

قنبرعلى شيخ زاده* و مصطفى محمودى** گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۴/۱۵ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۹/۱۱/۲۰)



Numerical Study of Natural Convection of Nanofluid in a Square Cavity with Hot and Cold Elements on its Vertical Walls

Gh. A. Sheikhzadeh and M. Mahmoodi

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Kashan

Abstract: Free convection of Ag-water nanofluid in a square cavity with two or three pairs of hot and cold discrete elements on its side walls is simulated and the effects of number and arrangement of thermal elements and volume fraction of * – دانشیار

** - دانشجوي کارشناسي ارشد

nanoparticles on the fluid flow and heat transfer are studied. Volume fraction of nanoparticles ranges from 0 to 0.2. Several different arrangements of the thermal elements are considered in a manner that for each case, numbers of vortexes formed inside the cavity are different. The obtained results show that by increasing the Rayleigh number, the number of vortexes, and the volume fraction of the nanoparticles, the rate of heat transfer is increased. Also it is observed that when the number of formed vortexes inside the cavity increases, the effect of increasing the volume fraction of the nanoparticles on the heat transfer rate is enhanced. When six vortexes are formed in the cavity at $Ra=10^6$, by increasing the volume fraction of nanoparticles from 0 to 0.2, the average Nusselt number increases about 60% with respect to the base fluid, while for the case of four vortexes, the increasing is about 35%. Moreover it is found that at all the considered Rayleigh numbers, the average Nusselt number is more sensitive to the nanoparticles volume fraction than to the number of formed vortexes.

Keywords: Numerical analysis, Free convection, Square cavity, Nanofluid, Thermal elements.

		گرمای مخصوص در فشار ثابت (kj kg ⁻¹ K ⁻¹) (۶)	Ср
درصد افزایش عدد ناسلت نانوسیال نـسبت بــه	Δ	(۳) (m s ⁻²) شتاب جاذبه (۳)	g
سيال خالص (بدون بعد)		ارتفاع محفظه (m) (۱۱)	Н
ضریب نفوذ گرمایی (m² s ⁻¹) (۴)	α	ضریب انتقال گرمای جابهجایی موضعی	h
ضریب انبساط گرمایی (K ⁻¹) (۳)	β	$(19) (W m^{-2} K^{-1})$	
كسر حجمي نانوذرات (۵)	φ	ضریب هدایت گرمایی (W m ⁻¹ K ⁻¹) (۱۰)	k
ويسكوزيته سينماتيكي (m² s⁻¹) (١١)	ν	فشار با بعد (pa) (۲)	р
		فشار بدون بعد (۲)	Р
		دمای با بعد (K) (۳)	Т
مقدار متوسط (۱۶)	avg	سرعت با بعد در راستای محور x (m s ⁻¹) (۱)	u
سرد (۳)	c	سرعت با بعد در راستای محورy (m s ⁻¹) (۱)	v
گرم (۱۱)	h	سرعت بدون بعد بعد در راستای محور x (۱۱)	U
نانوسيال (٢)	nf	سرعت بدون بعد در راستای محورy (۱۱)	V
سيال پايه (۵)	f	مختصات با بعد (m)	x,y
نانوذرات (۵)	р	مختصات بدون بعد	X,Y

۱- مقدمه

جابهجایی آزاد به دلیل کاربرد وسیع در سیستمهای مهندسی از قبیل سرمایش قطعات الکترونیکی، تهویه اتاقها، ایزولهسازی راکتورها، کلکتورهای خورشیدی، سیستمهای اطفای حریق و بسیاری سیستمهای دیگر، از پدیدههای مهم محسوب میشود[او۲]. تاکنون مطالعات عددی و تجربی بسیاری در مورد جنبههای مختلف کاربرد انتقال گرمای جابهجایی آزاد در محفظهها صورت گرفته است [۳–۷]. همچنین توجه محققان

زیادی به افزایش نرخ انتقال گرمای جابهجایی آزاد در محفظهها با وجود چشمههای گرمایی مجزا روی دیوارههای آن جلب شده است. مروری بر مطالعات انجام شده پیرامون این موضوع نشان میدهد که اندازه و محل قرارگیری اجزای گرمایی، هر دو بر نرخ انتقال گرما تاثیر گذارند [۸-۱۴]. دنگ [۱۵] ایجاد الگوهای چند گردابهای جابهجایی آزاد در یک محفظه را بررسی کرده و نشان داده است که نرخ کلی انتقال گرما رابطه مستقیم با تعداد گردابههای تشکیل شده دارد. وی نتیجه گرفته

است که یکی از راههای افـزایش نـرخ انتقـال گرمـای در یـک محفظه، چینش مناسب اجزای سرد و گرم اسـت، بـهطـوریکـه موجب تشکیل حداکثر تعداد گردابههای ممکن شود.

از طرفی افزایش نرخ انتقال گرما از طریـق بهبـود خـواص گرمایی سیال عامل در سیستمهای گرمایی اخیرا مورد توجه جدی قرار گرفتهاست. در گذشتهای نه چندان دور، افزایش ضریب هدایت گرمایی مایعات با استفاده از اضافه کردن ذرات فلزى با ابعاد ميكرومتر انجام مي شد [۱۶]. اما ته نـشيني سـريع این ذرات باعث مسدود شدن مجراها، فرسایش دیوارهها و افت فشار بالا می شد و همین امر، کاربرد این تکنولوژی را محدود به فعالیتهای آزمایشگاه میکرد. اولین بار چوی [۱۷] عبارت نانوسیال را برای یک سیال با وجود ذرات فلز با ابعادی در حـد نانومتر به صورت معلق در آن به کار برد. افزودن نانوذرات به سیال، باعث پدید آمدن نانوسیالی با ضریب هدایت گرمایی بالاتر نسبت به سیال پایه می شود و به علاوه مشکلات ته نشینی سريع و مسدود شدن مجارى نيز مرتفع خواهد شد [١٧ و ١٨]. خانافر و همکاران [۱۹] برای اولین بار انتقال گرمای جابه جایی آزاد در یک محفظه مستطیلی حاوی نانوسیال را مورد مطالعه قرار دادند. آنها دریافتند که با افـزایش عـدد گراشـف و درصـد حجمى نانوذرات، عدد ناسلت متوسط افزايش مى يابد. اين مقاله به عنوان یک راهگشا باعث شد بسیاری از محققان به بررسی اثر نانوسیال بر نرخ انتقال گرما در محفظه های مستطیل شکل بپردازند [۲۰–۳۰]. جـو و تزنـگ [۲۰] بــا مطالعــه عــددی جابهجایی آزاد نانوسیال در محفظه های مستطیل شکل نشان دادند که افزایش نیـروی شـناوری و کـسر حجمـی نـانوذرات، هردو بر افزایش نرخ انتقال گرما درون محفظه کمک مـیکننـد. سانترا و همکاران [۲۱] مـسئله جابـهجـایی آزاد در یـک حفـره حاوی نانوسیال را با فرض رفتار غیر نیوتنی نانوسیال بـه روش عددی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج انها نـشان مـیداد کـه در برخی اعداد رایلی خاص، با افزایش کسر حجمی نانوذرات، نرخ انتقال گرما کاهش می یابد و در محدوده دیگری از اعـداد رایلی با افزایش کسر حجمی نانوذرات، نرخ انتقال گرما افزایش

مى يابد. ازتاپ و ابوندا [٢٢] با انجام شبيهسازى عددى، جريان سیال و انتقال گرمای جابهجایی آزاد در محفظه های مستطیلی حاوی نانوسیال را مورد بررسی قرار دادند. محفظههای بررسی شده توسط آنها دارای یک دیواره عمودی سرد و یک جزء سرد قرار گرفته روی دیواره عمودی مقابل بود در حالیکه سایر ديوارهها عايق بودند. آنها اثر نوع نانوسيال، عدد رايلي، اندازه و موقعیت جزء گرم و نسبت ابعاد محفظه را مـورد بررسـی قـرار دادند. نتایج آنها نشان دهنده افزایش عدد ناسلت با افزایش کسر حجمي نانوذرات و افزايش اندازه جزء سرد در تمام محدوده اعداد رایلی بود. در ادامه مطالعات عددی جابه جایی آزاد نانوسیال در محفظهها، اوگوت [۲۳] به بررسی ایـن مـسئله در یک حفره با دیواره عمودی سرد دما ثابت و یک جزء سرد شار ثابت روی دیواره عمودی مقابل پرداخت. وی نشان داد که اندازه جزء سرد و زاویه محفظه، پارامترهای کنترل کننده نـرخ انتقال گرما هستند. ابوندا و ازتاپ [۲۴] اثر تغییر زاویه بـر نـرخ انتقال گرما در یک حفره حاوی نانوسیال را به صورت عـددی مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که اثر غلظت نانوذرات بر عدد ناسلت در مقادیر پایین کسر حجمی بیشتر از مقادیر بالای كسر حجمي است. بهعلاوه نتايج أنها نشان داد با افزايش عدد رایلی، درصد افزایش انتقال گرما با استفاده از نانوسیال، کـاهش مییابد. جابهجایی آزاد نانوسیال در یک محفظه مربعی سردشونده متقارن از طرفین و با وجـود یـک جـزء سـرد روی ديـواره تحتـاني آن، توسـط امـين الـساداتي و قاسـمي [٢۵] بهصورت عددي مطالعه شده است. آنها اثرات عدد رايلي، اندازه و محل قرارگیری جـزء سـرد، نـوع نانوسـیال و کـسر حجمـی نانوذرات را بررسی کردند و نشان دادند که افزودن نانوذرات باعث بهبود بازده سرمایی بـهخـصوص در اعـداد رایلـی پـایین می شود. به علاوه نتایج آنها نشان می داد که نوع نانوسیال و طول و اندازه جزء سرد بهشدت بر دمای بیشینه سطح جزء سرد تاثیر گذار است. قاسمی و امینالساداتی [۲۶] مسئله جابه جایی آزاد در یک محفظه مربعی با دیوارههای افقی عایق، دیواره چپ سرد و یک المان گرمایی با شار نوسانی روی دیواره راست را



شکل ۱- طرحوارهای از هندسه مورد بررسی

به روش عددی بررسی کردند. آنها ضمن مشاهده میدان جریان ودمای نوسانی درون محفظه، دریافتند که مکان بهینه المان گرمایی تابعی از عدد رایلی است. در مراجع [۲۷-۳۰] نیز افزایش انتقال گرما با افزایش درصد حجمی نانوذرات گزارش شده است. لازم به ذکر است که در مراجع [۱۹-۲۲] و [۲۴، ۲۶ شده است. از محمی نانوذرات از ۰ تا ۲.۰ در نظر گرفته شدهاست.

در تحقیق حاضر به مطالعه تاثیر افزایش تعداد گردابهها و بهکارگیری نانوسیال برای افزایش انتقال گرما در یک محفظه مربعی پرداخته و اثر آنها با یکدیگر مقایسه میشود. بدین منظور، هندسهای مطابق با مرجع [۱۵] در نظر گرفته میشود و جابهجایی آزاد نانوسیال در آن بررسی و مطالعه میشود. نانوسیال آب-نقره، به دلیل دارا بودن بیشترین ضریب هدایت گرمایی نسبت سایر نانوسیالهای بر پایه آب، انتخاب شده است. شبیهسازیهای عددی برای محدوده جریان آرام با اعداد رایلی ^۳ ۱۰ تا ^۹ ۱۰، شش حالت مختلف از چینش المانهای سرد و گرم و کسر حجمی نانوذرات

بین • تا ۲/۰ انجام می شوند.

۲- هندسه مسئله و معادلات حاکم

هندسه مورد نظر مطابق شکل (۱)، یک محفظه مربعی به ابعاد H حاوی نانوسیال آب-نقره با وجود اجزای گرمایی روی دیوارههای جانبی آن است. خواص ترموفیزیکی سیال آب و فلز نقره در دمای ۳۰۰ کلوین در جدول (۱) نشان داده شدهاند. اجزای گرم در دمای مT و اجزای سرد در دمای T قرار دارند (T_h>T_c) و دیوارههای افقی و سایر بخشهای دیوارههای جانبی عایقاند. با توجه به تعداد، اندازه، و نحوه چیدمان اجزای گرمایی، شش حالت مختلف در نظر گرفته می شود: حالت 1: دو عدد جزء گرم به طول 4/H روی دیواره چپ و دو عدد جزء سرد روی دیواره راست؛ شکل(۱–الف). حالت 7: دو عدد جزء گرم و سرد به طول 4/H روی دیواره چپ و دو عدد جزء سرد و گرم روی دیواره راست؛ شکل(۱–الف).

نقره	آب	خواص ترموفيزيكي	
۲۳۵	4114	$(j/kg k)$ C_p	
۱ ۰ ۵۰ ۰	99V/1	(kg/m^3) ρ	
479	۰/۶۱۳	(w/m k) k	
١/٨٩	71	$(k^{-1}) \beta \times 10^{-5}$	

جدول ۱- خواص ترموفیزیکی آب و نقره در دمای ۳۰۰ کلوین [۲۵]

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_p \tag{(d)}$$

$$\alpha_{nf} = k_{nf} / \left(\rho c_p\right)_{nf} \tag{9}$$

$$\left(\rho c_{p}\right)_{nf} = (1 - \phi) \left(\rho c_{p}\right)_{f} + \phi \left(\rho c_{p}\right)_{p} \tag{V}$$

$$(\rho\beta)_{\rm nf} = (1-\varphi)(\rho\beta)_{\rm f} + \varphi(\rho\beta)_{\rm p} \tag{A}$$

برای محاسبه ویسکوزیته موثر نانوسیال از معادله برینکمن [۳۱] استفاده می شود:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{\left(1 - \varphi\right)^{2.5}} \tag{9}$$

در معادله(۶)، ضریب هدایت گرمایی نانوسیال با فرض نانوذرات کروی از معادله ماکسول [۳۲] محاسبه می شود:

$$k_{nf} = k_{f} \left[\frac{\left(k_{p} + 2k_{f}\right) - 2\phi\left(k_{f} - k_{p}\right)}{\left(k_{p} + 2k_{f}\right) + \phi\left(k_{f} - k_{p}\right)} \right]$$
(1.9)

مدلسازی نانوسیال با استفاده از معادلات فوق توسط مراجع متعددی از جمله مراجع [۱۹–۳۰] انجام شده و مورد تایید قرار گرفته است. با استفاده از پارامترهای بدون بعد زیـر مـی تـوان معـادلات

حاکم را به صورت بدون بعد بازنویسی کرد.

$$X = \frac{x}{H}, \qquad Y = \frac{y}{H}, \qquad U = \frac{uH}{\alpha_{f}},$$

$$V = \frac{vH}{\alpha_{f}}, \qquad P = \frac{pH^{2}}{\rho_{nf}{\alpha_{f}}^{2}}, \qquad \theta = \frac{T - T_{c}}{T_{h} - T_{c}},$$

$$Ra = \frac{g\beta_{f}H^{3}\Delta T}{v_{f}\alpha_{f}}, \qquad Pr = \frac{v_{f}}{\alpha_{f}},$$
aslettr پیوستگی، مومنتم و انرژی به شکل بدون بعد زیس

متناوب روی دیواره چپ؛ شکل(۱-ج). حالت ۴: سه عدد جزء گرم به طول ۲۵/۵ روی دیـواره چـپ و سه عدد جزء سرد روی دیواره راست؛ شکل(۱-د). حالت ۵: دو عدد جزء گرم و یک عدد جزء سرد به طول ۲۵/۵ بهطور متناوب روی دیواره چپ و دو عـدد جـزء سـرد و یک عدد جزء گرم بهطور متناوب روی دیواره راست؛ شکل(۱-ه). حالت ۶: شش عدد جزء گـرم و سـرد بـه طـول ۲۵/6 بـهطور متناوب روی دیواره چپ؛ شکل(۱-و).

در تمام حالتها اجزای سرد هم اندازه اجزای گرم هـستند و مجموع طول اجزای گرم یا سرد برابر با H/2 است.

نانوسیال بهصورت سیال تکفاز با خواص معادل یا موثر فرض می شود، گرچه این فرض همیشه معتبر نیست و هنوز محدوده مشخصی برای صحت آن ارائه نشده است. معادلات حاکم بر جریان دو بعدی جابهجایی آزاد آرام و دایم نانوسیال با فرض تک فاز درون محفظه شامل معادلات پیوستگی، مومنتم و انرژی با استفاده از تقریب بوزینسک به ترتیب عبارتاند از:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{1}{\rho_{nf}} \left[-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} + \mu_{nf} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} \right) \right]$$
(7)

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$\frac{1}{\rho_{nf}} \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{nf} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\rho \beta \right)_{nf} g(T - T_c) \right]$$
(7)

$$\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}} = \alpha_{\mathrm{nf}}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}^2}\right) \tag{(4)}$$

که در آن چگالی، ضریب نفـوذ گرمـایی، گرمـای مخـصوص و

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{11}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{v_{nf}}{\alpha_f} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)$$
(17)

$$U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{v_{nf}}{\alpha_f} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right)$$
(14)

$$\frac{(\rho\beta)_{\rm nf}}{\rho_{\rm nf}\beta_{\rm f}} {\rm Ra. Pr.}\theta$$

$$U\frac{\partial\theta}{\partial X} + V\frac{\partial\theta}{\partial Y} = \frac{\alpha_{\rm nf}}{\alpha_{\rm f}} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} \right) \tag{10}$$

برای شرایط مرزی سرعت روی کلیه دیوارهها از شـرط مـرزی عدم لغزش استفاده مـیشـود. بـرای شـرایط مـرزی دمـا، روی اجزای گرم شرط $1 = \theta$ ، روی المانهـای سـرد شـرط $0 = \theta$ و برای بخشهای عایق، شرط $0 = n \frac{\partial \theta}{\partial n}$ در نظر گرفته می شود.

عدد ناسلت موضعی روی اجـزای گـرم بـه صـورت زیـر تعریف میشود[۲۲]:

$$Nu = \frac{hH}{k_{f}}$$
(19)

که در آن ضریب انتقال گرمای جابه جایی موضعی عبارت است از:

$$h = \frac{-k_{nf} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}}{T_{h} - T_{c}}$$
(1V)

$$Nu = -\left(\frac{k_{nf}}{k_{f}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial X}$$
(1A)

عدد ناسلت متوسط نیز با انتگرالگیری از عدد ناسلت موضعی روی اجزای گرم محاسبه میشود.

$$Nu_{avg} = 2 \int_{hot \ surfaces} Nu(y) dY$$
 (19)

برای محاسبه درصد افزایش عدد ناسلت مربوط به نانوسیال نسبت به عدد ناسلت سیال پایه، از معادله زیر استفاده می شود.

$$\Delta = \frac{Nu_{nf} - Nu_f}{Nu_f} \times 100 \tag{(Y \circ)}$$

۳- روش عددی

معادلات حاکم به روش حجم محدود و بر پایه یک شبکه نایکنواخت گسسته سازی شدهاند. برای گسسته سازی جملههای جابهجایی از روش پیوندی که ترکیبی از بسط تفاضل مرکزی و بالادست است استفاده شده و بسط مرتبه دوم تفاضل مرکزی نیز برای گسسته سازی جملههای پخش به کار گرفته شده است. وابستگی بین سرعت و فشار نیز توسط الگوریتم شده است. وابستگی بین سرعت و فشار نیز توسط الگوریتم شده حاصل، از روش خط به خط به همراه الگوریتم ماتریس سه قطری استفاده شده است.

برای جستجوی شبکه بهینه و اطمینان از عدم وابستگی نتایج به اندازه شبکه، تغییرات مولفه افقی سرعت و دما روی خط عمودی وسط محفظه برای حالت ۲ و در عدد رایلی ^۶ ۱۰ بررسی شده است. برای جستجوی شبکه بهینه، محفظه حاوی آب خالص با عدد پرانتل ۷ درنظر گرفته شده است. مطابق با شکل (۲)، مقایسه ی نتایج برای شبکههای ۲۰×۲۰، شکل (۲)، مقایسه ی نتایج برای شبکههای ۲۰×۲۰، ۵۰×۰۹ و ۱۶۰×۱۶۰ نتایج حاصل تغییر چندانی نخواهد کرد. بنابراین از یک شبکه ۸۰×۸۰ برای انجام شبیهسازیها استفاده می شود.

همچنین برای معتبرسازی کد عددی، دو مسئله در نظر گرفته شده است. مسئله اول، جریان جابه جایی آزاد درون یک محفظه مربعی با دیواره چپ گرم، دیواره راست سرد و دیواره های افقی عایق مطابق با مرجع [۳۴] است. مسئله دوم، جریان جابه جایی آزاد در یک محفظه مربعی با دو جفت جزء سرد و گرم است. اجزای مطابق با هندسه مورد استفاده در مرجع [۱۵] به صورت یک در میان روی دو دیواره عمودی قرار گرفته اند. در هر دو مسئله، محفظه ها از هوا با عدد پرانتل ۷۱/۰ پر شده اند. پارامتر مسئله، محفظه ها از هوا با عدد پرانتل ۱۷/۰ پر شده اند. پارامتر مسئله محفظه ما ز هوا با عدد پرانتل ۱۵/۰ پر شده اند. پارامتر مسئله محفظه ما ز هوا با عدد پرانتل ۱۵/۰ پر شده اند. پارامتر اول و دوم به ترتیب در شکلهای (۳) و (۴) ارائه شده است و

روشهای عددی در مهندسی، سال ۳۰، شمارهٔ ۱، تابستان ۱۳۹۰ (استقلال)

٨۴







جفت المان گرمایی روی دیواره ها قرار گرفته اند، طول هر جزء برابر با H/4 است. همچنین در حالتهای ۴ تـا ۶ کـه سـه جفت جزء گرمایی وجود دارد، طول هر المان برابر با H/6 است. شـکل (۵)، خطـوط جریـان و خطـوط دمـا ثابـت بـرای چینشهای مختلف دو جفت جزء سرد و گرم (حالتهای ۱ تـا ۳) در عدد رایلی ⁹ه ا=Ra و ۲/ه=φ را نشان می دهد. شکل (۶) نیز

همان نتایج را برای چینشهای مختلف سه جفّت جزء (حالتهای



همانگونه که مشاهده میشود در هـر دو مـورد، تطـابق بـسیار خوبی بین نتایج حاضر و نتایج مراجع وجود دارد.

۴- بررسی نتایج الف) بررسی اثر چیدمان اجزاء بر تعداد گردابههای تشکیل شده و افزایش انتقال گرما همان گونه که پیشتر ذکر شد، در حالتهای ۱ تا ۳ که دو



سه جفت جزء سرد و گرم در [°]•Ra=۱ و ¢/۰−φ



۴ تا ۶) نشان میدهد.

در حالت (۱)، که اجزای گرم روی دیواره جانبی چپ و اجزای سرد روی دیواره جانبی راست قرار گرفتهاند، اثرات شناوری اجزای گرم و سرد موافق با یکدیگر بوده، و در نتیجه فقط یک گردابه درون محفظه تشکیل می شود. در این حالت سیال توسط اجزای گرم به بالا رانده شده و سپس توسط اجزای سرد به پایین کشیده می شود.

در حالت (۲)، که اجزای گرم و سرد بهطور متناوب بر روی دو دیواره جانبی قرار گرفتهاند، اثرات شناوری متقابل آنها منجر به تشکیل دو گردابه می شود. همان گونه که توسط خطوط جریان نشان داده شده است، گردابه بالایی پاد ساعتگرد بوده و گردابه پایینی ساعتگرد است.

در حالت (۳)، که اجزای گرم و سرد بهطور متناوب بر روی دیواره جانبی چپ قرار گرفتهانـد، اثـرات شـناوری آنهـا کـاملاً مخالف یکدیگر بوده و بنابراین چهار گردابـه در محفظـه پدیـد میآید.

در حالت (۴) نیز مشابه حالت (۱)، اثرات شـناوری اجـزای گرم و سرد موافق با یکدیگر بوده و در نتیجه یک گردابـه درون

محفظه تشکیل می شود و در نتیجه درون محفظه لایهبندی گرمایی پدید می آید.

در حالت (۵)، اثرات شناوری ناشی از هر جفت اجزای سرد و گرم مقابل هم باعث تشکیل سه گردابه در بالا، وسط و پایین محفظه می شود. در این حالت، به دلیل وجود سه گردابه، اختلاط سیال نسبت به حالتی که دو گردابه تشکیل می شود بیشتر است،

و درنتیجه لایهبندی گرمایی درون محفظه از بین می رود. در حالت (۶)، اثرات شناوری اجزای سرد و گرم کاملا مخالف یکدیگر بوده و در نتیجه شش گردابه درون محفظه پدید می آید. به دلیل اختلاط زیادی که در نتیجه این تعداد گردابه رخ می دهد، لایهبندی گرمایی کاملا از بین رفته و بیشتر سیال درون نمحفظه دمای متوسطی خواهد داشت. لازم به ذکر است که نتایج حاصل در این بخش مشابه با نتایج مرجع [10] است. شکل (۷)، تغییرات عدد ناسلت متوسط روی اجزای گرم بر مسب عدد رایلی را برای حالتهای (۱) تا (۶) نشان می دهد. مطابق با این شکل، مشاهده می شود که:

- مطابق انتظار، در تمام حالتها با افزایش عدد رایلی نرخ کلی انتقال گرما افزایش مییابد. همچنین نحوه چینش اجزای گرمایی تاثیر قابل ملاحظهای بر عدد ناسلت متوسط دارد. مشاهده می شود که عدد ناسلت متوسط بیشتر متاثر از چینش اجزای سرد و گرم و تعداد گردابههای تشکیل شده است تا تغییرات عدد رایلی.
- ۲) با افزایش تعداد گردابهها درون محفظه، انتقال گرما به میزان قابل ملاحظهای افزایش مییابد. در حالت ۶ که شش گردابه تشکیل میشود، بیشترین نرخ انتقال گرما رخ میدهد. نرخ انتقال گرما در حالت ۵ با وجود چهار گردابه در مرتبه دوم قرار دارد. به همین ترتیب نرخ انتقال گرما در حالتهایی که ترار دارد. به همین ترتیب نرخ انتقال گرما در دالتهایی که قرار دارد. در حالتهای (۱) و(۴) که تنها یک گردابه درون محفظه تشکیل میشود، نتایج حاصل بر هم منطبقاند. یکی از دلایل افزایش عدد ناسلت با افزایش تعداد گردابهها ایس است که با تشکیل گردابههای بیشتر، لایه مرزی تشکیل

شده روی اجزای بین اجـزای مجـاور از بـین مـیرود و در نتیجه میزان انتقال گرما افزایش مییابد.

۳) انتقال گرما درون محفظه به دو ناحیـه هـدایتی و جابـهجـایی تقسیم میشود. در ناحیه اعداد رایلی کوچک که انتقـال گرمـا هدایتی مکانیزم غالب است، با افزایش عدد رایلی، عدد ناسلت متوسط افزایش چندانی نخواهد داشت، اما در ناحیه اعداد رایلی بزرگ که انتقال گرمای جابه جایی مکانیزم غالب است، با افزایش عدد رایلی، عـدد ناسـلت متوسـط بــهطـور چـشمگیری افـزایش مـییابـد. همچنـین بـا افـزایش تعـداد گردابهها، گذار از هدایت به جابهجایی در اعداد رایلی بزرگتر رخ میدهد. برای حالتهای (۱) و (۴) با وجـود یـک گردابـه، نقطه گذار از هدایت به جابه جایی در نزدیکی ^۳ ه۱۰ Ra رخ میدهد. در این شرایط به دلیل موافق بودن اثر شناوری اجـزا، جریان سیال قدرت بیشتری یافته و بنابراین انتقال گرمای جابهجایی سریعتر حاکم می شود. در حالت (۲) با وجود دو گردابه و حالت (۵) با وجود سه گردابه، نقطه گذار تا Ra=۱۰^۴ به تعویق میافت.د. در حالت (۳) با وجود چهار گردابه و در حالت (۶) با وجود شـش گردابه، گـذار در Ra=۱۰^۵ رخ میدهد. تعویق گذار به اعداد رایلـی بزرگتـر بـه دلیل عدم توافق اثرات شناوری المانهای سرد و گرم بوده، که این پدیده، جابهجایی و قدرت جریان را تضعیف میسازد و در نتیجه حاکمیت مکانیزم هدایت بر انتقال گرما تا اعداد رايلي بالاتر ادامه مي يابد.

ب) بررسی اثر افزایش درصد حجمی نانوذرات بر نرخ انتقال گرمای

در شکلهای (۸) و (۹) به ترتیب خطوط دما ثابت و خطوط جریان مربوط به محفظه با دو و سه جفت المان سرد و گرم بهازای غلظتهای متفاوت نانوذرات در ^۶ه۱=Ra نشان داده شده و با خطوط مربوط به سیال پایه مقایسه شده است. همان گونه که مشاهده می شود، با افزایش غلظت حجمی نانوذرات، انحراف خطوط جریان از کانتورهای مربوط به سیال پایه بیشتر

می شود، به گونهای که کانتورهای مربوط بـه ۵ ۰/۰= م بیـشترین قرابت با کانتورهای سیال خالص را دارد. با توجه به معادله (۶) با افزایش غلظت نانوذرات، ضریب هدایت گرمایی نانو سیال افزایش مییابد. بنابراین انتظار میرود کـه در یـک عـدد رایلـی ثابت با افزایش درصد حجمی نانوذرات و بیشتر شدن ضریب هدایت گرمایی، مکانیزم هدایت گرمایی موثرتر شود و در نتیجهٔ آن، قدرت جریان در محفظه که منجر به انتقال گرمای جابه جایی می شود کمتر شود. به عنوان مثال در حالت ۱ که یک گردابه دورن محفظه تشکیل شده است، با افزایش **φ** سیال قرار گرفته در هسته مرکزی محفظه، حرکت کندتری خواهد داشت. همچنین این پدیده به خوبی در خطوط جریان مربوط به محفظه با چهار و شش گردابه نیز مشاهده می شود. در این حالت با افزایش غلظت حجمی نانوذرات، گردابه های پدید آمده در محفظه نسبت به گردابههای مربوط به سیال پایه کوچکتر شده و مرکز گردابهها به دیوار نزدیکتر می شوند که نشان دهنده کندتر شدن سرعت جریان سیال و کاهش قدرت جریان است. در حالت (۶) که شش گردابه درون محفظه تشکیل می شود بهدلیـل اینکه تقریباً در تمام محدوده اعداد رایلی مکانیزم هدایت حاکمیت دارد، افزایش کسر حجمی نانوذرات تاثیر زیادی بر خطوط همدما ندارد.

شکل (۱۰) تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب عدد رایلی را بهازای کسرهای حجمی مختلف نانوذرات نشان میدهد. مطابق با شکل مشهود است که در یک عدد رایلی ثابت، عدد ناسلت متوسط با افزایش کسر حجمی نانوذرات افزایش مییابد. همان گونه که پیشتر ذکر شد، افزایش تعداد گردابهها باعث به تعویق افتادن حاکمیت مکانیزم جابهجایی به اعداد رایلی بالاتر می شود. از طرف دیگر افزایش نانوذرات باعث افزایش ضریب هدایت گرمایی نانوسیال می شود. نتایج افزایش درصد حجمی نانوذرات در حالتهای مختلف (حفرهها با چیدمانهای متفاوت اجزای گرمایی و تعداد گردابههای تشکیل شده متفاوت) با ضریب یکسانی صورت می گیرد.



شکل ۸– مقایسه خطوط دماثابت و خطوط جریان بازای کسرهای حجمی مختلف نانوذرات برای محفظه با وجود دو جفت جزء سرد و گرم (خطچین: سیال خالص، خطوط توپر: نانوسیال)



شکل ۹– مقایسه خطوط دماثابت و خطوط جریان بهازای کسرهای حجمی مختلف نانوذرات برای محفظه با وجود سه جفت المان سرد وگرم (خطچین: سیال خالص، خطوط توپر: نانوسیال)



یارامتر دیگری کے برای درک بہتر اثر اضافه شدن نانوذرات به سیال پایه مورد بررسی قرار می گیرد، درصد افزایش عدد ناسلت نانوسیال نسبت به سیال پایه (Δ) است که طبق معادله (۱۷) محاسبه می شود. نتایج مربوط بـه درصـد افزایش عدد ناسلت برای حالتهای مختلف در شکل (۱۱) ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش φ در تمام اعداد رایلی، Δ نیز افزایش می یابد که نتیجه ای قابل انتظار است. در حالتهای (۱) و (۴) (شکل ۱۱–الـف)، مقـدار 🛆 در عدد رایلی ^۴ ۱۰ دارای مقدار مینیمم است. در این حالتها، عـدد رایلی ^۴ ۱۰ نقطهٔ گذار از مکانیزم انتقال گرما هدایتی به مکانیزم جابهجایی است و چـون در شـرایط گـذار، اثـر هـدایت کـم میشود و جابهجایی نیز هنوز قدرت زیادی ندارد، تاثیر افزودن نانوذرات به سیال پایه، به اندازهٔ تــاثیری کــه در ســایر اعداد رایلی مشاهده می شود، نخواهد بود. به همین صورت در حالت (۳) (شکل ۱۱-ج)، که پدیدهٔ گذار در نزدیکی عدد رایلی $^{\circ}$ ا رخ میدهد، مقدار مینیمم Δ در ایـن عـدد رایلی $^{\circ}$ رخ میدهد. در حالت ۶ نیز بهدلیل اینکه تقریباً در تمام محدوده اعداد رايلي، مكانيزم هدايت حاكم است، روند نزولي مشاهده نمی شود. Δ

تغییرات Δ برحسب عدد رایلی برای حالتهای مختلف بهازای ۲/ه= φ در شکل (۱۲) مقایسه شده است. با توجه به این شکل می توان حالتهای شش گانه مورد بررسی را در دو دسته طبقهبندی کرد. دستهٔ اول شامل حالتهای (۱)، (۲)، (۴) و (۵) که اجزای گرمایی بر روی دو دیواره قرار گرفتهاند و دستهٔ دوم شامل حالتهای (۳) و (۶) که اجزای گرمایی تنها بر روی یک دیواره قرار گرفتهاند. در دسته اول بیشترین میزان درصد افزایش عدد ناسلت در ^۳هاه میدار آن در عدد رایلی ^۳ها خواهد بود. در دستهٔ دوم، روند تغییرات Δ به رایلی ^۳ها زیادی این پارامتر کمتر از مقدار آن در عدد پایین از مقادیر مربوط به دستهٔ اول کمتر است. در حالت (۶)

است، روند نزولی در مقدار درصد افزایش مشاهده نمی شود. همچنین از شکل (۱۲) پیداست که در عدد رایلی ^۳ ۱۰ بیشترین درصد افزایش مربوط به حالت (۵) با سه گردابه و در عدد رایلی ^۶ ۱۰^۴ بیشترین در صد افزایش مربوط به حالت ۶ با شش گردابه است.

ج) مقایسه اثر استفاده از نانوسیال و افزایش تعداد گردابهها بر میزان افزایش انتقال گرما

تاکنون مـشخص شـد کـه اسـتفاده از نانوسـيال و چيـنش اجزای گرمایی به گونهای که تعداد گردابه بیشتری تشکیل شود، هر دو منجر به افزایش انتقال گرما می شود. در این بخش به مقایسه اثر این دو مورد پرداخته میشود. در شکل (۱۳) تغييرات عدد ناسلت متوسط برحسب عدد رايلي براي سيال پایه و نانوسیال با φ=۰/۲ با یکدیگر مقایسه شدهاند. با توجـه به شکل (۱۳) مشخص است که عدد ناسلت نانوسیال با یک گردابه از عدد ناسلت مربوط به سیال پایه با ساختاری شامل یک و دو گردابه بیشتر است. همچنین عدد ناسلت نانوسیال با دو گردابه از عدد ناسلت سیال پایـه بـا سـه گردابـه بیـشتر است. بنابراین به عنوان یک نتیجه می توان بیان کرد که استفاده از نانوسیال نسبت به چند گردابهای بودن ساختار جریان، تاثیر بیشتری بر نرخ انتقال گرما دارد. بنابراین با استفاده نانوسیال و ایجاد جریان با سلولهای کمتر می توان به عدد ناسلت بیشتری نسبت به سیال پایه با جریان شامل سلولهای بیشتر دست یافت. البته تحلیل تولید آنتروپی نیز باید در این دو مورد انجام گیرد تا حالت کارامدتر مشخص شود. این مورد نیاز به بررسی و تحقیق جداگانهای دارد.

۵- جمعبندی

در تحقیق حاضر، جابهجایی طبیعی به وجود آمده از دو و سه جفت جزء سرد و گرم قرار گرفته بر روی دیواره های محفظه مربعی پر شده از نانو سیال به روش عددی بررسی شد. توجه اصلی بر اندازه و چینش اجزا در محفظه و همچنین اثر



شکل ۱۱- مقایسه پارامتر درصد افزایش عددناسلت مربوط به نانوسیال نسبت به سیال پایه برای حالات مختلف



شکل ۱۲- تغییرات پارامتر درصد افزایش نسبت به تغییرات عدد رایلی در حالات مختلف بازای ۹-۰/۳



استفاده از نانو سیال با غلظتهای متفاوت نانوذرات بوده و نتـایج زیر حاصل شده است.

- ۱) هنگامی که چینش اجزا از وضعیت مجزا روی دو دیواره عمودی به وضعیت یک در میان روی یک دیواره عمودی تغییر میکند، اثرات شناوری اجزا مخالف یک دیگر شده و تعداد گردابهها درون محفظه بیشتر شده و در نتیجه انتقال گرما افزایش مییابد. از سوی دیگر، اختلاط قوی میان گردابهها باعث میشود بیشتر سیال درون محفظه، دمای یکنواخت و متوسطی داشته باشد.
- ۲) انتقال گرما به صورت سازگار با تعداد گردابه ها درون محفظه افزایش مییابد به صورتی که کمترین میزان انتقال گرمای مربوط به حالت (۱) با یک گردابه است و با افزایش گردابه ها به دو، سه، چهار و نهایتاً شش، میزان انتقال گرما هم افزایش مییابد. می توان نتیجه گرفت که با تقسیم چشمه ها و چاهها به اجزای کوچکتر و قراردادن آنها به

صورت یک در میان بر روی یک دیـواره مـیتـوان باعـث تشکیل تعداد گردابه بیشتر و در نتیجه نـرخ انتقـال گرمـای بیشتر درون محفظه شد.

- ۳) افزایش عدد ناسلت متوسط مربوط به نانوسیال نسبت به سیال پایه برای چیدمانهای متفاوت اجزای گرمایی روی دیوارهها، با ضریب یکسانی صورت خواهد گرفت.
- ۴) تاثیر استفاده از نانوسیال بر افزایش انتقال گرما، بیشتر از تاثیر چند سلولی بودن ساختار جریان است. به عنوان مثال عدد ناسلت متوسط نانوسیال با ۲/٥=φ و با ساختار یک گردابهای از عدد ناسلت متوسط سیال پایه با ساختار یک و دو گردابهای از عدد ناسلت منابراین با استفاده نانوسیال و تولید جریان با سلولهای کمتر میتوان به عدد ناسلت بیشتری نسبت به سیال خالص با جریان شامل سلولهای بیشتر دست یافت.

مراجع

- Ostrach, S., "Natural Convection in Enclosures," ASME J. Heat Transfer, Vol. 110, pp. 1175–1190, 1988.
- 2. Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L., and Sammakia, B., *Buoyancy-Induced Flows and Transport*, Hemisphere Pub. Co. New York, NY, 1988.
- Davis, G., and Vahl, D., "Natural Convection of Air in Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution," *Int. J. for Numerical Method in Fluids*, Vol. 3, pp. 249-264, 1983.
- Davidson, L., "Calculation of the Turbulence Buoyancy-Driven Flow in a Rectangular Cavity Using an Efficient Solver and Two Different Low Reynolds Number k-ε Turbulence Models, "Numer. Heat Transfer (A) Vol. 18, pp. 129–147, 1990.
- Poujol, F. T., "Natural Convection of a High Prandtl Number Fluid in Cavity, "Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 27, pp. 109–118, 2000.
- 6. Ampofo, F., and Karayiannis, T. G., "Experimental Benchmark Data for Turbulent Natural Convection in an Air Filled Square Cavity," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 3551–3572, 2003.
- Zahmatkesh, I., "On the Importance of Thermal Boundary Conditions in Heat Transfer and Entropy Generation for Natural Convection Inside a Porous Cavity, "Int. J. Therm. Sci. Vol. 47, pp. 339–346, 2008.

- Ishihara, I., Matsumoto, R., and Senoo, A., "Natural Convection in a Vertical Rectangular Cavity with Localizing Heating and Cooling Zones," *Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 467–472, 2000.
- Sezai, I., and Mohamad, A. A., "Natural Convection From a Discrete Heat Source on the Bottom of a Horizontal Cavity," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 2257–2266, 2000.
- Aydin, O., and Yang, W. J., "Natural Convection in Enclosures With Localized Heating From Below and Symmetrical Cooling From Sides," *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, Vol. 10, pp.518–529, 2000.
- Da Silva, A. K., Lorente, S., and Bejan, A.," Optimal Distribution of Discrete Heat Sources on a Wall with Natural Convection, " *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 203–214, 2004.
- Sharif, M. A. R., and Mohammad, T. R., "Natural Convection in Cavities with Constant Flux Heating at the Bottom Wall and Isothermal Cooling from the Sidewalls," *Int. J. Therm. Sci*, Vol. 44, pp. 865–878, 2005.
- Bazylak, A., Djilali, N., and Sinton, D., "Natural Convection in an Enclosure With Distributed Heat Sources," *Numer. Heat Transfer* (A), Vol. 49, pp. 655–667, 2006.
- 14. Nithyadevi, N., Kandaswamy, N. P., and Lee, J., "Natural Convection in a Rectangular Cavity With

Partially Active Side Walls," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 50, pp. 4688–4697, 2007.

- Deng, Q. H., "Fluid Flow and Heat Transfer Characteristics of Natural Convection in Square Cavities Due to Discrete Source-Sink Pairs," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 51, pp. 5949-5957, 2008.
- Maxwell, J. C., *Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, Clarendon Press, 1873.
- Choi, U. S., "Enhancing Thermal Conductivity of Fluids with Nanoparticles, in: D.A. Siginer, H.P. Wang, (Eds), *Development and Application of Non-Newtonian Flows*, FED –VOL. 231, No. 66, pp. 99-105, 1995.
- Eastman, J. A., Choi, S. U. S., Li, S., Yu, W., and Thompson, L. J., "Anomalously Increased Effective Thermal Conductivities of Ethylene Glycol-Based Nanofluids Containing Copper Nano Particles," *Appl. Phys. Lett*, Vol. 78, pp. 718-720, 2001.
- Khanafar, K., Vafai, K., and Lightstone, M., "Buoyancy-Driven Heat Transfer Enhancement in a Two-Dimensional Cavity Utilizing Nanofluids," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 3639-3653, 2003.
- Jou, R. Y., and Tzeng, S. C., "Numerical Research of Nature Convective Heat Transfer Enhancement Filled With Nanofluids in Rectangular Enclosures," *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 727-736, 2006.
- 21. Santra, A. K., Sen, S., and Chakraborty, N., "Study of Heat Transfer Augmentation in a Differentially Heated Square Cavity Using Copper-Water Nanofluid," *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 47, pp. 1113-1122, 2008.
- 22. Oztop, H. F., and Abu-Nada, E., "Numerical Study of Natural Convection in Partially Heated Rectangular Enclosures Filled With Nanofluids," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 29, pp. 1326–1336, 2008.
- Ogut, E. B., "Natural Convection of Water-Based Nanofluids in an Inclined Cavity With a Heat Source," *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 48, pp. 2063-2073, 2009.
- 24. Abu-Nada, E., and Oztop, H. F., "Effects of Inclination Angle on Natural Convection in

Enclosures Filled with Cu–Water Nanofluid," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 30, pp. 669–678, 2009.

- 25. Aminossadati, S.M., and Ghasemi, B., "Natural Convection Cooling of a Localized Heat Source at the Bottom of a Nanofluid-Filled Cavity," *European Journal of Mechanic B/Fluids*, Vol. 28, pp. 630–640, 2009.
- Ghasemi B., and Aminossadati S.M., "Periodic Natural Convection in a Nanofluid-Filled Cavity with Oscillating Heat Flux," *Int. J. Thermal Sci.*, Vol. 49, pp. 1–9, 2010.
- 27. Kumar, S., Prasad S.K., and Banerjee J., "Analysis of Flow and Thermal Field in Nanofluid Using a Single Phase Thermal Dispersion Model," *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, pp. 573–592, 2010.
- 28. Mahmoudi, A.H., Shahi, M., Honarbakhsh Raouf, A., and Ghasemian, A., "Numerical Study of Natural Convection Cooling of Horizontal Heat Source Mounted in a Square Cavity Filled with Nanofluid," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 1135–1141, 2010.
- Corcione, M., "Heat Transfer Features of Buoyancy-Driven Nanofluids Inside Rectangular Enclosures Differentially Heated at the Sidewalls," *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 49, pp. 1536–1546, 2010.
- 30. Sheikhzadeh, G.A., Arefmanesh, A., Kheirkhah, M.H., and Abdollahi, R., "Natural Convection of Cu-Water Nanofluid in a Cavity with Partially Active Side Walls," *European Journal of Mechanics B/Fluids*, in press.
- Brinkman H.C, "The Viscosity of Concentrated Suspensions and Solution," J. Chem. Phys, Vol. 20, pp. 571–581, 1952.
- Maxwell, J., A., *Treatise on Electricity and Magnetism*, Second ed. Oxford University Press, Cambridge, UK, 1904.
- 33. Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, DC, 1980.
- 34. De Vahl Davis, G., "Natural Convection of air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 3, pp. 249–264, 1983.