

تحلیل مسائل ارتعاش آزاد و اجباری به کمک روش تقابل دوگانه اجزای مرزی براساس توابع پایه‌ی شعاعی چندرَبعی معکوس

صالح حمزهء جواران و ناصر خاجی*

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱۱/۰۶ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۰۸/۰۳)

چکیده -

واژگان کلیدی :

Analysis of Free and Forced Vibrations Problems Using the Dual Reciprocity Boundary Element Method Based on Inverse Multiquadric Radial Basis Functions

S. Hamzehei Javaran and N. Khaji

Faculty of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, P.O.
Box 14115-397, Tehran, Iran

Abstract: This paper presents a new boundary element formulation for free and forced vibration analysis of 2D elastic domains. The main idea of the present formulation is to approximate the inertia terms using the inverse multiquadric radial basis functions (IMQ RBFs). The dual reciprocity method (DRM) with the static-type fundamental solution is reconsidered by using the proposed RBFs. The fictitious particular solution kernels of inverse multiquadric RBFs corresponding to displacement and

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: nkhaji@modares.ac.ir

traction, a few terms of which are singular, are explicitly derived. Therefore, a simple mathematical trick is employed to resolve the singularity problem. In addition, the limiting values of the particular solution kernels are evaluated. Several examples are studied to demonstrate the validity and the accuracy of the proposed formulation. The results are compared to the obtained analytical and other RBFs available in the literature.

Keywords: Inverse multiquadric radial basis functions, Particular solutions, Boundary element method, Dual reciprocity method, 2D elastodynamics, Free and forced vibration analysis.

۱- مقدمه

روش اجزای مرزی^۱ به عنوان یک روش قدرتمند و چند-منظوره در دهه‌های اخیر پیشرفت چشم‌گیری داشته است. در مواردی همچون مدل‌کردن تمرکز تنش یا تحلیل محیط‌های نامحدود که ممکن است روش اجزای محدود^۲ از کارایی کافی برخوردار نباشد، می‌توان از روش اجزای مرزی به عنوان یک روش جایگزین مناسب استفاده کرد [۱]. شروع استفاده از فرمول‌بندی‌های اجزای مرزی در مسائل الاستودینامیک با کارهایی همچون فریدمن و شاو [۲]، باناخ و گلداسمیت [۳] و کروزر و ریزو [۴] از دهه‌ی ۶۰ بود. در پیشینه‌ی تحقیقات علمی، سه فرمول‌بندی اصلی از الاستودینامیک در روش اجزای مرزی گزارش شده است که عبارت‌اند از: روش مبتنی بر دامنه‌ی زمان، تبدیل لاپلاس و تکنیک‌های انتگرال‌گیری روی حوزه. دو روش اول به علت پیچیدگی‌های موجود در فرمول‌بندی، حافظه‌ی زیادی از رایانه اشغال کرده، و در نتیجه زمان محاسبات را افزایش می‌دهند. روش سوم نیز به انتگرال‌گیری روی حوزه احتیاج دارد [۵-۸]. برای حل این مشکلات، ناردینی و بریبا [۹-۱۱] روش تقابل دوگانه^۳ را معرفی کردند. در این روش، انتگرال شامل جمله‌های اینرسی (که روی حوزه باقی می‌ماند)، با استفاده از یک رابطه‌ی تقابل دیگر به انتگرال روی مرز تبدیل می‌شود. در این روند، از یک دسته توابع که بعدها به اسم توابع پایه‌ی شعاعی^۴ نام‌گذاری شدند [۱۲] برای تقریب جمله‌های اینرسی استفاده می‌شود، به‌طوری که انتخاب مناسب این توابع تأثیر زیادی روی دقت نتایج خواهد داشت. معمولاً توابع پایه‌ی شعاعی به دو دسته کلی و محلی تقسیم می‌شوند. از جمله‌ی توابع پایه‌ی شعاعی کلی می‌توان توابع مخروطی^۵ [۱۲-۶]، اسپلاین صفحه نازک^۶ [۱۲-۱۸]، گوسی^۷

[۱۹ و ۱۳]، چنددرجی^۸ [۲۰ و ۱۲-۲۲]، سینوسی^۹ [۲۳]، فوریه^{۱۰} [۲۴]، و بسط نوع اول^{۱۱} [۲۵، ۲۶] را نام برد. از دسته‌ی توابع پایه‌ی شعاعی محلی نیز می‌توان به توابع تکیه‌گاه فشرده^{۱۲} [۲۷-۳۱] اشاره کرد.

از جمله توابع دیگری که ریاضی‌دانان برای توابع پایه‌ی شعاعی ارائه دادند می‌توان به توابع چنددرجی معکوس^{۱۳} اشاره کرد. توابع چنددرجی معکوس که جزو توابع پایه‌ی شعاعی کلی به شمار می‌آیند، در سال ۱۹۷۱ توسط هاردی معرفی شدند [۳۲]. در این مقاله برای اولین بار، استفاده از این توابع در حل ارتعاش آزاد و اجباری مسائل الاستودینامیک دوبعدی توسعه داده شده است. بدین منظور، روش تقابل دوگانه بر مبنای این توابع فرمول‌بندی شده است. به منظور تخمین جمله اینرسی، حل خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به هسته‌های فرضی جابه‌جایی و ترکشن به‌صورت بسته محاسبه شده است. برای جلوگیری از وقوع تکینگی (در حالت حدی انطباق نقطه‌ی چشمه و گره‌ی مرزی)، نظر به اینکه حل خصوصی برای یک معادله‌ی دیفرانسیل یکتا نیست، از حل همگن نیز استفاده شده است. برای روش پیشنهادی سه مثال حل شده است و نتایج حاصل با نتایج به‌دست آمده از سایر توابع پایه‌ی شعاعی موجود در پیشینه‌ی تحقیقات علمی و حل‌های تحلیلی مقایسه شده، تا کارایی و دقت روش حاضر نشان داده شود.

۲- فرمول بندی روش تقابل دوگانه

یک رابطه‌ی تقابل^{۱۴} می‌تواند بین دو حالت الاستودینامیک و الاستواستاتیک نوشته شود. برای هر نقطه‌ی دلخواه x از یک جسم دوبعدی یک ماده همسانگرد (ایزوتروپ)، با حوزه‌ی Ω و مرز Γ ، معادله تعادل دینامیکی در غیاب نیروهای حجمی به

صورت زیر نوشته می شود [۵]:

$$\mu u_{k,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,jk} - \rho \ddot{u}_k = 0 \quad (۱)$$

که در آن، $u_k = u_k(x)$ بیانگر میدان جابه جایی، μ و λ ثابت های لامه، ρ جرم حجمی، ρ نشان دهنده مشتق نسبت به مختصات مکانی، و نقطه بیانگر مشتق نسبت به زمان است. در رابطه (۱) از جبر اندیسی ($k=1,2$) استفاده شده است. حل معادله (۱) به صورت $u_k = u_k^c + u_k^p$ قابل بیان است که در آن u_k^c و u_k^p به ترتیب بیانگر حل همگن و حل خصوصی هستند. با به کارگیری روش مانده های وزن دار^{۱۵} برای معادله (۱) با یک تابع وزن پیوسته (معروف به حل اساسی^{۱۶}) بر حوزه Ω و استفاده از نظریه گرین^{۱۷}، معادله زیر به دست می آید [۱]:

$$c_{lk}(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Omega} u_{lk}^* \rho \ddot{u}_k d\Omega \quad (۲)$$

که در آن، $c_{lk}(\xi) = \delta_{lk}$ اگر $\xi \in \Omega$ ، $c_{lk}(\xi) = 0$ اگر $\xi \notin \Omega$ و $c_{lk}(\xi) = \frac{1}{2} \delta_{lk}$ اگر $\xi \in \Gamma$ و مرز در ξ هموار باشد. همچنین برای نقطه چشمه^{۱۸} ξ و نقطه ای میدان^{۱۹} x ، $u_{lk}^* = u_{lk}^*(\xi, x)$ و $p_{lk}^* = p_{lk}^*(\xi, x)$ به ترتیب بیانگر حل های اساسی جابه جایی و ترکشن اند [۱]. به علاوه p_k نشان دهنده ترکشن (تنش سطحی) است.

از آنجا که آخرین جمله معادله (۲) یک انتگرال روی حوزه است، امکان فرمول بندی روش اجزای مرزی در این مرحله وجود ندارد، مگر اینکه انتگرال روی حوزه به طریقی به انتگرال روی مرز تبدیل شود. این تبدیل با استفاده از یک رابطه تقابل دیگر که بین دو حالت الاستواستاتیک نوشته می شود به صورت رابطه (۳) قابل دستیابی است. اساساً نام گذاری این روش به نام روش تقابل دوگانه، به دلیل همین دوبار استفاده کردن از رابطه تقابل است [۵].

$$-\int_{\Omega} u_{lk}^* \rho \ddot{u}_k d\Omega = c_{lk}(\xi) u_k^p(\xi) + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k^p d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k^p d\Gamma \quad (۳)$$

که در آن، u_k^p و p_k^p مربوط به حل خصوصی یک حوزه نامحدودند. اگر جمله اینرسی $\rho \ddot{u}_k$ به صورت یک تابع معلوم باشد، آن گاه این حل های خصوصی را می توان به صورت تحلیلی از حل معادله (۱) به دست آورد. اما در عمل، از آنجا که این جمله به صورت یک تابع معین وجود ندارد از یک روند حل تقریبی استفاده می شود که در آن، توابع پایه شعاعی نقش اساسی را ایفا می کنند.

۳- پیشنهاد تابع پایه شعاعی چندربعی معکوس

برای پیدا کردن حل های خصوصی توضیح داده شده در بالا، جمله اینرسی $\rho \ddot{u}_k = \rho \ddot{u}_k(x)$ در حوزه Ω با استفاده از یک سری ضرایب نامعین $\alpha_k^m = \alpha_k(y^m)$ و مجموعه ای از توابع معین $f^m = f(x, y^m)$ (معروف به توابع پایه شعاعی) تقریب زده می شود، که در آنها $m=1,2,...,M$ بیانگر تعداد اعضای مجموعه، و x و y^m به ترتیب نقاط چشمه و میدان جدید هستند [۵]. بنابراین می توان نوشت:

$$\rho \ddot{u}_k = \sum_{m=1}^M f^m \alpha_k^m \quad (۴)$$

یک سوال مهم که در این مرحله به وجود می آید این است که چه نوع توابعی برای توابع پایه شعاعی مناسب اند؟ در این مقاله، روی یک نوع از توابع پایه شعاعی کلی به نام چندربعی معکوس که به صورت زیر بیان می شود، تمرکز شده است.

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}} \quad (۵)$$

که در آن ϵ پارامتر شکل تابع پایه شعاعی m چندربعی معکوس است. بنابراین، توابع تقریبی f^m به صورت زیر معرفی می شوند:

$$0 \leq r^m \leq r_{\max}^m, \quad f^m = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r^m)^2}} \quad (۶)$$

که در آن، $r^m = |x - y^m|$ فاصله ی بین نقاط x و y^m است و $r_{\max}^m$ حداکثر r^m ای است که امکان دارد در حوزه Ω وجود داشته باشد. میدان های جابه جایی و ترکشن حل خصوصی

می‌تواند با استفاده از هسته‌های فرضی جدید به صورت زیر تعریف شود [۱۰]:

$$u_j^p = \sum_{m=1}^M \psi_{jl}^m \alpha_l^m \quad (۷)$$

و همچنین

$$p_j^p = \sum_{m=1}^M \eta_{jl}^m \alpha_l^m \quad (۸)$$

در معادلات فوق، $\psi_{jl}^m = \psi_{jl}(x, y^m)$ و $\eta_{jl}^m = \eta_{jl}(x, y^m)$ توابع هسته‌های فرضی مناسب‌اند که در قسمت‌های بعدی محاسبه می‌شوند. همچنین $l=1, 2$ بیانگر جهت بار وارده است. با جاگذاری معادله (۴) در معادله (۱) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mu u_{k,jj}^p + (\lambda + \mu) u_{j,jk}^p = \sum_{m=1}^M f^m \alpha_k^m \quad (۹)$$

حال اگر حل خصوصی موجود در سمت چپ معادله فوق از معادله (۷) جایگزین شود، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mu (\psi_{kl}^m \alpha_l^m)_{,jj} + (\lambda + \mu) (\psi_{il}^m \alpha_l^m)_{,ik} = f^m \alpha_k^m \quad (۱۰)$$

که بعد از ساده‌سازی به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\mu \psi_{kl,ii}^m + (\lambda + \mu) \psi_{il,ik}^m = f^m \delta_{kl} \quad (۱۱)$$

روابط بالا ارائه‌کننده یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزئی‌اند. اولین گام در حل این دستگاه استفاده از یک تغییر متغیر مناسب است، به‌طوری که دستگاه از حالت درگیر به غیردرگیر تبدیل شود. در این‌جا از روش تفکیک بردارهای گالرکین [۱] به‌صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\psi_{kl}^m = g_{kl,jj}^m - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} g_{kj,lj}^m \quad (۱۲)$$

که در آن

$$g_{kl}^m = g_{kl}(x, y^m) \quad (۱۳)$$

با جاگذاری معادله (۱۲) در معادله (۱۱) و با توجه به این نکته که $g_{kl}^m = g_{kl}^m \delta_{kl}$ [۱]، معادله (۱۱) به صورت معادله دیفرانسیل اسکالر زیر خلاصه می‌شود:

$$\mu g_{,jjj}^m = f^m \quad (۱۴)$$

و یا

$$\nabla^4 G = \frac{1}{\mu} f^m \quad (۱۵)$$

در معادله بای‌هارمونیک (۱۵)، $G = g^m$ بیانگر یک حل خصوصی است که در بخش (۳-۱) به دست می‌آید. همچنین، هسته‌های جابه‌جایی و ترکشن فرضی به صورت زیر قابل محاسبه‌اند [۱]:

$$\psi_{kl}^m = \delta_{kl} \left[\frac{G'}{R} + G'' \right] - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{G'}{R} (\delta_{kl} - R_{,k} R_{,l}) + G'' R_{,k} R_{,l} \right] \quad (۱۶)$$

و همچنین

$$\eta_{kl}^m = (n_l R_{,k} + \delta_{kl} R_{,n}) \mu \left\{ G''' + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{G'}{R^2} - \frac{G''}{R} \right) \right\} + n_k R_{,l} \mu \left\{ \left(\frac{G'}{R^2} - \frac{G''}{R} \right) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} G''' \right\} - R_{,k} R_{,l} R_{,n} \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left\{ G''' + 3 \left(\frac{G'}{R^2} - \frac{G''}{R} \right) \right\} \quad (۱۷)$$

که در آن‌ها، $R (= r^m)$ برای سادگی روابط انتخاب شده است. همچنین n_l بیانگر مولفه‌های بردار نرمال و G' ، G'' و G''' معرف مشتقات G نسبت به R هستند.

۳-۱- حل خصوصی معادله بای‌هارمونیک

نظر به اینکه جسم فرضی دارای ابعاد نامحدود است، بنابراین هر نقطه از آن که انتخاب شود مرکز یک دایره به شعاع بی‌نهایت است، و می‌توان گفت تقارن دایره‌ای وجود دارد. برای یک ماده همسانگرد، می‌توان مسئله را در مختصات قطبی نیز بیان کرد که با توجه به تقارن دایره‌ای، متغیر زاویه‌ای دوران θ قابل صرف‌نظر است. بنابراین، راحت‌تر آن است که از عملگر بای‌هارمونیک زیر استفاده شود:

$$G' = \frac{1}{12\mu\epsilon^4 R} \left\{ 4Z^3 - 3Z^2 - 6Z - 6(Z^2 - 1) \ln \left(\frac{Z+1}{2} \right) + 5 \right\} \quad (24)$$

همچنین G'' و G''' به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$G'' = \frac{1}{12\mu\epsilon^2 (Z+1)} \left\{ 8Z^2 - Z - 6(Z+1) \ln \left(\frac{Z+1}{2} \right) - 7 \right\} \quad (25)$$

$$G''' = \frac{R(4Z+5)}{6\mu(Z+1)^2} \quad (26)$$

که در آنها $Z = \sqrt{1 + \epsilon^2 R^2}$ است.

حال که مشتقات حل خصوصی غیرتکین به دست آمده اند، می توان هسته های ψ_{kl}^m و η_{kl}^m را به آسانی از معادلات (۱۶) و (۱۷) به دست آورد.

$$\begin{aligned} \psi_{kl}^m = & -\frac{(\lambda + \mu)R_{,k}R_{,l}}{6\mu(\lambda + 2\mu)\epsilon^2(Z+1)} \left\{ 2Z^2 - Z - 1 \right\} \\ & + \frac{\delta_{kl}}{12\mu(\lambda + 2\mu)\epsilon^2(Z+1)} \left\{ 4(2\lambda + 5\mu)Z^2 \right. \\ & \left. - (\lambda + \mu)Z - 6(\lambda + 3\mu)(Z+1) \ln \left(\frac{Z+1}{2} \right) \right. \\ & \left. - (7\lambda + 19\mu) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \eta_{kl}^m = & \frac{n_l R_{,k} + \delta_{kl} R_{,n}}{3(\lambda + 2\mu)\epsilon^2 R(Z+1)} \left\{ (\lambda + 4\mu)Z^2 \right. \\ & \left. + (\lambda + \mu)Z - (2\lambda + 5\mu) \right\} \\ & + \frac{n_k R_{,l}}{3(\lambda + 2\mu)\epsilon^2 R(Z+1)} \left\{ (\lambda - 2\mu)Z^2 \right. \\ & \left. + (\lambda + \mu)Z - (2\lambda - \mu) \right\} \\ & + \frac{2(\lambda + \mu)R_{,k}R_{,l}R_{,n}}{3(\lambda + 2\mu)\epsilon^2 R(Z+1)} \left\{ Z^2 - 2Z + 1 \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

در نهایت، حالت حدی انطباق نقطه چشمه و گرهی مرزی $(R \rightarrow 0)$ برای هسته های غیرتکین ψ_{kl}^m و η_{kl}^m به صورت زیر به دست می آید:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \psi_{kl}^m = 0 \quad (29)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \eta_{kl}^m = 0 \quad (30)$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) = \quad (18)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial R^4} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3}{\partial R^3} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R}$$

با توجه به اینکه در محاسبه ψ_{kl}^m و η_{kl}^m ، از تابع G استفاده

نمی شود، می توان معادله دیفرانسیل (۱۵) را بر حسب G' مرتب کرد و مستقیماً G' را از حل معادله دیفرانسیل زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial R^3} (G') + \frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (G') - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (G') \\ + \frac{1}{R^3} (G') = \frac{1}{\mu \sqrt{1 + (\epsilon R)^2}} \end{aligned} \quad (19)$$

حل همگن معادله دیفرانسیل (۱۹) به صورت

$$G'^c = C_1 R + \frac{C_2}{R} + C_3 R \ln R \quad (20)$$

و حل خصوصی معادله دیفرانسیل (۱۹) صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} G'^p = \frac{1}{12\mu\epsilon^4 R} \left\{ -3\epsilon^2 R^2 + 4\epsilon^2 R^2 \sqrt{1 + \epsilon^2 R^2} \right. \\ \left. - 6\epsilon^2 R^2 \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \epsilon^2 R^2} \right) - 2\sqrt{1 + \epsilon^2 R^2} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

همان طور که مشاهده می شود، در حل خصوصی G'^p ، یک تکنیکی از مرتبه $(1/R)$ وجود دارد؛ بنابراین وقتی که $R = 0$ است (یعنی انطباق نقطه چشمه و گرهی مرزی)، مقادیر حدی وجود ندارد. برای رفع این مشکل، بایستی جمله تکین از حل خصوصی حذف شوند. از آنجا که حل خصوصی برای یک معادله دیفرانسیل یکتا نیست، قسمتی از حل همگن با C_i های مناسب به حل خصوصی تکین قبلی (G'^p) اضافه می شود تا یک حل خصوصی ناتکین جدید به دست آید:

$$G' = G'^c + G'^p \quad (22)$$

که در آن ضرایب ثابت مناسب برای رفع تکنیکی عبارت اند از:

$$C_3 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{6\mu\epsilon^4}, \quad C_1 = 0 \quad (23)$$

بعد از ساده سازی، G' به صورت زیر به دست می آید:

۴- گسسته‌سازی عددی

۴-۱- ارتعاش اجباری

با جاگذاری معادله (۳) در معادله (۲) و به‌کارگیری معادلات (۷) و (۸) معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$c_{lk}(\xi)u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \sum_{m=1}^M [c_{lk}(\xi)\psi_{kj}^m + \int_{\Gamma} p_{lk}^* \psi_{kj}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^* \eta_{kj}^m d\Gamma] \alpha_j^m \quad (31)$$

این معادله که نیازی به انتگرال‌گیری روی حوزه ندارد، می‌تواند به عنوان معادله اصلی برای اجزایبندی مرزی مورد استفاده قرار گیرد. دو معادله مربوط به جهت‌های $l=1,2$ (مسائل دو بعدی) برای نقطه‌ی i (نقطه چشمه) با مختصات کارترین $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ می‌تواند به شکل ماتریسی زیر نوشته شود [۵]:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma + \sum_{m=1}^M [c^i \psi^{im} + \int_{\Gamma} p^* \psi^m d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \eta^m d\Gamma] \alpha^m \quad (32)$$

که در آن، c^i ، u ، p و u^* و p^* بردارها و ماتریس‌های متعارف در روش اجزای مرزی هستند (جزئیات بیشتر در مرجع [۵] آمده است). همچنین α^m بیانگر برداری با دو مولفه، و ψ^m و η^m معرف ماتریس‌های 2×2 هستند که ستون n آن‌ها به-ترتیب شامل مولفه‌های جابه‌جایی و ترکشن بر اثر میدان نیروهای حجمی f^m وارد شده در جهت n است.

حال می‌توان گسسته‌سازی اجزای مرزی را انجام داد. در این تحقیق، مرز مسئله با یک سری از اجزای درجه ۲ شبکه‌بندی می‌شود و متغیرهای فیزیکی و هندسی مسئله با درونیابی به وسیله مقادیر گره‌ی‌شان تعیین می‌شوند. بعد از اجزایبندی مذکور، شکل گسسته‌ی معادله (۳۲) به صورت معادله (۳۳) به‌دست می‌آید:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right) u^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right) p^j + \sum_{m=1}^M [c^i \psi^{im} + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right) \psi_j^{im} - \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right) \eta_j^{im}] \alpha^m \quad (33)$$

که در آن NE بیانگر تعداد اجزا و Φ معرف ماتریس 2×6

توابع شکل است. معادله (۳۳) را می‌توان به صورت یک جمع روی N گره مرزی نوشت:

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N (H^{ij} \psi_j^{im} - G^{ij} \eta_j^{im}) \alpha^m \quad (34)$$

که در آن، i و j به‌ترتیب بیانگر نقطه چشمه و گره مرزی هستند. u^j و p^j به‌ترتیب بردار جابه‌جایی و ترکشن در گره j را نشان می‌دهند. H^{ij} و G^{ij} معرف ماتریس‌های 2×2 ارتباط دهنده‌ی نقطه i و گره j هستند. همچنین ψ_j^{im} و η_j^{im} نشان‌دهنده‌ی ماتریس‌های 2×2 هستند که به‌ترتیب شامل مقادیر جابه‌جایی و ترکشن در گره j به‌علت میدان نیروهای حجمی f^m هستند.

M بردار $\alpha^m (2 \times 1)$ را که مربوط به توابع نیروهای حجمی متمایز f^m هستند، می‌توان در یک بردار $\alpha^m (2M \times 1)$ دسته-بندی کرد و با بردار شتاب $\ddot{u}^m (2N \times 1)$ (که شامل شتاب در همه گره‌های مرزی می‌شود)، ارتباط داد. بنابراین، معادله (۴) را می‌توان برای همه‌ی گره‌های مرزی به‌صورت زیر نوشت:

$$\rho \ddot{u} = F \alpha \quad (35)$$

که در آن، درایه‌های ماتریس F مقادیر توابع f^m در نقاط گره‌ی‌اند. اگر توابع f^m مستقل از هم باشند و تعدادشان طوری انتخاب شود که با تعداد گره‌ها برابر باشند ($M=N$)، آن‌گاه ماتریس F معکوس پذیر است و در نتیجه α به آسانی از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha = \rho E \ddot{u} \quad (36)$$

که در آن، $E=F$ است. حال می‌توان معادله (۳۴) را برای همه‌ی نقاط i به‌صورت ماتریس‌های کلی در یک دستگاه معادلات کامل به صورت زیر نوشت [۵]:

$$M \ddot{u} + H u = G p \quad (37)$$

به‌طوری که

$$M = \rho (G \eta - H \psi) E \quad (38)$$

که در آن‌ها، H و G ماتریس‌های $2N \times 2N$ متعارف در روش اجزای مرزی هستند. همچنین ψ و η بیانگر ماتریس‌های $2N \times 2N$ هستند که به ترتیب از زیرماتریس‌های ψ و η ساخته می‌شوند.

معادله (۳۷) یک دستگاه معادلات تعادل دینامیکی را نشان می‌دهد که می‌توان آن را همراه با شرایط مرزی و شرایط اولیه مسئله با یکی از روش‌های گام‌به‌گام زمانی حل کرد. در این مقاله، روش هوبولت [۳۳] برای حل این دستگاه به کار گرفته شده است. برای به دست آوردن نتایج قابل اعتماد، بایستی پارامتر گام زمانی شرط $\Delta t \leq 0.1T$ را ارضا کند که در آن، T زمان تناوب طبیعی سازه است [۳۶]. برای این منظور در مثال‌های ارائه شده، این شرط در نظر گرفته شده است.

۴-۲- ارتعاش آزاد

برای حل ارتعاش آزاد، مرزهای قلمروی موردنظر را به دو قسمت Γ_1 و Γ_2 تقسیم می‌کنیم. در Γ_1 ترکشن‌ها صفر بوده ($p = 0$) و جابه‌جایی‌ها مجهول‌اند ($u = \bar{u}$)، در حالی که در Γ_2 جابه‌جایی‌ها صفر بوده ($u = 0$) و ترکشن‌ها مجهول‌اند ($p = \bar{p}$). حال می‌توان معادله (۳۷) را مطابق زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

برای تحلیل ارتعاش آزاد، تغییر مکان u توسط یک تابع هارمونیک به شکل زیر بیان می‌شود:

$$u = A \cos(\omega t + \theta) \quad (۴۰)$$

که در آن، A دامنه‌ی ارتعاش، ω فرکانس طبیعی سازه، t زمان و θ زاویه فاز است. زمان تناوب سازه را می‌توان از رابطه‌ی مشهور زیر به دست آورد:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (۴۱)$$

شتاب را می‌توان با دو بار مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادله (۴۰)، به شکل زیر به دست آورد:

$$\ddot{u} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta) = -\omega^2 u \quad (۴۲)$$

و یا به شکل ساده‌ی زیر نوشت:

$$\ddot{u} = -\lambda u \quad (۴۳)$$

با جاگذاری معادله (۴۳) در معادله (۳۹)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad (۴۴)$$

که آن را می‌توان به صورت دو معادله مستقل زیر نوشت:

$$(H_{11} - \lambda M_{11}) \bar{u} = G_{12} \bar{p} \quad (۴۵)$$

$$(H_{21} - \lambda M_{21}) \bar{u} = G_{22} \bar{p} \quad (۴۶)$$

معادله (۴۶) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\bar{p} = G_{22}^{-1} (H_{21} - \lambda M_{21}) \bar{u} \quad (۴۷)$$

با جاگذاری معادله (۴۷) در معادله (۴۵)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(H_{11} - \lambda M_{11}) \bar{u} = G_{12} G_{22}^{-1} (H_{21} - \lambda M_{21}) \bar{u} \quad (۴۸)$$

معادله (۴۸) می‌تواند به صورت زیر هم نوشته شود:

$$B \bar{u} = \lambda C \bar{u} \quad (۴۹)$$

که در آن

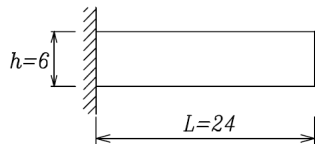
$$B = H_{11} - G_{12} G_{22}^{-1} H_{21} \quad (۵۰)$$

$$C = M_{11} - G_{12} G_{22}^{-1} M_{21} \quad (۵۱)$$

ضرب C^{-1} در طرفین معادله (۴۹) منجر به معادله زیر می‌شود:

$$C^{-1} B \bar{u} = \lambda \bar{u} \quad (۵۲)$$

با در نظر گرفتن تساوی زیر



(الف)



(ب)

شکل ۱- (الف) هندسه و شرایط مرزی تیر کنسول؛ (ب) این تیر با ۶ و ۱۲ جزء مرزی مرتبه‌ی دو مدل شده است

سایر نتایج موجود در پیشینه‌ی تحقیقات علمی و همچنین با حل تحلیلی (در صورت موجود بودن) مقایسه شده است.

۵-۱- ارتعاش آزاد یک تیر کنسولی

یک تیر کنسولی به ارتفاع ۶ و طول ۲۴ واحد که لبه‌ی سمت چپ آن دارای تکیه گاه است، شکل (۱)، به عنوان مثال ارتعاش آزاد انتخاب شده است. برای اجزای این تیر از دو شبکه با ۶ و ۱۲ جزء مرزی مرتبه‌ی دو استفاده شده است. خواص مادی این تیر به صورت $E/\rho = 10^4$ و $\nu = 0.2$ تعریف شده‌اند. نتایج به‌دست آمده از تابع پایه شعاعی پیشنهادی برای سه حالت پارامتر شکل $\varepsilon = 0.25, 0.5, 0.75$ به نتایج مرجع [۳۴]، در قالب زمان تناوب پنج مود اول در جدول (۱) مقایسه شده‌اند. بر طبق این جدول، نتایج به‌دست آمده از تابع چندربعی معکوس انطباق بیشتری نسبت به نتایج تابع مخروطی با حل اجزای محدود دارند، که این موضوع در حالت $\varepsilon = 0.25$ مشهودتر است. لازم به ذکر است که در مرجع [۳۴] حل اجزاء محدود با استفاده از ۴۵۱ گره به‌دست آمده است در حالی که حل‌های حاضر از ۱۲ و ۲۴ گره (به‌ترتیب برای ۶ و ۱۲

$$A = C^{-1}B \quad (53)$$

در نهایت معادله ارتعاش آزاد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A\bar{u} = \lambda\bar{u} \quad (54)$$

معادله (۵۴) در واقع یک مسئله استاندارد مقدار ویژه با مقادیر ویژه‌ی λ است.

۴-۳- نقاط داخلی

به منظور افزایش دقت روش اجزای مرزی می‌توان علاوه بر گره‌های اجزای مرزی از یک سری نقاط داخلی اضافی نیز استفاده کرد. در این حالت نیز معادله (۳۱) برای نقاط داخلی صادق است، اما از آنجا که نقاط داخلی به عنوان نقاط چشمه داخل حوزه محسوب می‌شوند ($\xi \in \Omega$) بنابراین همواره $c_{lk}(\xi) = \delta_{lk}$ است. با ترکیب کردن روابط حاکم بر مجموع نقاط چشمه (اعم از نقاط مرزی و داخلی) و پیگیری روشی مشابه با بخش (۴-۱)، معادله ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} H_{BB} & 0 \\ H_{DB} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BD} \\ M_{DB} & M_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_B \\ \ddot{u}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{BB} \\ G_{DB} \end{bmatrix} [p_B] \quad (55)$$

که در آن 0 و I به ترتیب بیانگر ماتریس‌های صفر و واحد هستند، و اندیس‌های B و D به ترتیب نشان‌دهنده زیر ماتریس‌های مربوط به گره‌های مرزی و داخلی‌اند. همچنین این حالت ماتریس جرم از معادله زیر قابل برآورد است:

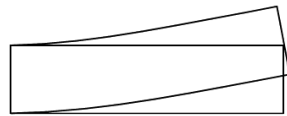
$$\begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BD} \\ M_{DB} & M_{DD} \end{bmatrix} = \rho \left\{ \begin{bmatrix} G_{BB} \\ G_{DB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{BB} & \eta_{DB} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{BB} & 0 \\ H_{DB} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{BB} & \psi_{BD} \\ \psi_{DB} & \psi_{DD} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} F_{BB} & F_{BD} \\ F_{DB} & F_{DD} \end{bmatrix}^{-1} \quad (56)$$

۵- مثال‌های عددی

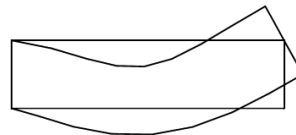
برای نشان دادن کارایی و دقت روش حاضر، سه مثال در این قسمت در نظر گرفته شده است. نتایج عددی حاصل با

جدول ۱- مقایسه‌ی نتایج به‌دست آمده از تابع پایه شعاعی چنددرجی معکوس با نتایج مرجع [۳۴]، در قالب زمان تناوب پنج مود اول

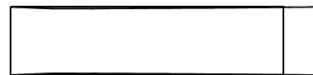
مود			۱	۲	۳	۴	۵
روش اجزای محدود (مرجع [۳۴])			۶/۲۰۲	۱/۲۲۳	۰/۹۶۴	۰/۵۲۷	۰/۳۱۵
تابع پایه شعاعی مخروطی (مرجع [۳۴])	۶ جزء		۵/۷۱۸	۱/۰۴۵	۰/۹۶۰	۰/۴۰۵	۰/۳۰۷
	۱۲ جزء		۶/۱۸۸	۱/۲۱۲	۰/۹۵۸	۰/۵۰۷	۰/۳۱۸
تابع پایه شعاعی پیشنهادی	$\varepsilon = ۰/۲۵$	۶ جزء	۵/۹۷۱	۱/۰۵۳	۰/۹۴۶	۰/۴۲۹	۰/۳۱۰
		۱۲ جزء	۶/۲۰۳	۱/۲۰۰	۰/۹۴۸	۰/۵۱۲	۰/۳۱۵
	$\varepsilon = ۰/۵$	۶ جزء	۵/۹۷۰	۰/۹۶۷	۰/۹۱۳	۰/۳۷۸	۰/۲۸۵
		۱۲ جزء	۶/۱۸۵	۱/۱۶۸	۰/۹۳۷	۰/۴۸۶	۰/۳۰۵
	$\varepsilon = ۰/۷۵$	۶ جزء	۵/۵۱۴	۰/۸۸۵	۰/۸۶۸	۰/۳۳۸	۰/۲۶۲
		۱۲ جزء	۶/۰۶۲	۱/۱۲۱	۰/۹۱۶	۰/۴۵۶	۰/۲۹۲



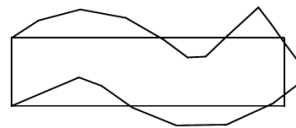
Mode shape no. 1



Mode shape no. 2



Mode shape no. 3

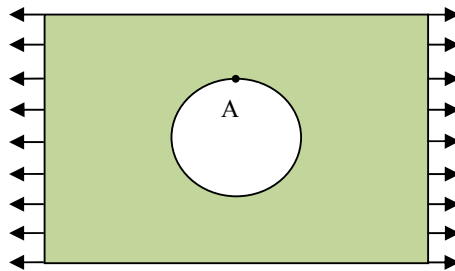


Mode shape no. 4

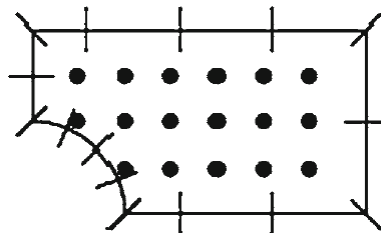


Mode shape no. 5

شکل ۲- شکل‌های مودی یک تیر کنسول که به کمک تابع پایه شعاعی چنددرجی معکوس با $\varepsilon = ۰/۲۵$ و استفاده از ۱۲ جزء به‌دست آمده است

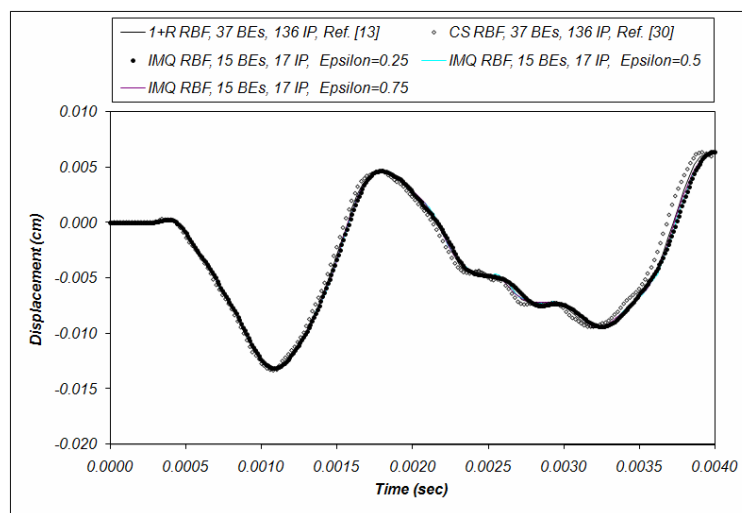


(الف)

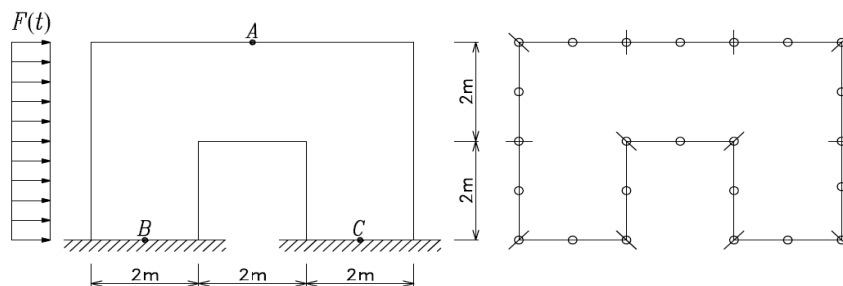


(ب)

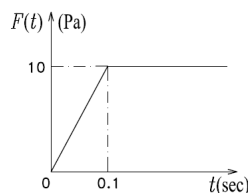
شکل ۳- (الف) ورق با یک سوراخ تحت بار کششی از دو طرف. (ب) یک چهارم این ورق با ۱۵ جزء مرزی مرتبه‌ی دو و ۱۷ نقطه داخلی مدل شده است



شکل ۴- تاریخچه زمانی جابه‌جایی قائم در نقطه A در مثال دوم



(الف)



(ب)

شکل ۵- (الف) قاب پرتال مدل شده با ۱۲ جزء مرزی درجه دو تحت بار جانبی.

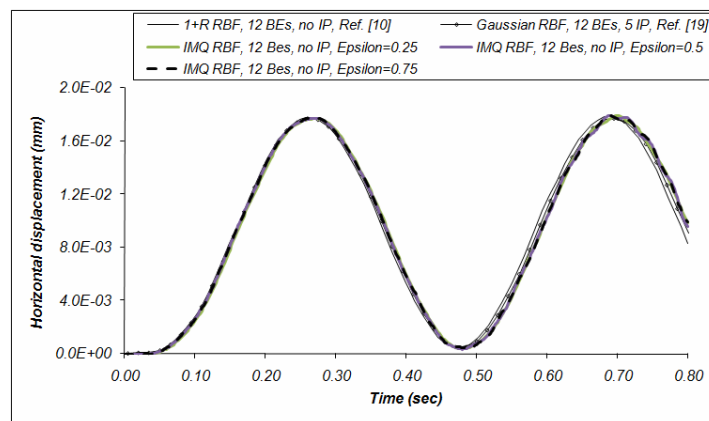
(ب) تاریخچه‌ی زمانی بار وارده

بیشتر در شکل (۳-ب) نشان داده شده است. خواص مصالح این ورق عبارت‌اند از: $\rho = 0.00785 \text{ kg/m}^3$ ، $\mu = 8.08 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ و $\lambda = 1.21 \times 10 \text{ N/cm}^2$. نتایج عددی حاصل از تابع پایه شعاعی پیشنهادی با نتایج حاصل از دو تابع دیگر (تابع تکیه‌گاه فشرده [۳۰] و تابع مخروطی [۱۳]) در قالب تاریخچه‌ی زمانی جابه‌جایی قائم در نقطه A، در شکل (۴) آورده شده‌اند. برطبق این شکل، نتایج به‌دست آمده از تابع پایه شعاعی چندربعی معکوس تقریباً منطبق بر نتایج مراجع [۳۰] و [۱۳] است، با این تفاوت که نتایج موجود در مراجع ذکر شده با استفاده از ۳۷ جزء مرزی و منظور کردن ۱۳۶ نقطه داخلی حاصل شده است، درحالی‌که نتایج مربوط به تابع پایه شعاعی پیشنهادی تنها با استفاده از ۱۵ جزء مرزی و ۱۷ نقطه داخلی به‌دست می‌آید که این تفاوت قابل ملاحظه است.

جزء مرزی) به‌دست آمده‌اند. برای حالت ۱۲ جزء مرزی و $\varepsilon = 0.25$ ، شکل‌های مودی در شکل (۲) ترسیم شده‌اند.

۵-۲- ورق با یک سوراخ تحت بار هویساید

به عنوان مثال دوم، یک ورق مستطیل شکل به طول ۳۶ سانتی‌متر و عرض ۲۰ سانتی‌متر که یک سوراخ به قطر ۱۰ سانتی‌متر در وسط آن قرار دارد و از دو طرف تحت تحریک بار دینامیکی قرار دارد در نظر گرفته شده است، شکل (۳ الف). بار دینامیکی از تابع هویساید $P(t) = 7500 H(t-0)$ تبعیت می‌کند. از آنجا که شرایط تقارن کامل بر مسئله حاکم است، یک‌چهارم ورق برای مدل کردن در نظر گرفته شده است به‌طوری‌که برای مش‌بندی آن از ۱۵ جزء مرزی درجه‌ی ۲ و ۱۷ نقطه داخلی استفاده شده است همچنین پارامتر گام زمانی روش هوبولت $\Delta t = 1.3 \times 10^{-5}$ انتخاب شده است. جزییات



شکل ۶- تاریخچه‌ی زمانی جابه‌جایی افقی در نقطه A در مثال سوم

۳-۵- قاب پرتال تحت بار جانبی

آخرین مثال عبارت است از یک قاب پرتال با تکیه‌گاه‌های گیردار که تحت یک بار جانبی دینامیکی قرار دارد. مرز مسئله با ۱۲ جزء مرزی درجه دو گسسته شده است. همچنین هیچ نقطه داخلی در محاسبات آورده نشده است، شکل (۵). پارامتر گام زمانی روش هوبولت $\Delta t = 2.7 \times 10^{-2}$ انتخاب شده است. خواص مصالح برای این مثال به صورت $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$ ، $\mu = 4166.67 \text{ Pa}$ و $\lambda = 2777.78 \text{ Pa}$ است. نتایج موجود در مراجع [۱۰] و [۱۹] که به ترتیب از توابع پایه‌ی شعاعی مخروطی و گوسی استفاده کرده‌اند، برای مقایسه با کار حاضر آورده شده است. تاریخچه‌ی زمانی جابه‌جایی افقی در نقطه A برای همه‌ی توابع پایه شعاعی ذکر شده، در شکل (۶) نشان داده شده است. شکل مزبور انطباق بسیار خوب نتایج را نشان می‌دهد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش اجزای مرزی برای تحلیل مسائل

واژه‌نامه

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------|---|
| 1. boundary element method (BEM) | 5. conical | 9. sinusoidal |
| 2. finite element method (FEM) | 6. thin plate spline (TPS) | 10. Fourier |
| 3. dual reciprocity method (DRM) | 7. Gaussian | 11. first kind Bessel function (J-Bessel) |
| 4. radial basis functions (RBFs) | 8. multiquadric (MQ) | |

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|---------------------|
| 12. compact support (CS) | 15. weighted residual method (WRM) | 17. Green's theorem |
| 13. inverse multiquadric (IMQ) | | 18. source point |
| 14. reciprocal relation | 16. fundamental solution | 19. field point |

مراجع

1. Brebbia, C.A., Telles, J., and Wrobel, L., *Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering*, Springer, Berlin and New York, 1984.
2. Friedman, M.B., and Shaw, R.P., "Diffraction of Pluses by Cylindrical Obstacles of Arbitrary Cross Section," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 29, pp. 40-46, 1962.
3. Banaugh, R.P., and Goldsmith, W., "Diffraction of Steady Elastic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30, pp. 589-597, 1963.
4. Cruse, T.A., and Rizzo, F.J., "A Direct Formulation and Numerical Solution for the General Transient Elastodynamics Problem-I," *Journal of Math Anal Appl*, Vol. 22, pp. 244-259, 1968.
5. Dominguez, J., *Boundary Element in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton, Elsevier Applied Science, London, 1993.
6. Mansur, W.J., "A Time Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method," Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1983.
7. Karabalis, D.L., and Beskos, D.E., "Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method," *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 12, pp. 73-93, 1984.
8. Antes, H., "A Boundary Element Procedure for Transient Wave Propagations in Two Dimensional Isotropic Elastic Media," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, pp. 313-322, 1985.
9. Nardini, D., and Brebbia, C.A., "A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 7, pp. 157-162, 1983.
10. Brebbia, C.A., and Nardini, D., "Dynamic Analysis in Solid Mechanics by an Alternative Boundary Elements Procedure," *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 2, pp. 228-233, 1983.
11. Nardini, D., and Brebbia, C.A., *Boundary Integral Formulation of Mass Matrices of Dynamic Analysis*, In: Brebbia, C.A., ed., *Topics in Boundary Element Research*, Springer, Berlin, 1985.
12. Golberg, M.A., and Chen, C.S., "The Theory of Radial Basis Functions Applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential Equations," *Boundary Elements Communications*, Vol. 5, pp. 57-61, 1994.
13. Agnantiaris, J.P., Polyzos, D., and Beskos, D.E., "Some Studies on Dual Reciprocity BEM for Elastodynamic Analysis," *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp. 270-277, 1996.
14. Bridges, T.R., and Wrobel, L.C., "On the Calculation of Natural Frequencies of Microstructures Using DRBEM," *Proceedings of the Boundary Element Method (BEM) XVI Conference*, pp. 529-536, 1994.
15. Golberg, M.A., "The Numerical Evaluation of Particular Solutions in the BEM-a Review," *Boundary Elements Communications*, Vol. 6, pp. 99-106, 1995.
16. Chen, C.S., "The Method of Fundamental Solution for Non-Linear Thermal Explosions," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 675-681, 1995.
17. Karur, S.R., and Ramachandran, P.A., "Augmented Thin Plate Spline Approximation in DRM," *Boundary Elements Communications*, Vol. 6, pp. 55-58, 1995.
18. Mehraeen, S., and Noorzad, A., "Application of Radial Basis Functions on Dual Reciprocity BEM for Dynamic Analysis of Pierced Shear Wall," *International Series on Advances in Boundary Elements*, Vol. 10, pp. 299-308, 2001.
19. Rashed, Y.F., "Transient Dynamic Boundary Element Analysis Using Gaussian Based Mass Matrix," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, pp. 265-279, 2002.
20. Agnantiaris, J.P., Polyzos, D., and Beskos, D.E., "Free Vibration Analysis of Non-Axisymmetric and Axisymmetric Structures by the Dual Reciprocity BEM," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 25, pp. 713-723, 2001.
21. Samaan, M.F., and Rashed, Y.F., "BEM for Transient 2D Elastodynamics Using Multiquadric Functions," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 8517-8531, 2007.
22. Samaan, M.F., and Rashed, Y.F., "Free Vibration Multiquadric Boundary Elements Applied to Plane Elasticity," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, pp. 2421-2432, 2009.
23. Rashed, Y.F., "Free Vibration of Structures with Trigonometric SIN(R) Function in the Dual Reciprocity Boundary Element Analysis," *Advances in Structural Engineering*, Vol. 11, pp. 397-409, 2008.
24. Hamzeh Javaran, S., Khaji, N., and Moharrami, H., "A Dual Reciprocity BEM Approach Using New Fourier Radial Basis Functions Applied to 2D

- Elastodynamic Transient Analysis,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, pp. 85–95, 2011.
25. Hamzeh Javaran, S., Khaji, N., and Noorzad, A., “First Kind Bessel Function (J-Bessel) as Radial Basis Function for Plane Dynamic Analysis Using Dual Reciprocity Boundary Element Method,” *Acta Mech*, Vol. 218, pp. 247–258, 2011.
 26. Fornberg, B., Larsson, E., and Wright, G., “A New Class of Oscillatory Radial Basis Functions,” *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 51, pp. 1209–1222, 2006.
 27. Wendland, H., “Piecewise Polynomial, Positive Definite and Compactly Supported Radial Basis Functions of Minimal Degree,” *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 4, pp. 389–396, 1995.
 28. Chen, C.S., Brebbia, C.A., and Power, H., “Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions,” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 137–150, 1999.
 29. Golberg, M.A., Chen, C.S., and Ganesh, M., “Particular Solutions of 3D Helmholtz-Type Equations Using Compactly Supported Radial Basis Functions,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 24, pp. 539–547, 2000.
 30. Rashed, Y.F., “BEM for Dynamic Analysis Using Compact Supported Radial Basis Functions,” *Computer and Structures*, Vol. 80, pp. 1351–1367, 2002.
 31. Samaan, M.F., Rashed, Y.F., and Ahmed, M.A., “The Dual Reciprocity Method Applied to Free Vibrations of 2D Structures Using Compact Supported Radial Basis Functions,” *Computational Mechanics*, Vol. 41, pp. 85–106, 2007.
 32. Sommariva, A., and Womersley, R.S., *Integration by RBF Over the Sphere*, AMS Subject Classifications, 41A30, 65D30.
 33. Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Butterworth and Heinmann, Oxford, 2000.
 34. Brebbia, C.A., and Nardini, D., “Dynamic Analysis in Solid Mechanics by an Alternative Boundary Elements Procedure,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 24, pp. 513–518, 2000.
 35. Kontoni, D.P.N., and Beskos, D.E., “Transient Dynamic Elastoplastic Analysis by the Dual Reciprocity BEM,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 12, pp. 1–16, 1993.
 36. Clough, R.W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, Computer and Structures Ltd., USA, 3rd Edition, 2003.