

بهبود روش انتگرال گیری در روش بدون المان گالرکین با کمک میان یابی کریگینگ

سید حسین دیباجیان^{۱*}، محمود فرزین^۱، سید حمید هاشم الحسینی^۲ و محمد گندم کار^۱

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲. دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۷/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۰۴/۲۵)

چکیده - در این مقاله انتگرال گیری عددی مورد نیاز در روش بدون المان گالرکین با کمک روش میان یابی کریگینگ بهبود یافته است. در روش ارائه شده، تابع انتگرال ده با رویه تولید شده توسط کریگینگ ساده جایگزین شده و سپس وزن نقاط انتگرال گیری محاسبه می شود. با توجه به اینکه سطح تولید شده توسط میان یابی کریگینگ با کمک ابر نقاط و بدون نیاز به شبکه تولید می گردد، بنابراین وزن نقاط انتگرال گیری در کل دامنه در یک مرحله و بدون نیاز به المان محاسبه می گردد. اگر چه در ظاهر می توان فرآیند بیان شده را با روش های دیگر میان یابی بدون شبکه انجام داد، ولی به دلیل سادگی روش کریگینگ، استفاده از این میان یابی ساده تر و عملی تر خواهد بود. از طرف دیگر به دلیل ویژگی خاص روش کریگینگ، در این مقاله از توابع میان یاب کریگینگ برای بیان توابع شکل نیز استفاده می شود که به دلیل ارضاء شرط دلتای کرونیگر، وارد کردن شرایط مرزی ضروری به سادگی صورت می گیرد. روش حاضر در مسائل الاستواستاتیک دوبعدی استفاده شده و کارایی روش نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: روش بدون المان گالرکین، انتگرال گیری عددی، روش میان یابی کریگینگ، روش های بدون المان.

Improvement of Integration in Element Free Galerkin Method using Kriging Interpolation

S. H. Dibajian^{1*}, M. Farzin¹, S. H. Hashemolhoseini² and M. Gandomkar¹

1. Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

2. Department of Mining Engineering, Isfahan University of Technology

Abstract: In this paper, the numerical integration needed in the element free Galerkin method is improved, using Kriging interpolation. In the presented method, integrand is replaced by a surface which is produced by simple Kriging. Then the weights of integration points are calculated. Since the surface produced by simple Kriging is obtained by cloud of points and without back ground mesh, the weights of integration points are calculated in one step in the whole domain and without any element. Although any mesh free interpolation approach can be used in this procedure, simple Kriging is easier and more applicable. On the other hand, Kriging method is used for construction of shape functions. Hence, due to the satisfaction of Kroneker delta, essential BC can be easily implemented. The present method is used in 2-D elasto-static problems and effectiveness is proven.

Keywords: Element free Galerkin method, numerical integration, Kriging interpolation method, element free methods.

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: dibajian@me.iut.ac.ir

فهرست علائم

w_i	وزن نقاط انتگرال گیری	$u(x_0)$	متغیر میدان
σ_{ij}	مؤلفه تانسور تنش	$u^h(x_0)$	متغیر میدان تخمین زده شده
f_i	مؤلفه بردار نیرو	λ_i	تابع شکل
$\bar{u}_i$	شرط مرزی ضروری	L	بردار توابع شکل
Γ_s	مرز تحت شرط مرزی ضروری	$\hat{U}$	بردار متغیرهای میدان
$\bar{t}_j$	مؤلفه بردار تنش سطحی	C_{ij}	تابع کوواریانس
Γ_n	مرز تحت شرایط طبیعی	h_{ij}	فاصله بین دو نقطه
n_i	مؤلفه بردار عمود بر سطح	$c \& a$	مقادیر ثابت در تابع کوواریانس
K	ماتریس سختی	r_{inf}	شعاع ناحیه اثر
F	بردار نیرو	η_i	ضرایب لاگرانژ
ϕ_I	تابع شکل گره Iام	Ω	دامنه مسأله

۱- مقدمه

روش اجزاء محدود پرکاربردترین روش عددی حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در مسائل مکانیک جامدات است. در این روش المان نقش اساسی در بنا نهادن توابع شکل و محاسبه انتگرال گیری دارد. به‌طورکلی به‌منظور محاسبه انتگرال در روش اجزاء محدود، حوزه مسأله به المان‌هایی تقسیم شده و سپس هر المان با استفاده از نگاشت هم‌دیس^۱ به المان استاندارد نگاشت داده می‌شود. در المان استاندارد با استفاده از روش تربیع گاوس^۲ مقدار انتگرال به‌دست می‌آید. با توجه به وابستگی روش اجزاء محدود به شبکه، برخی محدودیت‌ها مانند نیاز به شبکه‌بندی مجدد^۳ در تغییر شکل‌های بزرگ به خاطر اعوجاج بیش از حد المان^۴ وجود دارد. از این رو طی سال‌های گذشته روش‌های بدون شبکه توسط محققین مختلف برای غلبه بر مشکلات روش اجزاء محدود ارائه شده است [۱-۱۴].

به‌طور کلی در بین روش‌های بدون المان که تاکنون ارائه شده است، روش‌های مبتنی بر فرم ضعیف دارای دقت بیشتری هستند. یکی از مهم‌ترین این روش‌ها، فرمول‌بندی فرم ضعیف گالرکین^۵ است [۱۵-۱۹] که در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است. به‌طورکلی استفاده از شبکه‌بندی پس زمینه به‌عنوان یک تکنیک

استاندارد انتگرال گیری در این روش به‌شمار می‌رود. آشکار است که در صورت استفاده از شبکه به‌منظور انتگرال گیری، عملاً وابستگی به شبکه از بین نخواهد رفت و همچنان وابستگی به شبکه باعث برخی محدودیت‌ها خواهد شد. تلاش‌های زیادی صورت گرفته تا انتگرال گیری در این روش بدون شبکه انجام گیرد. تکنیک انتگرال گیری گره‌ای^۶ [۲۰-۲۲] یکی از راه حل‌های مورد توجه برای حذف شبکه‌بندی پس زمینه است. در این روش، انتگرال گیری بر روی دامنه مسأله از ارزیابی مقادیر گره‌ای حاصل می‌شود که در آن وزن هر نقطه گره‌ای، نسبت سطح وابسته به آن گره به سطح کل است. بیسل و پلیچکو [۲۰] از این تکنیک در روش بدون المان گالرکین استفاده کرده و سپس تکنیک خود را با افزودن ترم‌های پایدار کننده به فرم ضعیف توسعه دادند. اما در کل دقت این روش کمتر از روش اصلی بدون المان گالرکین است. چن و همکاران [۲۱ و ۲۲] روش انتگرال گیری گره‌ای وفق کننده پایدار^۷ را برای حذف نوسانات پاسخ‌ها براساس تکنیک انتگرال گیری گره‌ای معرفی کردند. به‌دلیل استفاده از دیاگرام وورونی^۸، روش انتگرال گیری گره‌ای را نمی‌توان به‌عنوان روش بدون شبکه واقعی به‌شمار آورد. تکنیک انتگرال گیری مونت کارلو^۹ [۲۳] توسط روسکا و

لیتاو^{۱۰} [۲۴] برای انجام انتگرال گیری استفاده شد. توالی های مختلف شبه مونت کارلو^{۱۱} در این روش تولید و با آزمایش در مسائل سه بعدی الاستیک مقایسه شد. اما تعداد نقاط انتگرال گیری لازم در این روش از تعداد نقاط لازم در روش های دیگر بیشتر است.

خسروی فرد و همپیان [۲۵] از نظریه گرین^{۱۲} برای انتگرال گیری در روش های بدون شبکه استفاده کردند و آن را روش انتقال کارترین^{۱۳} نامیدند. در این روش با استفاده از تئوری گرین، انتگرال دامنه به یک انتگرال دوگانه، شامل انتگرال مرزی و انتگرال یک بعدی تبدیل شد. آنها این روش را در مسائل خطی و تغییر شکل بزرگ استفاده کرده و نشان دادند که این روش بدون شبکه واقعی بوده و می تواند در مقایسه با روش بدون المان گالرکین اصلی دقت را افزایش داده و زمان را نیز کاهش دهد. با این وجود در مسائل پلاستیسیته به دلیل لزوم ذخیره شدن تنش ها و متغیرهای حالت در نقاط محاسباتی، استفاده از این روش محدود خواهد بود.

پیشرفتی که در این مقاله ارائه شده، استفاده از میان یابی کریگینگ در محاسبه وزن های نقاط انتگرال گیری^{۱۴} در روش بدون شبکه گالرکین است. بهبود انجام گرفته بر روی انتگرال گیری باعث خواهد شد که بدون کاهش دقت در انتگرال گیری، نیاز به شبکه پشت زمینه به طور کامل حذف شود. در این روش نقاط انتگرال گیری بدون نیاز به نظم خاصی در دامنه پخش می شوند؛ سپس مقدار وزن های نقاط انتگرال گیری با استفاده از روش پیشنهاد شده محاسبه می شود. به منظور محاسبه دقیق نتایج، باید تعداد و چینش مناسبی برای نقاط انتگرال گیری استفاده شود. از نظر کاربرد عملی می توان روش حاضر را شبیه روش انتگرال گیری نقطه ای دانست با این تفاوت که در این روش نیازی به افراز دامنه با کمک دیگرام ورونی نیست. تعداد نقاط انتگرال گیری در این روش کمتر از سایر روش ها بوده و حتی می تواند در حد تعداد نقاط گره ای باشد. دقت جواب نمونه های مختلفی از توزیع نقاط انتگرال گیری در چند مثال مقایسه شده اند. لازم به ذکر است که تاکنون از روش میان یابی کریگینگ تنها به منظور ساختن توابع شکل در روش های

بدون شبکه استفاده شده است.

به خاطر عدم ارضای شرط دلتای کرونیگر در برخی توابع میان یاب در روش های بدون شبکه، وارد کردن شرایط مرزی ضروری به سادگی روش اجزا محدود صورت نمی گیرد. در این روش از توابع میان یاب کریگینگ برای بیان توابع شکل نیز استفاده می شود. با استفاده از توابع میان یاب کریگینگ که شرط دلتای کرونیگر^{۱۵} را ارضا می کنند وارد کردن شرایط مرزی ضروری به سادگی امکان پذیر است.

جواب های عددی کاربردی بودن این تکنیک انتگرال گیری را در فرمول بندی فرم ضعیف کلی در مسائل دو بعدی الاستواستاتیک نشان می دهند.

ترتیب بخش ها به این شکل است: در بخش دوم تئوری میان یابی کریگینگ مطالعه شده و کریگینگ ساده و عام توضیح داده می شود. در بخش سوم تکنیک ارائه شده برای به دست آوردن وزن های نقاط انتگرال گیری شرح داده شده و با مقادیر گاوس مقایسه شده است. در بخش چهارم معادلات حاکم و روش گسسته سازی مسائل الاستواستاتیکی دو بعدی ارائه شده است. در بخش پنجم مثال های عددی ارائه شده و در آخر نتیجه گیری در فصل ششم ذکر شده است.

۲- میان یابی کریگینگ

میان یابی کریگینگ اولین بار در سال ۱۹۶۲ توسط مترون ارائه گردید [۲۶]. طی سال های بعد این روش در مسائل زمین آمار توسعه زیادی یافت. انواع مختلفی از روش کریگینگ وجود دارد که می توان به روش های کریگینگ ساده^{۱۶} و عام^{۱۷} اشاره نمود. در میان یابی کریگینگ ساده متغیر میدان $u(x_0)$ به صورت زیر تخمین زده می شود [۲۷]:

$$u(x_0) \approx u^h(x_0) = \sum_i^n \lambda_i u_i = L^T \hat{U} \quad (1)$$

$L = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$ ، $\hat{U} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$
در این رابطه u_i ها مقادیر گره ای در x_i ($i=1, 2, \dots, n$) و λ_i ها مقادیر توابع شکل در نقاط گره ای است که از رابطه زیر

حاصل می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}}_L = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ \vdots \\ C_{0n} \end{bmatrix}}_{V_0} \quad (2)$$

که در آن $h_{ij} = \|x_i - x_j\|$ و $C_{ij} = \text{Cov}(h_{ij}) = ce^{-\frac{h_{ij}^2}{a}}$ ضرایب a و c را می‌توان با فاصله بین نقاط i و j است. استفاده از روش‌های منتشر شده آماری انتخاب کرد [27]. در این مقاله ضرایب به شکل زیر انتخاب شده‌اند:

$$\begin{aligned} a &= \alpha r_{\text{inf}} & 1 \leq \alpha \leq 3 \\ c &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن r_{inf} شعاع ناحیه اثر^{۱۸} است. با استفاده از رابطه (۲) ضرایب λ_i حاصل می‌شوند.

اگر چه میان‌یابی کریگینگ ساده در زمین‌آمار کاربرد وسیعی دارد، با این وجود معمولاً برای تعیین توابع شکل در روش‌های عددی مناسب نیست. بنابراین برای مشخص کردن توابع شکل از روش دیگری به نام کریگینگ عام استفاده می‌شود [27]. در میان‌یابی کریگینگ عام λ_i ها در رابطه (۲) و در حالت دو بعدی به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & y_1^k \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \dots & y_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \dots & y_n^k \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_n & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^k & y_2^k & \dots & y_n^k & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ \vdots \\ C_{0n} \\ 1 \\ x_0 \\ y_0 \\ x_0 y_0 \\ \vdots \\ y_0^k \end{pmatrix} \quad (4)$$

که در آن η_i ها ضرایب لاگرانژ هستند.

با توجه به اینکه کریگینگ عام نسبتاً پیچیده است، استفاده از آن برای محاسبه وزن‌های انتگرال‌گیری مناسب نیست. بنابراین در این مقاله برای اولین بار از میان‌یابی کریگینگ ساده برای محاسبه وزن‌های انتگرال‌گیری استفاده شده است. در بخش ۳ به بررسی روش انتگرال‌گیری پرداخته خواهد شد.

۳- تخمین مقادیر وزن نقاط انتگرال‌گیری و

انتگرال‌گیری روی ناحیه اثر

در این مقاله برای تخمین انتگرال میدان از روش کریگینگ ساده استفاده شده است. بنابراین با کمک رابطه (۲) انتگرال میدان به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x) d\Omega &\approx \int_{\Omega} u^h(x) d\Omega = \int_{\Omega} L \hat{U} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} A^{-1} V \hat{U} d\Omega = A^{-1} \int_{\Omega} V d\Omega \hat{U} \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $V = [\text{Cov}(x_1, x) \quad \dots \quad \text{Cov}(x_n, x)]^T$ که از تعریف رابطه (۲) استخراج می‌شود. با توجه به رابطه زیر:

$$\int_{\Omega} u(x) d\Omega \approx \sum w_i u_i = W^T \hat{U} \quad (6)$$

و به کمک رابطه (۵) می‌توان نوشت:

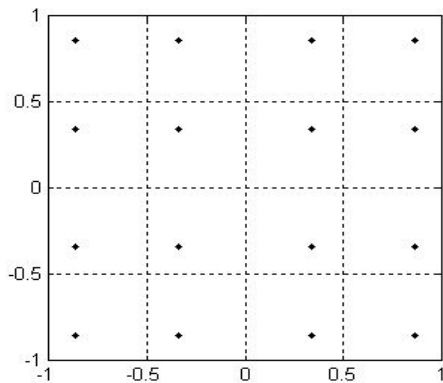
$$W = A^{-1} \int_{\Omega} V d\Omega \quad (7)$$

یا به‌صورت گسترده:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cov}(x_1, x_1) & \text{Cov}(x_1, x_2) & \dots & \text{Cov}(x_1, x_n) \\ \text{Cov}(x_2, x_1) & \text{Cov}(x_2, x_2) & \dots & \text{Cov}(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(x_n, x_1) & \text{Cov}(x_n, x_2) & \dots & \text{Cov}(x_n, x_n) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \text{Cov}(x_1, x) d\Omega \\ \int_{\Omega} \text{Cov}(x_2, x) d\Omega \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \text{Cov}(x_n, x) d\Omega \end{bmatrix} \quad (8)$$

که در آن w_i ها وزن نقاط انتگرال‌گیری هستند.

عبارت انتگرالی که در طرف راست رابطه (۸) وجود دارد به‌صورت $\int_{\Omega} \text{Cov}(x_i, x) d\Omega$ بوده و باید روی ناحیه اثر Ω



شکل ۲- المان مربعی با ۱۶ نقطه انتگرال گیری

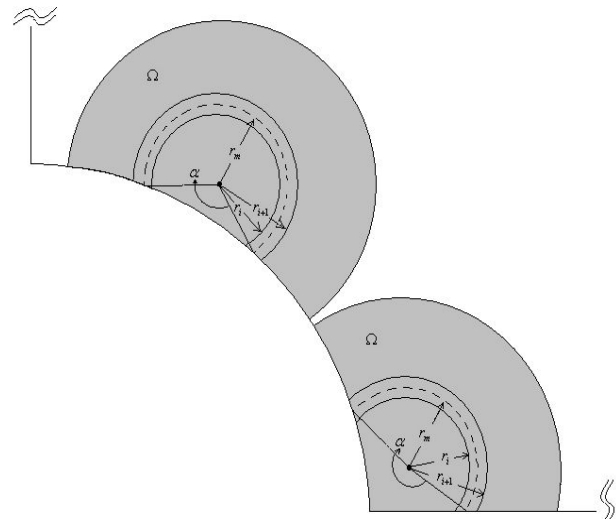
حلقه در شعاع متوسط r_m که در شکل (۱) دیده می شود محاسبه خواهد شد.

استفاده از روش انتگرال گیری فوق در روش های عددی تقریباً مشابه روش گوس است. در این روش ابتدا وزن های انتگرال گیری برای کل دامنه محاسبه می گردد. سپس از وزن های به دست آمده در کل تحلیل استفاده می شود. بنابراین در این روش دامنه حل افزاز نخواهد شد و انتگرال روی کل دامنه در یک مرحله محاسبه می شود. به عبارت دیگر در روش انتگرال گیری ارائه شده کل دامنه به صورت یک المان در نظر گرفته خواهد شد.

برای بررسی کیفیت وزن های به دست آمده از روش ارائه شده، ابتدا این وزن ها با وزن های روش انتگرال گیری گوس مقایسه می شوند. در این مثال ۱۶ نقطه انتگرالی واقع در مکان نقاط گوسی در یک المان مربع مطابق شکل (۲) قرار داده شده است. جدول ۱ وزن نقاط انتگرالی به دست آمده از روش ارائه شده را با روش گوس برای یک المان با ۱۶ نقطه انتگرال گیری مقایسه می کند. مشاهده می شود که وزن های به دست آمده از روش ارائه شده نتایجی مشابه روش گوس ارائه می دهد.

بر اساس آنچه بیان شد روش حاضر وابسته به دامنه نیست و برای هر نوع دامنه ای قابل استفاده است. در شکل (۳) یک ناحیه دایره ای به همراه سه چیدمان مختلف از نقاط انتگرال گیری نشان داده شده است.

مختصات این نقاط در تعداد ۸ نقطه انتگرال گیری به صورت زیر در نظر گرفته شد:



شکل ۱- دامنه محاسبه کوواریانس و زیر دامنه های آن

در تقاطع با مرزها

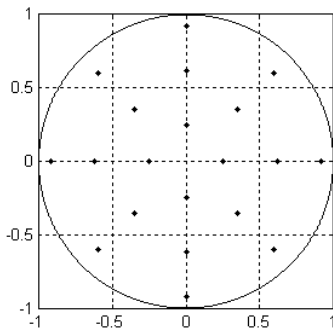
محاسبه شود. پاسخ این انتگرال برای نقاطی که دارای فاصله زیادی از مرز هستند به طور دقیق معلوم است اما اگر ناحیه اثر نقطه انتگرال گیری توسط دامنه مسأله قطع شود، محاسبه این انتگرال ساده نخواهد بود. در شکل (۱) دو نقطه انتگرال گیری فرضی و ناحیه اثر آن Ω که توسط مرز قطع شده دیده می شود. در این مقاله برای محاسبه انتگرال $\int_{\Omega} \text{Cov}(x_i, x) d\Omega$ روی دامنه اثر Ω در حالت دوبعدی، شعاع ناحیه اثر دایره ای شکل به چند قسمت تقسیم می شود. در هر قسمت یک حلقه از شعاع r_i تا r_{i+1} تولید می گردد که در شکل (۱) نشان داده شده است. انتگرال به سادگی از مجموع انتگرال های روی حلقه ها به دست می آید که در رابطه زیر دیده می شود:

$$\int_{\Omega} \text{Cov}(x_i, x) d\Omega = \iint_{\Omega} c_0 e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} r dr d\theta = \sum_i 2\pi \int_{r_i}^{r_{i+1}} c_0 e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} r dr \quad (9)$$

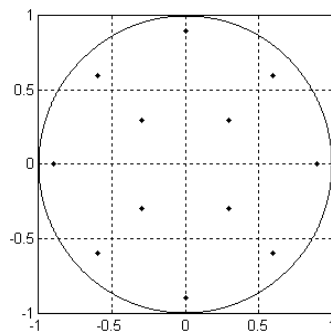
اگر هر کدام از حلقه ها مرز مسأله را قطع کند، نسبت $(2\pi - \alpha)/2\pi$ در انتگرال روی همان حلقه یعنی $2\pi \int_{r_i}^{r_{i+1}} c_0 e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} r dr$ ضرب شده تا انتگرال رابطه (۹) تصحیح شود. مقدار α از روی هندسه مسأله و بخش قطع شده آن

جدول ۱- مقایسه وزن نقاط انتگرال گیری قرار گرفته بر ۱۶ نقطه گوسی (روش ارائه شده و روش گوس)

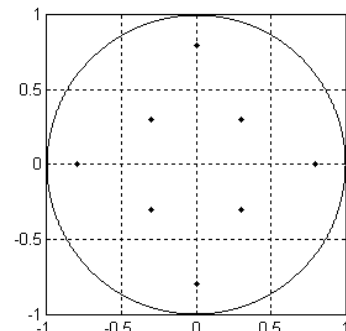
موقعیت نقطه	$x = \pm 0.8660254 / \sqrt{3}$ $y = \pm 0.5$	$x = \pm 0.577350269$ $y = \pm 0.577350269$	$x = \pm 0.3307186 / \sqrt{3}$ $y = \pm 0.3307186 / \sqrt{3}$	
وزن نقطه با احتساب $a=2$	۰/۱۲۱۰	۰/۲۲۶۸	۰/۴۲۵۳	
در رابطه ۳				
وزن دقیق (وزن گوس)	۰/۱۲۱۰	۰/۲۲۶۹	۰/۴۲۵۳	



نقطه انتگرال گیری ۲۰



نقطه انتگرال گیری ۱۲



نقطه انتگرال گیری ۸

شکل ۳- دامنه دایره‌ای و نقاط انتگرال گیری آن با سه چیدمان مختلف

زیر در نظر گرفته شد:

$$\Omega: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$P_{1,2} = 0, \pm 0.92, \quad P_{3,4} = \pm 0.92, 0$$

$$P_{5,6} = 0, \pm 0.62, \quad P_{7,8} = \pm 0.62, 0$$

$$P_{9,10,11,12} = \pm 0.35, \pm 0.35$$

$$P_{13,14,15,16} = \pm 0.25, \pm 0.25$$

$$P_{17,18,19,20} = \pm 0.6, \pm 0.6$$

با کمک روش ارائه شده وزن‌های زیر در تعداد ۲۰ نقطه انتگرال گیری به دست خواهد آمد:

$$w_{1,2,3,4} = 0.14945$$

$$w_{5,6,7,8} = 0.15935$$

$$w_{9,10,11,12} = 0.09464$$

$$w_{13,14,15,16} = 0.14184$$

$$w_{17,18,19,20} = 0.24011$$

با استفاده از وزن‌های به دست آمده، انتگرال توابع مشخصی طبق رابطه (۱۶) محاسبه شد و سپس خطای انتگرال گیری بر روی ناحیه دایره‌ای فوق برای سه حالت مشخص شده به دست آمد:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i f(x_i, y_i) \quad (16)$$

$$\Omega: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$P_{1,2} = 0, \pm 0.8, \quad P_{3,4} = \pm 0.8, 0 \quad (10)$$

$$P_{5,6,7,8} = \pm 0.3, \pm 0.3$$

با کمک روش ارائه شده وزن‌های زیر در تعداد ۸ نقطه انتگرال گیری به دست خواهد آمد:

$$w_{1,2,3,4} = 0.5448$$

$$w_{5,6,7,8} = 0.2406$$

مختصات این نقاط در تعداد ۱۲ نقطه انتگرال گیری به صورت زیر در نظر گرفته شد:

$$\Omega: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$P_{1,2} = 0, \pm 0.9, \quad P_{3,4} = \pm 0.9, 0 \quad (12)$$

$$P_{5,6,7,8} = \pm 0.3, \pm 0.3$$

$$P_{9,10,11,12} = \pm 0.6, \pm 0.6$$

با کمک روش ارائه شده وزن‌های زیر در تعداد ۱۲ نقطه انتگرال گیری به دست خواهد آمد:

$$w_{1,2,3,4} = 0.20162$$

$$w_{5,6,7,8} = 0.35333$$

$$w_{9,10,11,12} = 0.23044$$

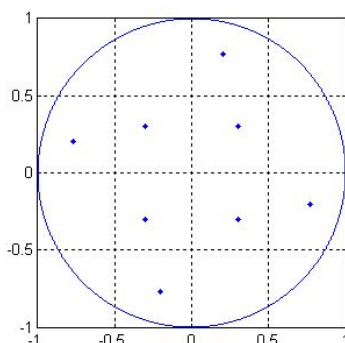
مختصات این نقاط در تعداد ۲۰ نقطه انتگرال گیری به صورت

جدول ۲- مقایسه مقدار انتگرال محاسبه شده با روش حاضر و روش دقیق

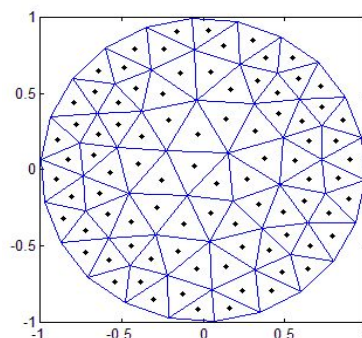
تابع دلخواه	با ۸ نقطه		با ۱۲ نقطه		با ۲۰ نقطه		شبکه مثالی		انتگرال دقیق
	انتگرال	خطای نسبی	انتگرال	خطای نسبی	انتگرال	خطای نسبی	انتگرال	خطای نسبی	
$f(x, y) = 3x^2 + y^2$	۳/۱۳۵۸	٪۰/۱۸۳	۳/۱۴۱۵	٪۴/۱۸۷	۳/۰۱۰۰	٪۰/۰۰۲	۳/۱۴۱۴	٪۰/۰۲۹	۳/۱۴۲۵
$f(x, y) = 4(y-2)^2 + 10$ $+5(x-2)^2 + 10(x-2)^4$ $+3(x-2)^2(y-2)^2$	۱۰۱۶/۵	٪۰/۰۱۴	۱۰۱۶/۶	٪۱/۹۸۸	۹۹۶۴/۷	٪۰/۰۰۰۷	۱۰۱۶/۶	٪۰/۰۰۹	۱۰۱۶/۷
$f(x, y) = (x-1)^4 + 3x^3y$ $+x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 + 2$	۱۵/۰۴۲	٪۰/۰۷۲	۱۵/۰۵۳	٪۲/۶۵۳	۱۴/۶۵۴	٪۰/۰۰۸۲	۱۵/۰۵۲	٪۰/۰۴۷	۱۵/۰۶۰

جدول ۳- ضریب تمرکز تنش صفحه سوراخدار در تحلیل حاضر نسبت به تعداد نقاط گره‌ای

مقدار دقیق تمرکز تنش	تمرکز تنش در تحلیل حاضر	تعداد نقاط گره‌ای
	۲/۷۳	۱۷۶
۳/۰۰	۲/۸۷	۲۴۷
	۲/۹۶۵	۴۰۸



شکل ۵- دامنه دایره‌ای و نقاط انتگرال‌گیری آن در حالت ۸ نقطه‌ای مشابه شکل ۳ با تغییر موقعیت نقاط بیرونی



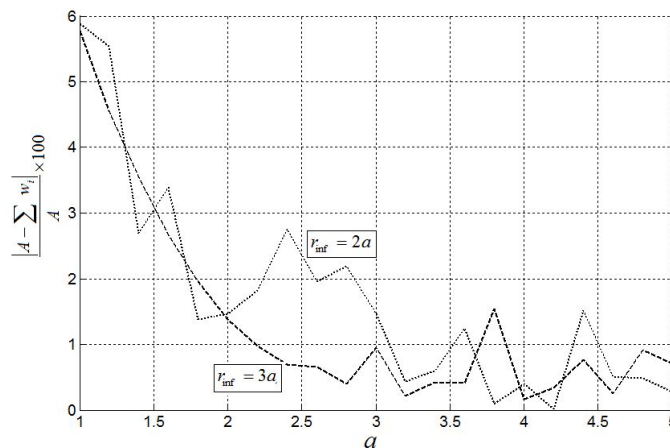
شکل ۴- شبکه‌بندی دامنه دایره‌ای به صورت مثالی و نقاط انتگرال‌گیری درون مثلث‌ها

با استفاده از مساحت مثلث‌ها و مقدار تابع در نقاط میانه مثلث‌ها به دست آمده است. نتیجه این انتگرال‌گیری در جدول ۲ ذکر شده است.

همان‌طور که دیده می‌شود دقت روش ارائه شده بسیار بیشتر از روش انتگرال‌گیری با شبکه مثالی است. همچنین با افزایش تعداد نقاط انتگرال‌گیری دقت محاسبه انتگرال بالا می‌رود. به منظور بررسی بیشتر، تعداد ۸ نقطه انتگرال‌گیری مطابق شکل (۵) با چیدمان کمی متفاوت نسبت به شکل (۳) در نظر گرفته شد.

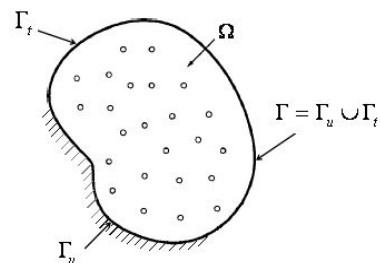
در جدول ۲ توابع مورد نظر و مقدار انتگرال محاسبه شده با روش حاضر در سه حالت و روش دقیق با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج بسیار امیدوارکننده هستند. بنابراین روش حاضر به عنوان یک روش انتگرال‌گیری قابل قبول برای روش‌های عددی قابل استفاده خواهد بود.

برای اینکه قابلیت روش بهتر مشخص شود نتایج مربوط به انتگرال‌گیری مثالی نیز ذکر می‌شود. در شکل (۴) دامنه دایره‌ای شکل با شعاع یک با المان‌های مثلثی افراز شده و انتگرال میدان



شکل ۶- تأثیر شعاع ناحیه اثر و پارامتر a بر خطای انتگرال گیری

۸ خواهد شد. علاوه بر این شعاع ناحیه اثر $2/5$ یا 3 برابر مقدار a برای دستیابی به خطای کمتر از 2 درصد کافی است. بنابراین روش حاضر به عنوان یک روش انتگرال گیری قابل قبول برای روش های عددی قابل استفاده خواهد بود. در بخش بعد، از این روش در حل مسائل مکانیک جامدات استفاده خواهد شد.



شکل ۷- دامنه و مرز در یک جسم الاستیک خطی دوبعدی

۴- فرمولاسیون فرم ضعیف در روش گالرکین

یک جسم الاستیک خطی در حالت دو بعدی مطابق شکل (۷) در نظر گرفته می شود. دامنه مسأله Ω و مرز آن Γ است که از اجتماع دو مرز با شرط مرزی ضروری و شرط مرزی طبیعی حاصل می شود.

معادله تعادل به صورت زیر نوشته می شود:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (17)$$

که در آن σ_{ij} تانسور تنش وابسته به میدان جابه جایی u_i و b_i نیروهای حجمی است. شرایط مرزی به صورت زیر هستند:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_s \\ \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_j \quad \text{on} \quad \Gamma_n \quad (18)$$

در این روابط $\bar{u}_i$ و $\bar{t}_j$ به ترتیب جابه جایی و تنش های سطحی و Γ_s و Γ_n مرز ضروری و مرز طبیعی و n_j بردار عمود بر سطح است. با استفاده از اصل کار مجازی، معادله فرم ضعیف زیر برای رابطه مومتوم خطی به دست می آید:

خطای محاسبه برای مساحت 0.35% و بر اساس توابع نشان داده شده در جدول ۲، برای تابع اول 0.69% ، برای تابع دوم 2.73% و برای تابع سوم 1.43% به دست آمد. این مطلب از قبل نیز قابل پیش بینی بود چرا که نقاط انتگرال گیری از توزیع مناسبی برخوردار نبوده اند.

در شکل (۶) اثر پارامتر a در معادله (۹) و همچنین شعاع ناحیه اثر بر دقت انتگرال گیری نشان داده شده است. در این مثال، یک دامنه مربع شکل با ضلع 20 واحد در نظر گرفته شده که در آن نقاط انتگرالی به صورت ماتریسی و با فاصله 1 واحد از یکدیگر و فاصله 1 واحد از مرزها چیده شده است. دقت روش در تخمین مساحت به عنوان معیار انتخاب شده است. براساس این شکل می توان دریافت که انتخاب مقدار پارامتر a حدود 3 برابر فاصله بین نقاط، مقدار مطلوبی است. البته مقدار بیش از 3 نیز جواب مناسبی در پی خواهد داشت ولی افزایش این مقدار باعث ایجاد خطای معکوس کردن ماتریس در معادله

۵- مثال‌های عددی

در این قسمت برای ارزیابی قابلیت روش ارائه شده، سه مسأله بررسی می‌شود: تیر یک‌سر درگیر تحت بار انتهایی، صفحه تخت تحت بار گسترده خطی و صفحه سوراخدار. در مثال اول حالت‌های مختلفی برای چینش نقاط انتگرال‌گیری در نظر گرفته شده و مقایسه بین دقت پاسخ‌ها در مورد آنها انجام شده است. در مثال دوم یعنی صفحه تخت تحت بار گسترده خطی، ابتدا نقاط انتگرال‌گیری را منطبق بر نقاط گره‌ای در نظر گرفته و سپس تعداد آنها را افزایش داده و دقت جواب بررسی شده است. در مثال سوم میزان دقت پاسخ‌ها با استفاده از این روش انتگرال‌گیری در صفحه سوراخدار نسبت به حل دقیق دیده می‌شود و نشان می‌دهد که این روش با تعداد نقاط انتگرال‌گیری کم نیز می‌تواند پاسخ‌های مناسبی را ارائه کند. در این مسأله همگرایی پاسخ نسبت به افزایش نقاط گره‌ای نیز بررسی شده است.

در هر سه مثال برای محاسبه ماتریس سختی از میان‌یابی کریگینگ با توابع پایه مرتبه یک استفاده شده است. شعاع ناحیه اثر هر نقطه انتگرال‌گیری ۳/۲۵ برابر کمترین فاصله نقاط گره‌ای در نزدیکی نقطه انتگرال‌گیری است.

۵-۱- خمش تیر یک‌سر درگیر

در اولین مثال، خمش یک تیر یک‌سر درگیر که مطابق شکل (۸) در معرض بار در انتهای تیر قرار گرفته بررسی می‌شود. مقادیر بارگذاری و خصوصیات تیر به صورت $P=10^9\text{N}$ و $E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $L=30\text{m}$, $D=4\text{m}$ تعریف می‌شود.

رابطه جابه‌جایی عمودی دقیق u_y برحسب متر به شکل زیر است [۲۸]:

$$u_y = -\frac{P}{6EI}(3\nu y^2 x + (4+5\nu)\frac{D^2(L-x)}{4} + (2L+x)(L-x)^2)$$

$$I = \frac{D^3}{12}, \quad \tau = -\frac{P}{2I} \times (\frac{D^2}{4} - y^2) \quad (26)$$

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (19)$$

فرم گسسته این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$K u = F \quad (20)$$

که در آن K ماتریس سختی، u بردار جابه‌جایی نقاط گره‌ای و F بردار نیرو است. مقادیر به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega \quad (21)$$

$$F_I = \int_{\Gamma_t} N_I^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I^T b d\Omega \quad (22)$$

در این روابط تانسور D در حالت تنش صفحه‌ای برابر است با:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

که در آن E مدول الاستیسیته و ν نسبت پواسون است.

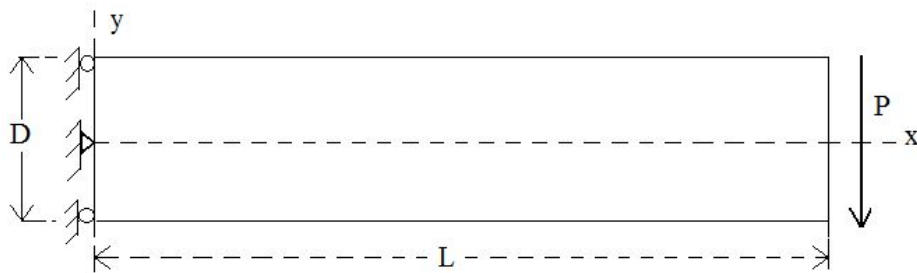
ماتریس B_I و N_I از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$B_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_I}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_I}{\partial y} & \frac{\partial \phi_I}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (24)$$

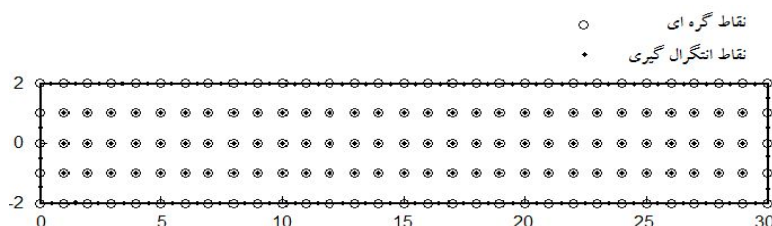
$$N_I = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \quad (25)$$

مقادیر ϕ_I را می‌توان با هر روش میان‌یابی حاصل کرد. در این تحلیل به‌خاطر ارضای شرط دلتای کرونیگر از میان‌یابی کریگینگ عام استفاده می‌شود. در این میان‌یابی تابع شکل ϕ_I معادل λ_I در رابطه (۴) است.

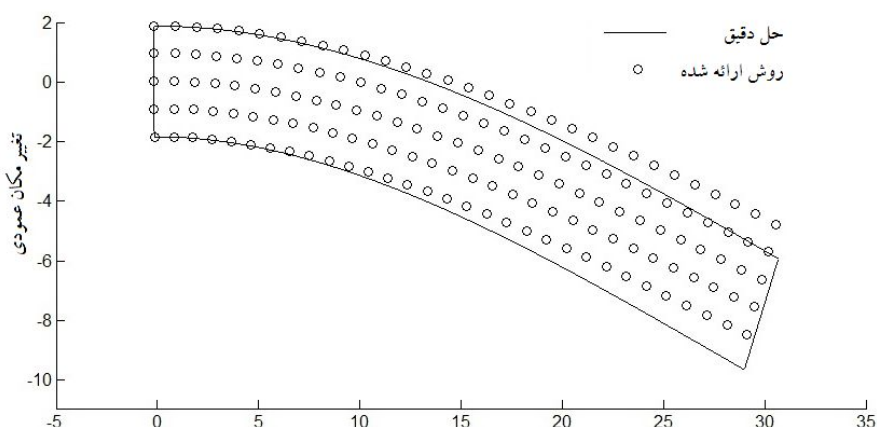
برای محاسبه انتگرال روابط (۲۱) و (۲۲) در روش‌های اجزا محدود و برخی روش‌های بدون المان وجود شبکه الزامی است. در این مقاله برای محاسبه انتگرال میدان بر روی دامنه، برای اولین بار از روش انتگرال‌گیری ارائه شده در بخش ۳ استفاده می‌شود.



شکل ۸- تیر یک سر درگیر در معرض بار در انتهای تیر



شکل ۹- موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری، نقاط انتگرال‌گیری درونی منطبق بر نقاط گره‌ای و نقاط بیرونی روی مرز و بینابین نقاط گره‌ای



شکل ۱۰- شکل نهایی تیر یک سر درگیر تحت بار انتهایی تیر، نقاط انتگرال‌گیری بیرونی روی مرز

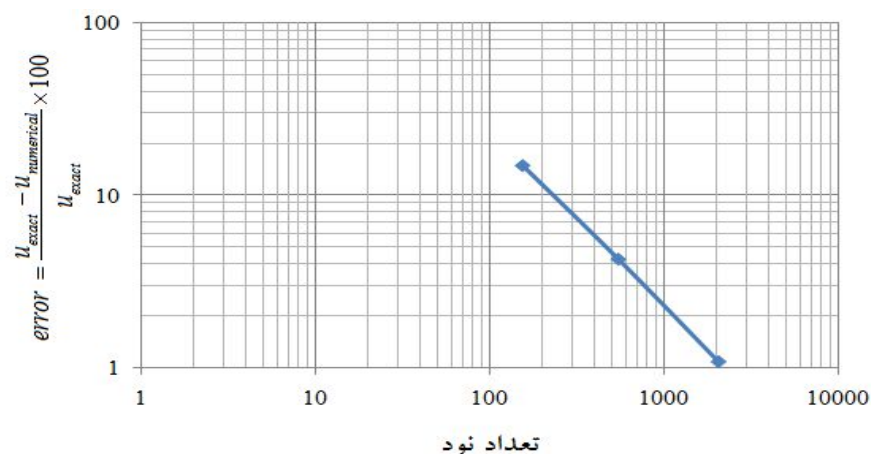
یکدیگر قرار دارند.

در شکل (۱۰) شکل نهایی تیر یک سر درگیر و پس از اعمال بار دیده می‌شود. در این مثال حداکثر خطای نسبی در میزان جابه‌جایی، در انتهای تیر به میزان ۵ درصد مشاهده شده است. میزان خطا از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

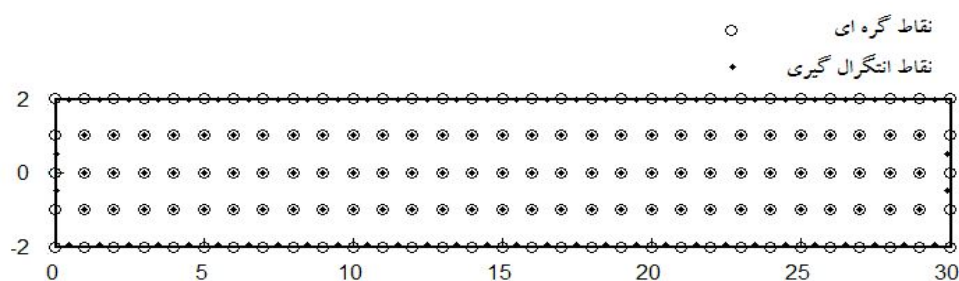
$$\text{error} = \frac{u_{\text{exact}} - u_{\text{numerical}}}{u_{\text{exact}}} \times 100 \quad (27)$$

در شکل (۱۱) روند کاهش خطا با افزایش تعداد نقاط نشان داده

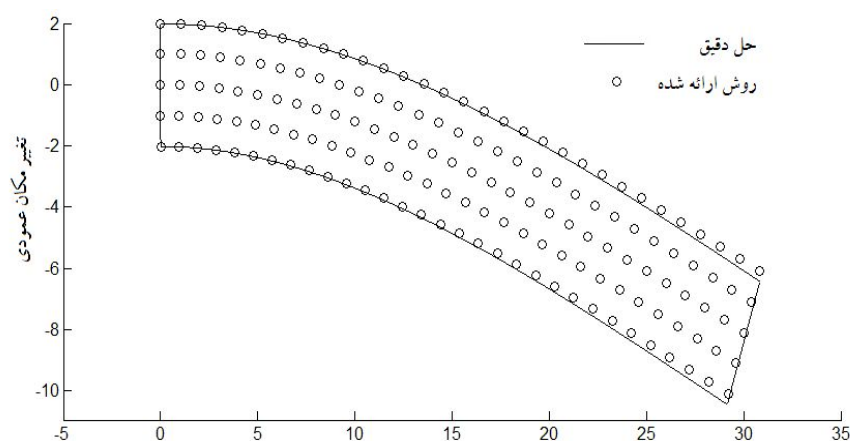
در این مثال چند نوع چینش نقاط انتگرال‌گیری با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نقاط انتگرال‌گیری در ابتدا به دو دسته تقسیم می‌شوند: آنهایی که نزدیک به مرز قرار دارند، نقاط بیرونی و آنهایی که درون دامنه واقع شده‌اند نقاط درونی نام‌گذاری می‌شوند. چینش نقاط انتگرالی در اولین مثال به این صورت انجام می‌شود که نقاط درونی منطبق بر نقاط گره‌ای و نقاط بیرونی روی مرز و در بینابین نقاط گره‌ای مطابق شکل (۹) واقع شوند. نقاط گره‌ای به صورت منظم و با فاصله ۱ متری از



شکل ۱۱- روند کاهش خطا در مسأله تیر یک سر گیردار با افزایش تعداد نقاط



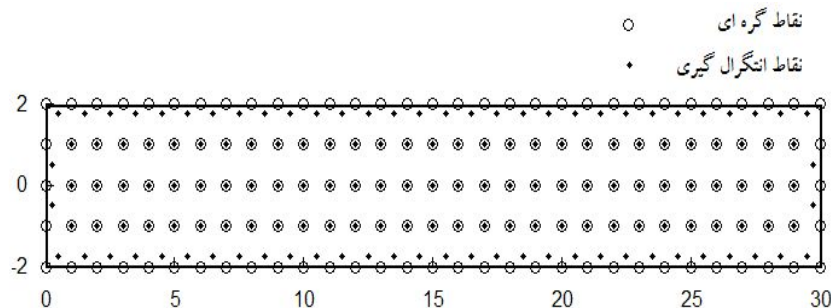
شکل ۱۲- موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری در تیر یک سر درگیر تحت بار انتهایی (فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۰۵ متر)



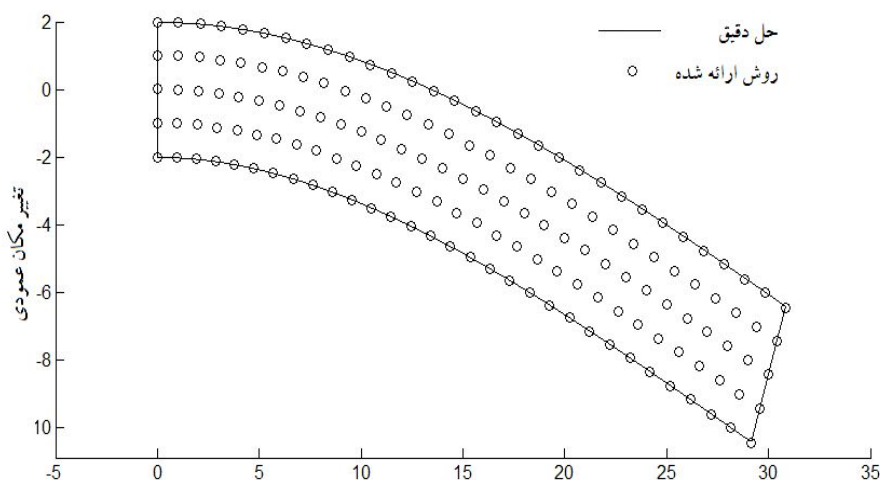
شکل ۱۳- شکل نهایی تیر یک سر درگیر تحت بار انتهایی تیر (فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۰۵ متر)

شکل (۱۳) است. در این حالت خطای محاسبات به حدود دو درصد می‌رسد. حال در چپ‌نش دیگری برای نقاط انتگرال‌گیری، فاصله نقاط بیرونی از مرز به ۰/۲۵ مترافزایش داده می‌شود. شکل (۱۴) چپ‌نش نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری و

شده است. با تغییر چپ‌نش نقاط انتگرال‌گیری و انتقال نقاط بیرونی به داخل مرز به اندازه ۰/۰۵ متر نتایج بهتری حاصل می‌شود. شکل (۱۲) نقاط گره‌ای و نقاط انتگرالی را در این توزیع نشان می‌دهد. شکل نهایی تیر پس از جابجایی مطابق



شکل ۱۴- موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری در تیر یکسر درگیر تحت بار انتهایی (فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۲۵ متر)



شکل ۱۵- شکل نهایی تیر یکسر درگیر تحت بار انتهایی تیر (فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۲۵ متر)

می‌دهد. خطای این محاسبه ۱ درصد است.

۲-۵- صفحه تخت تحت بار گسترده خطی

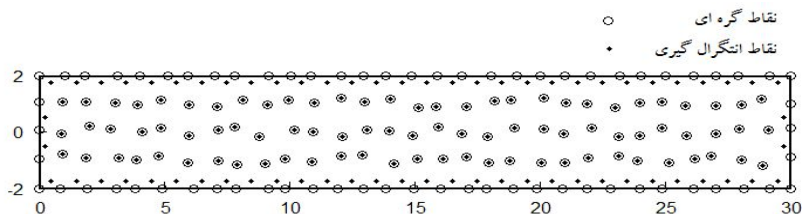
شکل (۱۸) یک صفحه مستطیل شکل با خصوصیات $L = 20m$, $D = 10m$, $\nu = 0.3$, $E = 200Gpa$ و ضخامت

واحد، تحت بار خطی را نشان می‌دهد.

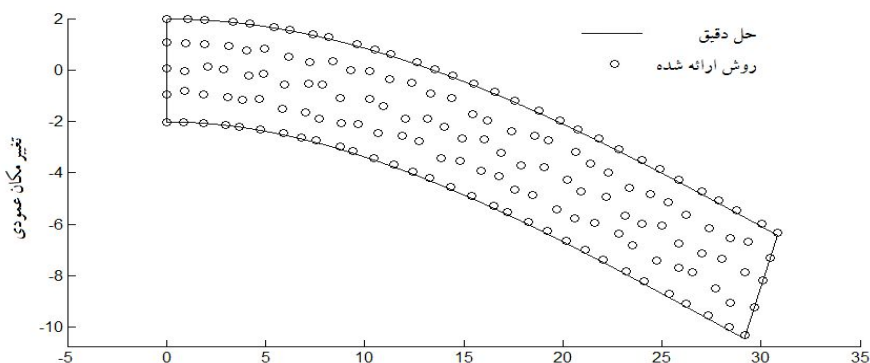
در اولین تحلیل نقاط انتگرال‌گیری منطبق بر نقاط گره‌ای در نظر گرفته می‌شوند. جابه‌جایی نقاط پس از اعمال بار گسترده خطی در انتها مطابق شکل (۱۹) خواهد بود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پاسخ‌ها دچار نوساناتی هستند. در این پدیده به‌خاطر خطا در محاسبه انتگرال برخی مودهای حرکتی یک المان نادیده گرفته شده و باعث ناپایداری پاسخ‌ها می‌شود. یکی از راه‌های جلوگیری از این پدیده در اجزا محدود، افزایش تعداد نقاط انتگرال‌گیری است.

شکل (۱۵) شکل نهایی تیر پس از اعمال بار را نمایش می‌دهد. مشاهده شد که در این حالت جواب‌های بهتری به‌دست آمده و خطا به حدود ۰/۵۴ درصد رسید. این مقایسه نشان می‌دهد که نقاط داخل مرز برای محاسبه انتگرال از نقاط روی مرز مناسب‌تر هستند.

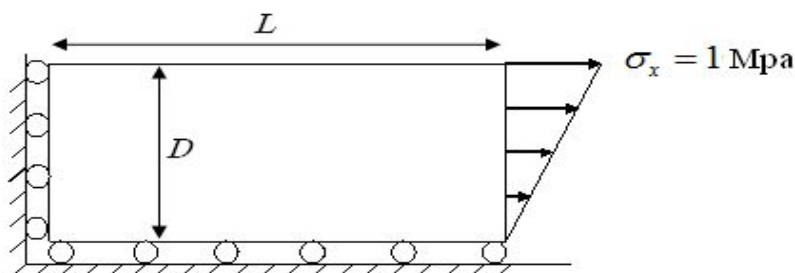
در حالت بعد نقاط گره‌ای به‌صورت تصادفی جابه‌جا شده و نقاط انتگرال‌گیری درونی منطبق بر نقاط گره‌ای و نقاط انتگرال‌گیری بیرونی بینابین نقاط گره‌ای و با فاصله ۰/۲۵ متر از مرز در نظر گرفته می‌شوند. در این حالت حداکثر میزان جابه‌جایی نقاط گره‌ای به‌صورت تصادفی به میزان ۲۰ درصد فاصله اولیه یعنی مقدار ۰/۲ متر در نظر گرفته شده است. شکل (۱۶) موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری در این حالت و شکل (۱۷) نیز شکل نهایی تیر را پس از اعمال بار نشان



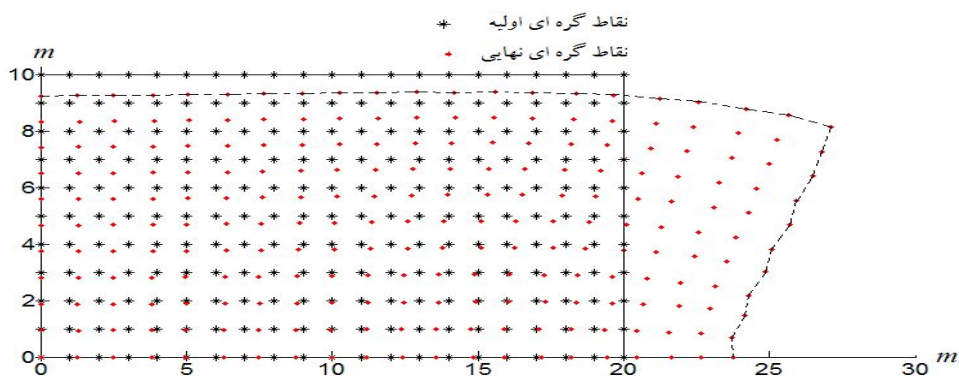
شکل ۱۶- موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری در تیر یک‌سر درگیر تحت بار انتهایی
(جابه‌جایی نقاط گره‌ای به‌صورت تصادفی با حداکثر ۰/۲ متر، فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۲۵ متر)



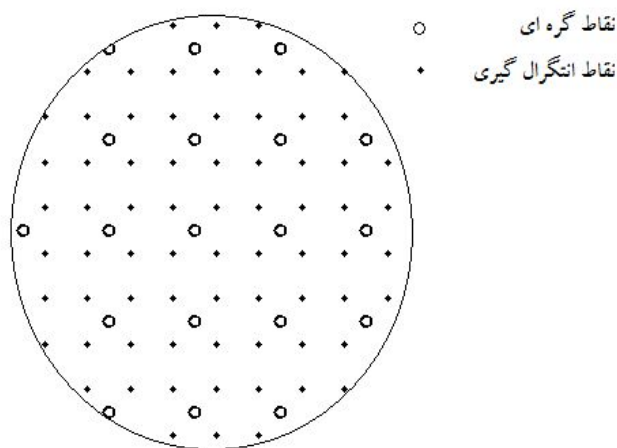
شکل ۱۷- شکل نهایی تیر یک‌سر درگیر تحت بار انتهایی تیر. نقاط گره‌ای به‌صورت تصادفی با حداکثر جابه‌جایی
۰/۲ متر جابه‌جا شده و فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۲۵ متر



شکل ۱۸- صفحه تخت تحت بار گسترده خطی و شرایط مرزی



شکل ۱۹- شکل اولیه و شکل نهایی با جابه‌جایی با ضریب ۱۰۰۰ در صفحه تخت تحت بار گسترده خطی و
نمایش نوسانات جابه‌جایی، نقاط انتگرال‌گیری منطبق بر نقاط گره‌ای



شکل ۲۰- نمونه توزیع نقاط گره‌ای و نقاط انتگرال‌گیری با افزایش نقاط انتگرال‌گیری

در نظر گرفته می‌شود که سوراخی به شعاع $a = 1\text{m}$ در آن قرار دارد و در جهت محور x تحت تنش یکنواخت $\sigma_{xx} = 10^7 \text{Mpa}$ قرار گرفته است. به‌خاطر شرایط تقارن فقط یک چهارم این صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد و شرایط مرزی تقارن به آن اعمال می‌شود. برای مقایسه نتایج حاصل از تحلیل حاضر با حل دقیق صفحه سوراخدار، حداقل طول و عرض صفحه نباید از مقدار $9a$ کمتر باشد و به همین دلیل $L = 9.5$ انتخاب شده است. در این حالت نقاط انتگرالی منطبق بر نقاط گره‌ای در شکل (۲۴) انتخاب شده‌اند.

برای تعیین صحت و مقایسه نتایج حاصل از روش ارائه شده، منحنی مقدار مؤلفه تنش σ_{xx} در امتداد خط عمودی $x = 0$ با مقادیر دقیق آن که از رابطه زیر به‌دست می‌آیند، در شکل (۲۵) رسم شده و در شکل (۲۶) خطای نسبی آن ارائه شده است [۲۸]:

$$\sigma_x(x, y) = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right\} + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \quad (28)$$

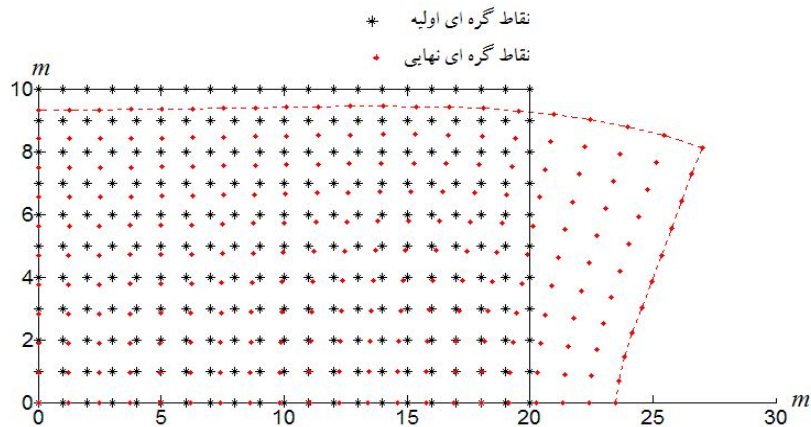
در این رابطه (r, θ) مختصات قطبی نقطه مورد نظر و θ زاویه اندازه‌گیری شده از محور x در جهت راست‌گرد مثلثاتی است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، حداکثر میزان خطا 0.15% در صد بوده و نتایج به‌دست آمده قابل قبول هستند. ضریب تمرکز تنش در این مثال که نسبت بین تنش در نقطه بالای سوراخ و تنش یکنواخت وارد شده به صفحه است،

در این مثال از تکنیک افزایش نقاط انتگرال‌گیری استفاده شده و تعداد این نقاط افزایش یافته و بین نقاط گره‌ای قرار داده شده‌اند. نحوه چینش نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری مطابق شکل (۲۰) انتخاب شده است که در آن نقاط انتگرال‌گیری به‌صورت منظم در دامنه توزیع می‌شوند. نتایج در شکل (۲۱) نشان داده شده‌است. همان‌طور که دیده می‌شود، در شکل (۲۱) نوسانات جابه‌جایی کاملاً از بین رفته است.

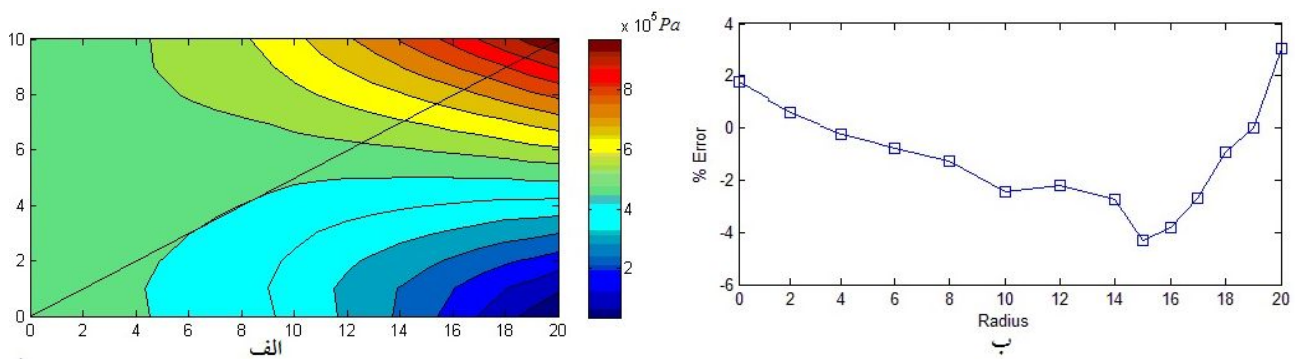
در شکل (۲۲-الف) کانتور مؤلفه تنش σ_{xx} حاصل از میدان جابه‌جایی با استفاده از روش ارائه شده در مقاله محاسبه شده است. در شکل (۲۲-ب) کانتور تنش حاصله با مقادیر مشابه خود از نتایج تحلیل اجزا محدود مقایسه می‌شود. در این مقایسه مدل اجزا محدود با دقت بالا و تعداد 5000 المان تحلیل شده و نتایج حاصله برای خط مشخص شده در شکل (۲۲-الف) با نتایج تحلیل حاضر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشخص است میزان خطای نسبی در تنش‌های حاصل از میدان جابه‌جایی در این روش کمتر از 4% درصد است.

۳-۵- صفحه سوراخدار

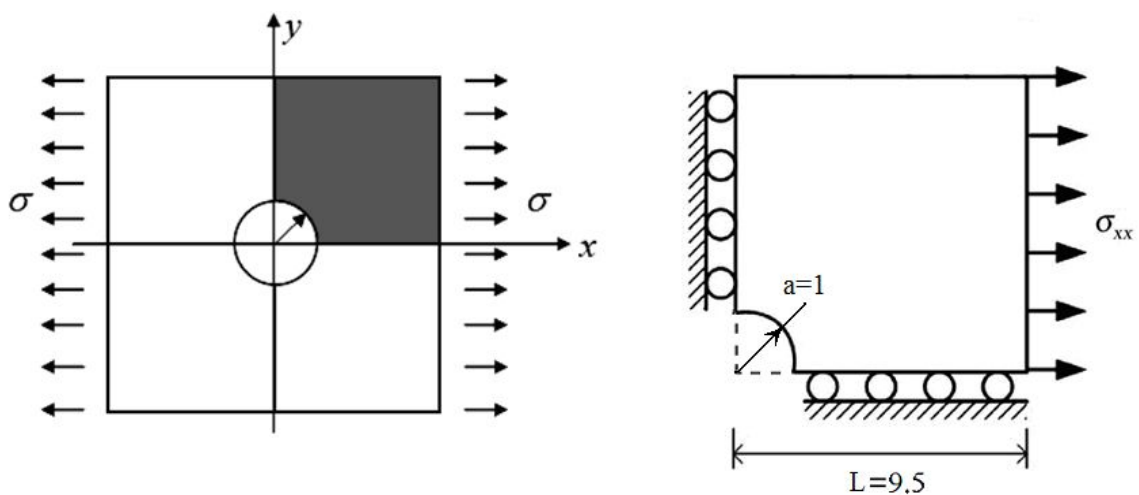
آخرین مثالی که در این قسمت بررسی می‌شود، صفحه بی‌نهایت با یک سوراخ در وسط است که تحت بار گسترده یکنواخت قرار می‌گیرد. مطابق شکل (۲۳) صفحه‌ای



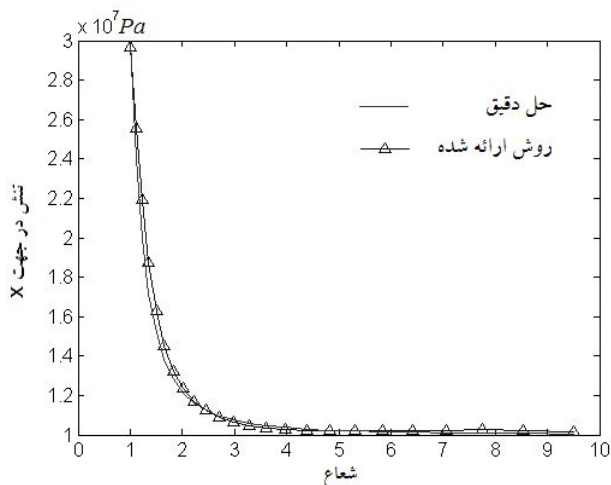
شکل ۲۱- شکل اولیه و شکل نهایی با جابه‌جایی با ضریب ۱۰۰۰۰ در صفحه تخت تحت بار گسترده خطی با نقاط انتگرال‌گیری افزایش یافته



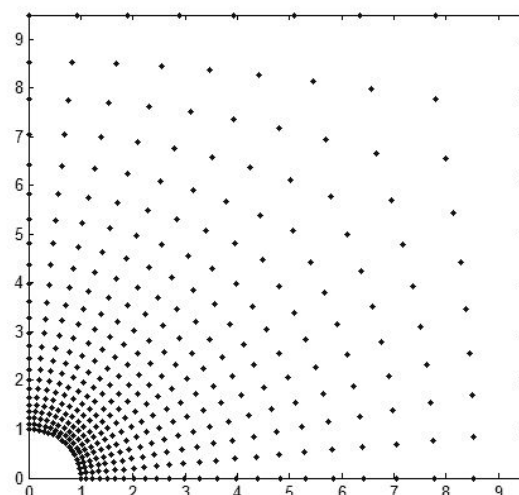
شکل ۲۲- الف- مؤلفه تنش σ_{xx} صفحه تخت تحت بار گسترده خطی با افزایش تعداد نقاط انتگرال‌گیری ب- مقدار خطای نسبی در نتایج مؤلفه تنش σ_{xx} حاصل از میدان جابه‌جایی با مقدار حاصل از اجزا محدود دقیق



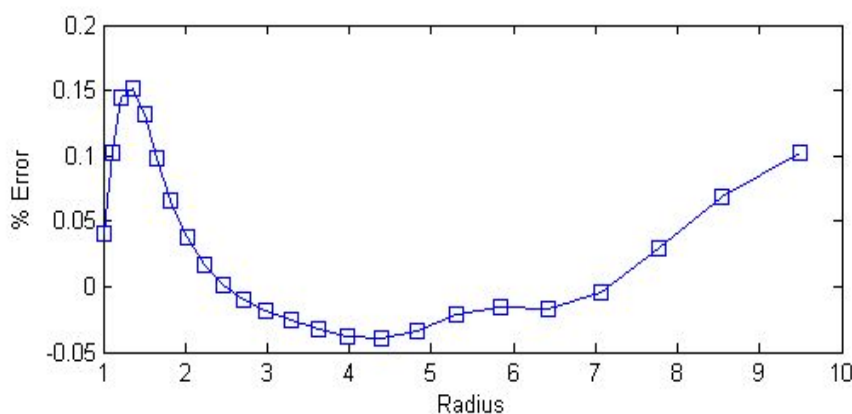
شکل ۲۳- صفحه سوراخدار تحت بار یکنواخت در راستای محور x و قطاع یک چهارم آن



شکل ۲۵- نمودار مؤلفه تنش σ_{xx} (Pa) در امتداد خط عمودی $x = 0$ حاصل از تحلیل حاضر با ۴۰۸ نقطه گره‌ای و نمودار مقدار دقیق آن



شکل ۲۴- توزیع ۴۰۸ نقطه گره‌ای برای تحلیل صفحه سوراخدار



شکل ۲۶- خطای نسبی مؤلفه تنش σ_{xx} در امتداد خط عمودی $x=0$ حاصل از تحلیل حاضر با ۴۰۸ نقطه گره‌ای و مقدار دقیق آن

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش انتگرال‌گیری جدیدی معرفی شد که با استفاده از آن، انتگرال در روش بدون شبکه گالرکین محاسبه می‌شود. تفاوت این روش با روش‌های دیگر، علاوه بر عدم نیاز به هر نوع شبکه‌بندی، محاسبه انتگرال فرم ضعیف به صورت کلی است. به عبارت دیگر در این روش کل دامنه به صورت یک المان در نظر گرفته می‌شود. چینش نقاط در مثال تیر یک سر گیردار بررسی شد. نشان داده شد که اگر چه در چینش‌های مختلف می‌توان نتایج قابل قبولی به دست آورد ولی در برخی

مقدار ۲/۹۷۵ به دست می‌آید که بسیار نزدیک به مقدار دقیق آن یعنی عدد ۳ است.

به منظور نشان دادن همگرایی روش ارائه شده، در جدول ۳ مقایسه‌ای بین ضریب تمرکز تنش در نقطه بالای سوراخ انجام شده که در آن با تعداد نقاط مختلف مسأله تحلیل شده و نتایج حاصل شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش تعداد نقاط، مقدار ضریب تمرکز تنش به مقدار دقیق آن نزدیک‌تر شده است که بیان‌گر همگرایی حل ارائه شده برای مسأله مذکور است.

چینش‌ها جواب دقیق‌تری به‌دست می‌آید. به کمک این روش مسائل دو بعدی الاستواستاتیک بررسی شده و نتایج زیر به‌دست آمده است:

- (۱) تعداد نقاط انتگرال‌گیری در این روش می‌تواند در حد نقاط گره‌ای باشد.
- (۲) همگرایی حل در یک مثال و در نقطه بحرانی بررسی شده

و به تأیید رسید.

(۳) با افزایش نقاط انتگرال‌گیری، پاسخ‌های دقیق‌تری حاصل خواهد شد.

(۴) در این روش انتخاب نقاط انتگرال‌گیری درون دامنه بهتر از انتخاب آنها در نزدیکی مرز است.

واژه‌نامه

- | | | |
|--|-------------------------------------|--------------------------------|
| 1. conformal mapping | 8. Voroni diagram | 15. Kronecker-delta property |
| 2. Gaussian quadrature | 9. Monte Carlo integration | 16. simple Kriging |
| 3. remeshing | 10. Rosca and Leita | 17. universal Kriging |
| 4. element distortion | 11. quasi Monte Carlo | 18. radius of influence domain |
| 5. Galerkin weak formulation | 12. Green's theorem | |
| 6. nodal integration method | 13. Cartesian transformation method | |
| 7. stabilized conforming nodal integration | 14. weights of integration points | |

مراجع

1. Liu, G. R., *Meshless Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, 2002.
2. De, S., and Bathe, K. J., "The Method of Finite Spheres", *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 329-345, 2000.
3. Atluri, N., and Zhu, T., "New Concepts in Meshless Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, pp. 117-127, 1998.
4. Carpinteri, A., Ferro, G., and Ventura, G., "The Partition of Unity Quadrature in Meshless Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, pp. 987-1006, 2002.
5. Liu, G. R., and Wang, J. G., "A Point Interpolation Meshless Method Based on Radial Basis Functions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, pp. 1623-1648, 2002.
6. Atluri, S. N. and Shen, S. P., "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method", *Tech Science Press*, Encino, USA, 2002.
7. Atluri, S. N., Kim, H. G., and Cho, J. Y., "A Critical Assessment of the Truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) Methods", *Computational Mechanics*, Vol. 24, pp. 348-372, 1999.
8. Gu, Y. T., and Liu, G. R., "A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Formulation for Static and Free Vibration Analyses of Thin Plates", *Computer Modeling in Engineering Science*, Vol. 2 (4) pp. 463-476, 2001.
9. Gu, Y. T., and Liu, G. R., "A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Free and Forced Vibration Analyses for Solids", *Computational Mechanics*, Vol. 27 (3), pp. 188-198, 2001.
10. Gu, Y. T., and Liu, G. R., "A Local Point Interpolation Method for Static and Dynamic Analysis of Thin Beams", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 5515-5528, 2001.
11. Liu, G. R., and Gu, Y. T., "A Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM) for Free Vibration Analyses of 2-D Solids", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 246 (1), pp. 29-46, 2001.
12. Liu, G. R., and Gu, Y. T., "Comparisons of Two Meshfree Local Point Interpolation Methods for Structural Analyses", *Computational Mechanics*, Vol. 29 (2), pp. 107-121, 2002.
13. Lam, K. Y., Wang, Q. X., and Hua, L., "A Novel Meshless Approach - Local Structural (LoKriging) Method with Two-Dimensional Structural Analysis", *Computational Mechanics*, Vol. 33(3), pp. 235-244, 2004.
14. Gu, Y. T., Wang, Q. X., and Lam, K. Y., "A Meshless Local Kriging Method for Large Deformation Analyses", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 1673-1684, 2007.
15. Belytschko, T., Gu, L., and Lu, Y. Y., "Fracture and Crack Growth by Element-Free Galerkin Methods", *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, Vol. 2, pp. 519-534, 1994.

16. Belytschko, T., and Tabbara, M., "Dynamic Fracture using Element-Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 923-938, 1996.
17. Li, G., and Belytschko, T., "Element-Free Galerkin Method for Contact Problems in Metal Forming Analysis," *Engineering Computations*, Vol. 18, pp. 62-78, 2001.
18. Ponthot, J. P., and Belytschko, T., "Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for element-free Galerkin method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 152, 19-46, 1998.
19. Singh, I. V., and Tanaka, M., "Heat Transfer Analysis of Composite Slabs using Meshless Element Free Galerkin Method", *Computational Mechanics*, Vol. 38, pp. 521-32, 2006.
20. Beissel, S., and Belytschko, T., "Nodal Integration of the Element-Free Galerkin Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 49-74, 1996.
21. Chen, J. S., Wu, C., Yoon, T. S., and You, Y., "A Stabilized Conformal Nodal Integration for a Galerkin Mesh-Free Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 435-466, 2001.
22. Chen, J. S., Yoon, S., and Wu, C. T., "Non-Linear Version of Stabilized Conforming Nodal Integration Galerkin Mesh-Free Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 2587-6515, 2002.
23. James, F., "Monte Carlo Theory and Practice", *Reports on Progress in Physics*, Vol. 43, pp. 1145-1189, 1980.
24. Rosca, V. E., and Leita V. M. A., "Quasi-Monte Carlo Mesh-Free Integration for Meshless Weak Formulations", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, pp. 471-479, 2008.
25. Khosravifard, A., and Hematiyan, M. R., "A New Method for Meshless Integration in 2D and 3D Galerkin mesh free Methods", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, pp. Vol. 34, pp. 30-40, 2010.
26. Matheron, G., "Traite de Geostatistique Appliquee", Tome 1. Memoires du Bureau de Recherches Geologiques et Minieres, No. 14, Editions Technip, Paris. 1962.
27. Cressie, N. AC., "Statistics for Spatial Data," John Wiley & Sons, Chichester. 1993.
28. Timoshenko, S., "Theory of Elasticity", McGraw-Hill book Co, 1934.