد و یا اینکه کاملاً واگرا شود. لازم به ذکر است در کلیه مواردی که در تحقیق حاضر از روش BiCGstab استفاده شد، واگرایی در پاسخها شدیدتر از موارد مشابه با روش Bi-CG بوده است. روش BiCGstab(2) پایداری قابل توجهی از خود نشان داد اما به دلیل نیاز به عملیات پیچیده تر، زمان بیشتری را به خود اختصاص می دهد. به طور مثال در یک مورد ۴۰۰ مرتبه تکرار را در مدت ۷۰ دقیقه به اتمام رساند اما در عین پایداری به همگرایی مورد نظر منجر نشد.

برای افزایش سرعت همگرایی مسئله پیش شرط سازهایی معرفی شده اند که کارآمدترین آنها پیش شرط ساز استفاده شده



شکل ۲- پایداری روشهای خانواده گرادیان مزدوج با تکرار

ایدئال ψ باید برابر با صفر باشد اما به دلیل اینکه دارای مقدار است تابع Φ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \psi$$

با به دست آوردن Φ می توان تابع A را به شکل زیر اصلاح کرد:

$$A_{\text{new}} = A_{\text{old}} - \nabla \phi$$

لذا در هر مرحله از عملیات به شکل قابل توجهی بر آهنگ همگرایی مسئله افزوده می شود، شکل (۳).

توسط مکی و همکارانش تحت عنوان HYPRE است که خود مستلزم تشکیل ماتریس معکوس است [۷۶]، لذا در حل مسائل بسیار بزرگ استفاده از آن میسر نیست. پیش شرط ساز دیگری که توسط اسمیت (۱۹۹۶) معرفی شده است نیز در مواردی که فواصل گرهی زیاد باشد بازدهی خود را از دست می دهد [۷]. لذا عملاً استفاده از هر دو پیش شرط ساز نیازمند کاهش ابعاد مسئله است.

۴-۱- ماهیت واگرایی و راهکارهای مقابله با آن:

چنانچه اشاره شد، مشکل عمده پیش رو بر سر به دست آوردن جواب در مدل سازی پیشرو سه بعدی مگنتوتلوریک، ایجاد واگرایی در روش حل مسئله به روشهای تکرار است [۷ و ۹]. برای حذف واگرایی روابط زیر باید تامین شوند [۹]:

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot (\sigma E) = 0 \quad (6)$$

برای ارضای روابط فوق می توان تابعی را برای حذف واگرایی به صورت ذیل فرض کرد.

$$\psi = \nabla \cdot A$$

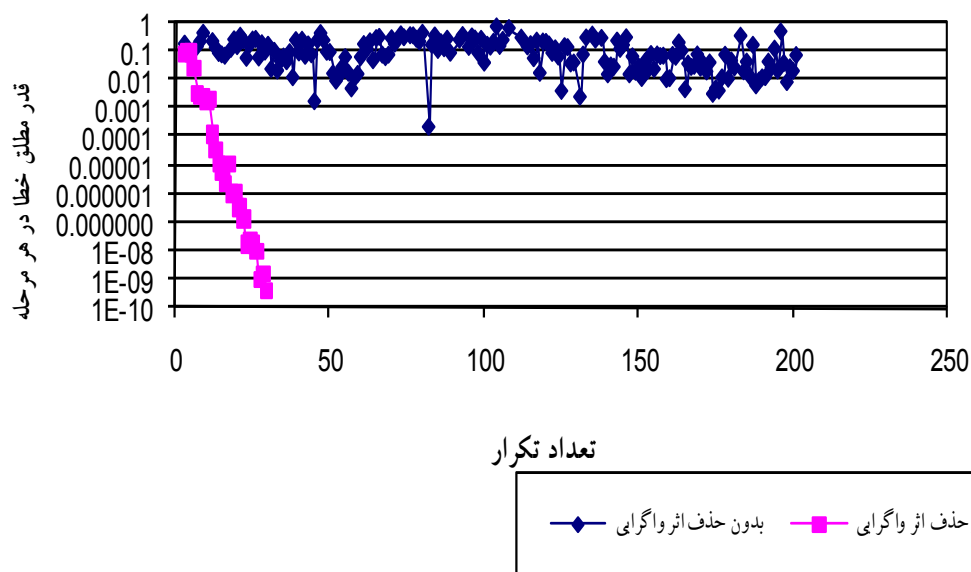
که A می تواند برابر H یا σE باشد. حال می دانیم در حالت

۵- بررسی مشکلات عمده مدل سازی و ارائه

راهکارهای اصلاحی

۵-۱- ایجاد تکنیکی کاذب

از جمله مشکلاتی که در انجام مدل سازی بروز می کند، وجود حالت تکیه در ماتریس ضرایب مسئله است. این مسئله از آنجا که هیچ الکترو د جریان (نظیر حالت جریان مستقیم) یا عامل حقیقی ایجاد تکنیکی دیگری حضور ندارد، عجیب به نظر می رسد. در واقع در مسئله سه بعدی پیشرو MT، هیچ دو سطر با ستون با مقادیر قدر مطلق تحقیقاً مساوی وجود ندارد و کلیه سطرها و ستونها بردارهای مستقل خطی از یکدیگرند. علاوه بر



شکل ۳- نمایش تاثیر حذف واگرایی در کاهش تعداد تکرار [۱۱]

عنصر مجاور سطری آن باشند:

$$\dots + H_{s_{i,j,k}}^x \left(\frac{-1}{\Delta x_{i+1}} + \frac{-1}{\Delta x_i} \right) \left(\frac{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}}{2} \right) + H_{s_{i+1,j,k}}^x \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1}} \right) \left(\frac{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}}{2} \right) + \dots$$

با توجه به ضرایب $H_{s_{i,j,k}}^x$ و $H_{s_{i+1,j,k}}^x$ ، مشاهده می‌شود

که ضرایب مربوطه می‌توانند بسیار مشابه باشند، اگر مقادیر Δx_i نسبت به Δx_{i+1} بسیار بزرگتر باشند یا اینکه این مقادیر با Δy و Δz ها مساوی شوند. به آسانی می‌توان حالاتی را تصور کرد که ضرایب دو مقدار فوق، بسیار به هم نزدیک شوند. به خصوص این مسئله در صورت استفاده از گسسته‌سازهای پیشرو پسرو زیاد اتفاق می‌افتد.

دلیل اینکه مقادیر Δx_i و Δx_{i+1} می‌توانند با هم اختلاف زیادی داشته باشند، تنها در نحوه استفاده از مش نهفته است. از آن جا که برای ایجاد مش برای کوچک ساختن حجم ماتریس، از توانهای لگاریتمی با افزایش گامهای بزرگ برای عدد ۱۰ استفاده شده است (با آهنگ افزایشی در حد ۰/۷۵) ایجاد چنین مسئله‌ای قهری خواهد بود. البته این آهنگ افزایش به علت نیاز به کوچک ساختن مسئله و کاستن از

این عامل ایجاد تکینگی، از قبیل الکترودهای بارگذاری نیز در مسائل مدل‌سازی مگنتولوریک حضور ندارند. واقعیت آن است که گرچه هیچ دو بردار وابسته خطی در ماتریس A در معادله $Ax = b$ قابل شناسایی نیست، ولی رفتار تکنه خود را در حین انجام عملیات حل معادله آشکار می‌کند.

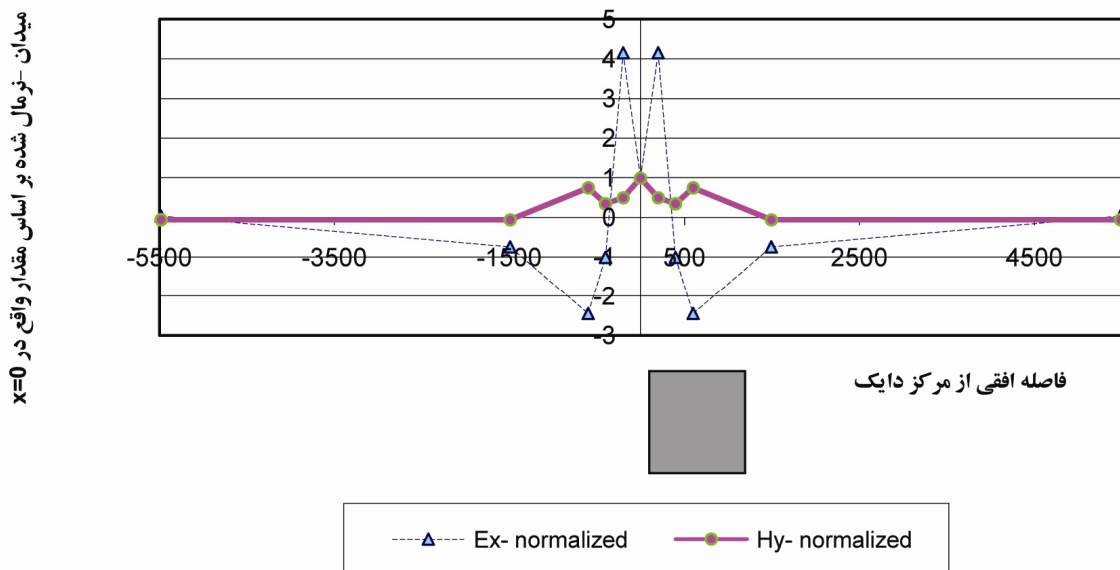
به طور مشخص ایجاد رفتار تکنه در ماتریسهایی با دو یا چند ستون و یا سطر مشابه اتفاق می‌افتد. در مورد فوق پس از بررسی مشخص شد که در ماتریس تنک ضرایب بسیاری از غیر صفر، کوچکتر از آن هستند که تأثیری بر حل معادله بگذارند همچنین بعضی از ضرایب واقع بر قطرها از نظر مقدار حقیقی مشابه عنصر مجاور خود در سطر یا ستون‌اند به عنوان مثال موارد زیر امکان وقوع دارند:

$$|a_{ii}| \cong |a_{i,i+1}| \quad (\text{الف})$$

$$|a_{ii}| \cong |a_{i+1,i}| \quad (\text{ب})$$

برای رفع این مشکل، مراجعه به چگونگی مدل‌سازی صورت گرفته چاره ساز شد:

برای مثال در مورد میدان H ، اگر روابط زیر نمایش قسمتی از رابطه جبری منتج از گسسته‌سازی برای ضرایب روی قطر و



شکل ۴- نمایش شدت تغییر پذیری میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در سمت y با فاصله [۱۱]

استفاده از مش تطریف شده این مشکل را کاهش می دهد اما این تطریف به معنای بزرگتر شدن ابعاد مسئله و افزایش زمان مورد نیاز برای حل مسئله است.

ابعاد ماتریس ضرایب صورت گرفته است. در نهایت این مشکل با کاستن از آهنگ افزایش ابعاد مش و استفاده از گسسته سازی مرکزی مرتفع شد.

۶- ارائه نمودار جریانی مدلسازی پیشرو سه بعدی مگنتولوریک

با توجه به مباحث ارائه شده، می توان نمایه کلی نمودار جریانی مدلسازی پیشرو سه بعدی مگنتولوریک را به صورت زیر نشان داد، شکل (۵).

۷- مقایسه نتایج به دست آمده از حالت دو بعدی با حالت سه بعدی

با به کارگیری مدل دایکی که دارای پهنای ۵۰۰ متر، بلندی ۱۰۰۰ متر در عمق ۱۲۵ متری، که مقاومت الکتریکی آن ۲ اهم متر بوده و در یک زمین همگن به مقاومت ۱۰۰ اهم متر واقع است، پاسخهای زیر برای فرکانس دلخواه ۱ هرتزی به دست آمده است، شکل (۶). فرض شده است که امتداد توده در

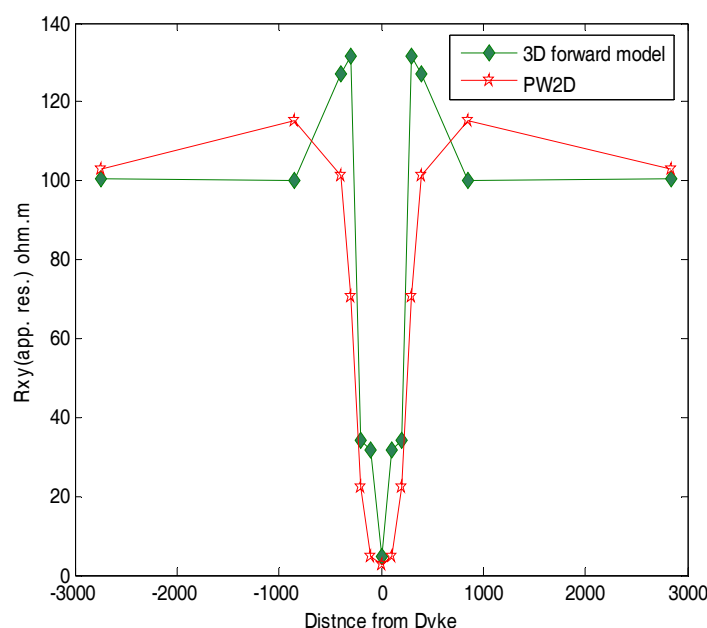
۲-۵- وجود آشفتگی متناوب در پاسخهای مدل

استفاده از مدلسازی پیشرو به روش هم مبدا، مشکلات خاص خود را ایجاد می کند. یکی از عمده ترین این مسائل خود را به صورت آشفتگی منظم در رفتار میدانها نشان می دهد. دامنه تغییرات مورد نظر در مورد میدان الکتریکی شدیدتر است. در صورت نرمال سازی مقادیر میدانهای E_x و H_y به مقادیر همین میدانها در نقطه واقع بر فراز مرکز یک دایک قائم با امتداد ۴۰۰۰ متر، ضخامت ۱۰۰۰ متر و بلندی ۲۰۰۰ متر که در عمق ۵۰۰ متری مدفون باشد- به وضوح آشکار می شود که تغییرات در میدان الکتریکی و در نتیجه آشفتگی حاصل از آن بسیار شدیدتر از تغییرات در مورد میدان مغناطیسی است، علاوه بر آن تغییر در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی از نظر جهت اختلاف دارند، شکل (۴).

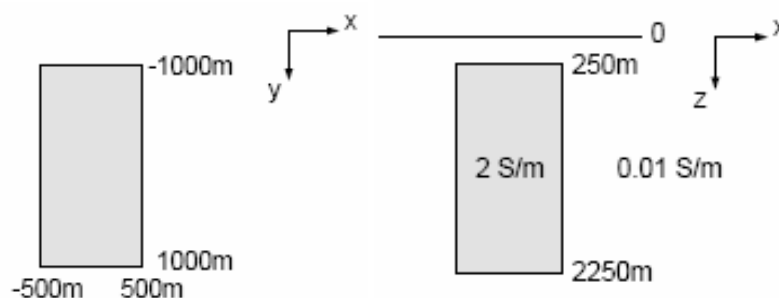


شکل ۵- نمایه کلی نمودار جریانی مدل‌سازی پیشرو سه بعدی مگنتوتلوریک

۴۰۰۰ حالت دو بعدی نامحدود بوده و در حالت سه بعدی به دست آمده است [۴]. با افزایش امتدادی توده مزبور، نتایج برابر متر است، پاسخهای مدل دو بعدی به کمک برنامه PW2D تدریجاً به نتایج حالت دو بعدی نزدیک می‌شوند [۱۱].



شکل ۶- مقایسه پاسخهای مقاومت الکتریکی مدلسازی سه بعدی پیشرو (ρ_{xy}) با پاسخ مدل دوبعدی (در مد عرضی مغناطیسی، TM) در فرکانس برابر 1Hz [۱۱].



شکل ۷- نمای افقی (راست) و قائم (چپ) از یک توده نمونه برای مدلسازی [۱۶].

صورت گرفته در تحقیق حاضر است.

۸- مقایسه نتایج حاصل از مدلسازی سه بعدی پیشرو

با نتایج مدل سازی سه بعدی روش مکی (۱۹۹۴)

برای توده‌ای به شکل مکعب مستطیل با پهنای ۱۰۰ متر، طول ۲۰۰۰ متر، ارتفاع ۲۰۰۰ متر، واقع در عمق ۲۵۰ متری با مقاومت ویژه الکتریکی ۰٫۵ اهم متر، زمین درونگیر همگن و مقاومت ویژه الکتریکی فرض شده برای آن ۱۰۰ اهم متر است. فرکانس مورد استفاده ۱ هرتز است شکل (۷) [۱۶]. شباهت روند تغییرات مؤلفه حقیقی امپدانس و مقادیر آن در هر دو روش، تاییدی بر صحت نتایج حاصل از مدلسازی سه بعدی

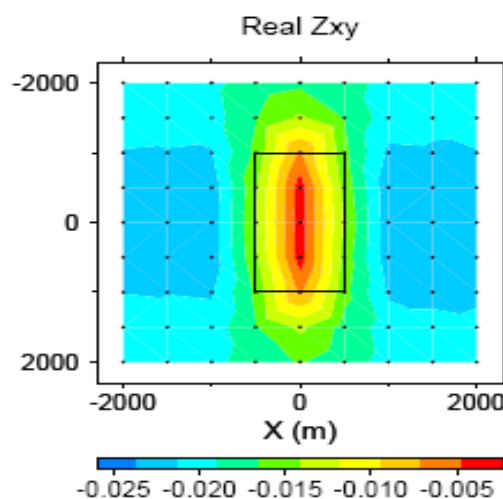
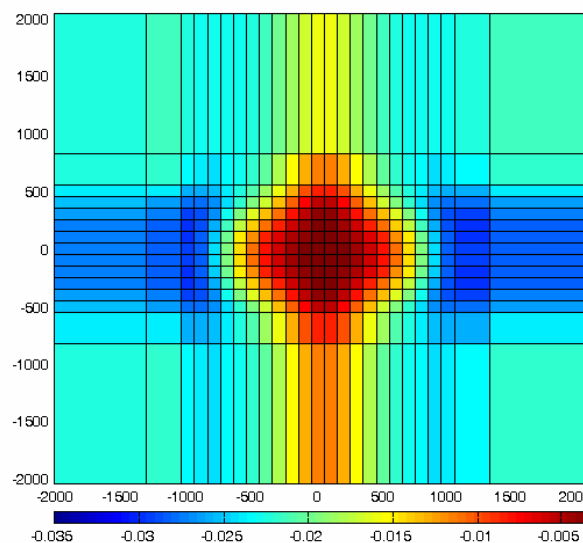
۹- ارائه نتایج و پیشنهادها

انتخاب نوع گسسته‌سازی برای استفاده از روش تفاضلات محدود دارای اهمیت بسیار زیادی است به طوری که استفاده از روش بلوکی اریستاگلیو و هامن به علت وجود ابهام در تعریف گرادیان مکانی مقاومت الکتریکی در حالت سه بعدی، امکانپذیر نیست. همچنین بهتر است انتخاب روابط جبری گسسته‌سازی به صورتی باشد که احتمال وقوع تکنیکی مصنوعی در حل

حداقل برساند. برای مثال استفاده از نتایج مدلسازی معکوس دو بعدی چنین امکانی را فراهم می‌کند، اما به علت وجود اثرات آشفتگی استفاده از روشهای چند شبکه‌ای توصیه نمی‌شود چرا که اثر آشفتگی در پاسخهای شبکه اولیه در صحت پاسخهای شبکه‌های کوچکتر در مراحل بعد تاثیر می‌گذارد. لذا در صورت تمایل به استفاده از روشهای چندشبکه‌ای، نمی‌توان از روابط معادلات ماکسول به صورت هم مبدا استفاده کرد و در این حالت تنها استفاده از روش ناهم مبدا توصیه می‌شود.

روابط مربوط به حذف واگرایی در روشهای تکرار حل عددی مسئله سه بعدی پیشرو مگنتوتلوریک بایستی به کار گرفته شوند، در غیر این صورت هیچ روش تکرار قادر به تامین همگرایی مسئله نخواهد بود. در مجموع روش Bi-CG که در هر تکرار آن عملیات حذف واگرایی صورت گرفته باشد به عنوان بهترین روش در میان روشهای تکرار استفاده شده در این تحقیق مشخص شد. استفاده از روشهای مستقیم برای حل مسئله عملاً با پردازشگرهایی که فعلاً در دسترس است مقدور نیست، گرچه احتمال دارد در آینده با پیشرفت تکنولوژی‌های محاسبه گر، این امر میسر شود.

همچنین با توجه به ضعفهایی که در پیش شرط سازهای ارائه شده نظیر عدم کارایی در شبکه‌های داری فواصل گرهی بزرگ (روش اسمیت) و یا نیاز به ارائه ماتریس معکوس (در روش مکی) عنوان شد، زمینه تحقیق برای ارائه پیش شرط سازهای مؤثر و سریع که حتی الامکان دارای ساختاری ساده بوده و برای شبکه‌های مختلف کارآمد باشند، فراهم است.



شکل ۸- پاسخ مدلسازی پیشرو سه بعدی به روش تحقیق حاضر (بالا) و مکی (۱۹۹۴) (پایین) برای توده شکل (۷)، برای مؤلفه حقیقی امپدانس، واحدها بر حسب اهم مترند [۱۶ و ۱۱].

مسئله را به حداقل برساند. در انتخاب شرایط مرزی، بهترین حالت استفاده از شرایطی است که ابعاد حل مسئله را به

مراجع

1. Christopherson, K., R., *EM in the 21st Century – Looking for Oil, Gas and Water*, Chinook Geoconsulting, Inc., Woods Hole Oceanographic Institution, EM Workshop, 2002
2. Key, K. W., Constable S. C., and Weiss, C. J., "Mapping 3D Salt Using 2D Marine Magnetotelluric Method, Case Study from Gemini Prospect, Gulf of Mexico", *Geophysics*, Vol. 71, No. 1, pp. B17-B27, 2006.
3. Shi, X., Utada, H., Wuhan W. J., Siripunvaraporn, W., and Wu, M. W., "Three Dimensional Magnetotelluric Forward Modeling using Vector Finite Element Method Combined with Divergence Corrections (VFE++)", *LAGA WG 1.2 on Electromagnetic*

- Induction in the Earth Available at Proceedings of the 17th Workshop*, Hyderabad, India,
4. Wannamaker, P. E., Stodt, J. A., and Rijo, L., *PW2D, Finite Element Program for Solution of Magnetotelluric Responses of Two-Dimensional Earth Resistivity Structure*, Utah university, Earth Science laboratory, Revised Edition, June 1987.
 5. Hohmann, G., W., *Three-Dimensional EM Modeling, Geophysical Surveys*, Vol. 6, pp. 27-53, 1983.
 6. Makie, R. L., Madden T. R., "Three-Dimensional Magnetotelluric Modelling and Inversion," *Proceeding of the IEEE*, Vol. 77, No. 2, 1989.
 7. Makie R. L., Smith, J. T., and Madden T. R., "Three-Dimensional Electromagnetic Modeling Using Finite Difference Equation: the Magnetotelluric Example," *Radio Science*, Vol 29, No 4, pp 923-935, 1994.
 8. Queralt, P., Jones A. G., Ledo, j., "Electromagnetic Imaging of a Complex Ore Body: 3D Forward Modeling, Sensitivity Tests, and Down-Mine Measurements", *GEOPHYSICS*, Vol. 72, No. 2, pp. F85-F95, 2007.
 9. Smith, T. J., "Conservative Modeling of Electromagnetic Fields, Part I: Properties and Error Analysis," *Geophysics*, Vol. 61, No. 5, pp. 1308-1318, 1996.
 10. Oristaglio, M. L., and Hohmann, G. W., "Diffusion of Electromagnetic Fields into a two Dimensional Earth: a Finite Difference Approach," *Geophysics*, Vol. 49, No.7, pp. 870-894, 1984.
 - ۱۱.۱۱. ابطحی فروشانی، س. م، "مدلسازی پیشرو سه بعدی داده‌های مگنتوتلوریک ژئوترمال سبلان"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۷.
 - ۱۲.۱۲. تلفورد، دبلیو. ام، "جلداریت، ال. پی، شریف ار. ای، کیز، دی. ای/حاجب حسینی، ح. و زمردیان، ح. ژئوفیزیک کاربردی، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۵.
 13. Simpson, F., and Bahr, K., *Practical magnetotelluric*, Cambridge University press, UK, 2005.
 14. Huebner, K. H., *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, 2nd edition, US, 1975.
 15. Sleijpen, G., L., G., and Fokkema, D., R., "BICGSTAB(L) FOR Linear Equations Involving Unsymmetric Matrices with Complex Spectrum", *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Vol. 1., pp. 11-32, 1993.
 16. Farquharson, C., Oldenburg D., Haber E., and Shekhtman, R., "An Algorithm for the Three-Dimensional Inversion of Magnetotelluric Data," presentation, Geophysical, Inversion Facility University of British Columbia, Vancouver

پیوست

روش گسسته‌سازی نقطه‌ای

با توجه به رابطه (۳) روابط زیر را برای مؤلفه x میدان الکتریکی خواهیم داشت (بخش سمت چپ تساوی):

$\hat{i}$:

$$\begin{aligned}
 &E_{s\ i+2,j,k}^x C_1 + E_{s\ i+1,j,k}^x C_2 + E_{s\ i-1,j,k}^x C_3 + E_{s\ i-2,j,k}^x C_4 + \\
 &E_{s\ i,j+2,k}^x C_5 + E_{s\ i,j-2,k}^x C_6 + \\
 &E_{s\ i,j,k+2}^x C_7 + E_{s\ i,j,k-2}^x C_8 + \\
 &E_{s\ i,j,k}^x C_9 + \\
 &E_{s\ i+1,j,k}^y C_{10} + E_{s\ i,j,k}^y C_{11} + E_{s\ i-1,j,k}^y C_{12} + \\
 &E_{s\ i+1,j,k}^z C_{13} + E_{s\ i,j,k}^z C_{14} + E_{s\ i-1,j,k}^z C_{15} =
 \end{aligned}$$

که در آن ضرایب یاد شده به صورت ذیل خواهند بود:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \left(\frac{1}{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}} \right) \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \\
 C_2 &= \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \frac{1}{\sigma_{i,j,k}} \left(\frac{\sigma_{i+1,j,k} - \sigma_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \\
 C_3 &= \left(\frac{-1}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \frac{1}{\sigma_{i,j,k}} \left(\frac{\sigma_{i+1,j,k} - \sigma_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right) \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \\
C_5 &= \left(\frac{1}{\Delta y_{j+2} + \Delta y_{j+1}} \right) \left(\frac{1}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \right) \\
C_6 &= \left(\frac{1}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \right) \left(\frac{1}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \right) \\
C_8 &= \left(\frac{1}{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k} \right) \left(\frac{1}{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k} \right) \\
C_7 &= \left(\frac{1}{\Delta z_{k+2} + \Delta z_{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k} \right) \\
c_9 &= -(c_1 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8) + \left[\left(\frac{\left(\frac{\sigma_{i+2,j,k} - \sigma_{i,j,k}}{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}} \right) - \left(\frac{\sigma_{i,j,k} - \sigma_{i-2,j,k}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right)}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \sigma_{i,j,k} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\sigma_{i+1,j,k} - \sigma_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \left(\frac{\sigma_{i+1,j,k} - \sigma_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \right] \times \frac{1}{\sigma_{i,j,k}^2} - j\omega\mu_0\sigma_{i,j,k} \\
c_{10} &= \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \frac{1}{\sigma_{i,j,k}} \left(\frac{\sigma_{i,j+1,k} - \sigma_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \right) \\
c_{11} &= \left[\left(\frac{\left(\frac{\sigma_{i+1,j+1,k} - \sigma_{i+1,j-1,k}}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \right) - \left(\frac{\sigma_{i-1,j+1,k} - \sigma_{i-1,j-1,k}}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \right)}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \sigma_{i,j,k} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\sigma_{i+1,j,k} - \sigma_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \left(\frac{\sigma_{i,j+1,k} - \sigma_{i,j-1,k}}{\Delta y_{i+1} + \Delta y_i} \right) \right] \times \frac{1}{\sigma_{i,j,k}^2} \\
c_{12} &= \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \frac{1}{\sigma_{i,j,k}} \left(\frac{\sigma_{i+1,j,k} - \sigma_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} \right) \\
c_{13} &= \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \frac{1}{\sigma_{i,j,k}} \left(\frac{\sigma_{i,j,k+1} - \sigma_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k} \right) \\
c_{14} &= \left[\left(\frac{\left(\frac{\sigma_{i+1,j,k+1} - \sigma_{i+1,j,k-1}}{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k} \right) - \left(\frac{\sigma_{i-1,j,k+1} - \sigma_{i-1,j,k-1}}{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k} \right)}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \sigma_{i,j,k} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\sigma_{i+1,j,k} - \sigma_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \left(\frac{\sigma_{i,j,k+1} - \sigma_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k} \right) \right] \frac{1}{\sigma_{i,j,k}^2} \\
c_{15} &= \left(\frac{-1}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) \frac{1}{\sigma_{i,j,k}} \left(\frac{\sigma_{i,j,k+1} - \sigma_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k} \right)
\end{aligned}$$