

# تحلیل کمانش گرمایی یک طرفه ورق مرکب لایه لایه بر روی بستر الاستیک بدون کشش

امید وانقی، حمیدرضا میردامادی \* و علیرضا شهیدی  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱۱/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۰۸/۳)

- چکیده -

( )

واژگان کلیدی :

## Unilateral Thermal Buckling Analysis of Laminated Composite Plates on Tensionless Elastic Foundation

O. Vaseghi, H.R. Mirdamadi and A. Shahidi

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

**Abstract** In this paper, using Rayleigh-Ritz method (RRM) and based on classical plate theory, thermal buckling of laminated composite rectangular plates is analyzed. Effects of plate aspect ratios, fiber orientations, and the kinds of lamination scheme with and without the foundation on the uni-lateral thermal buckling behavior are analyzed. All studies done in uni-lateral buckling field are specialized for single-layer isotropic plates which are affected by in-plane mechanical loads. The numerical results are validated very satisfactorily for the present method, with its accuracy and reliability confirmed.

**Keywords:** Uni-lateral thermal buckling, laminated composite plate, Rayleigh-Ritz method, Tensionless elastic foundation.

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

نیم مود کمانش ورق	$m$	طول، عرض و ارتفاع ورق مرکب لایه لایه	$a, b, h$
تابع های لاگرانژی میدان جابه جایی درون صفحه $H_i \ i=1,2$		نسبت طول به عرض ورق	$a/b$
تابع های طبقاتی میدان جابه جایی درون صفحه $H_i \ i=3..10$		تعداد لایه ها	$N$
ماتریس میدان جابه جایی کل ورق	$[N]$	ضخامت $k$ امین لایه ورق	$Z$
ماتریس حاصل از گستته سازی کرنش غشایی	$[C_M]$	مولفه های میدان جابه جایی ورق	$u, v, w$
ماتریس حاصل از گستته سازی کرنش خمی	$[C_B]$	مولفه های میدان جابه جایی میان صفحه ورق	$u_0, v_0, w_0$
تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک	$\delta U_e$	بردار کرنش کل	$\{\varepsilon\}$
ماتریس سختی ناشی از حضور بستر	$[K_e]$	بردار کرنش غشایی	$\{\varepsilon^{(01)}\}$
تابع تماسی	$X$	بردار کرنش فون کارمن و بردار کرنش خمی	$\{\varepsilon^{(02)}\}$
سختی هر فتر (معرف مدول بستر)	$k_f$	بردار کرنش خمی	$\{\varepsilon^{(1)}\}$
تغییرات انرژی کرنش نیروهای غشایی و خمی	$\delta U$	مولفه های سختی و سختی دوران یافته لایه $k$ ام	$Q_{ij}^k, \bar{Q}_{ij}^k$
تغییرات انرژی پتانسیل نیروهای درون صفحه	$\delta V$	مدول یانگ	$E$
ماتریس سختی هندسی	$[K_G]$	مدول برشی	$G$
ماتریس حاصل از نیروهای غشایی	$[N_0]$	نسبت پواسون	$v$
تغییرات انرژی پتانسیل کل	$\delta \Pi$	مولفه های بردار تنش و کرنش ورق	$\sigma_i, \varepsilon_i$
ماتریس سختی کل	$[K_T]$		$i = 1, 2, 6$
ماتریس سختی نیروهای محوری	$[K_{mm}]$	بردار نیروهای برایند تنش های درون سطح	$\{N\}$
ماتریس سختی نیروهای محوری و خمی	$[K_{mb}]$	بردار گشتاورهای برایند تنش های برون سطح	$\{M\}$
ماتریس سختی نیروهای خمی	$[K_{bb}]$	ماتریس سختی محوری	$[A]$
ماتریس حاصل از کرنش فون کارمن	$[H]$	ماتریس سختی خمی	$[B]$
ماتریس سختی نیروی محوری و گشتاور خمی		ماتریس سختی نیروی محوری و گشتاور خمی	$[D]$
بردارهای ضرایب مجھول میدان جابه جایی $\{\hat{u}\}, \{\hat{v}\}, \{\hat{w}\}$		بردار برایند نیروهای درون سطح گرمایی	$\{N\}^{Tr}$
بردار کل ضرایب مجھول	$\{\hat{U}\}$	بردار برایند گشتاورهای درون سطح گرمایی	$\{M\}^{Tr}$
مختصه های طبیعی (مختصه های بی بعد)	$\xi, \eta$	بردار برایند جمله میدان جابه جایی برون صفحه	$\Phi_m(\xi, \eta)$
مختصه های دکارتی	$x, y$	تابع چند جمله ای برای اراضی شرایط مرزی برون صفحه	$\Phi_b(\xi, \eta)$
بار بحرانی کمانش	$\lambda$		
نیروهای گرمایی	$\{F\}^{Tr}$		
شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار	$F, S, C$	زاویه چرخش رشته ها نسبت به محور $x$	$\theta$

## ۱- مقدمه

انتخاب یک تابع انرژی کرنشی مناسب برای بستر الاستیک و با روش گالرکین توансنتد بار بحرانی کمانشی برای یک ورق مستطیلی الاستیک را به دست آورند. در سال ۱۹۹۷ اسمیت، برادفورد و اوهلرز [۲] با استفاده از روش ریلی-ریتز به بررسی پایداری ورق‌های مستطیلی مقید شده زیر بارگذاری برشی پرداختند. ایشان قید بستر یک‌طرفه را با یک بستر بدون قابلیت اعمال نیروی کششی مدل کردند. در سال ۱۹۹۸ شهوان و خالد [۳] با روش گالرکین و با توجه به نظریه کرشاف به بررسی کمانش یک‌طرفه ورق‌های مقید پرداختند. ایشان برای بستر یک‌طرفه از یک بستر الاستیک غیرخطی استفاده کردند که بستر الاستیک بدون قابلیت اعمال نیروی کشش بود. در سال ۱۹۹۹ اسمیت، برادفورد و اوهلرز [۴] طی تحقیقاتی نظری و با روش نیمه‌تحلیلی-نیمه‌عددی ریلی-ریتز به بررسی پایداری ورق‌های مستطیلی مقید شده یک‌طرفه، پرداختند. سپس در همان سال طی تحقیقاتی آزمایشگاهی دستاوردها به دست آمده را تایید کردند [۵]. ورق‌های پیچ شده به تیرهای بتنی نوع ویژه‌ای از مسایل است که نظر محققان را به خود جلب کرده است. بررسی پایداری این ورق‌ها، توسط شهیدی، هدایتی و برادفورد [۶] در سال ۲۰۰۷ انجام گرفت. ایشان به کمک ضرایب لاغرانژ برای اعمال قیدها و استفاده از روش ریلی-ریتز به تحلیل پایداری موضعی یک‌طرفه ورق تقویتی پرداختند که با پیچ به یک بستر بتنی متصل شده بود. ایشان قید بستر یک‌طرفه را همانند مرجع [۴] به صورت یک بستر الاستیک بدون قابلیت اعمال نیروی کشش مدل کردند. شن و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۴ با استفاده از نظریه رایزن-میندلین به بررسی غیرخطی رفتار خمشی ورق مستطیلی با تکیه گاه چهارطرف گیردار که بر روی بستر الاستیک بدون کشش قرار داده شده است، پرداختند. با توجه به برخی ملاحظات اقتصادی در مهندسی از قبیل مصرف سوخت کمتر و دستیابی به سرعت‌های بالاتر، علاقه روزافزونی به کاهش ضخامت قطعات و سازه‌های سبک وزن در صنایع هوافضا، دریانوردی، خودرو، و روش‌های ساخت و تولید، منجر به جایگزینی تدریجی بسیاری از مواد همسانگرد

ورق‌ها به عنوان پرکاربردترین اجزا و قطعات سیستم‌های مکانیکی، مهم‌ترین و گستردترین کاربرد را در مهندسی سازه و مکانیک در زمینه ساخت سازه‌های نظیر هوایپیماها، فضایپیماها و سازه‌های دریایی دارند. کمانش که ناشی از بارگذاری‌های فشاری درون صفحه، عیب‌های سازه‌ای، بارگذاری‌های برون مرکز و انواع دیگر بارگذاری‌های برون صفحه است، باعث تغییر شکل‌های بزرگ و موجب نایابیاری و در نهایت آسیب به سازه‌ها می‌شود. کمانش یک‌طرفه در واقع یک مسئله تماسی است که تحلیل رفتار ورق‌ها روی فونداسیون‌ها، اتصالات اجزای مکانیکی و ورق‌های تقویت کننده تیرها و ستون‌های بتنی و غیره از جمله کاربردهای عملی مسئله کمانش یک‌طرفه اقسام و سازه‌های سازه است. وجود قید یک‌طرفه، به طور مستقیم، دلیل موجه‌ی برای غیرخطی شدن رفتار بستر الاستیک است. مد کمانشی ورق با اعمال تدریجی یک تابع سختی ناشی از بستر به سیستم، با استفاده از روند تکرار به دست می‌آید. گسترش روش‌های عددی و نیمه‌تحلیلی برای حل مسئله تماسی اقسام الاستیک بر مبنای نظریه هرتز در سال ۱۸۹۶ و دینیک در سال ۱۹۵۲ آغاز شد. از آن پس مطالعات زیادی بر روی مسئله تماسی انجام شده است. در این گونه مسایل، فرض بر این بود که یکی از دو جسم به عنوان بستر دیگری عمل می‌کند، و دو جسم به هم چسبیده‌اند. پس بین دو جسم نیروی چسبندگی وجود دارد. بنابراین با توجه به معلوم بودن ناحیه تماس بین دو جسم، حل مسئله از طریق معادله‌های دیفرانسیل خطی امکان‌پذیر شد. در بسیاری از موارد، به علت چسبندگی ناکافی، صفحه نیمه‌صلب نمی‌تواند قیدی کشنشی اعمال کند. این نوع شرایط مرزی به عنوان شرایط تماس یک‌طرفه شناخته می‌شوند. طبیعت دوگانه بستر، بیانگر رفتار غیرخطی سیستم می‌باشد و مجھول بودن ناحیه تماس بین دو جسم باز هم نظریه را پیچیده‌تر می‌سازد. با توجه به این شرایط، تحقیق بر روی مسئله‌های یک‌طرفه نیاز به روش‌های عددی دارد. در سال ۱۹۹۴ شهوان و واس [۸] بر اساس نظریه کلاسیک ورق و با

مرکب لایه‌لایه زیر گرمایی نایکنواخت پرداختند و در سال ۱۹۹۱ [۱۳]، با استفاده از المان ۴۰ درجه آزادی چهارضلعی، همراه با نظریه میندلین (کرنش بر Shi مرتبه یکم)، رفتار کمانش گرمایی را برای ورق‌های ضخیم زیر گرمایی یکنواخت و نایکنواخت گسترش دادند. هوانگ و تاچرت در سال ۱۹۹۲ [۱۴]، به بررسی حل دقیق از کمانش گرمایی ورق عمودچین مقارن و نسبتاً ضخیم، زیر شرایط مرزی گیردار و افزایش دمای یکنواخت، پرداختند. آنها با استفاده از نظریه رایزنر-میندلین، تأثیر تغییرشکل بر Shi عرضی را در افزایش ضخامت ورق نشان دادند. آنها دستاوردهای مطالعه خود را با روش اجزای محدود مقایسه کردند. کبیر و همکاران در سال ۲۰۰۳ [۱۵]، با استفاده از روش اجزای محدود و المان ۳ گرهی، به حل مسایل کمانش از روی گرمایی ورق مربعی و کج مرکب لایه‌لایه پرداختند. آنها با استفاده از نظریه کرنش بر Shi مرتبه یکم، ورق‌های نسبتاً ضخیم و نیز نازک را مورد بررسی قرار دادند. آنها با اعمال جمله تصحیح بر Shi در مولفه‌های کرنش بر Shi عرضی توانستند اثر قفل شدگی بر Shi را از بین ببرند. شیایو و همکاران در سال ۲۰۱۰ [۱۶]، به بررسی رفتار کمانش گرمایی ورق‌های مرکب لایه‌لایه پرداختند. آنها با استفاده از نظریه کلاسیک، شکل مود کمانش گرمایی ورق‌های مرکب لایه‌لایه در دو حالت اریب‌چین و عمودچین را زیر انواع مختلف نسبت مدول یانگ، نسبت طول به عرض، زاویه قرارگیری رشته‌ها، ترتیب قرارگیری لایه‌ها و شرایط مرزی مختلف، مورد مطالعه قرار دادند. آنها در این تحقیق از روش اجزای محدود و المان مثلثی ۱۸ درجه آزادی با توجه به کار شیایو و کیو در سال ۲۰۰۴ [۷]، استفاده کردند. شن در سال‌های ۱۹۹۷ [۱۹] و ۲۰۰۰ [۲۰]، رفتار گرمایی بعد از کمانش ورق مستطیلی همسانگرد را همراه با قید بستر الاستیک غیرخطی مورد بررسی قرار داد. بستر ارایه شده توسط شن، که در مقالات دیگری نیز مورد استفاده قرار گرفته است، در طبقه بنده بستر یک طرفه در نظر گرفته نمی‌شود. زیرا این بستر هم در کشش و هم در فشار مناسب با دو سختی تعریف شده، بر ورق نیرو اعمال می‌کند.

ستنی با مواد مرکبی شده است که ارایه دهنده هر دو برتری سختی ویژه بالا و وزن ویژه کم است. از میان عناصر مختلف سازه‌های کارامد و پیشرفته ساخته شده از مواد مرکب، رفتار کمانش گرمایی ورق‌های مرکب لایه‌لایه مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. به طور کلی حل تحلیلی و دقیق این نوع از ورق‌ها، به دلیل پیچیدگی رابطه‌های، محدود به چند نمونه خاص از انواع شرایط مرزی، نوع بارگذاری و ترتیب قرارگیری لایه‌ها شده است. یکی از نخستین مطالعات در زمینه مباحث کمانش گرمایی توسط گوزارت و همکاران در سال ۱۹۵۲ [۷]، انجام شد. آنها با استفاده از روش ریلی-ریتز، دمای بحرانی کمانش گرمایی ورق مستطیلی همگن و همسانگرد را زیر گرمایی گستردند. آنها با استفاده از نظریه رایزنر-میندلین (نظریه کرنش گرمایی ورق، با استفاده از نظریه رایزنر-میندلین) در زمینه کمانش بر Shi عموی را بر روی رفتار ترموموئستیک، در زمینه کمانش بر Shi مرتبه اول) مورد مطالعه قرار داد. تانگرانتام و همکاران در سال ۱۹۸۹ [۹]، تحلیل کمانش ورق مرکب لایه‌لایه را برای به دست آوردن دمای بحرانی، زیر نیروهای گرمایی، بررسی کردند. فرمول بنده آنها بر اساس نظریه خطی (نظریه کلاسیک) و روش اجزای محدود با استفاده از المان پوسته ۳۲ درجه آزادی سمی‌لوف انجام پذیرفت. سان و همکارش در سال ۱۹۹۰ [۱۰] با بررسی کمانش گرمایی ورق‌های مرکب لایه‌لایه مقارن عمودچین، تأثیر مهم تغییرشکل‌های بر Shi را بر روی ورق‌های مقارن لایه‌لایه عمودچین، زیر شرایط مرزی ساده نشان دادند. چن و همکاران به ترتیب در سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۱، رشته مطالعاتی در زمینه کمانش گرمایی ورق‌های لایه-لایه مرکب انجام دادند. آنها با به کارگیری روش گالرکین در سال ۱۹۸۷ [۱۱]، به مطالعه کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه زیر گرمایی یکنواخت پرداختند؛ در سال ۱۹۸۹ [۱۲]، با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی کمانش گرمایی ورق‌های

جابه‌جایی در میان صفحه‌اند. بنابراین مؤلفه‌های کرنش (با در نظر گرفتن کرنش فونکارمن) به صورت معادله زیر بیان می‌شوند [۱۸].

$$\{ \varepsilon \} = \{ \varepsilon^{(01)} \} + \{ \varepsilon^{(02)} \} + z \{ \varepsilon^{(1)} \} \quad (2)$$

که در آن  $\varepsilon^{(01)}$  بردار کرنش غشایی،  $\varepsilon^{(02)}$  بردار کرنش فونکارمن و  $\varepsilon^{(1)}$  بردار کرنش خمی به شکل زیرند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(01)} \\ \varepsilon_{yy}^{(01)} \\ \varepsilon_{xy}^{(01)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(02)} \\ \varepsilon_{yy}^{(02)} \\ \varepsilon_{xy}^{(02)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

معادله تنش-کرنش کاهش یافته پس از دوران از دستگاه مختصه‌های مادی (۲-۱) به دستگاه مختصه‌های مادی (x,y)، برای لایه عمودسانگرد k ام از ورق مرکب با ضخامت کل h و تعداد N لایه، همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است

به صورت معادله زیر است [۱۸].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T^{(k)}$$

$$\{\sigma_{xx}\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} - [\bar{Q}]^{(k)} \{\alpha\}^{(k)} \Delta T$$

در این مقاله از روش ریلی-ریتز برای بررسی رفتار کمانش ورق مرکب لایه‌لایه بر روی بستر الاستیک یک‌طرفه، زیر افزایش دمای یکنواخت استفاده شده است. کارهایی که تاکنون در زمینه تحلیل کمانش یک‌طرفه صورت گرفته، مختص به ورق تک‌لایه همسانگرد زیر نیروهای درون سطح مکانیکی است، بنابراین برای تحلیل کمانش گرمایی یک‌طرفه ورق مرکب لایه‌لایه نخست سعی شده با ارایه مثال‌های مختلف، دستاوردهای به دست آمده در زمینه کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه بدون وجود بستر، زیر تاثیر زاویه چیدمان رشته‌ها، نسبت طول به عرض ورق، شرایط مرزی متفاوت، تعداد و نوع چینش لایه‌ها، با کارهایی که تاکنون انجام شده، مطالعات پارامتری شود و سپس تاثیر بستر الاستیک یک‌طرفه بر روی رفتار کمانشی ورق مرکب لایه‌لایه با شرایط یادشده در بالا مورد بررسی قرار گیرد.

در بخش (۲) فرمول‌بندی کلی از ورق مرکب لایه‌لایه ارایه شده است. در بخش (۳) میدان جابه‌جایی گستته شده در روش ریلی-ریتز استخراج شده است. در بخش (۴) به بررسی پایداری ورق مرکب لایه‌لایه بر روی بستر الاستیک یک‌طرفه پرداخته شده است. در بخش (۵) مثال‌های حل شده مبادرت می‌ورزیم و در انتهای دستاوردهای حاصل از این تحقیق را بیان می‌کیم.

## ۲- فرمول‌بندی ورق مرکب لایه‌لایه عمودسانگرد

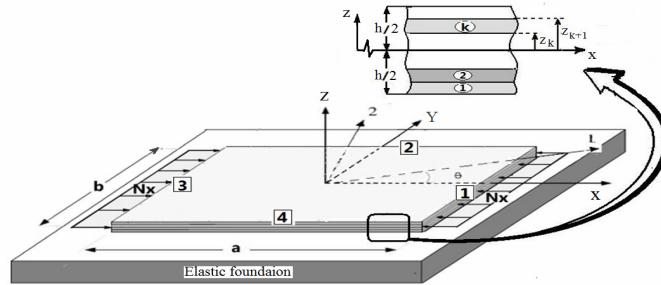
با توجه به شکل (۱) و رفتار ورق‌های لایه‌لایه نازک طبق نظریه کلاسیک، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت زیر فرض می‌شوند [۲۱].

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

در معادله بالا  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در جهت‌های  $x$  و  $y$  هستند و  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  مؤلفه‌ای



شکل ۱- نمایش ورق مرکب لایه‌لایه بر روی بستر الاستیک بدون قید کششی در دستگاه مختصه‌های کلی

سینماتیکی را ارضا کنند. این در حالی است که ارضای شرایط مرزی استاتیکی یا طبیعی توسط این تابع‌های الزامی نیست. بنابراین، میدان جابه‌جایی برون صفحه ( $\eta, \zeta$ )  $w_0$  بر اساس یک تابع چندجمله‌ای (چندجمله‌ای خیام پاسکال) و با افزودن تابعی که بتواند شرایط مرزی را ارضا کند به صورت زیر به دست می‌آید [۴].

$$w_0(\xi, \eta) = \phi_b(\xi, \eta) \sum_{q=0}^p \sum_{r=0}^q w_{0m} \varphi_m(\xi, \eta) \quad (10)$$

$$w_0(\xi, \eta) = \langle N_w(\xi, \eta) \rangle_{1 \times n} \{ \hat{w} \}_{n \times 1} \quad (11)$$

به طوری که  $p$  درجه تابع چندجمله‌ای،  $\{ \hat{w} \}$  بردار ضرایب مجھول ریتر که مختصه‌های تعیین یافته نامیده می‌شوند و  $m$ ،  $\varphi_m(\xi, \eta)$ ، با توجه به معادله (۱۰) است. تابع  $\langle N_w \rangle$  امین جمله از چندجمله‌ای به صورت زیر است:

$$\varphi_m(\xi, \eta) = \zeta^r \eta^{q-r} \quad (12)$$

با تعریف زیر برای  $m$ :

$$m = \frac{(q+1)(q+2)}{2} - r \quad (13)$$

تعداد جمله‌های چندجمله‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$n = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \quad (14)$$

در معادله (۱۰) تابع  $\langle N_w \rangle$  برای ارضای انواع شرایط مرزی برون صفحه در لبه‌های ورق، با توجه به شکل (۱)، به کار گرفته شده و مقدار آن در جدول (۱) برای انواع شرایط مرزی داده

بنابراین می‌توان بردار نیروهای برایند ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) و بردار گشتاورهای برایند ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ) را برای ورق مرکب لایه‌لایه (بدون در نظر گرفتن کرنش‌های فون کارمن) به دست آورد [۱۸].

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(01)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N\}^{Tr} \\ \{M\}^{Tr} \end{Bmatrix} \quad (V)$$

در معادله بالا [A] ماتریس سختی محوری، [D] ماتریس سختی خمی و [B] ماتریس سختی حاصل از برهم‌کنش نیروی محوری و گشتاور خمی است.  $\{M\}^{Tr}$  و  $\{N\}^{Tr}$ ، به ترتیب بردار برایند نیروها و گشتاورهای درون سطح گرمایی به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\{N\}^{Tr} = \sum_{k=1}^N (z_{k+1} - z_k) [\bar{Q}]^{(k)} \{\bar{\alpha}\}^{(k)} \Delta T(x, y) \quad (8)$$

$$\{M\}^{Tr} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (z_{k+1}^2 - z_k^2) [\bar{Q}]^{(k)} \{\bar{\alpha}\}^{(k)} \Delta T(x, y) \quad (9)$$

### ۳- میدان جابه‌جایی گسته شده در روش ریلی-ریتر

در روش ریلی-ریتر میدان جابه‌جایی، توسط تابع‌هایی از پیش تعیین شده با ضرایب مستقل نامعلوم یا به اصطلاح مختصه‌های تعیین یافته، تقریب زده می‌شود. این تابع‌های به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که دست کم، شرایط مرزی هندسی یا

جدول ۱- تابع  $\phi(\xi, \eta)$  برای شرایط مرزی آزاد (F)، ساده (S) و گیردار (C) در لبه‌های ورق مرکب لایه‌لایه

edges	Boundary condition		
	F	S	C
1	$(\zeta - 1)^0$	$(\zeta - 1)1$	$(\zeta - 1)^2$
2	$(\eta - 1)^0$	$(\eta - 1)^1$	$(\eta - 1)^2$
3	$(\zeta + 1)^0$	$(\zeta + 1)1$	$(\zeta + 1)^2$
4	$(\eta + 1)^0$	$(\eta + 1)1$	$(\eta + 1)^2$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_u \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle N_v \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle N_w \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\hat{u}\} \\ \{\hat{v}\} \\ \{\hat{w}\} \end{bmatrix} \Rightarrow \{U\} = [N] \{\hat{U}\} \quad (18)$$

در کلیه معادله‌های بالا  $\xi = x/a$  و  $\eta = y/b$  است به طوری که  $a$  و  $b$  به ترتیب نصف طول مستطیل در راستاهای  $x$  و  $y$  است. بنابراین می‌توان بردارهای کرش تعریف شده در معادله‌های (۳) تا (۵) را با توجه به تابع‌های شکل ارایه شده برای تعریف میدان جابه‌جایی ورق در روش ریلی-ریتز بدست آورد:

$$\{\varepsilon^{(01)}\}_{(3 \times 1)} = [C_M]_{(3 \times (n+2l))} \{\hat{U}\}_{((n+2l) \times 1)} \quad (19)$$

$$\{\varepsilon^{(1)}\}_{(3 \times 1)} = [C_B]_{(3 \times (n+2l))} \{\hat{U}\}_{((n+2l) \times 1)} \quad (20)$$

در معادله‌های بالا،  $\{\hat{U}\}_{((n+2l) \times 1)}$  بردار کل ضرایب مجهول (کل مختصه‌های تعمیم یافته) است و ماتریس‌های  $[C_B]$  و  $[C_M]$  به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$[C_M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_v}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_u}{\partial y} & \frac{\partial N_v}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[C_B] = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_w}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 N_w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (22)$$

شده است. میدان جابه‌جایی درون صفحه  $(\xi, \eta)$  و  $v_0(\xi, \eta)$  به صورت رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$u_0(\xi, \eta) = \langle N_u(\xi, \eta) \rangle_{l \times l} \{ \hat{u} \}_{l \times l} \quad (15)$$

$$v_0(\xi, \eta) = \langle N_v(\xi, \eta) \rangle_{l \times l} \{ \hat{v} \}_{l \times l} \quad (16)$$

به طوری که  $\{ \hat{u} \}$  و  $\{ \hat{v} \}$  بردار ضرایب مجهول ریتز،  $\langle N_u \rangle$  و  $\langle N_v \rangle$  بردار حاصل از تابع‌های چند جمله‌ای است که از ضرب ده جمله تابع‌های طبقاتی [۲۱] مطابق با معادله‌های زیر، در دو راستای  $a$  و  $b$  در مجموع ۱۰۰ تابع شکل بر روی کل دامنه ورق به دست می‌آید.

$$H_1(\zeta) = 0.5(1 + \zeta) \quad (17)$$

$$H_2(\zeta) = 0.5(1 - \zeta)$$

$$H_3(\zeta) = 1 - \zeta^2$$

$$H_4(\zeta) = \zeta - \zeta^3$$

$$H_5(\zeta) = 1 - 10\zeta^2 + 9\zeta^4$$

$$H_6(\zeta) = \zeta - 5\zeta^3 + 4\zeta^5$$

$$H_7(\zeta) = 1 - 4\zeta^2 + 94\zeta^4 - 6\zeta^6$$

$$H_8(\zeta) = \zeta - 3\zeta^3 + 7\zeta^5 - 5\zeta^7$$

$$H_9(\zeta) = 1 - 5\zeta^2 + 6\zeta^4 - 9\zeta^6 + 7\zeta^8$$

$$H_{10}(\zeta) = \zeta - 4\zeta^3 + 6\zeta^5 - 10\zeta^7 + 7\zeta^9$$

در معادله‌های بالا دو تابع نخست، تابع‌های لاگرانژی مرتبه یکم هستند که در شرایط مرزی مختلف درون صفحه، ممکن است یکی از آنها حذف شود.

با توجه به معادله‌های (۱۱)، (۱۵) و (۱۶) میدان جابه‌جایی ورق را می‌توان به این صورت نوشت:

#### ۴- بررسی پایداری ورق مرکب لایه‌لایه بر روی

##### بستر الاستیک یک طرفه

$$[K_T] = [K_{mm}] + [K_{mb}] + [K_{bm}] + [K_{bb}]$$

$$\{F\}^{Tr} = \{F_m\}^{Tr} + \{F_b\}^{Tr}$$

که در آن

$$[K_{mm}] = \int_v [C_M]^T [A] [C_M] dv \quad (28)$$

$$[K_{mb}] = [K_{bm}]^T = \int_v [C_M]^T [B] [C_B] dv \quad (29)$$

$$[K_{bb}] = \int_v [C_b]^T [D] [C_B] dv \quad (30)$$

(31)

$$\{F_m\}^{Tr} = \sum_{k=1}^N ((Z_{k+1} - Z_k)$$

$$\int_A [C_M]^T [\bar{Q}]^{(k)} \{\bar{\alpha}\}^{(k)} \Delta T dA = [K_{mt}] \Delta T \quad (32)$$

$$\{F_b\}^{Tr} = \sum_{k=1}^N ((Z_{k+1} - Z_k) \Delta T_{\text{cte}})$$

$$\int_A [C_B]^T [\bar{Q}]^{(k)} \{\bar{\alpha}\}^{(k)} \Delta T dA = [K_{bt}] \Delta T \quad (33)$$

تغییرات انرژی پتانسیل ورق، ناشی از بردار نیروهای درون صفحه یا غشایی  $\{N\}^T = \{N_x, N_y, N_{xy}\}$ ، وارد شده به میان صفحه ورق را همراه با درنظر گرفتن کرنش فون کارمن می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\delta V = - \int_v \delta \left\{ \varepsilon^{(0)} \right\}^T \{N\} dv = - \delta \{U\}^T [K_G] \{U\} \quad (34)$$

در معادله بالا  $[K_G]$  ماتریس سختی هندسی به این صورت بیان می‌شود:

$$[K_G] = \int_v [H]^T [N_0] [H] dv \quad (35)$$

در معادله بالا ماتریس حاصل از نیروهای غشایی (درون صفحه) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[N_0] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (36)$$

ماتریس  $[H]$  در روش ریلی-ریتز برای ورق به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_w}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (37)$$

با توجه به اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل داریم:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta U_e + \delta V = 0 \quad (38)$$

تاثیر حضور بستر الاستیک را، مطابق شکل (۱)، به صورت یک رابطه نیرو-جابه‌جایی‌شان می‌دهیم که به علامت  $w$  وابسته است. هنگامی که جابه‌جایی ورق تمايل به دور شدن از سطح بستر را داشته باشد، نیروی ناشی از واکنش بستر بر ورق، صفر است ولی وقتی که خلاف آن رخ دهد، واکنش فشاری بستر، که خطی در نظر گرفته می‌شود، متناسب است با جابه‌جایی جانبی ورق. چنانچه بستر الاستیک را به صورت گروهی از فنرهای خطی در زیر ورق مدل کنیم انرژی پتانسیل الاستیک ناشی از تغییرشکل محوری فنرا به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta U_e = \delta \{U\}^T [K_e] \{U\} \quad (39)$$

که در آن  $[K_e]$  ماتریس سختی ناشی از حضور بستر به این صورت بیان می‌شود:

$$[K_e] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_i k_f \cdot [N]^T [N] \quad (40)$$

در معادله بالا  $n$  و  $m$  به ترتیب تعداد فنرا در راستای طولی و عرضی ورق،  $k_f$  سختی هر فنر (معرف مدول بستر) است. به منظور کنارگذاری نیروی فنر در حالت کششی از تابع تماسی  $X$  استفاده شده است، به طوری که مقدار آن در حالت جدایی بین ورق و بستر ( $w > 0$ ) صفر است و در حالتی که ورق تمايل به فرو رفتن در بستر الاستیک را دارد ( $w < 0$ ) مقدار آن برابر یک خواهد بود.

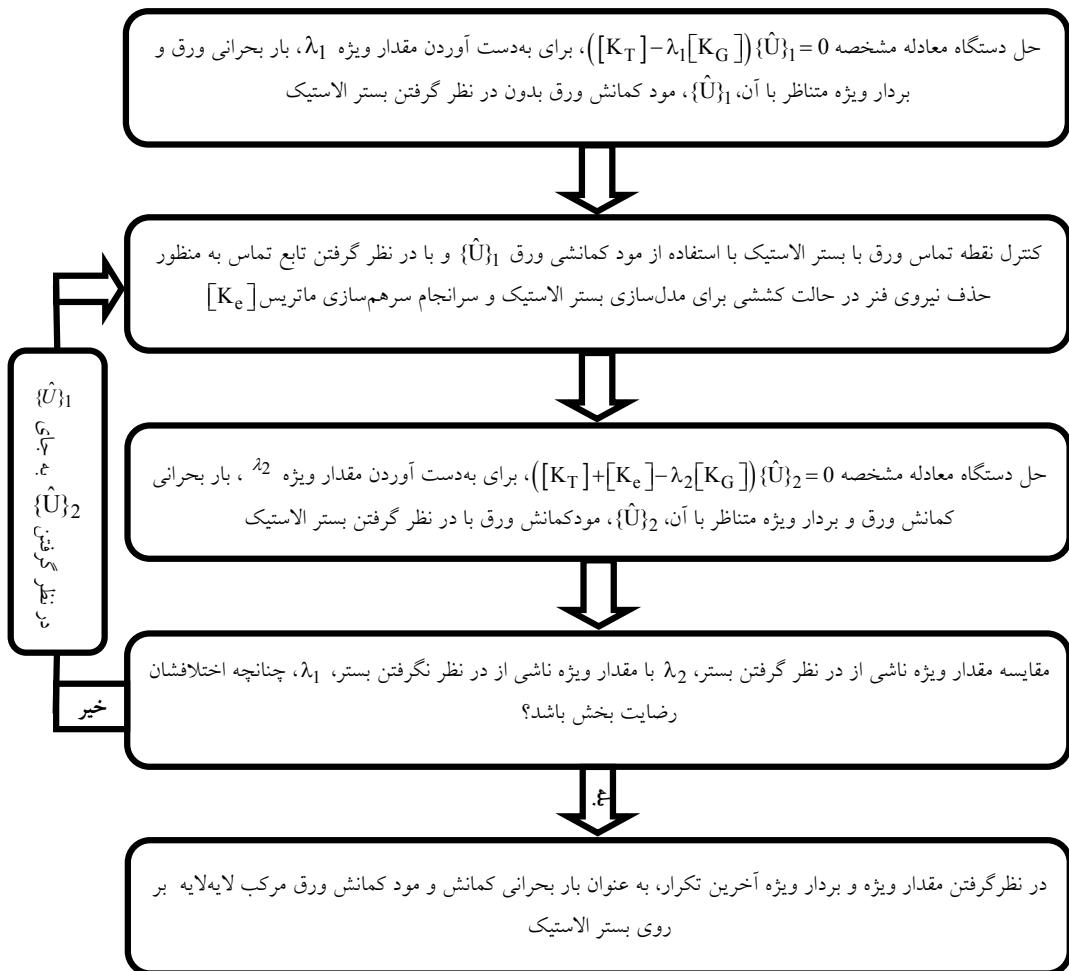
$$\begin{cases} X = 0 & w \geq 0 & (\text{separation}) \\ X = 1 & w < 0 & (\text{contact}) \end{cases} \quad (41)$$

تغییرات انرژی کرنشی ورق مرکب لایه‌لایه ناشی از انرژی کرنش نیروهای غشایی و خمشی، بدون درنظر گرفتن کرنش گرین-لاگرانژ به صورت معادله زیر نشان داده می‌شود:

$$\delta U = \int_v (\delta \{ \varepsilon^{(0)} \}^T \{N\} + \delta \{ \varepsilon^{(1)} \}^T \{M\}) dv \quad (42)$$

با قرار دادن معادله‌های به دست آمده در معادله (۴۲) داریم:

$$\delta U = \delta \{U\}^T [K_T] \{U\} - \delta \{U\}^T \{F\}^{Tr} \quad (43)$$



شکل ۲- الگوریتم حل غیرخطی کمانش یک طرفه

سطح اولیه در درون سطح ورق (تنشی های درون سطح اولیه بر واحد ضخامت) ناشی از اعمال نیروهای گرمایی، به منظور جاگذاری در عناصر ماتریس  $[N_0]$ ، با استفاده از اصل کمینه سازی انرژی پتانسیل و در حالت تعادل استاتیکی به دست آورد. بنابراین با مساوی قرار دادن کار خارجی ناشی از نیروهای وارد شده بر ورق با انرژی کرنش ورق، رابطه زیر به دست می آید:

$$[K_T]\{\hat{U}\} = \{F\}^T \quad (39)$$

که در آن بردار  $\{F\}^T$  ناشی از نیروهای گرمایی است. با استفاده از معادله (۳۹) و اعمال شرایط مرزی، میدان جابه جایی ورق،  $\{\hat{U}\}$ ، به دست می آید. در نهایت با قرار دادن میدان

با جانشینی معادله های (۲۳)، (۲۷) و (۳۳) در معادله بالا به معادله زیر می رسیم:

$$([K_T] + [K_e] - \lambda [K_G])\{\hat{U}\} = 0 \quad (38)$$

معادله بالا نمایانگر یک مسئله مقدار ویژه جبری است که به یک معادله سرشتمانه منجر می شود. بعد از اعمال شرایط مرزی، کمترین مقدار ویژه، همان  $\lambda$  بار بحرانی کمانش ورق و بردار ویژه متناظر با آن مقدار ویژه، مود نخست کمانش ورق به دست می آید. در حل مسایل ورق مرکب با لایه های متقارن ماتریس  $[B]$  در معادله (۷) صفر خواهد شد و در این حالت رفتار درون سطح مستقل از رفتار برون سطح می شود. پیش از حل معادله (۳۸)، ابتدا می بایست میزان توزیع نیروهای درون

جدول ۲- مقایسه کمانش گرمایی ورق تک لایه همسانگرد و شرایط مرزی SSSS

ماتسونگ [۲۰]	چو و همکاران [۱۶]	Present [RRM]
۰/۱۲۶۴	۰/۱۲۶۵ (المان ۶ × ۶)	۰/۱۲۶۵

جدول ۳- مقایسه کمانش گرمایی ورق لایه‌لایه متقارن عمودچین و اریب‌چین، زیر شرایط مرزی SSSS

تعداد و نوع چینش لایه‌ها	a / b	$\Delta T_{cr}$ (°F) [16] (12*12)	$\Delta T_{cr}$ (°F) [21] (12*12)	$\Delta T_{cr}$ (°F) Present (RRM)
$(0/45/-45/90)_s$	۱/۲۵	۱۳/۷۱	۱۳/۷۵۱۹	۱۳/۷۴۲۴
$(0/90/90/0)_s$		۱۲/۲۶	۱۲/۲۶۱۰	۱۲/۲۶۱۰

میدان جابه‌جایی درون سطح  $u$  و  $v$  در کلیه مرزهای ورق صفر در نظر گرفته می‌شود.

در جدول (۲) کمانش گرمایی ورق تک لایه همسانگرد و شرایط مرزی SSSS درون سطح، با کار شیاپو و همکاران [۱۶] و ماتسونگ [۲۰] مقایسه شده است. ویژگی‌های مادی ورقم به صورت  $E = 1.0e6$ ،  $a / b = 1$ ،  $v = 0.3$ ،  $a / h = 100$ ،  $\alpha_0 = 1.0e-6$  هستند و ضریب دمای بحرانی به صورت  $\alpha_0 T_{cr} \times 10^3$  در جدول بیان شده است.

در جدول (۳) کمانش گرمایی ورق لایه‌لایه متقارن عمودچین و اریب‌چین، زیر شرایط مرزی SSSS، با کار شیاپو و همکاران [۱۶] و شی و همکاران [۲۱] مقایسه شده است. ورق دارای نسبت طول به عرض  $a / b = 1.25$ ،  $a / h = 15 \times 12 \times 0.048$  in با ویژگی‌های مادی  $E_1 = 22.5 \times 10^6$  psi،  $G_{12} = 0.66 \times 10^6$  psi،  $v = 0.22$ ،  $\alpha_1 = -0.04 \times 10^{-6} / {}^\circ F$  و  $\alpha_2 = 16.7 \times 10^{-6} / {}^\circ F$  است.

شکل‌های زیر تغییر در دمای بحرانی ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین و اریب‌چین، با شرایط مرزی SSSS، نسبت به پارامترهای  $a / b$  و  $\theta$ ، در دو حالت یک‌طرفه و دو‌طرفه، نشان داده شده است. در کلیه مثال‌ها، ورق از نوع

جابه‌جایی ورق در معادله (۷)، میزان توزیع نیروهای درون سطح در ورق مرکب لایه لایه، برای جاگذاری در ماتریس

[ $N_0$ ]، به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\{N\} = [A][C_M][K_T]^{-1}\{F\}^{Tr} + [B][C_B][K_T]^{-1}\{F\}^{Tr} - \{N\}^{Tr} \quad (40)$$

از طرفی به خاطر طبیعت دوگانه بستر و نامشخص بودن ناحیه تماس ورق مرکب با بستر یک‌طرفه، معادله (۴۰) منجر به یک سیستم معادله‌های غیرخطی می‌شود و برای حل آن از الگوریتم ارایه شده در شکل (۲) استفاده می‌شود.

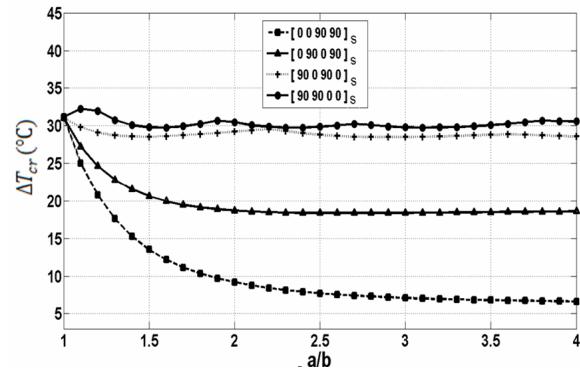
## ۵- دستاوردهای محاسباتی، مثال‌های عددی و مطالعات پارامتری

در این بخش به بررسی مثال‌هایی از کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه بر روی بستر الاستیک یک‌طرفه زیر اثر گرمای یکنواخت بر روی کل دامنه ورق پرداخته و در هر نمونه برای اطمینان از درستی آنالیز حاضر، دستاوردهای به دست آمده با کارهای دیگران مقایسه شده است. با توجه به شماره‌گذاری مرزهای ورق نشان داده شده در شکل (۱) در کلیه مثال‌های حل شده  $s$  و  $c$  به ترتیب بیانگر تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد برای شرایط مرزی خارج سطح‌اند. از طرفی در کلیه مثال‌ها

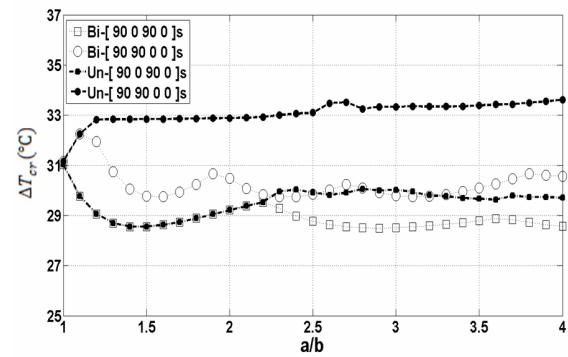
موج را در جهت  $\alpha$  اختیار می‌کند و با توجه به شکل با افزایش نسبت طول به عرض، دمای بحرانی کاهش می‌یابد، به طوری که تا میزان  $a/b = 2$  دمای بحرانی به شدت کاهش و از نسبت  $a/b > 2$ ، دمای بحرانی به صورت آرام کاهش می‌یابد. برخلاف آن دو ورق با لایه‌های [90/0]s و [902/02]s، با افزایش نسبت طول به عرض، مود کمانشی، تعداد  $m > 1$  نیم موج را در جهت  $\alpha$  اختیار می‌کند و با توجه به شکل با افزایش نسبت طول به عرض، دمای بحرانی به صورت نوسانی (به خاطر تغییر در مود کمانش) و تقریباً ثابت می‌یابد و این به خاطر تغییرات به وجود آمده در ماتریس سختی خمی است.

شکل‌های (۴) و (۵) تأثیر کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه متقاضی عمودچین را در حضور بستر الاستیک، نشان می‌دهد. ترتیب چینش لایه‌ها به صورت [02/902]s، [90/0]s و [902/02]s، همانند ورق‌های استفاده شده در شکل (۳)، در نظر گرفته شده است. برای نمایش تأثیر بستر الاستیک، فنرهایی با سختی  $k_f = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ ، به عنوان یک پارامتر متغیر در نظر گرفته می‌شود. شدت توزیع فنرهای بستر در هر راستا، به ازای هر یک متر  $40$  عدد فنر در دو راستای طول و عرض ورق‌اند به طوری که تشکیل یک شبکه گستته از فنرهای متتمرکز را داده‌اند [۴].

با توجه به شکل (۴)، تا هنگامی که مود کمانشی ورق، تعداد  $m=1$  نیم موج را اختیار می‌کند، سختی بستر یک‌طرفه هیچ تاثیری بر روی بار بحرانی کمانش ندارد، زیرا در این حالت ورق تمایل به دور شدن از صفحه بستر را دارد. بنابراین منحنی تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش یک‌طرفه دقیقاً مسیر تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش دو‌طرفه را طی می‌کند. با افزایش نسبت طول به عرض ورق مود حاصل از دمای بحرانی کمانش ورق، تعداد نیم موج  $m > 1$  را اختیار می‌کند، در این حالت ورق تمایل به نفوذ در بستر را دارد. بنابراین با توجه به میزان سختی بستر الاستیک، بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. تأثیر بستر الاستیک با سختی  $k_f = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$  بر افزایش دمای بحرانی، در ورق با نوع چینش لایه‌های



شکل ۳- تغییر دمای بحرانی، ( ${}^{\circ}\text{F}$ )  $\Delta T_{\text{cr}}$ ، بر ورق‌های لایه‌لایه متقاضی عمودچین، نسبت به تغییر پارامتر  $b/a$



شکل ۴- تأثیر کمانش گرمایی دو‌طرفه و یک‌طرفه بر ورق مرکب لایه‌لایه متقاضی عمودچین

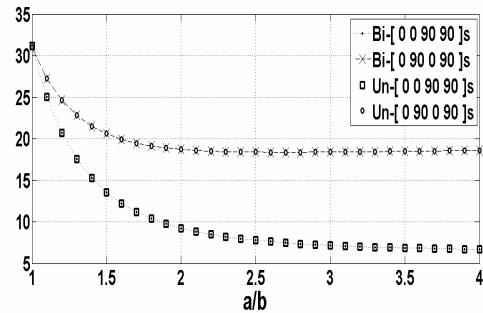
گرافیت-اپوکسی T300/5208 با ویژگی‌های مادی  $G_{12} = 0.66 \text{ GPa}$ ،  $E_1 = 22.5 \text{ GPa}$ ،  $E_2 = 1.17 \text{ GPa}$ ،  $\alpha_2 = 16.7 \times 10^{-6} / {}^{\circ}\text{C}$ ،  $\alpha_1 = -0.04 \times 10^{-6} / {}^{\circ}\text{C}$  و  $\nu = 0.22$ ، است و ضخامت هر لایه  $0.001 \text{ m}$  در نظر گرفته شده است. در شکل (۳) تغییر در دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقاضی عمودچین، نسبت به تغییرات پارامتر طول به عرض ورق  $a/b$  و بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک، نشان داده شده است. ترتیب چینش لایه‌ها به صورت [02/902]s، [90/0]s و [902/02]s در نظر گرفته شده است. دو ورق با لایه‌های [02/902]s و [90/0]s، با افزایش نسبت طول به عرض، همواره مود کمانشی با تعداد  $m=1$  نیم

و  $s[90/0/02]$  در حالت بیشینه افزایش، به ترتیب حدود ۱۳٪ و ۶٪ است. در شکل (۵)، به علت آنکه مود کمانشی گرمایی ورق، همواره تعداد  $m=1$  نیم موج را اختیار می‌کند، سختی بستر یک طرفه هیچ تاثیری بر روی دمای بحرانی کمانش ندارد و منحنی تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش یک طرفه دقیقاً مسیر تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش دو طرفه را با ازای افزایش نسبت طول به عرض ورق، طی می‌کند.

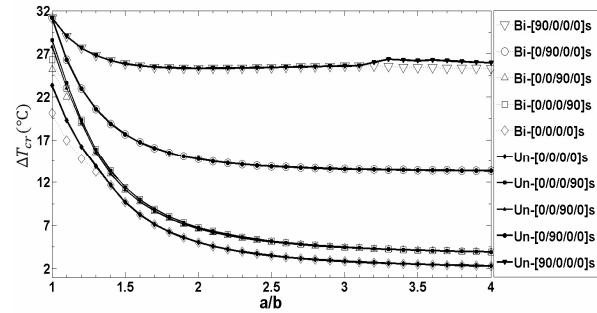
شکل (۶) تأثیر تکلایه عمودسانگرد با زاویه رشته‌ها نود درجه را در قرارگیری بین لایه‌های ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین با لایه‌های عمودسانگرد تماماً صفر درجه نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۶)، هر چه لایه عمودسانگرد ۹۰ درجه به سمت لایه‌های بیرونی قرار می‌گیرد، دمای بحرانی متناظر با نسبت قرارگیری لایه ۹۰ درجه در لایه‌های درونی، افزایش می‌یابد. بنابراین نوع چیشن ورق مرکب لایه‌لایه  $[90/0/0/0]s$ ، بیشترین دمای بحرانی را برای رخداد کمانش، با توجه به تغییر در پارامتر  $b/a$ ، تجربه می‌کند.

در شکل (۷) تغییر در دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن اریب‌چین، نسبت به تغییرات پارامتر  $\theta$ ، بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک یک طرفه و در دو حالت نسبت طول به عرض ۱ و ۲، نشان داده شده است. ترتیب چیشن لایه‌ها به صورت  $(+0)_2 / (-0)_2$  و  $(+0)_2 / (-0)_2$  در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل برای هر دو نوع چیشن، هنگامی که ورق ۹۰ درجه تغییر می‌کند، به طوری که تا زاویه ۴۵ درجه روندی افزایشی و بیشینه دمای بحرانی در زاویه ۴۵ درجه رخ می‌دهد. سپس روندی کاهشی را پیش می‌گیرد. ولی با افزایش نسبت طول به عرض، دیگر روند نمودار به صورت متقارن از ۹۰ درجه تغییر نمی‌کند، به طوری که بیشینه دمای بحرانی در ورق با نوع چیشن لایه  $s[(-0)_2 / (+0)_2]$  و  $s[(-0)_2 / (+0)_2]$ ، به ترتیب ۶۲ و ۶۰ برای  $a/b=2$  پدید می‌آید.

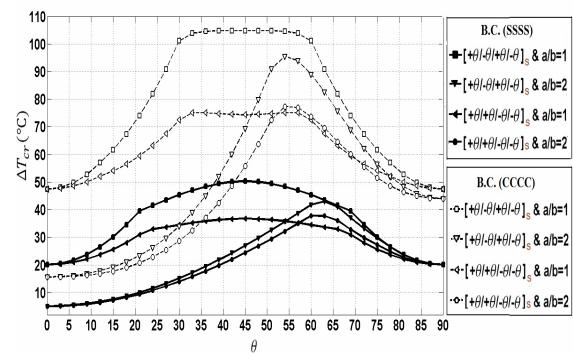
شکل (۸) و (۹) تأثیر پارامتر  $\theta$  بر دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن اریب‌چین، در دو حالت یک طرفه و دو طرفه و



شکل ۵- تأثیر کمانش گرمایی دوطرفه و یک طرفه بر ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین



شکل ۶- تغییر دمای بحرانی، ( ${}^{\circ}\text{F}$ )  $\Delta T_{\text{cr}}$ ، بر ورق‌های لایه‌لایه متقارن عمودچین، نسبت به تغییر پارامتر  $b/a$ ، با و بدون حضور بستر الاستیک بدون کشش



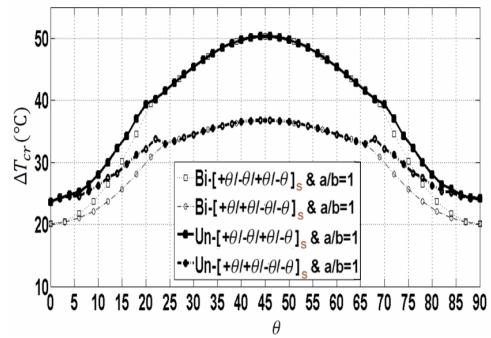
شکل ۷- تغییر دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن اریب‌چین، نسبت به تغییر پارامتر  $\theta$ ، بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک بدون کشش و در دو حالت نسبت طول به عرض ۱ و ۲

طرفه هیچ تأثیری بر روی بار بحرانی کمانش ندارد. در نتیجه منحنی تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش یک طرفه دقیقاً منطبق بر مسیر تغییرات دمای بحرانی ورق، در کمانش دو طرفه است. ولی هنگامی که زاویه قرارگیری رشته‌ها در محدوده زاویه‌های یاد شده در بالا، قرار نداشته باشد، مود حاصل از دمای بحرانی کمانش ورق، تعداد نیم موج  $m=1$ ، را اختیار می‌کند. در این حالت ورق تمایل به نفوذ در بستر را دارد و با توجه به میزان سختی بستر الاستیک، دمای بحرانی کمانش، افزایش می‌یابد. تأثیر بستر الاستیک با سختی  $k_f = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ ، بر افزایش دمای بحرانی، در دو ورق، با  $a/b=1$  نوع چینش لایه‌های [90/0/02]s و [902/02]s، در حالت  $a/b=1$  و  $a/b=2$  در حالت بیشینه افزایش، حدود ۱۸٪ است.

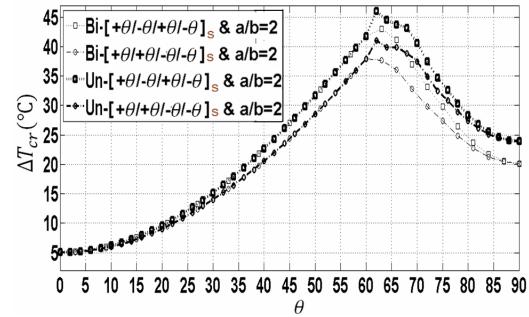
شکل (۱۰) مود حاصل از دمای بحرانی کمانش ورق مرکب لایه‌ای، در دو حالت دوطرفه (بدون وجود بستر الاستیک) و یک طرفه (با وجود بستر الاستیک)، برای ورق با نوع چینش [90/0/02]s، با توجه به شکل (۴) و به ترتیب برای نسبت‌های  $a/b=2$ ،  $a/b=3$ ،  $a/b=4$  و  $a/b=1.5$  نشان داده شده است. برای تأثیرگذاری بستر از فنرهایی با سختی  $k_f = 300 \text{ N/m}$  استفاده شده است و شدت توزیع فنرها نیز همانند مثال پیش است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به دلیل سختی نسبتاً کم بستر، برای نسبت‌های  $a/b=3$  و  $a/b=4$  ورق در بستر به مقدار ناچیزی نفوذ می‌کند.

## ۶- دستاوردها

در این مقاله با استفاده از روش ریلی‌ریتز و بر اساس نظریه کلاسیک ورق، کمانش گرمایی یک طرفه ورق‌های مستطیلی مرکب لایه‌ای بر روی بستر الاستیک بدون کشش بررسی شد. در روش ریلی‌ریتز از چندجمله‌ای مثلث خیام-پاسکال برای رفتار برونق صفحه و برای رفتار درون‌صفحه ازتابع‌های شکل طبقاتی استفاده شد. تأثیر نسبت طول به عرض ورق، زاویه چیدمان رشته‌ها، شرایط مرزی متفاوت، و نوع چینش لایه‌ها، با وجود وجود بستر الاستیک بدون کشش، بر روی میزان دمای

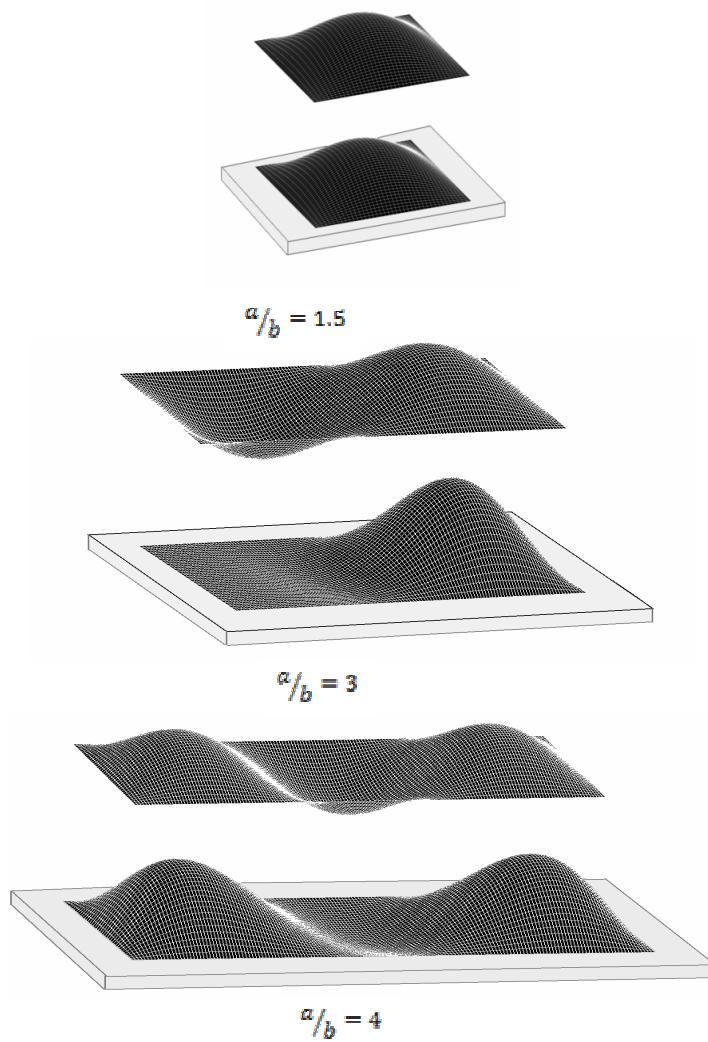


شکل ۸- تأثیر پارامتر  $\theta$  بر دمای بحرانی ورق لایه‌ایه متقارن اریب‌چین، در دو حالت یک طرفه و دو طرفه و برای نسبت  $a/b=1$



شکل ۹- تأثیر پارامتر  $\theta$  بر دمای بحرانی ورق لایه‌ایه متقارن اریب‌چین، در دو حالت یک طرفه و دو طرفه و برای نسبت  $a/b=2$

به ترتیب برای نسبت‌های  $a/b=1$  و  $a/b=2$  را نشان می‌دهد. برای تأثیرگذاری بستر از فنرهایی با سختی  $k_f = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$  استفاده شده است و شدت توزیع فنرها همانند مثال پیش است. همان‌طور که، به ترتیب، در شکل‌های (۸) و (۹) مشاهده می‌شود، هنگامی که زاویه قرارگیری رشته‌ها در ورق‌های  $[+theta/-theta/(-theta)]_s$  و  $[(+theta)/(-theta)]_s$ ، در محدوده زاویه ۲۳ تا ۶۷ درجه برای نسبت  $a/b=1$  و محدوده زاویه ۰ تا ۶۰ درجه برای نسبت  $a/b=2$ ، قرار بگیرند، مود کمانشی ورق، تعداد  $m=1$  نیم موج را اختیار می‌کند. بنابراین در این حالت ورق تمایل به دور شدن از صفحه بستر را دارد و سختی بستر یک



شکل ۱۰- مود حاصل از دمای بحرانی کمانش ورق مرکب لایه‌لایه، برای ورق با نوع چینش  $s_2(0/0/90)$  در دو حالت دوطرفه (بدون وجود بستر الاستیک) و یکطرفه (با وجود بستر الاستیک) و  $k_f = 300 \text{ N/m}$

۱. تأثیر بستر الاستیک بدون کشش بر روی میزان دمای بحرانی به شکل مود حاصل از کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه بستگی دارد. هنگامی که ورق زیر افزایش دما، مود کمانشی در جهت طول ورق را تجربه کند، ورق تمایل به دور  $m=1$  شدن از سطح بستر را دارد و بنابراین سختی بستر هیچ تأثیری بر روی میزان دمای بحرانی و مود حاصل از آن ندارد. ولی چنانچه ورق زیر افزایش دما، مود کمانشی  $m>1$

بحرانی و شکل مود کمانشی حاصل از آن، مورد بررسی قرار گرفت. دستاوردهای به دست آمده با کارهایی که تاکنون انجام گرفته که عبارت‌اند از کمانش یکطرفه (با وجود بستر) ورق تک‌لایه همسانگرد زیر اثر نیروهای درون‌سطح مکانیکی و کمانش گرمایی دوطرفه (بدون وجود بستر) ورق مرکب لایه‌لایه مقایسه شد و تطابق بسیار قابل قبولی در روش حل مشاهده شد. دستاوردهای به دست آمده نشان می‌دهد که:

$m=1$  در جهت طول ورق پدید می‌آید. در این شرایط سختی بستر هیچ تاثیری بر روی میزان دمای بحرانی و مود حاصل از آن ندارد.

۴. با توجه به شکل‌های (۶) هر چه جایگاه تکلایه عمودسانگرد با زاویه رشته‌ها  $90^\circ$  درجه به سمت لایه‌های بیرونی ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین با لایه‌های عمودسانگرد تماماً صفر درجه، قرار می‌گیرد بار بحرانی کمانش دوطرفه افزایش می‌یابد. بنابراین نوع چینش ورق مرکب لایه‌لایه [s/0/0/0/0/90]، بیشترین دمای بحرانی را برای کمانش، با توجه به تغییرات پارامتر  $b/a$ ، تجربه می‌کند.

در جهت طول ورق را تجربه کند، ورق تمایل به وارد شدن درسطح بستر را دارد و بنابراین با افزایش سختی بستر، میزان دمای بحرانی افزایش و مود کمانشی حاصل از آن نیز به گونه‌ای تغییر می‌کند که با توجه به افزایش سختی بستر، ورق کمتر در بستر نفوذ کند.

۲. مود کمانش گرمایی دو طرفه ورق مرکب لایه‌لایه و در نتیجه آن بار بحرانی کمانش گرمایی یکطرفه وابستگی شدید به نسبت طول به عرض ورق، زاویه چیدمان رشته‌ها، شرایط مرزی متفاوت، و نوع چینش لایه‌ها دارد.

۳. برای ورق مربعی مرکب لایه‌لایه اریب‌چین با تکیه‌گاه چهار طرف ساده، در حالت کمانش دوطرفه، بیشینه دمای بحرانی در زاویه  $45^\circ$  درجه رخ می‌دهد و مود کمانشی

## مراجع

- Shawan, K., and Waas, A., "A Mechanical Model for the Buckling of Uni-laterally Constrained Rectangular Plates," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp.75-87, 1994.
- Smith, S.T., Bradford, M. A., Oehlres D.J., "Buckling of Uni-laterally Constrained Rectangular Plates in Pure Shear," *Engineering Structures*, Vol. 21, pp. 443-453, 1997.
- Shawan, K., and Waas, A., "Buckling of Uni-laterally Constrained Plates: Applications to the Study of Delaminations in Layered Structures," *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 335(6), pp.1009-1039, 1998.
- Smith, S. T., Bradford, M. A., and Oehlres, D.J., "Local Buckling of Side-Plated Reinforced Concrete Beams. 1: Theoretical Study," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 126(6), pp. 622-634, 1999a.
- Smith, S.T., Bradford, M. A., Oehlres, D.J., "Local Buckling of Side-Plated Reinforced Concrete Beams. II: Experimental Study," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 126(6), pp. 622-634, 1999b.
- Shahidi, A.R., Hedayati, P., Azhari, M., and Bradford, M.A., "On the Use of the Lagrange Multiplier Technique for the Uni-lateral Local Buckling of Point-Restrained Plates, with Application to Side-Plate Concrete Beams in Structural Retrofit," *International Journal of Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 26(6), pp. 673-685, 2007.
- Shen, H.S., Yu, L., "Nonlinear Bending Behavior of Reissner-Mindlin Plate with Free Edges Resting on Tensionless Elastic Foundations," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 4809-4825, 2004.
- Gossard, M.L., Seide, and P., Roberts, W.M., "Thermal Buckling of Plate," NACA TN 2771, 1952.
- Tauchert, T.R., "Thermal Buckling of Thick Antisymmetric Angle-Ply Laminates," *Journal of Thermal Stress*, Vol. 10(2), pp. 113–24, 1987.
- Thangaratnam, K.R., Palaninathan., and Ramachandran, J., "Thermal Buckling of Composite Laminated Plates," *Computers and Structures*, Vol. 32(5), pp. 1117–24, 1989.
- Sun, L.X., and Hsu, T.R., "Thermal Buckling of Laminated Composite Plates with Transverse Shear Deformation," *Computers Structures*, Vol. 36(5), pp. 883–9, 1990.
- Chen, L.W., and Chen, L.Y., "Thermal Buckling of Laminated Composite Plates," *Journal of Thermal Stress*, Vol. 10(4), pp. 345–56, 1987.
- Chen, L.W., and Chen, L.Y., "Thermal Buckling Analysis of Composite Laminated Plates by the Finite Element Method," *Journal of Thermal Stress*, Vol. 12(1), pp. 41–56, 1989.
- Chen, W.J., Lin, P. D., and Chen, L. W., "Thermal Buckling Behavior of Thick Composite Laminated Plates under Nonuniform Temperature Distribution," *Computers Structures*, Vol. 41(4), pp. 637–45, 1991.
- Huang, N.N., and Tauchert, T.R., "Thermal Buckling of Clamped Symmetric Laminated Plates," *Thin-*

- Walled Structures*, Vol. 13, pp. 259-273, 1992.
16. Kabir, H.R.H., and Askar, H., and Chaudhuri, R. A., "Thermal Buckling Response of Shear Flexible Laminated Anisotropic Plates Using a Three-Node Isoparametric Element," *Composite Structures*, Vol. 59, pp. 173–187, 2003.
  17. Shiau, L.C., Kuo, S.Y., and Chen, C. Y., "Thermal Buckling Behavior of Composite Laminated Plates," *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 508–514, 2010.
  18. Shiau, L.C., and Kuo, S.Y., "Thermal Buckling of Composite Sandwich Plates," Vol. 32(1), pp. 57–72, 2004.
  19. Shen, H.S., "Thermal Postbuckling Analysis of Imperfect Reissner-Mindlin Plates on Softening Nonlinear Elastic Foundation," *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 33, pp 259-270, 1998.
  20. Shen. H.S., "Nonlinear Analysis of Simply Supported Reissner-Mindlin Plates Subjected to Lateral Pressure and Thermal Loading and Resting on Two-parameter Elastic Foundation," *Engineering Structures*, Vol. 23, pp 1481-1493, 2000.
  21. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004.
  22. Zienkiewicz, O.C., and Taylor R.L., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, Vol. 2, 1989.
  23. Matsunaga, H. "Thermal Buckling of Cross-ply Laminated Composite and Sandwich Plates According to a Global Higher-Order Deformation Theory," *Computers Structures*, Vol. 68(4), pp. 439–54, 2005.
  24. Shi, Y., Lee, R.Y.Y., and Mei, C., "Thermal Postbuckling of Composite Plates Using the Finite Element Modal Coordinates Method," *Journal of Thermal Stress*, Vol. 22(6), pp. 595–614. 1999.