

مقایسه روشهای مختلف تصویر در روش هیدرودینامیک ذرات روان تراکم ناپذیر برای مدلسازی جریان اطراف دریچه‌ها

زهرا قدم پور^{۱*}، سید محمدرضا هاشمی^۲، ناصر طالب بیدختی^۳ و امیرحسین نیک سرشت^۴

۱. بخش مهندسی راه و ساختمان و محیط زیست، دانشگاه شیراز

۲. بخش مهندسی آب، دانشگاه شیراز

۳. بخش مهندسی راه و ساختمان و محیط زیست و رئیس مرکز تحقیقات محیط زیست و توسعه پایدار، دانشگاه شیراز

۴. دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شیراز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۵/۱۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۰/۰۹/۰۹)

چکیده -

()
ISPH VOF

واژگان کلیدی:

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: zahra_ghadampour@yahoo.com

Comparison of two projection methods in SPH for modeling flow under a gate

Z. Ghadampour¹, M.R. Hashemi and² N. taleb beydokhti³ and A. Hossein Nikseresh⁴

1. Department of Civil and Environmental Engineering, Shiraz University, Iran

2. Department of Water Engineering, Shiraz University, Iran

3. Department of Civil and Environmental Engineering, Head of Center for Environmental Research and Sustainable Development, Shiraz University, Iran

4. Department of Mechanical Engineering, Shiraz University of Science and Technology, Iran

Abstract : Modeling free surface flow is a challenging problem in hydraulic research. The objective of this research is to compare those methods for simulation of flow around hydraulic structures. Accordingly, Incompressible SPH (ISPH) methods, with two different projection methods to enforce incompressibility, are utilized to model flow under a gate and then compared to each other from mathematical and numerical viewpoints. Moreover, the effect of pressure term approximation on conservation equation of mass and momentum with two different relations is investigated by error index. For verification of ISPH results, VOF method is applied to similar gate problem. Results show that two methods of enforcing incompressibility are numerically and mathematically equivalent if proper approximation terms are used in SPH method. Furthermore, VOF and ISPH results are in excellent agreement. Besides, two pressure terms obey similar chaotic error trend for inner and all particles (inner plus free surface).

Keywords: Smoothed Particle Hydrodynamic, Incompressible smoothed particle hydrodynamic (ISPH), Projection method, Gate

از دریچه و محاسبه میزان بار دینامیکی وارده از طرف سیال بر

دریچه در ادبیات تحقیق موجود است [۱ و ۲].

مدلسازی عددی این جریانها در فضاهای یک، دو یا سه بعدی و بر پایه معادلات جریان پتانسیل، اولر، سنت-ونان و معادلات پایستاری جرم و منتم به صورت غیر خطی (معادلات ناویر-استوکس) انجام می پذیرد. عملکرد هیدرولیکی این سازهها بر پایه معادلات فوق الذکر با استفاده از روشهای عددی در گذشته مورد ارزیابی قرار گرفته است [۳-۵]. حل عددی این معادلات بر پایه دو دیدگاه کلی دارای جزء و بدون جزء انجام پذیر است. استفاده از روشهای با جزء در حل عددی این معادلات از گذشته تا کنون مورد استفاده بوده و در حال حاضر روش غالب در شبیه سازی اند. از معروفترین روشهای با جزء در حل مسائل مربوط به دریچه می توان به روشهای تفاضل محدود و اجزای محدود اشاره کرد [۶-۸].

با این وجود، این روشها دارای محدودیتهای و مشکلاتی در مدل کردن مرزهای قابل تغییر، مرزهای متحرک و تعیین دقیق سطح آزاد سیال هستند. همچنین در این روش برای اجسام با هندسه پیچیده مشکل شبکه بندی نایکناخت وجود دارد.

۱- مقدمه

سازه های هیدرولیکی در تأمین اهداف مختلف از قبیل کنترل، هدایت، انحراف و ذخیره آب مورد استفاده قرار می گیرند. به منظور طراحی، بهره برداری و پیش بینی شرایط در صورت تخریب این سازه ها، اطلاع از وضعیت جریان در اطراف آنها امری ضروری است. هندسه پیچیده، عدم اطلاع دقیق از وضعیت سطح آزاد جریان، پیچیدگی معادلات حاکم، وجود تغییرات ناگهانی جریان در مقیاسهای زمانی و مکانی، توزیع فشار غیر هیدرواستاتیک و ... باعث می شود، تا مدلسازی جریان در اطراف این سازه ها امری پیچیده بوده و مورد توجه بسیاری از محققان باشد.

دریچه ها یکی از سازه های متحرک بوده که به منظور کنترل دبی عبوری از سازه های هیدرولیکی نظیر کانالها یا در قسمت آبنگير سدها و تنظیم حجم آب که یک فرایند دینامیکی است مورد استفاده قرار می گیرند. دریچه ها به منظور تأمین اهداف مورد نظر و عملکرد صحیح، انواع مختلفی از جمله دریچه کشویی، قطاعی و ... دارند. کارهای آزمایشگاهی و روابط تجربی برای تعیین دبی عبوری و پروفیل سطح آب بعد

بنابراین فکر روش عددی که مستقل از شبکه بندی در طول حل عددی باشد، ایده‌ای برای پدید آمدن نسل جدیدی از روشهای عددی به نام روشهای بدون جزء شد [۹]. ایجاد روشهای بدون جزء به ۷۰ سال پیش و به روش هم مکانی^۵ باز می‌گردد [۱۰]. در این روشها هیچ گونه جزءبندی از پیش تعیین شده‌ای برای حل مسئله وجود نداشته و از یکسری نقاط پراکنده که می‌توانند ثابت یا متحرک باشند، در دامنه حل و مرزها به منظور بیان هندسه مسئله استفاده می‌شود [۱۱].

در میان روشهای بدون جزء، روش SPH و روشهایی که بر پایه تصحیح آن هستند، یکی از کارآمدترین روشها در دیدگاه لاگرانژی برای شبیه سازی حرکت سیال با سطح آزادند [۱۲]. گینگولد و موناگان و به طور مستقل از آنها، لوسی در سال ۱۹۷۷ برای اولین بار، روش SPH را در فیزیک نجوم برای مطالعه برخورد کهکشانشا که هیچ گونه مرزی نداشتند، به کار بردند [۱۳ و ۱۴]. اساس کار آنها استفاده از روشی بود که نیاز به یک شبکه از پیش تعیین شده در محاسبه مشتق نداشته باشد. پس از آن کاربرد این روش در حل مسائل مکانیک جامدات گسترش یافت [۱۵ و ۱۶]. توانایی این روش بدون جزء در مدلسازی تغییر شکلهای زیاد، باعث شد تا علاوه بر آن، این روش در حل مسائل مکانیک سیالات به کار گرفته شود. اولین کاربرد روش SPH در حل مسائل جریان سطح آزاد توسط موناگان در سال ۱۹۹۴ برای شبیه سازی مسئله شکست امواج صورت پذیرفت [۱۷]. پس از آن در سالهای اخیر از این روش در سایر مسائل سطح آزاد از جمله شبیه سازی مسائل شکست سد، امواج بلند [۱۸]، امواج حاصل از زمین لرزه [۱۹]، شبیه سازی جریان از روی سرریز لبه تیز [۲۰] و جریان از روی پله [۲۱] استفاده شده است. از روش SPH با فرض تراکم پذیری ضعیف و برخی روشهای بدون جزء دیگر نظیر گالرکین در شبیه سازی جریان عبوری از دریچه استفاده شده است [۲۲ و ۲۳]. با در نظر گرفتن این نکته که جریان سطح آزاد در اطراف دریچه‌ها عموماً به صورت تراکم ناپذیر عمل کرده، در این تحقیق از روش SPH و با در نظر گرفتن تراکم ناپذیری، در

شبیه سازی جریان از روی دریچه استفاده شده است. استفاده از روش SPH در شبیه سازی سیال تراکم ناپذیر یکی از مسائل بحث بر انگیزی است که محققان مختلف با آن روبرو شده‌اند. تا کنون چندین روش برای اعمال شرط تراکم ناپذیری در حل عددی معادلات جریان بر پایه روش SPH مورد استفاده قرار گرفته که در زیر به معرفی آنها پرداخته می‌شود [۲۴].

در روش اول که در مدل کردن عبور آب از زیر دریچه نیز مورد استفاده قرار گرفته و به روش WCSPH^۶ معروف بوده، سیال تراکم ناپذیر به صورت سیال با تراکم پذیری ناچیز فرض می‌شود. در این روش به منظور محاسبه فشار، از معادله حالت مناسب سیال استفاده می‌شود. در این معادله فشار به صورت صریح بر حسب چگالی و سرعت صوت در سیال مورد نظر محاسبه می‌شود [۲۵]. حسن انجام این کار برنامه نویسی ساده آن بوده ولیکن استفاده از این روش باعث ایجاد یکسری مشکلات در حل عددی آن می‌شود. در این روش به منظور ارضای شرط تراکم ناپذیری (عدد ماخ کمتر از ۰/۱) و کاهش نوسانات چگالی به کمتر از ۱/۱، سرعت عددی صوت حداقل ۱۰ برابر بیشترین سرعت سیال در نظر گرفته می‌شود. با این حال، به علت وجود جمله نسبت چگالی در هر گام زمانی به صورت توانی در معادله حالت، نوسانات زیاد فشار به صورت غیر فیزیکی ایجاد شده که این امر باعث ناپایداری حل عددی می‌شود. از طرفی در نظر گرفتن معیار پایداری حل عددی (عدد کورانت) بر مبنای سرعت صوت در سیال باعث می‌شود تا پایداری عددی در گام زمانی کوچکتری حاصل شده که نتیجه آن افزایش مدت زمان محاسبات است. عدم ارضای شرط تراکم ناپذیری به طور کامل در این روش باعث ایجاد مشکلاتی در رابطه با انعکاس امواج صوتی در مرزهای جامد می‌شود [۲۶-۲۸].

با توجه به مشکلات موجود در این روش، به منظور ارضای شرط تراکم ناپذیری در مسائل سطح آزاد، کوشیزاکا و همکاران روش دیگری را با رویداشت به نگرش لاگرانژی کامل ارائه

کردند که به روش ذرات معروف است. در این روش به منظور محاسبه دقیق فشار از روش شبه-پنالتی^۷ استفاده می‌شود و این فرمولاسیون تا جایی ادامه می‌یابد که تغییرات چگالی در سیال کمتر از یک مقدار معین شود [۲۹]. در ادامه کوشیزاکا و همکاران روش MPS^۸ را که در آن به‌جای استفاده از فرمولاسیون فوق‌الذکر از معادله پواسون برای محاسبه دقیقتر فشار استفاده می‌کند، در حل مسئله شکست امواج مورد مطالعه قرار دادند و مشکلی مشابه موناگان یعنی عدم شبیه سازی دقیق سطح آزاد را تجربه کردند [۳۰].

در ادامه روش دیگری که به روش ISPH^۹ معروف بوده و در آن تراکم ناپذیری سیال به طور کامل بر اساس روش تصویر حاصل شده، برای رفع مشکلات روشهای قبلی ارائه شد. روش تصویر در حل معادلات در سیستم شبکه بندی شده اوپلری به روشهای عددی از جمله تفاضل محدود و حجم محدود به طور فراوان در گذشته مورد استفاده قرار گرفته است [۳۱ و ۳۲]. اما اعمال این روش در حل معادلات پایستاری ممتد در روشهای بدون جزء برای اولین بار توسط کامینز و رادمن در سال ۱۹۹۹ ارائه شد [۲۸]. آنها ادعا داشتند که این روش (روش شماره ۱ تصویر) از نتایج دقیقتری نسبت به روش قبلی برخوردار است. در روش پیشنهادی، سرعت در هر گام زمانی بر مبنای سرعت در گام قبلی و یک گام میانی محاسبه می‌شد. با توجه به اینکه در روش پیشنهادی محاسبه فشار با استفاده از معادله پواسون و با در نظر گرفتن جمله چشمه براساس دایورژانس^{۱۰} سرعت است، عملاً ارضای معادله پیوستگی بر مبنای صفر شدن تغییرات مکانی سرعت در این معادله بوده و به همین دلیل این روش تصویر به روش دیورجانس آزاد سرعت^{۱۱} معروف است. از طرف دیگر هو و همکاران ادعا داشتند که این روش یک روش دقیق در پیش‌بینی مطالعات موردی آنها بوده است [۲۴]. با توجه به اینکه روش تصویر در مقایسه با روش WCSPH، به منظور محاسبه فشار در هر گام زمانی معادله بیضوی فشار را حل می‌کند، لذا انتظار می‌رود که سرعت محاسباتی آن کمتر از روش WCSPH باشد. لیکن پارامتر دیگری که در مدت زمان

محاسباتی روشهای عددی تأثیر گذار بوده فاکتور گام زمانی است. در روش تصویر محاسبه گام زمانی براساس عدد کورانت و با در نظر گرفتن بیشترین سرعت ذرات سیال بوده که حداقل ده برابر کمتر از سرعت مورد استفاده در محاسبه عدد کورانت برای روش WCSPH است. این مسئله باعث می‌شود تا در محاسبات عدد بر مبنای این روش، گام زمانی بزرگتری منظور شود و مدت زمان محاسبات کاهش یابد. با توجه به مطالعات هو و همکاران، در روش پیشنهادی کامینز و رادمن، در صورتی که ناهمسانگردی فاصله بین ذرات افزایش یابد، پایداری حل عددی به خطر می‌افتد. از طرفی با توجه به اینکه جمله چشمه معادله پواسون بر اساس تغییرات مکانی سرعت در معادله پیوستگی است، لذا در صورت تغییرات زیاد چگالی، تجمع بیش از حد ذرات به صورت خطا در بعضی نقاط اتفاق افتاده و در طول محاسبات خطای ناشی از آن افزایش می‌یابد [۲۴ و ۳۳].

به منظور جلوگیری از نوسانات چگالی در طول شبیه سازی، شائو و همکاران تغییرات چگالی نسبت به زمان را به عنوان جمله چشمه جدید در معادله پواسون و در روش تصویر ارائه دادند (روش تصویر شماره ۲). در واقع در این حالت ارضای معادله پیوستگی بر مبنای صفر شدن تغییرات زمانی چگالی مدنظر قرار گرفته و به همین دلیل این روش به نام چگالی نامتغیر^{۱۲} معروف است [۳۴ و ۳۵]. در ادامه عطایی آشتیانی و شبیری اصلاحیه ای را بر روی جمله معرفی شده در این روش قرار دادند که نتایج را در حل مسائل سطح آزاد از جمله برخورد آب به دیواره بهبود می‌بخشید [۳۶]. با توجه به نتایج تحقیقات انجام شده بر چند مورد مطالعاتی، این روش بر برخی مشکلات روش تصویر قبلی نظیر تغییرات شدید چگالی و مشکلات ناشی از توزیع نایکنواخت ذرات غلبه کرده و باعث پایداری بهتر نسبت به مدل تصویر قبلی می‌شود. اما دقت مدل نسبت به مدل تصویر قبلی کاهش می‌یابد. به‌علاوه اینکه در صورت استفاده از این روش، معادله پیوستگی براساس تغییرات مکانی سرعت به طور کامل ارضا نمی‌شود [۲۴].

با توجه به مشکلات موجود در دو روش قبلی، روش

فوق‌الذکر در مسئله جریان سطح آزاد عبوری از دریچه مورد بررسی و در آخر نتیجه گیری و بحث در رابطه با این تحقیق انجام می‌پذیرد.

۲- معادلات حاکم بر جریان

معادلات پایستاری جرم و ممتم به صورت دو بعدی به عنوان معادلات حاکم بر سیال در نظر گرفته می‌شود. در این معادلات توزیع فشار در سیال به صورت غیر هیدرواستاتیک در نظر گرفته می‌شود. این معادلات در دیدگاه لاگرانژی به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۱]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot (\vec{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau}$$

که در این معادلات، V : سرعت بر حسب (m/s) ، P : فشار بر حسب $(kg/(m \cdot s^2))$ ، ρ : چگالی بر حسب (kg/m^3) ، \vec{g} : شتاب جاذبه بر حسب (m/s^2) ، τ : تانسور تنش برشی سیال $(kg/(m \cdot s^2))$ و t : زمان بر حسب (s) است.

۳- به کارگیری روش بدون جزء SPH برای حل معادلات سطح آزاد

در شکل (۱)، الگوریتم حل معادلات جریان آزاد با استفاده از روش ISPH نشان داده شده است. جزییات مربوطه شامل اساس روش SPH، تعیین تابع هموار، تعیین شعاع تأثیر، الگوریتم جستجو، اعمال شرایط مرزی، معیار همگرایی عددی و روشهای تصویر به ترتیب در بخشهای آتی مقاله، بخشهای (۳) و (۴) مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۱- روش SPH

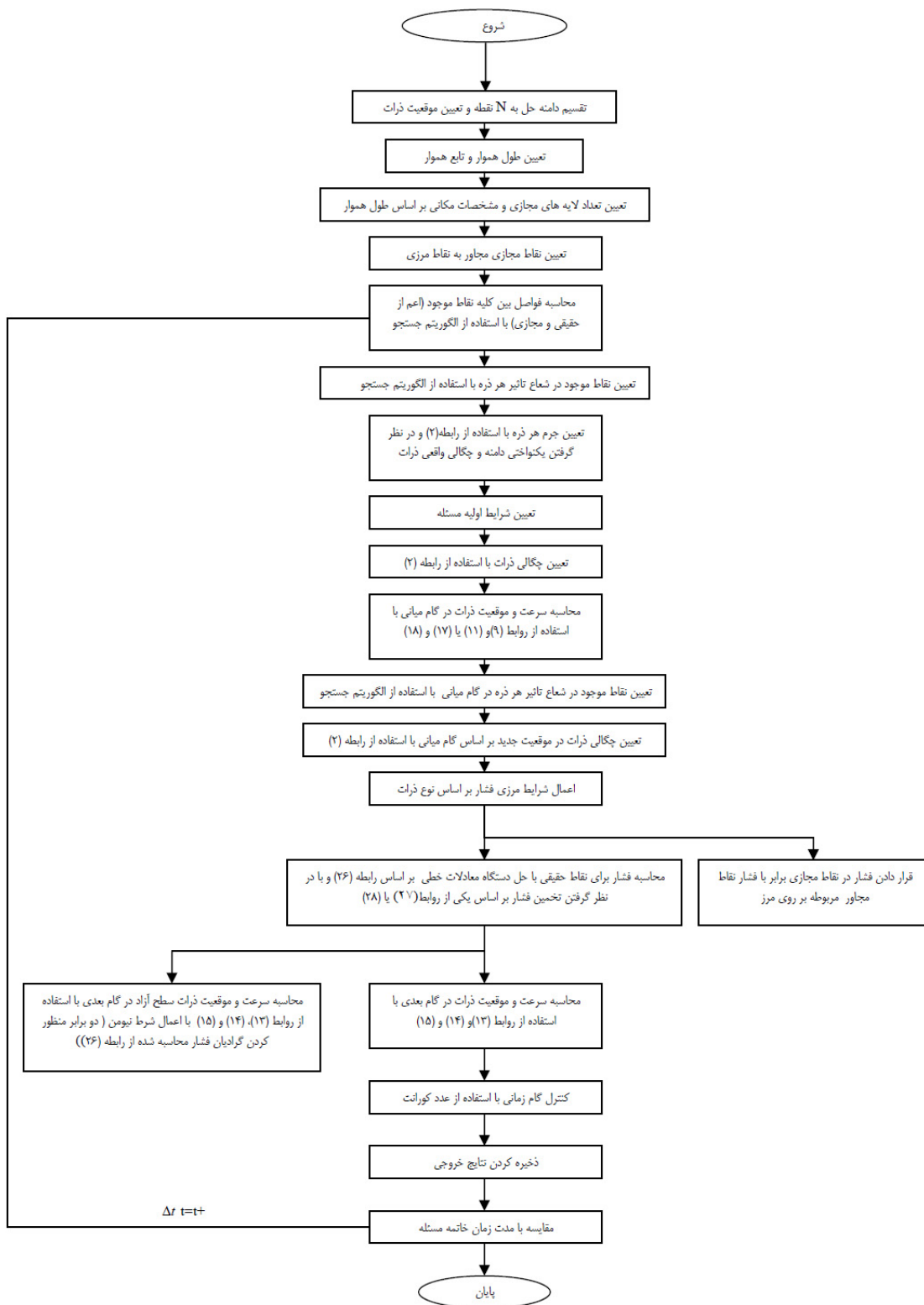
روش SPH یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیلی برپایه درونیابی انتگرالی است. بیان انتگرالی تابع دلخواه $f(x)$ که اساس این روش است به صورت

$$f(x) = \int f(x') \delta(x - x') dx'$$

تلفیقی براساس ترکیب دو روش فوق‌الذکر یعنی ارضای معادله پیوستگی در دو حالت تغییرات زمانی چگالی و تغییرات مکانی سرعت در سال ۲۰۰۷ توسط هو و آدامز پیشنهاد شد [۳۷]. در این روش حل معادله پواسون در هر گام زمانی دو بار صورت می‌گیرد. در مرحله اول این معادله برای ارضا صفر شدن تغییرات زمانی چگالی و در مرتبه دوم این معادله برای ارضا صفر شدن تغییرات مکانی سرعت در معادله پیوستگی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۳۷]. با توجه به ارضای همزمان این دو تغییر، جوابهای حاصله از این روش تصویر در موارد مورد مطالعه دقیق و پایدار بوده ولیکن دو بار حل کردن معادله پواسون در هر گام زمانی باعث افزایش چشمگیر مدت محاسبات گشته و این به یکی از نقاط ضعف این روش تبدیل شده است [۲۴].

با توجه به آنکه روشهای بدون جزء با اعمال تراکم ناپذیری مبتنی بر روش تصویر در حل مسائل دریچه مورد ارزیابی قرار نگرفته‌اند، در این تحقیق روشهای تصویر دیورجانس آزاد سرعت، چگالی نامتغیر از نظر اساس معادلات و روش محاسباتی با یکدیگر مقایسه شده و تفاوتها و شباهتهای این دو شیوه با یکدیگر در مدلسازی جریان سطح آزاد عبوری از دریچه براساس معادلات پایستاری جرم و ممتم بیان شده است. همچنین بر اساس نتایج حاصله، عملکرد شیوه‌های مختلف ارائه جمله فشار در این دسته از روشها براساس منحنی زمانمند خطا با یکدیگر مقایسه شده است. روش با جزء حجم محدود با ردیابی سطح آزاد بر اساس روش VOF نیز به منظور بررسی عملکرد و مقایسه آن با این دسته از روشهای بدون جزء در شبیه سازی جریان سطح آزاد عبوری از دریچه مورد استفاده قرار گرفته است.

در این تحقیق در قسمت دوم معادلات حاکم در دیدگاه لاگرانژی معرفی شده و در ادامه در قسمت سوم روش SPH معرفی شود. روشهای تصویر (۱) و (۲) و جزییات مربوط به شباهتها و تفاوتهای آنها در قسمت چهارم تشریح می‌شوند. در بخش پنجم از این تحقیق نتایج حاصله از روشهای عددی



شکل ۱- دیاگرام حل عددی به روش ISPH

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{V} = \sum_j \frac{4m_j(\mu_i + \mu_j) \bar{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{(\rho_i + \rho_j)^2 (|\bar{r}_{ij}|^2 + \eta^2)} (\bar{V}_i - \bar{V}_j) \quad (6)$$

که در این معادلات r_{ij} فاصله بین نقطه i و j و η یک ضریب ثابت به منظور عدم صفر شدن مخرج بوده و مقدار آن معمولاً $0.1h$ در نظر گرفته می‌شود [۳۹]. مقدار $\nabla_i W_{ij}$ با استفاده از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$\nabla_i W_{ij} = \left(\frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \left(\frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \right), \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \left(\frac{y_i - y_j}{r_{ij}} \right) \right) \quad (7)$$

همان‌طور که از معادلات بالا مشاهده می‌شود تابع هموار یکی از پارامترهای مهم در روش SPH بوده و تابع مورد استفاده در این تحقیق در قسمت بعد معرفی می‌شود.

۳-۲- تعیین تابع هموار

تابع هموار W بایستی یکنواخت، مثبت، زوج و به صورت تدریجی کاهشده باشد. سطح زیر منحنی این تابع بایستی برابر با یک، خارج از محدوده شعاع تأثیر دارای مقدار صفر و وقتی x به سمت مقدار معینی پیش می‌رود، تابع هموار به سمت ۱ میل کند. براساس خصوصیات ذکر شده توابع هموار براساس بسط تیلور دارای دقت از مرتبه دو در دامنه حل بوده که البته این قضیه شامل مرزهای جامد نمی‌شود [۳۸]. تحلیل پایداری ون- نیومن که توسط سوگل و بالزرا در روش SPH انجام شد، نشان داد که شرط لازم برای پایداری روش SPH ارضای رابطه زیر است:

$$W''\sigma > 0$$

که در آن

$$W'' : \text{مشتق دوم تابع هموار}$$

$$\sigma : \text{تنش ایجاد شده در ذرات}$$

در صورتی که این رابطه ارضا نشود، روش عددی دارای نوعی ناپایداری به نام ناپایداری کششی است که نتیجه آن تجمع غیر واقعی ذرات در یک نقطه است. لذا انتخاب تابع هموار از اهمیت زیادی برخوردار است [۴۰ و ۴۱]. در این تحقیق تابع هموار ارائه شده توسط مناگان یعنی تابع درجه ۳

بوده که در آن δ تابع دیراک دلتاست. در صورتی که تابع δ به یک تابع با ویژگیهای مشخص که به تابع هموار معروف است. جایگزین شود، بیان انتگرالی تابع در روش SPH شکل می‌گیرد که به صورت زیر

$$f(x) = \int f(x') W(x-x') dx'$$

تعریف می‌شود. که در این معادله W تابع هموار است. با توجه به اینکه در این روش محیط پیوسته به یکسری ذرات تبدیل می‌شود، لذا انتگرال به صورت زیر تبدیل به مجموع می‌شود:

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W(x-x_j, h) \quad (1)$$

براین اساس چگالی سیال به صورت زیر در این روش تعریف می‌شود:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W(x-x_j, h) \quad (2)$$

که در این معادله m و ρ به ترتیب جرم و چگالی ذرات سیال می‌باشند.

تعریف عملگر گرادین مورد استفاده در معادلات پایستاری جرم و ممتم به صورت زیر باعث افزایش دقت روش عددی می‌شود [۳۸].

$$\langle \nabla \cdot \bar{f}(x_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j [\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_i)] \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3)$$

$$\langle \nabla \cdot \bar{f}(x_i) \rangle = \rho_i \sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{\bar{f}(x_j)}{\rho_j^2} + \frac{\bar{f}(x_i)}{\rho_i^2} \right] \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (4)$$

معادلات فوق الذکر در حالتی که در مسئله ناپیوستگی موجود بوده یا نیاز به درجه سازگاری بالاتری باشد تغییر پیدا می‌کنند. بر اساس معادلات ذکر شده جمله‌های گرادین و لاپلاسیان مورد استفاده در معادلات دیفرانسیل جزئی بقای ممتم به شکل لاگرانژی به جمله‌های SPH به شکل زیر تبدیل می‌شوند. در روابط زیر به جای تنش برشی موجود در معادله ممتم مقدار جایگزین آن بر حسب جمله ویسکوزیته سیال در نظر گرفته شده است [۳۸].

$$\nabla \cdot \bar{V}_i = \rho_i \sum_j \left(\frac{\bar{V}_i}{\rho_i^2} + \frac{\bar{V}_j}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (5)$$

B-Spline که توسط بسیاری از محققان به کار برده شده و به صورت زیر است، استفاده شده است [۴۲ و ۴۳].

$$W(r, h) = \begin{cases} \frac{10}{7\pi h^2} \left(1 - \frac{3}{2}R^2 + \frac{3}{4}R^3\right) & R < 1 \\ \frac{10}{28\pi h^2} (2-R)^3 & 1 \leq R \leq 2 \\ W(r, h) = 0 & R > 2 \end{cases} \quad (8)$$

که در آن $R = \frac{r}{h}$ و h طول هموار هر ذره است.

این تابع در خارج از شعاع تأثیر دارای مقدار صفر بوده و مشتق دوم آن پیوسته، مثبت و خطای درونیابی آن از مرتبه دو است. بر طبق رابطه سوگل و بالزرا مثبت بودن مشتق دوم بیان کننده این واقعیت است که این تابع در تنشهای فشاری باعث ناپایداری مدل عددی نمی شود. پیوسته بودن مشتق دوم بیان کننده این است که این تابع نسبت به نامنظمی^{۱۳} ذرات حساس نبوده از طرفی خطای کم ناشی از تقریب انتگرال با مجموع باعث می شود تا بی نظمی ذرات کاهش یابد. در صورتی که شعاع تأثیر به سمت صفر میل کند مقدار این تابع برابر یک می شود که در این حالت درونیابی تقریبی به درونیابی دقیق تبدیل می شود [۴۴]. مشتق دوم این تابع حالت یکنواخت افزایشی یا کاهشنی نداشته که این مسئله می تواند پایداری روش عددی را به مخاطره بیندازد. با این وجود استفاده از این تابع هموار در محاسبات انجام شده تأثیری در پایداری مدل نداشته است. با توجه به اهمیت تعیین شعاع تأثیر در معادلات فوق در زیر نحوه محاسبه شعاع هموار ارائه می شود.

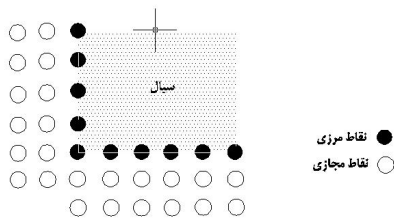
۳-۳- تعیین شعاع تأثیر در روش SPH

شعاع تأثیر که به صورت kh که در آن k ضریب ثابت و h طول هموار است، دامنه عملکرد هر ذره را در فضای محاسباتی نشان داده و بر روی دقت، پایداری و مدت زمان محاسباتی تأثیر گذار است لذا تعیین این شعاع از اهمیت زیادی برخوردار بوده و در موارد مطالعاتی مختلف ممکن است مقادیر متفاوتی را اخذ کند. اگر مقدار این طول کم باشد، تعداد ذرات

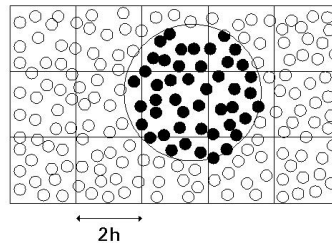
کافی در دامنه ذره مورد نظر وجود نداشته و باعث کاهش دقت محاسباتی می شود. برعکس اگر تعداد ذرات زیاد باشد ممکن است تغییرات ناگهانی در دامنه ذره هموار شده و دوباره باعث کاهش دقت محاسباتی به علاوه افزایش مدت زمان محاسبات شود. در صورتی که سیال به صورت تراکم پذیر فرض شود، مقدار این طول در مدت زمان محاسبات بر اساس چگالی سیال در هر نقطه قابل تغییر بوده که این کار توسط روشهای مختلف از جمله روش توانی یا روش پیشگویی-اصلاح انجام می پذیرد [۴۳ و ۴۵]. ولی در سیال تراکم ناپذیر این طول معمولاً ثابت و از طریق تحلیل حساسیت بر روی مورد مطالعاتی مشخص می شود. در تحقیقات گذشته بر روی موارد مطالعاتی، مقادیر طول هموار از ۱/۱ تا ۲ برابر فاصله اولیه بین ذرات گزارش شده است [۴۶-۴۹]. در این تحقیق مقدار طول هموار به گونه ای در نظر گرفته شده که در ابتدا چگالی ذرات داخلی آب برابر با مقدار واقعی گشته که بر این اساس، طول تأثیر ۱/۲ فاصله اولیه ذرات در نظر گرفته شده است.

۴-۳- الگوریتم جستجو

با توجه به اینکه در روش SPH کمیتهای تانسور مرتبه صفر و یک هر ذره از قبیل چگالی، سرعت و فشار بر اساس مقادیر ذرات موجود در دامنه تأثیر آن به دست می آید، لذا الگوریتم مناسب برای جستجوی ذرات موجود در شعاع تأثیر ذره مورد نظر یکی از اجزای اصلی در روش عددی SPH بوده که بر روی هزینه محاسباتی آن تأثیر قابل توجهی دارد. محققان بسیاری ادعا داشته از میان روشهای مختلف جستجو، الگوریتم جستجو LS^{۱۴} به میزان قابل توجهی هزینه محاسباتی را در مقایسه با روش جستجوی مستقیم کاهش می دهد به طوری که تعداد محاسبات در هر گام زمانی به جای N^2 در حالت جستجوی کلی به $N \log N$ که در آن N تعداد کل ذرات است، تغییر می یابد. لذا در این تحقیق از الگوریتم LS به منظور جستجوی ذرات موجود در شعاع تأثیر ذره مورد نظر استفاده شده است. در این روش یک شبکه موقت به طول kh بر روی



شکل ۳- ذرات مجازی به منظور مدل‌سازی مرز جامد



شکل ۲- تعیین نقاط همسایگی بر اساس الگوریتم جستجوی Linked-list

نزدیکی مرز جامد متغیر است [۳۹]. شناسایی ذرات در سطح آزاد با استفاده از چگالی آنها صورت می‌پذیرد. با توجه به آنکه در بالای سطح آزاد ذره ای وجود ندارد لذا در شعاع تأثیر ذرات نزدیک سطح آب تعداد ذرات کمتری موجود بوده که این باعث می‌شود تا این ذرات چگالی کمتری نسبت به ذرات درونی سیال داشته باشند. بنابراین در صورتی که رابطه زیر برای هر ذره برقرار باشد ذره مورد نظر جزء ذرات سطح آزاد قرار می‌گیرد.

$$\rho_p \leq \beta \rho_0$$

که در این رابطه ρ_p چگالی ذره مورد نظر و ρ_0 چگالی سیال است. ضریب β یک ضریب ثابت است که بر اساس تحقیقات انجام شده در این زمینه می‌تواند مقداری بین ۰/۸ تا ۰/۹۹ داشته باشد، هرچند در بیشتر موارد مقدار این ضریب ۰/۹۹ در نظر گرفته شده است [۳۶، ۵۱ و ۵۲]. پس از شناسایی این ذرات، فشار نسبی در آنها برابر صفر در نظر گرفته شده و در معادله پواسون از این ذرات استفاده نمی‌شود. به منظور محاسبه گرادیان فشار در این ذرات برای بار دیگر از ذرات مجازی در خارج از سطح آب استفاده می‌شود. محاسبات انجام شده در این زمینه نشان می‌دهد که گرادیان ذرات سطح آب دو برابر گرادیان ذرات درونی سیال بوده که این امر بایستی در محاسبات عددی برای این ذرات لحاظ شود [۳۹].

۳-۶- پایداری عددی

یکی از مسائل قابل رعایت در روش SPH همانند دیگر

دامنه مسئله قرار داده شده و با توجه به شکل (۲)، در فضای دو بعدی فقط نیاز به جستجوی ذرات در ۹ خانه در مجاور ذره مورد نظر و نه در کل دامنه مسئله است [۵۰].

۳-۵- اعمال شرایط مرزی

مدلسازی مرز جامد در روش SPH به صورت مستقیم صورت نگرفته و در حالت کلی این امر با استفاده از ذرات مجازی تحقق می‌پذیرد. در این تحقیق از روش مورد استفاده توسط کوشیزاکا که دارای کد نویسی نسبتاً آسان و هزینه محاسباتی پایینی بوده، استفاده می‌شود. در این روش همان‌طور که در شکل (۳) نشان داده شده، از دو دسته ذرات مجازی استفاده می‌شود. دسته اول دقیقاً بر روی مرز جامد و دسته دو خارج از مرز جامد قرار داده می‌شود. با حل معادله پواسون برای دسته اول و اعمال نیروی دافعه در صورت نزدیک شدن ذرات سیال به مرز، اجازه نفوذ به آنها داده نخواهد شد. دسته دوم از ذرات مجازی به منظور همسان سازی ذرات نزدیک به مرز و ذرات داخلی سیال از نظر میزان چگالی است. تعداد ردیف‌های مورد نیاز برای ذرات مجازی به شعاع تأثیر این ذرات بستگی داشته که در این تحقیق با توجه به شعاع تأثیر انتخابی، دو ردیف ذره مجازی نوع دوم در نظر گرفته شده است. سرعت این ذرات برابر با صفر و فشار در این ذرات با اعمال شرایط مرزی نیومن برابر با فشار ذره مقابل آنها در مرز جامد است. بنابراین تعداد این ذرات در طول مدت شبیه سازی تغییر نیافته هرچند میزان فشار در آنها بسته به تعداد ذرات در

۴-۱- روش تصویردیورجانس آزاد سرعت یا روش

تصویر (۱)

مقادیر مکان و سرعت در گام میانی بر اساس معادلات زیر به دست می آید [۲۸]:

$$\bar{\mathbf{r}}_* = \bar{\mathbf{r}}_t + \bar{\mathbf{V}}_t \Delta t \quad (۹)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{V}}_* = (\bar{\mathbf{g}} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}}) \Delta t \quad (۱۰)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_* = \bar{\mathbf{V}}_t + \Delta \bar{\mathbf{V}}_* \quad (۱۱)$$

با استفاده از معادله پواسون فشار ذرات و حل دستگاه معادلات خطی برحسب فشار به صورت زیر

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_*} \nabla P_{t+1} \right) = \frac{\nabla \cdot \bar{\mathbf{V}}_*}{\Delta t} \quad (۱۲)$$

و اعمال مقادیر گرادیان فشار در معادله (۱۳)،

$$\Delta \bar{\mathbf{V}}_{**} = -\frac{1}{\rho_*} \nabla P_{t+1} \Delta t \quad (۱۳)$$

مقادیر سرعت و مکان در گام زمانی بعد به ترتیب با استفاده از معادلات (۱۴) و (۱۵) محاسبه می شود [۲۸]. بایستی توجه داشت که در هنگام اعمال این معادلات برای نقاط سطح آزاد، گرادیان فشار دو برابر مقدار محاسبه شده از معادله (۱۲) محاسبه می شود.

$$\bar{\mathbf{V}}_{t+1} = \bar{\mathbf{V}}_* + \Delta \bar{\mathbf{V}}_{**} \quad (۱۴)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{t+1} = \bar{\mathbf{r}}_t + \frac{\bar{\mathbf{V}}_t + \bar{\mathbf{V}}_{t+1}}{2} \Delta t \quad (۱۵)$$

۴-۲- روش تصوی چگالی نامتغیر یا روش تصویر (۲)

در این روش مقادیر سرعت و موقعیت در گام میانی با استفاده از معادلات (۱۶) تا (۱۸) به دست می آید. در مقایسه با روش قبلی، در این روش به منظور تعیین موقعیت در گام میانی از V_* به جای V_t استفاده می شود [۳۴].

$$\Delta \bar{\mathbf{V}}_* = (\bar{\mathbf{g}} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}}) \Delta t \quad (۱۶)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_* = \bar{\mathbf{V}}_t + \Delta \bar{\mathbf{V}}_* \quad (۱۷)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_* = \bar{\mathbf{r}}_t + \bar{\mathbf{V}}_* \Delta t \quad (۱۸)$$

روشهای عددی، بحث پایداری است. به منظور تعیین پایداری، چندین معیار از جمله رابطه کورانت- فردریچز- لوی، ویسکوز دیفیوژن و کشش سطحی وجود دارند [۵۳]. از آنجا که در مسائل سطح آزاد نیروی ثقل دارای اهمیت زیادی است، لذا شرط پایداری در این دسته از مسائل بر اساس ارضای رابطه کورانت-فردریچز- لوی به صورت زیر است:

$$\Delta t \leq \alpha \frac{l_0}{V_{\max}}$$

که در این رابطه α ضریب ثابت که در کارهای گذشته مقداری بین ۰/۱ تا ۰/۵ دارا بوده است. l_0 و V_{\max} به ترتیب مقادیر فاصله بین ذرات و بیشترین سرعت ذرات سیال اند [۳۹]. از آنجا در تعیین گام زمانی در این معیار از خصوصیات ذرات سیال شامل فاصله مکانی و سرعت استفاده می شود، در صورت نزدیک شدن این ذرات به مرز گام مکانی کاهش یافته و به تبع آن گام زمانی نیز کاهش می یابد. با توجه به موارد مطرح شده در بخش سوم، در ادامه به نحوه اعمال شرط تراکم ناپذیری سیال با استفاده از روشهای تصویر پرداخته می شود.

۴- روشهای تصویر

همانگونه که در قسمتهای قبلی بیان شد، در این تحقیق به منظور حل معادلات پایداری جرم و منتم در حالت تراکم ناپذیر از دو روش تصویر استفاده شده است. اساس این روشها، محاسبه مقادیر سرعت و فشار در هر گام زمانی براساس محاسبات انجام شده در گام میانی و گام قبلی است. تفاوت عمده این دو روش اعمال روابط مختلف در جمله چشمه معادله پواسون است. در این تحقیق نشان داده خواهد شد که این دو روش در صورت در نظر گرفتن شکل عددی یکسان در محاسبه $\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P_{t+1} \right)$ از نظر ریاضی و عددی به یک شکل عمل می کنند. در این قسمت در ابتدا به روند مورد استفاده در هریک از این روشها و سپس مقایسه آنها از نظر ریاضی و عددی پرداخته می شود.

با استفاده از معادله زیر که به معادله پواسون با جمله چشمه بر حسب تغییرات چگالی مشهور است، مقادیر فشار در گام زمانی بعد محاسبه می‌شود.

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_*} \nabla P_{t+1} \right) = \frac{\rho_0 - \rho_*}{\rho_0 \Delta t^2} \quad (19)$$

این جمله چشمه توسط عطایی آشتیانی و شبیری اصلاح شده و به صورت معادله (۲۰) در آمده است. همان‌طور که از این معادله مشاهده می‌شود، در این حالت تغییرات چگالی فقط در یک گام زمانی منظور شده، خطای چگالی ناشی از زمانهای قبلی وارد محاسبات نشده و دقت روش عددی افزایش می‌یابد. در این تحقیق از این جمله چشمه معادله پواسون برای محاسبه فشار در گام زمانی بعد استفاده می‌شود.

$$\frac{\rho_0 - \rho_*}{\rho_0 \Delta t^2} = \frac{1}{\rho_0 \Delta t} \sum_j m_j (\bar{V}_i - \bar{V}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (20)$$

با استفاده از فشار محاسبه شده در مرحله قبل و قرار دادن مقادیر گرادیان فشار در معادله (۲۱)

$$\Delta \bar{V}_{**} = -\frac{1}{\rho_*} \nabla P_{t+1} \Delta t \quad (21)$$

مقادیر سرعت و موقعیت ذرات در گام زمانی بعد با استفاده از معادلات (۲۲) و (۲۳) به دست می‌آید [۳۴]. همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد، در هنگام اعمال این معادلات برای نقاط سطح آزاد گرادیان فشار دو برابر مقدار محاسبه شده از معادله (۲۰) محاسبه می‌شود.

$$\bar{V}_{t+1} = \bar{V}_* + \Delta \bar{V}_{**} \quad (22)$$

$$\bar{t}_{t+1} = \bar{t}_t + \frac{\bar{V}_t + \bar{V}_{t+1}}{2} \Delta t \quad (23)$$

۳-۴- محاسبه خطا

در روش فوق الذکر در هر مرحله مقدار خطای نرمال چگالی با استفاده از معادله زیر برای تمام ذرات داخلی سیال محاسبه می‌شود:

$$E_d(t) = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N'} \frac{\rho_i(t) - \rho_0}{\rho_0} \quad (24)$$

که مقدار ρ_i در هر لحظه با استفاده از معادله (۲۰) که در آن به جای ρ_* از ρ_{t+1} استفاده می‌شود محاسبه شده است.

۵- مقایسه روشهای (۱) و (۲) از نظر ریاضی و عددی

در هر دو روش فوق الذکر سرعت در دو گام زمانی شامل گام میانی و گام نهایی به دست می‌آید. همان‌طور که از معادلات (۶) و (۱۵) مشخص است، اعمال فشار در محاسبه سرعت در گام نهایی با استفاده از معادله پواسون صورت می‌پذیرد. بدین منظور با اعمال سرعت محاسبه شده از معادله ممتنم به صورت معادله زیر

$$D\bar{V} = \left(-\frac{\nabla P}{\rho} + \bar{g} + \mu \nabla^2 \bar{V} \right) * Dt$$

در معادله پیوستگی می‌توان به دو شکل از معادله پواسون به صورت معادلات (۱۲) و (۱۹) دسترسی پیدا کرد. بنابراین این معادلات از منظر ریاضی مسئله با یکدیگر هیچ‌گونه تفاوتی ندارند. معادله پواسون بر اساس معادله (۱۲) به شکل معادلات SPH با استفاده از معادله (۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right)_i = \frac{\frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j (\bar{V}_i - \bar{V}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}}{\Delta t} \quad (25)$$

که با فرض تراکم ناپذیری سیال این معادله به صورت

$$\frac{1}{\rho_i} \nabla^2 P = \frac{\frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j (\bar{V}_i - \bar{V}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 P = \frac{\sum_{j=1}^N m_j (\bar{V}_i - \bar{V}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}}{\Delta t}$$

در خواهد آمد. از طرفی در صورتی که از معادله پواسون بر اساس معادله (۱۹) و با اصلاحیه عطایی آشتیانی و شبیری به صورت زیر [۵۴]:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j \frac{dW_{ij}}{dt}$$

و در نظر گرفتن این نکته که

$$\frac{dW_{ij}}{dt} = V_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}$$

جدول ۱- مشخصات زمان محاسباتی در مسئله عبور جریان از روی سرریز لبه تیز با استفاده از دو روش عددی

تعداد نقاط محاسباتی	تعداد گامهای زمانی	مدت زمان محاسباتی (ثانیه)	روش
۲۲۷۶	۱۷۰	۵۶۸/۸۳	ISPH

۶- مثال کاربردی

۶-۱- جریان از زیر دریچه غوطه ور

در این تحقیق، از روش SPH با فرض تراکم ناپذیری برای مدل‌سازی این نوع جریان استفاده شده است. روش عددی حجم محدود با ردیابی سطح آزاد بر اساس روش VOF به منظور مقایسه با روش مذکور برای مدل‌سازی این جریان مورد تحلیل قرار گرفته است. با توجه به نتایج ضعیف مدل‌سازی جریان از زیر دریچه با استفاده از روش WCSPH [۲۲] شامل جدا شدن ذرات از سطح جامد در پایین دست دریچه و مدل‌سازی آب در مخزن به صورت نادرست از این روش برای مقایسه با نتایج ISPH استفاده نشده است. هندسه اولیه مسئله به صورت طول مخزن و ارتفاع اولیه آب برابر با ۰/۱۵ متر و ارتفاع دریچه برابر با ۰/۳۵ متر در نظر گرفته شده است. در لحظه آغازین فرض می‌شود که دریچه موجود به طور ناگهانی باز شود. مقادیر بازه زمانی و مکانی با استفاده از معیار همگرایی کورانت در هر دو روش به ترتیب برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه و ۰/۰۰۳۵ متر در نظر گرفته شده است. مشخصات زمان محاسباتی در روش ISPH در جدول (۳) نشان داده شده است.

وضعیت جریان در لحظه‌های زمانی مختلف بر اساس روشهای فوق الذکر در شکل (۴) نشان داده شده است.

با توجه به شکل (۴) و همچنین جدول مجذور میانگین مربعات خطا بین دو روش عددی در لحظه‌های مختلف، جدول (۲)، تطابق بسیار مناسبی بین دو روش، در تعیین وضعیت سطح آب در مخزن و خروجی از دریچه به چشم می‌خورد.

با تغییر ابعاد مخزن و در نتیجه افزایش چشمگیر تعداد ذرات محاسباتی، شرایط جریان می‌تواند به صورت شبه ماندگار

استفاده شود، معادله (۱۹) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right)_i = \frac{\frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j (\vec{V}_i - \vec{V}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}}{\Delta t} \quad (26)$$

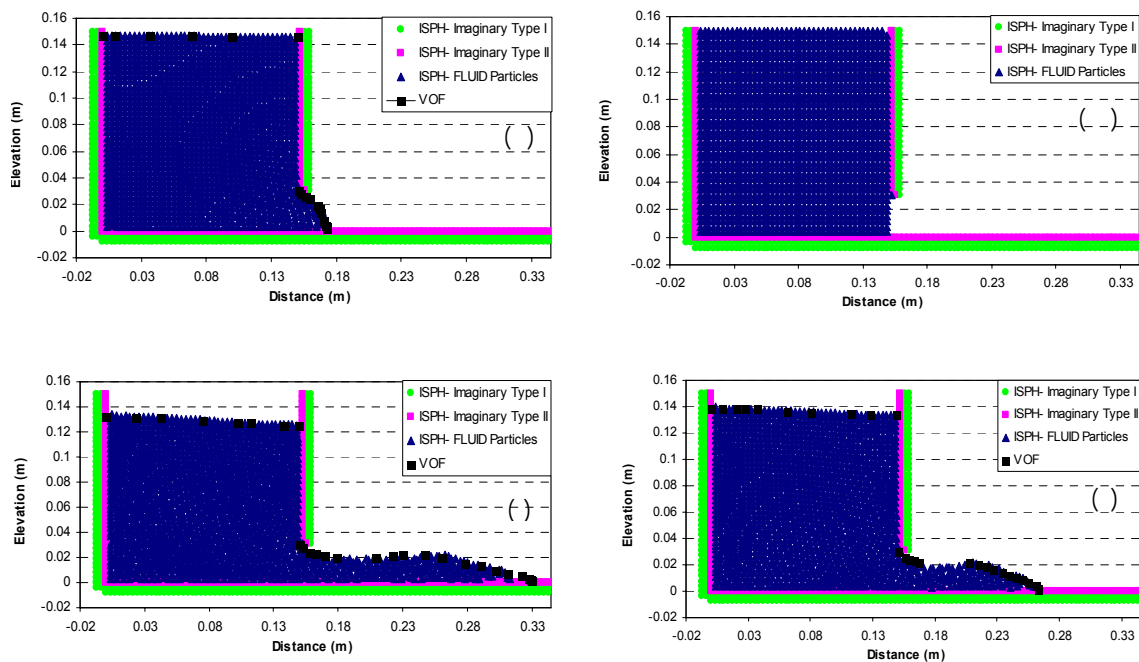
همان‌طور که از معادلات (۲۵) و (۲۶) مشاهده می‌شود، این معادلات در صورتی که شکل باز کردن جمله فشار یکسان باشد، از نظر عددی نیز عملکرد یکسانی دارند. بنابراین با در نظر داشتن مطالب عنوان شده در بالا، در صورتی که شرایط فوق در دو روش تصویر عنوان شده اعمال شود نتایج یکسانی به دست خواهد آمد. شکلهای مختلفی در محاسبه جمله فشار به روش SPH در تحقیقات قبلی موجود است که در این تحقیق دو شکل مطرح در ادبیات تحقیق با یکدیگر مقایسه می‌شوند. شکل اول به صورت زیر تعریف شده که مورد استفاده بسیاری از محققان است:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right)_i = \sum_{j=1}^N m_j \frac{8}{(\rho_i + \rho_j)^2} \frac{P_{ij} \vec{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2 + \eta^2} \quad (27)$$

در این معادله $P_{ij} = P_i - P_j$ است [۳۴]. شکل دیگر تعریف جمله فشار، توسط لی و همکاران متناسب با شکل ارائه شده توسط کامپنز و رادمن [۲۸] بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$\nabla^2 P = \frac{2}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \frac{P_{ij} \vec{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2 + \eta^2} \quad (28)$$

الگوریتم حل بر اساس روش تصویر در شکل (۱) بیان شده است. در ادامه کارایی دو جمله فشار ارائه شده براساس روشهای فوق الذکر در شبیه سازی جریان سطح آزاد عبوری از دریچه مورد ارزیابی قرار گرفته است.



شکل ۴- پروفیل سطح آب در مخزن و خروجی دریچه با استفاده از روشهای ISPH و VOF در لحظه‌های (الف) ۰، (ب) ۰/۰۴، (ج) ۰/۱ و (د) ۰/۱۴ ثانیه

جدول ۲- مقادیر مجذور میانگین مربعات خطا بین دو روش عددی ISPH و VOF

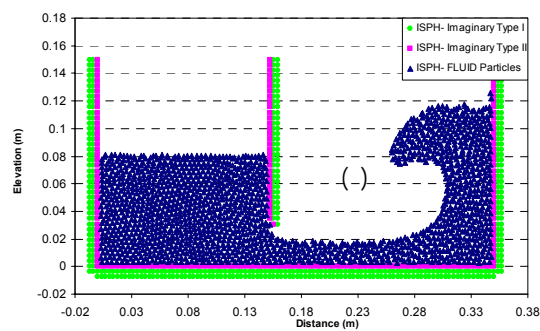
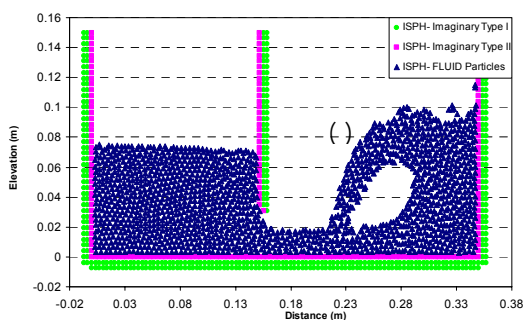
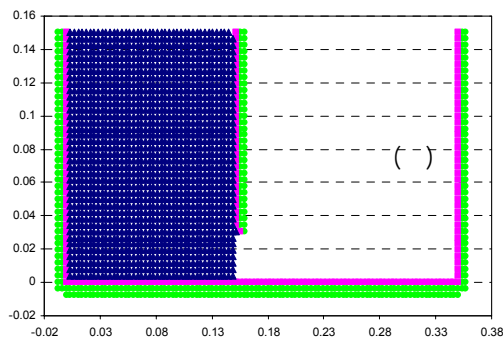
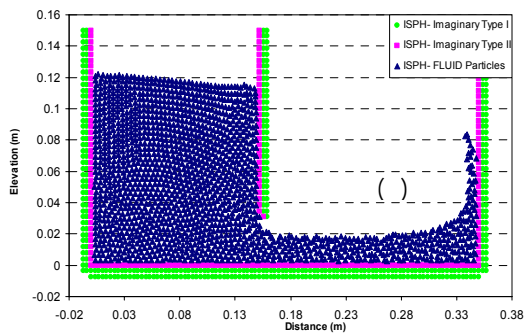
زمان (ثانیه)	۰/۰۴	۰/۱	۰/۱۴
مقادیر خطا (متر)	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۴۷

داده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، با دور شدن از دریچه به سمت درون مخزن و یا پایین دست دریچه، توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک عمل می‌کند. لیکن در محل دریچه با توجه به انحنای جریان این توزیع از حالت هیدرواستاتیک خارج می‌شود.

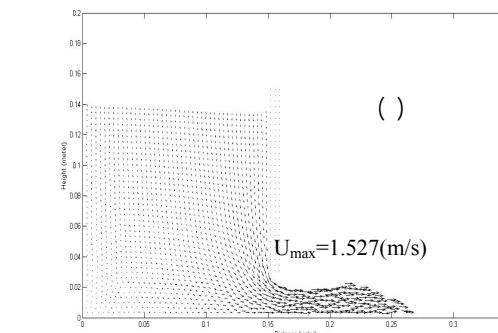
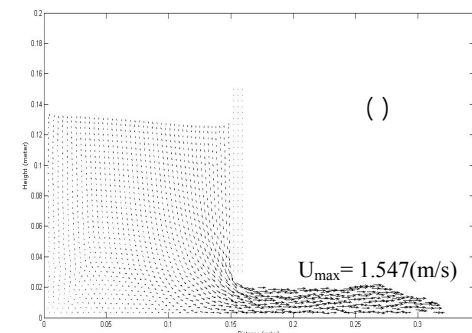
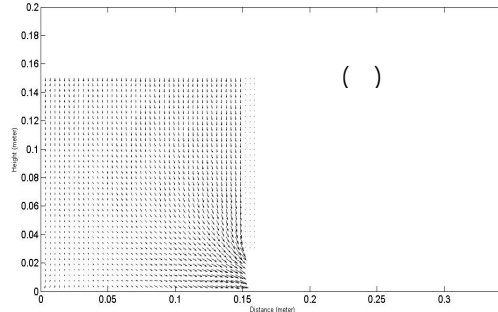
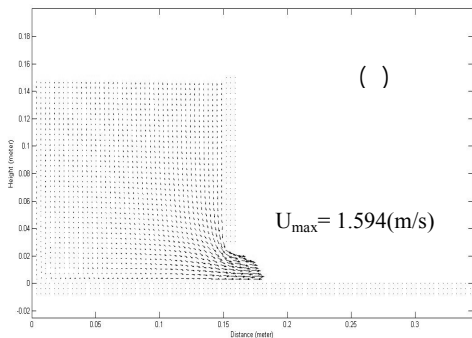
مقادیر خطا در مدت زمان اجرای برنامه تخلیه مخزن براساس دو جمله فشار ارائه شده در معادلات (۲۷) و (۲۸) محاسبه شده و در شکل‌های (۷) و (۸) برای نقاط داخلی و کلیه نقاط سیال نشان داده است. با مشاهده تغییرات خطا نسبت به زمان ملاحظه می‌شود که این تغییرات نیز از فرایند آشوبناک تبعیت می‌کند. با گذشت زمان افزایش خطا متوقف شده است.

و ماندگار تغییر کند. در ادامه دیوار قائمی در انتهای پایین دست مسیر قرار داده شده است. تغییرات سطح آب در اثر برخورد موج آب خروجی از زیر دریچه به دیواره در لحظه‌های مختلف در شکل (۵) نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، شکست موج به خوبی توسط روش عددی ISPH مدلسازی شده است.

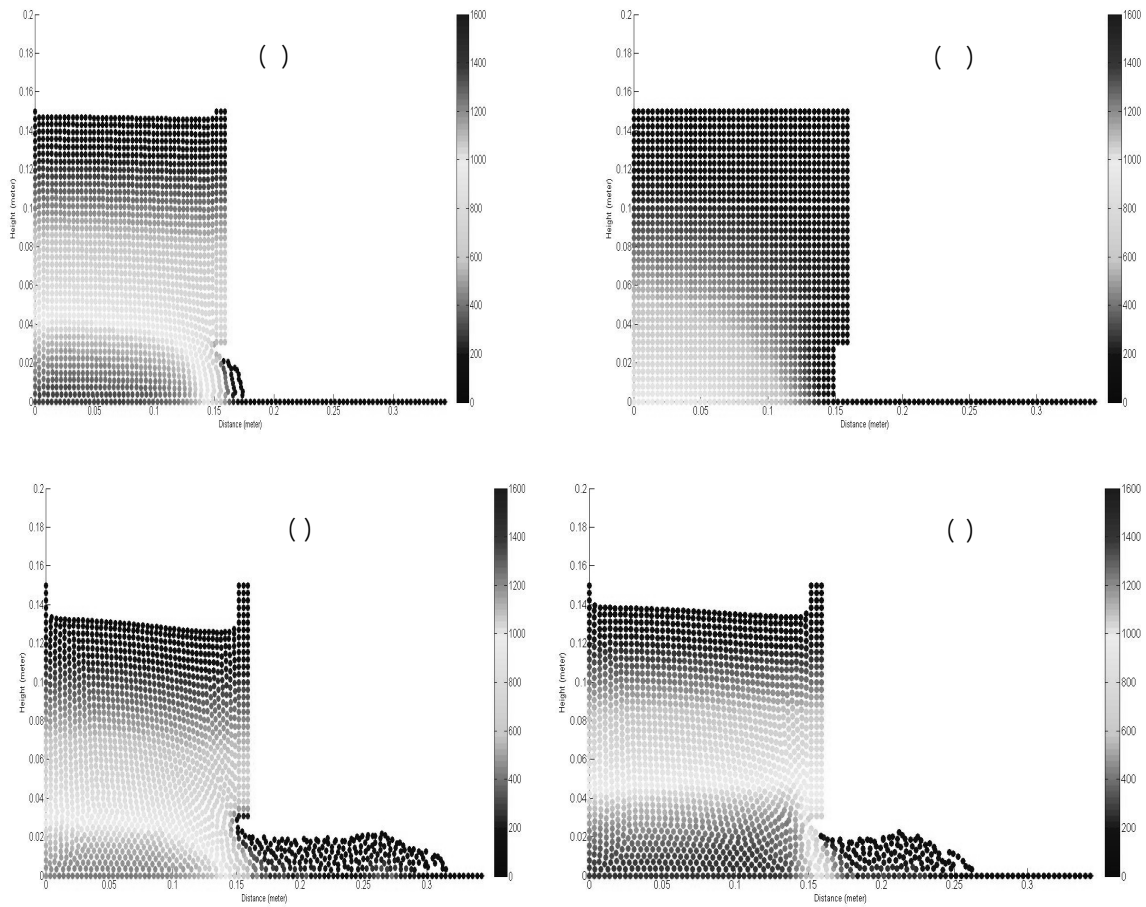
بردارهای سرعت در لحظه‌های مختلف زمانی در شکل (۶) نشان داده شده است. مقادیر سرعت خروجی از زیر دریچه در این شکل نشان داده شده که تطابق خوبی با مقدار سرعت تقریبی به دست آمده از معادله $(V = \sqrt{2gh})$ دارد. توزیع فشار در لحظه‌های زمانی مختلف در شکل (۷) نشان



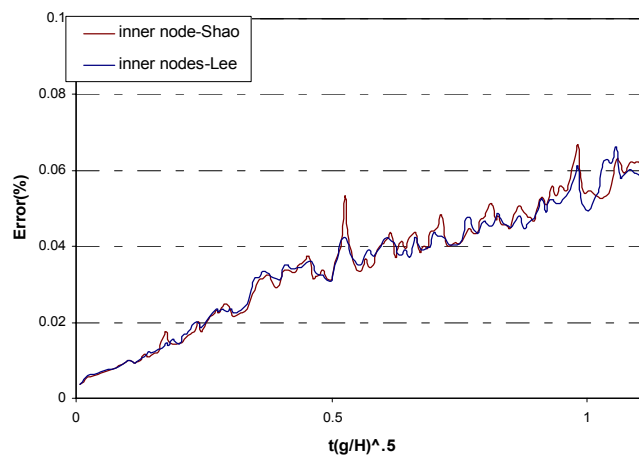
شکل ۵- تغییرات سطح آب در اثر برخورد موج خروجی از زیر دریچه به دیواره قائم با استفاده از روش عددی ISPH در لحظه‌های (الف) ۰، (ب) ۰/۲۱، (ج) ۰/۴۷ و (د) ۰/۵۳ ثانیه



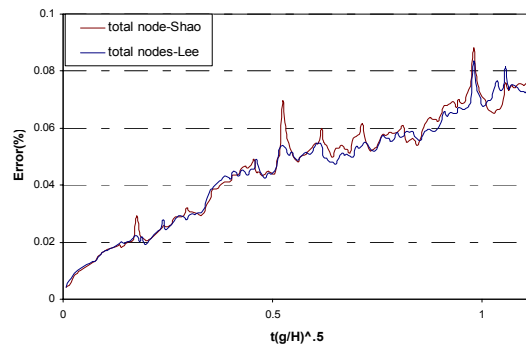
شکل ۶- بردارهای سرعت در شبیه سازی خروج آب از زیر دریچه با استفاده از روش ISPH در لحظه‌های (الف) ۰، (ب) ۰/۰۴، (ج) ۰/۱ و (د) ۰/۱۴ ثانیه



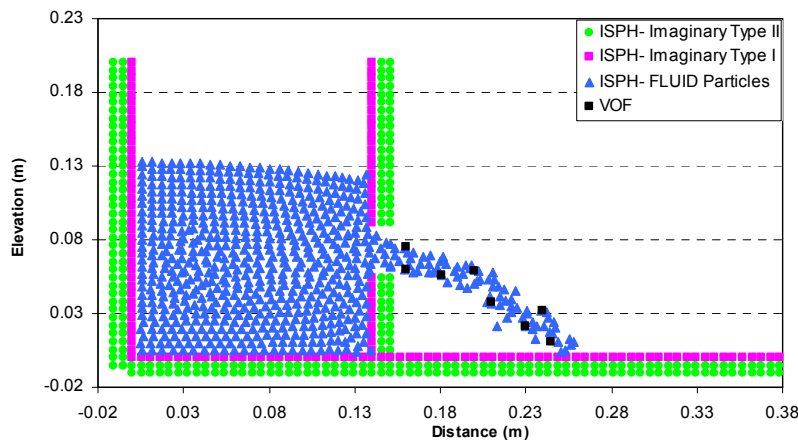
شکل ۷- توزیع فشار با استفاده از روش ISPH در لحظه‌های (الف) ۰، (ب) ۰/۰۴، (ج) ۰/۱ و (د) ۰/۱۴ ثانیه



شکل ۸- مقادیر خطا در روش ISPH با استفاده از روابط مختلف فشار برای نقاط داخلی سیال



شکل ۹- مقادیر خطا در روش ISPH با استفاده از روابط مختلف فشار برای کلیه نقاط سیال



شکل ۱۰- تغییرات سطح آب در ۰/۱۴ ثانیه پس از بازشدن اریفیس

مناسبتی بین نتایج روش عددی VOF و روش بدون جزء ISPH به چشم می‌خورد (مجذور میانگین مربعات خطا برابر با ۰/۰۰۶۷ متر).

۷- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این تحقیق کاربرد روش SPH به صورت تراکم ناپذیر در بررسی جریان عبوری از زیر دریچه مورد ارزیابی قرار گرفته است. معادلات حاکم به صورت معادلات پایستاری جرم و ممتنم در حالت تراکم ناپذیر در دیدگاه لاگرانژی در نظر گرفته شده است. روش حجم محدود با ردگیری ذرات سطح آزاد براساس الگوی VOF برای مقایسه عملکرد روش ISPH مورد استفاده قرار گرفته است. تراکم ناپذیر بودن سیال در حین

دامنه نوسانات خطا در موارد معدودی مقادیر بیشتری را توسط معادله (۲۷) نسبت به معادله (۲۸) در نقاط داخلی نشان داده، هر چند روند مشاهداتی خطا در این حالت نیز تقریباً مشابه است. مقایسه دو شکل (۸) و (۹) نشان می‌دهد که مقادیر خطا برای نقاط داخلی در حدود ۰/۲ در صد کمتر از کلیه نقاط سیال با در نظر گرفتن نقاط سطح آزاد است.

مدلسازی دریچه در زمانی که به صورت اریفیس عمل کرده و از یک بازشدگی که نسبت به زمین در ارتفاع ۰/۰۵۵ متر قرار گرفته و دارای یک بازشدگی به میزان ۰/۰۴۵ متر بوده، نیز در ادامه انجام شده است. تغییرات سطح آزاد سیال در ۰/۱۴ ثانیه پس از باز شدن دریچه در شکل (۱۰) نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، همچنان تطابق بسیار

یکبار فقط برای ذرات داخلی سیال به دست آمده است. نتایج حاصله یک عملکرد آشوبناک در نمودار تغییرات خطا نسبت به زمان با در نظر داشتن یک روند مشخص را نشان می‌دهد. به بیان دیگر نظم خاصی در اثنای بی‌نظمی در نمودارهای خطا در موارد مورد مطالعه قابل رویت است. بررسی دو شیوه باز شدن جمله فشار در جریان عبوری از دریچه نشان از عملکرد بسیار مشابه این دو روش داشته هر چند دامنه تغییرات جمله فشار مبتنی بر کارهای شائو و همکاران در بعضی نقاط بیشتر از مقدار آن بر اساس کارهای لی و همکاران است. مقایسه روش ISPH و روش VOF در موارد مورد مطالعه حاکی از انطباق بسیار مناسب این دو روش است. هر چند در مواردی که نتایج آزمایشگاهی نیز موجود بوده، نزدیکی با این نتایج نیز به چشم می‌خورد.

عبور از دریچه با اعمال دو روش مختلف تصویر شامل دیورجانس آزاد سرعت و چگالی نامتغیر به روش SPH صورت گرفته است. بررسی این دو روش در بیان تراکم ناپذیری سیال براساس دو دیدگاه ریاضی و عددی نشان داد که با باز کردن جمله‌های منبع به صورت مناسب این دو روش عملکرد مشابهی را از خود به نمایش می‌گذارند. هر چند با توجه به روشهای مختلف باز کردن جمله‌های فشار موجود در معادله پایستاری جرم، ممکن است نتایج عددی این روشها کاملاً یکسان نباشند. عملکرد دو شیوه باز کردن جمله فشار مبتنی بر کارهای شائو و همکاران [۳۴] و لی و همکاران [۲۷] در مسئله مورد مطالعه با استفاده از شاخص خطا در ادامه در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نقش کلیدی ذرات سطح آزاد در محاسبه خطا نمودارهای خطا یکبار برای تمام ذرات و

واژه‌نامه

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. incompressible smoothed particle hydrodynamic (ISPH) 2. projection method 3. volume of fluid 4. chaotic 5. collocation 6. weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamic | <ol style="list-style-type: none"> 7. penalty-Like 8. moving Particle semi- implicit 9. incompressible smoothed particle hydrodynamic 10. divergence 11. divergence-free velocity 12. density invariant 13. disorder 14. linked- list |
|--|---|

مراجع

1. Binnie, A. M., "A Flow of Water Under Sluice Gate," *Q. J. Appl. Math.* Vol. 5(part II), P.395, 1952
2. Helmy, A. M., "Experimental and Numerical Investigation of Flow Schemes at Constant Discharge Baffled Irrigation Gates," Ph.D. Thesis, Faculty of Engineering, Cairo University, 2008.
3. Vanden-Broeck, J. M., "Numerical Calculations of the Free-Surface Flow Under a Sluice Gate," *J. Fluid Mech.*, Vol. 330, PP. 339–347, 1996.
4. Kim, D. G., "Numerical Analysis of free flow past a sluice gate," *KSCE J. Civ. Eng.*, Vol. II (2), PP. 127-132, 2007.
5. Petrila, T., "Mathematical Model for the Free Surface Flow Under Sluice Gate," *Applied mathematics and computation*, Vol. 125, PP. 49-58, 2002.
6. Sankaranarayanan, S., Rao, H. S., "Finite Element Analysis of Free Surface Flow Through Gates," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22(5), PP. 375-392, 1996.
7. Isaacs, L. T., "Numerical Solution for Flow Under Sluice Gates," *J. Hydraul. Div. Proc. ASCE*, Vol. 103, PP.473-482, 1977.
8. Daneshmand, F., Sharan, S. K., and Kadivar, M. H., "Finite Element Analysis of Double-Free-Surface Flow Through Gates," *Proceedings of the 17th Canadian Congress of Applied Mechanics, McMaster University, Hamilton, Ont.*, PP. 213–214, 1999.
9. Fries, T. P., and Matthies, H. G., "A Stabilized and Coupled Meshfree/meshbased Method for the Incompressible Navier–Stokes Equations—Part II: Coupling," *Comput. Methods Appl. Mech. Engg.*, Vol. 195, PP. 6191–6204, 2006.
10. Frazer, R. A., Jones, W. P. and Skan, S. W., "Approximations to Functions and to the Solutions of Differential Equations," Great Britain Aero Council. London. Rep. and Memo. No. 1799, 1937.

11. Shakibaenia, A., and Jin, Y. C., "A Mesh-Free Particle Model for Simulation of Mobile-Bed Dam Break," *Advances in Water Resources*, Article in press, 2011.
12. Antuono, M., Colagrossi, A., Marrone, S., and Molteni, D., "Free-Surface Flows Solved by Means of SPH Schemes with Numerical Diffusive Terms," *Computer Physics Communications*, Vol. 181, PP. 532–549, 2010.
13. Gingold, R. A., and Monaghan, J. J., "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars," *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, Vol. 181, PP. 375-389, 1977.
14. Lucy, L. B., "A Numerical Approach to the Testing of Fusion Process," *Astronomical Journal*, Vol. 88, PP. 1013-1024, 1977.
15. Libersky, L. D., Petschek, A. G., Carney, T. C., Hipp, J. R., and Allahdadi, F. A., "High Strain Lagrangian Hydrodynamics," *J.Comp.Phys.*, Vol. 109, PP. 67–75, 1993.
16. Randles, P. W., and Libersky, L. D., "SPH: Some Recent Improvements and Applications," *Comp. Met. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, PP. 375–408, 1996.
17. Monaghan, J. J., "Simulating Free Surface Flows with SPH," *Journal of Computational Physics*, Vol. 110, PP. 399–406, 1994.
18. Monaghan, J. J., "Gravity Currents and Solitary Waves," *Journal of Computational Physics*, Vol. 98, PP. 523–533, 1996.
19. De Girolamo, P., Wu, T. R., Liu, P. L. F., Panizzo, A., Bellotti, G., and Di Risio, M., "Numerical Simulation of Three Dimensional Tsunamis Water Waves Generated by Landslides: Comparison Between Physical Model Results, VOF, SPH and 27 Depth-integrated Models," *ICCE Conference, San Diego*, 2006.
20. Ferrari, A., "SPH Simulation of Free Surface Flow over a Sharp-Crested Weir," *Advances in Water Resources*, Vol. 33, PP. 270–276, 2010.
21. Issa, R., Lee, E. S., Violeau, D., and Laurence, D. R., "Incompressible Separated Flows Simulations with the Smoothed Particle Hydrodynamics Gridless Method," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 47, PP. 1101–1106, 2005.
22. Liu, G. R., and Liu, M. B., "Smoothed Particle Hydrodynamics – a Meshfree particle Method," World Scientific, Singapore, 2003.
23. Daneshmand, F., and Kazemzadeh Parsi, M. J., "a Meshless Method for Free Surface Flow Through Sluice Gates," *6th International Conference on Hydroinformatics, Singapur*, 2004.
24. Xu, R., Stansby, P., and Laurence, D., "Accuracy and Stability in Incompressible SPH (ISPH) Based on the Projection Method and a New Approach," *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, PP. 6703–6725, 2009.
25. Monaghan, J. J., "SPH without a Tensile Instability," *Journal of Computational Physics*, Vol. 159, PP. 290–311, 2000.
26. Wang, B. L., and Liu, H., "Application of SPH Method on Free Surface Flows on GPU," *journal of hydrodynamics*, Vol. 22(5), PP. 912-914, 2010.
27. Lee, E. S., Moulinec, C., Xu, R., Violeau, D., Laurence, D., and Stansby, P., "Comparisons of Weakly Compressible and Truly Incompressible Algorithms for the SPH Mesh Free Particle Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, PP. 8417–8436, 2008.
28. Cummins, S. J., and Rudmans, M., "An SPH Projection Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 152, PP. 584–607, 1999.
29. Koshizuka, S., Tamako, H., and Oka, Y., "A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation," *J. Comput. Fluid Dyn*, Vol. 4, PP. 29–46, 1995.
30. Koshizuka, S., Nobe, and A., Oka, Y., "Numerical Analysis of Breaking Waves Using the Moving particle Semi-Implicit Method," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 26, PP. 751–769, 1998.
31. Chorin, A. J., "Numerical Solution of the Navier–Stokes equations," *J. Math. Comp*, Vol. 22, PP. 745–762, 1968.
32. Gao, W., Duan, Y. L., and Liu, R. X., "The Finite Volume Projection Method with Hybrid Unstructured Triangular Collocation Grid for Incompressible Flows," *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 21(2), PP. 201-211, 2009.
33. Ellero, M., Serrano, M., and Pep Espanol, P., "Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics," *Journal of Computational Physics*, Vol. 226, PP. 1731–1752, 2007.
34. Shao, S. D. and Lo, E. Y. M., "Incompressible SPH Method for Simulating Newtonian and Non-Newtonian flows with a Free Surface," *Adv. Water Resour*, Vol. 26 (7), PP. 787–800, 2003.
35. Lo, E. Y. M., and Shao, S. D., "Simulation of Near-Shore solitary Wave Mechanics by an Incompressible SPH Method," *Applied Ocean Research*, Vol. 24, PP. 275–286, 2002.
36. Ataie-Ashtiani, B., and Shobeyri, G., "Numerical Simulation of Landslide Impulsive Waves by Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics," *Int. J. Numer. Meth Fluids*, Vol. 56, PP. 209–232, 2008.
37. Hu, X. Y., and Adams, N. A., "An Incompressible Multi-Phase SPH Method," *J. Comput. Phys*, Vol. 227, PP. 264-278, 2007.
38. Liu, M. B., and Liu G. R., "Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments," *Arch Comput Methods Engg*. Vol. 17, PP. 25–76, 2010.
39. Shao, S. D., "Incompressible SPH Simulation of Wave Breaking and Overtopping with Turbulence Modeling," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 59(1), PP. 91-115, 2006.

40. Swegle, J. W., Attaway, S. W., Heinstein, M. W., Mello, F. J., and Hicks, D. L., "Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis," *Journal of Computational Physics*, Vol. 116, PP. 123-134, 1995.
41. Balsara, D. P., "Von Neumann Stability Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics – Suggestions for Optimal Algorithms," *Journal of Computational Physics*, Vol. 121, PP. 357-372, 1995.
42. Zheng, X., Duan, W. Y., and Ma, Q. W., "Comparison of Improved Meshless Interpolation Schemes for SPH Method and Accuracy Analysis," *J. Marine Sci. Appl.*, Vol. 9, PP. 223-230, 2010.
43. Liu, M. B., Liu, G. R., Lam, K. Y., and Zong, Z., "Smoothed Particle Hydrodynamics for Numerical Simulation of Underwater Explosion," *Computational Mechanics*, Vol. 30, PP. 106–118, 2003.
44. Monaghan, J. J., "Smoothed Particle Hydrodynamics," *Annu. Rev. Astron. Astrophys*, Vol. 30, PP. 543–574, 1992.
45. Omang, M., Børve, S., and Trulsen, J., "Numerical Simulations of Shock Wave Reflection Phenomena in Non-stationary flows Using Regularized Smoothed Particle Hydrodynamics (RSPH)," *Shock Waves*, Vol. 16, PP. 167–177, 2006.
46. Liu, M.B., Xie, W.P., Liu, G.R., "Modeling Incompressible Flows Using a Finite Particle Method," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 29, PP.1252–1270, 2005.
47. Monaghan, J. J., and Lattanzio, J.C., "A Refined Particle Method for Astrophysical Problems," *Astron Astrophys*, Vol. 149, PP. 135–143, 1985.
48. Khayyer, A., Gotoh, H., and Shao, S.D., "Corrected Incompressible SPH method for accurate Water-Surface Tracking in Breaking Waves," *Coastal Engineering*, Vol. 55, PP. 236–250, 2008.
49. Shao, S.D., "Incompressible SPH Flow Model for Wave Interactions with Porous Media," *Coastal Engineering*, Vol. 57, PP. 304–316, 2010.
50. Monaghan, J. J., and Poinracic, J., "Artificial Viscosity for Particle Methods," *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 1, PP. 187-194, 1985.
51. Sun, J. W., Liang, S. X., Sun, Z. C., and Zhao, X. Z., "Simulation of Wave Impact on a Horizontal Deck Based on SPH Method," *J. Marine Sci. Appl.*, Vol. 9, PP. 372-378, 2010.
52. Shao, S. D., "SPH Simulation of Solitary Wave Interaction with a Curtain-Type Breakwater," *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 43(4), PP. 366–375, 2005.
53. Monaghan, J. J., Smoothed Particle Hydrodynamics, *Annu. Rev. Astronom. Astrophys*, Vol. 30, PP. 543, 1992.
54. Ataie-Ashtiani, B., Shobeyri, G., Farhadi, L., "Modified incompressible SPH Method for simulating free surface problems," *Fluid Dynamics Research*, Vol. 40, PP.637–661, 2008.