

مقایسه اعمال معادلات ساختاری مختلف در تحلیل کماتش نانوصفحه گرافین

سعید شیروانی شاه عنایتی* و اکبر جعفری
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۰/۱۷ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۲/۳۱)

چکیده - در این تحقیق، از رویکرد کلی مکانیک محیط پیوسته به منظور مدل سازی رفتار کماتش گرافین استفاده می شود. در این راستا انواع تئوری های ساختاری شامل فرم کاهیده تئوری غیرمحملی اربینگن، تئوری گرادبان کرنش مرتبه دو، تئوری گرادبان ضمنی و تئوری زوج تنش در مدل سازی گرافین به کار گرفته می شوند. تفاوت های نتایج اعمال تئوری های مختلف، بررسی و پیرامون قابلیت هر یک از تئوری های مذکور برای مدل سازی گرافین بحث می گردد. در بخش تحلیل عددی، تأثیر متغیرهای مختلفی شامل ضریب اندازه، ابعاد نانوصفحه و شرایط مرزی بر روی رفتار کماتش گرافین مورد بررسی قرار می گیرد.

واژگان کلیدی: گرافین، کماتش، الاستیسیته غیرمحملی، گرادبان کرنش، زوج تنش.

Comparing Different Constitutive Equations Implemented to Buckling Analysis of Graphene Sheets

S. Shirvani Shahenayati*, A. Jafari

Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology

Abstract: *The approach of continuum mechanics is employed for modeling single layer nanoplates in order to study their buckling behavior. In this regard, different constitutive equations including differential non-local, second order strain gradient, implicit gradient, and modified couple stress theories are employed to develop the buckling governing equations of Graphene Sheets. In the numerical study, the effects of a few variables including size effect parameter, nanoplate size, and boundary conditions on the buckling behavior are investigated.*

Keywords: *Graphene sheet, buckling, non-local elasticity, strain gradient, couple stress.*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: S_Sh665@yahoo.com

فهرست علائم

<p>γ تابع کرنل (m^{-3})</p> <p>δ دلتای کرونیگر</p> <p>ϵ_{ij} مؤلفه‌های تانسور کرنش</p> <p>ζ, η دستگاه مختصات طبیعی</p> <p>θ بردار چرخش</p> <p>κ بخش انحرافی تانسور زوج تنش ($N.m$)</p> <p>λ ثابت لامه ($N.m^{-2}$)</p> <p>Λ نسبت فشاری</p> <p>ν ضریب پواسون</p> <p>ξ ضریب اندازه (ضریب غیر محلی)</p> <p>(پارامتر غیر محلی) (ηm)</p> <p>σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش ($N.m^{-2}$)</p> <p>χ گرادیان چرخش (m^{-1})</p> <p>ψ تابع تقریب درون‌یاب</p> <p>Ω بار بدون بعد کماتش</p> <p>بالانویس‌ها</p> <p>C شرایط مرزی گیردار</p> <p>MCS مدل زوج تنش</p> <p>NL تئوری غیر محلی (غیر کلاسیک)</p> <p>S شرایط مرزی ساده</p> <p>TDNL مدل دیفرانسیلی کاهنده ارینگن</p> <p>$2^{nd}IG$ مدل گرادیان ضمنی مرتبه دو</p> <p>$2^{nd}SG$ مدل گرادیان کرنش مرتبه دو</p>	<p>A, B ماتریس‌های سفتی مسأله مقدار ویژه</p> <p>a, b طول و عرض صفحه (m)</p> <p>C_{ijkl} تانسور مرتبه چهارم الاستیسیته ($N.m^{-2}$)</p> <p>D سفتی خمشی صفحه ($N.m$)</p> <p>E مدول الاستیسیته ($N.m^{-2}$)</p> <p>e_{ipq} نماد جایگشت</p> <p>G مدول برشی ($N.m^{-2}$)</p> <p>h ضخامت صفحه (m)</p> <p>J ماتریس تبدیل (ژاکوبین)</p> <p>K مدول حجمی ($N.m^{-2}$)</p> <p>M گشتاور برآیند تنش ($N.m$)</p> <p>N نیروی حاصل از تنش (N)</p> <p>m, n تعداد نقاط درون یاب در راستای یک و دو</p> <p>r مقیاس طول (m)</p> <p>U انرژی کرنشی ($N.m$)</p> <p>u بردار جابجایی (m)</p> <p>w خیز (m)</p> <p>x, y, z دستگاه مختصات دکارتی</p> <p>X بردار موقعیت (m)</p> <p>علائم یونانی</p> <p>α بردار ویژه مسأله مقدار ویژه</p> <p>β_{ijkl} تانسور تنش غیر محلی ($N.m^{-2}$)</p>
--	--

۱- مقدمه

وابستگی خواص مواد به اندازه آن‌ها در مقیاس‌های بسیار کوچک، به صورت تجربی اثبات شده است [۱]. با کاهش اندازه و نزدیک شدن حداقل یکی از ابعاد جسم به محدوده نانومتری، خواص بسیار متفاوتی از جسم بروز می‌نماید. با این‌همه، سؤال بعد این است که اگر یکی از اندازه‌ها در حد نانومتر باشد، آیا بقیه اندازه‌ها بر روی ویژگی‌های آن اثر می‌گذارد. به بیانی دیگر، در یک نوع نانو ساختار با آلوتروپ ثابت (مثلاً گرافین) اگر

ضخامت در حد تک لایه باقی مانده و سایر ابعاد تغییر کنند، خواص آن چگونه تأثیر می‌پذیرد. بر اساس مرور مراجع، تاکنون اثبات عملی آزمایشگاهی جامعی در مورد پاسخ به این سؤال گزارش نشده است و جواب واحدی برای این سؤال در اختیار نیست. این مسأله می‌تواند ناشی از مشکلات ساخت نانو ذرات با اندازه‌های کنترل شده دقیق باشد، البته پیچیدگی انجام آزمایشات در این اندازه‌های کوچک نیز می‌تواند عامل دیگری باشد. به‌طور مثال، اطلاعات تجربی اندکی در مورد تأثیر

اندازه‌های طول و عرض نانوصفحه بر روی ویژگی‌های الاستیک آن وجود دارد. وانگ و همکاران با آزمایش عملی نشان دادند که مقاومت پارگی لایه اکسید گرافین با افزایش اندازه آن کاهش می‌یابد ولی در مورد مدول الاستیک آن بحث نکردند [۲]. همچنین، مدل‌سازی‌های دینامیک‌ملکولی و مکانیک‌ملکولی، وابستگی خواص به اندازه در یک آلوتروپ ثابت را تأیید می‌کند. به‌عنوان مثال جعفری و همکاران نشان دادند که با افزایش قطر نانولوله‌های بر-نیتريد، مدول الاستیک آن افزایش یافته و به یک مقدار حدی میل می‌کند ولی خواص پیزوالکتریک تقریباً ثابت می‌ماند [۳]. بر اساس نتایج روش دینامیک‌ملکولی که توسط نی و همکاران گزارش شده است مدول یانگ گرافین وابستگی محسوسی به ابعاد آن ندارد [۴]. از سوی دیگر، وانگ و همکاران با استفاده از روش دینامیک‌ملکولی پیش‌بینی می‌کنند که با افزایش ابعاد گرافین، مدول الاستیک آن افزایش یافته و به یک مقدار حدی میل می‌نماید [۵]. در کنار این‌ها در مواردی گزارش شده است که با افزایش اندازه عرض صفحه تا حدود دو نانومتر، برخی ضرایب الاستیک گرافین کاهش یافته و پس از آن شروع به افزایش کرده و به مقداری حدی میل می‌کند [۶]. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که در اغلب مطالعات وابستگی ویژگی‌ها به ابعاد تأیید شده است هر چند در رابطه با نوع و شدت وابستگی اتفاق نظر وجود ندارد. بر اساس نظر نویسندگان مقاله حاضر، شاید نوع وابستگی به اندازه برای همه مواد یکسان نبوده و حتی برای ویژگی‌های مختلف نیز تابعیت متفاوتی داشته باشد. این عدم یکتایی می‌تواند ناشی از تفاوت نوع پیوندهای بین اتمی در یک ماده نسبت به ماده دیگر باشد. همچنین معمولاً وابستگی همه خواص به پیوندها از یک قاعده پیروی نمی‌کند.

با این اوصاف اگر قرار باشد از تئوری‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته برای مدل‌سازی نانو ساختارها استفاده شود بایستی وابستگی به اندازه در معادلات ساختاری ظاهر شود. در تئوری الاستیسیته کلاسیک چنین قابلیت وجود ندارد؛ لذا تلاش‌ها برای

توسعه معادلات ساختاری در سال‌های اخیر شدت یافته و همچنان ادامه دارد. به‌عنوان مثال در رابطه با مدل‌سازی رفتار کمانشی نانوصفحات در سال‌های اخیر تحقیقات مختلفی صورت پذیرفته است. در این زمینه، فرم کاهیده تئوری غیرمحلّی دیفرانسیلی ارینگن بیش از بقیه مورد توجه و استفاده محققین قرار گرفته است [۷-۹]. بر اساس این تئوری، اثر اندازه از طریق یک ضریب اضافی تحت عنوان پارامتر غیرمحلّی در معادلات ساختاری نمود پیدا می‌کند. مرور مراجع نشان می‌دهد که پارامتر مذکور به‌عنوان ضریبی از بارگذاری خارجی در معادلات حاکم ظاهر می‌شود و ساختار معادله مشابه تئوری الاستیسیته کلاسیک است. بدین ترتیب با اعمال این تئوری، اثر اندازه برای یک هندسه ثابت به تابع بارگذاری وارد بر آن وابسته است در حالی که انتظار می‌رود در یک نوع بارگذاری مشخص، مثلاً خمشی، اثر اندازه در هندسه و اندازه صفحه نمود پیدا کند و مستقل از تابع بارگذاری باشد. البته یادآوری می‌شود که تفاوت رفتار یک نانوساختار ثابت در دو نوع بارگذاری متفاوت، چندان دور از انتظار نیست و تئوری‌های متأثر از اثر سطح چنین نتیجه‌ای را پیش‌بینی می‌کند [۱۰].

در تحقیق جاری، تئوری‌های مختلف ساختاری برای تحلیل کمانش نانوصفحه گرافین به‌کار گرفته شده و بر اساس هر کدام از آن‌ها معادلات حاکم بر کمانش ورق توسعه داده می‌شود. بدین ترتیب امکان مقایسه نتایج هر کدام از این تئوری‌ها فراهم می‌شود. لازم به ذکر است که در بیشتر تحقیقات پیشین، گرافین با مشخصات ایزوتروپیک مورد بررسی قرار گرفته است؛ در حالی که با توجه به ساختار شش‌ضلعی قرارگیری اتم‌ها، این صفحات دارای خواص غیر ایزوتروپ هستند. همچنین، در بسیاری از تحقیقات پیشین از روش‌های حل تحلیلی ناویر و لوی که محدود به شرایط مرزی و هندسی خاص هستند استفاده شده است [۱۱-۱۴]. در حالی که یکی از اهداف مقاله حاضر، کاربرد یک روش حل جامع برای شرایط مرزی و هندسی متنوع است.

۲- معادلات ساختاری

در تحلیل هر مسأله و توسعه معادلات حاکم، علاوه بر معادلات بنیادی، به معادلات ساختاری نیز نیاز است. مدل الاستیک خطی هوک قدیمی‌ترین تئوری برای این منظور است. این تئوری، تنش در هر نقطه را به مؤلفه‌های کرنش همان نقطه ارتباط می‌دهد. با این همه، به نظر می‌رسد این تئوری رفتار محیط‌های نانو ساختار و حتی میکرو اندازه را با دقت کافی نمایندگی نمی‌کند. لذا تئوری‌های ساختاری دیگری توسط محققین مورد بررسی قرار گرفته است. می‌توان معادله ساختاری کلی را به متغیرهایی از جمله مشتقات مراتب مختلف تنش و کرنش ارتباط داد که در شکل عمومی مطابق رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$f(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \nabla \varepsilon_{ij}, \nabla \sigma_{ij}, \nabla^2 \varepsilon_{ij}, \nabla^2 \sigma_{ij}, \dots) = 0 \quad (1)$$

در معادله فوق σ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب تانسورهای تنش و کرنش هستند. همچنین، اپراتورهای ∇ و ∇^2 به ترتیب نشانگر گرادینان و لاپلاسیان یا به بیانی دیگر به ترتیب تابعیت مشتقات مرتبه اول و مشتقات مرتبه دوم هستند. بر اساس چگونگی انتخاب ضرایب هر کدام از ترم‌های موجود در این معادله یک معادله ساختاری حاصل می‌شود. به‌عنوان مثال بر اساس تئوری الاستیسیته محلی یا همان نظریه هوک، فقط ضرایب دو ترم اول معادله فوق غیر صفر هستند و رابطه فوق به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

در معادله فوق، σ_{ij} تانسور تنش محلی، ε_{ij} تانسور کرنش در همان محل محاسبه تنش و C_{ijkl} تانسور مرتبه چهار ضرایب الاستیک است که در کلی‌ترین حالت دارای ۲۱ مؤلفه مستقل است. در حالت ایزوتروپیک، فقط ۲ ضریب الاستیک مستقل وجود خواهد داشت و معادله فوق به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} = K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3)$$

در معادله بالا، λ و G ضرایب لامه، K مدول بالک و δ_{ij} دلتای کرونیکر می‌باشند.

در مقاله حاضر، علاوه بر تئوری کلاسیک یا به بیانی دیگر تئوری محلی هوک، چهار نسخه از مدل‌های مختلف غیر

کلاسیک در مدل‌سازی و توسعه معادلات حاکم بر کمناش نانوصفحات به کار گرفته می‌شود.

۲-۱- مدل الاستیسیته غیر محلی دیفرانسیلی

بر خلاف نظریه الاستیک هوک که در آن تنش در هر نقطه به‌صورت محلی با کرنش‌های همان نقطه در ارتباط است، بر اساس نسخه اولیه تئوری غیر محلی انتگرالی ارینگن، مطابق رابطه زیر، تنش در هر نقطه از جسم به کرنش در کل حوزه وابسته است [۱۵]:

$$\sigma_{ij}^{NL} = \int_V \beta_{ijkl} (|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|) \varepsilon_{kl}(\mathbf{X}') dV(\mathbf{X}') \quad (4)$$

در معادله فوق، σ_{ij}^{NL} تانسور تنش غیر کلاسیک، β_{ijkl} کرنل انتگرال و در واقع تانسور سفتی غیر محلی، \mathbf{X}' بردار موقعیت هر نقطه درون حجم مورد نظر و \mathbf{X} بردار موقعیت نقطه مورد هدف تعیین تنش هستند. اگر فرض شود که اثرات غیر محلی به‌صورت ایزوتروپیک و با یک ضریب اسکالر عمل کند آنگاه با جایگذاری معادله (۲) درون معادله فوق نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{NL} &= \int_V \gamma (|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{X}') dV(\mathbf{X}') \\ &= \int_V \gamma (|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|) \sigma_{ij}(\mathbf{X}') dV(\mathbf{X}') \end{aligned} \quad (5)$$

در معادله بالا، σ_{ij} تانسور تنش کلاسیک (محلی) و $\gamma(|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|)$ تابع کرنل یا به بیانی دیگر مدول غیر محلی است که دارای دیمانسیون L^{-3} است. در واقع این مدول را می‌توان یک ویژگی از محیط مادی تلقی نمود که در برخی مراجع به نام مقیاس طول از آن نام برده می‌شود. معادله فوق نشان می‌دهد که تنش غیر محلی در یک نقطه برابر مجموع تنش‌های محلی در همه نقاط جسم با ضریب وزنی تابع کرنل زیر انتگرال است. با این همه، تعیین تابع مذکور به‌صورت تجربی برای یک محیط مشخص مشکل بوده و در این رابطه گزارشی مشاهده نشد. به‌نظر می‌رسد که این موضوع یکی از محدودیت‌های کاربرد این تئوری در مسائل واقعی باشد و البته اعتبار سنجی را نیز مشکل می‌نماید. با اعمال تبدیل فوریه معادله انتگرالی فوق به شکل دیفرانسیلی زیر در می‌آید [۱۵]:

$$(6) \quad (1 - I_1^2 \nabla^2 + I_2^4 \nabla^4) \sigma_{ij}^{nl} = \sigma_{ij}$$

ثابت‌های I_1 و I_2 ویژگی‌های ماده یا به بیانی دیگر مقیاس طول با دیمانسیون طول هستند که در واقع نقش تابع کرنل را ایفا می‌نمایند. با این حال، در بیشتر مراجع از ترم سوم سمت چپ معادله فوق صرف نظر شده است [۷، ۱۶-۱۸] که به فرم ساده شده زیر منجر می‌شود:

$$(7) \quad (1 - \xi^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^{NL} = \sigma_{ij}$$

در این معادله ξ مقیاس طول بوده که در واقع همان I_1 در معادله قبل است. در این جا نیز از چنین فرم ساده شده‌ای استفاده و بر همین اساس از علامت اختصاری TDNL برای آدرس‌دهی آن در طی متن استفاده می‌شود.

با جای‌گذاری معادله ساختاری هوک در سمت راست معادله فوق، روابط زیر به ترتیب برای حالت محیط غیر ایزوتروپ و ایزوتروپ به دست می‌آیند:

$$(8-الف) \quad (1 - \xi^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^{NL} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$(8-ب) \quad (1 - \xi^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^{NL} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}$$

۲-۲- تئوری گرادیان کرنشی مرتبه دو

بر اساس تئوری گرادیان کرنشی مرتبه دو، ترم‌های اول، دوم و پنجم از معادله ساختاری (۱) در شکل‌گیری معادله حاکم نقش ایفا می‌کنند. با توجه به این که در این جا مشتقات مرتبه دوم کرنش در فرمول‌بندی وارد شده‌اند به آن عنوان فرمول‌بندی گرادیان کرنشی مرتبه دوم اختصاص داده شده و با علامت اختصاری 2ndSG نمایش داده می‌شود:

$$(9) \quad \sigma^{NL} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - C'_{ijkl} \nabla^2 \varepsilon_{kl}$$

در معادله فوق، C'_{ijkl} تانسور سفتی گرادیان دوم یا ضریب گرادیان کرنشی نامیده می‌شود. واقعیت این است که مشتق یک عبارت از جمله مشتق کرنش موجود در معادله فوق در ارتباط با اختلاف بین کرنش در نقطه هدف با کرنش در نقاط همسایه است. از این رو می‌توان این معادله را نیز از خانواده الاستیسیته غیرمحلی قلمداد کرد. برای ایجاد شباهت بین این معادله با فرم معرفی شده در تئوری دیفرانسیلی ارینگن و هم‌چنین فراهم

نمودن شرایط مقایسه‌ای، در این جا ضریب مشابهی برای این منظور در نظر گرفته می‌شود. در این راستا ضریب $C'_{ijkl} = \xi^2 C_{ijkl}$ تعریف و در معادله فوق جایگذاری می‌شود. در ادامه با جای‌گذاری معادله کلاسیک هوک، معادله فوق به فرم زیر تبدیل می‌شود که شبیه معادله ارائه شده در مرجع [۱۹] است:

$$(10) \quad \sigma^{NL} = (1 - \xi^2 \nabla^2) \sigma_{ij}$$

با توجه به اینکه تانسور کرنش قسمت متقارن تانسور گرادیان مرتبه اول تغییر شکل است، بنابراین می‌توان گفت که عبارت $\nabla^2 \varepsilon_{kl}$ معادل تانسور گرادیان مرتبه سوم تغییر شکل است.

۲-۳- تئوری گرادیان ضمنی مرتبه دو

فرمول‌بندی بعدی که در این تحقیق از آن استفاده می‌شود، ترکیبی از دو مدل قبل بوده و معادله ریاضی آن به صورت زیر است که در حقیقت مبین این است که ترم‌های اول، دوم، پنجم و ششم در معادله کلی (۱) انتخاب شده‌اند:

$$(11) \quad (1 - \xi_1^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^{NL} = (1 - \xi_2^2 \nabla^2) \sigma_{ij}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود در این فرمول‌بندی گرادیان‌های مرتبه دوم تنش غیرمحلی و همچنین تنش کلاسیک (یا کرنش) به‌طور هم‌زمان وارد شده‌اند؛ لذا عنوان گرادیان ضمنی برای آن در نظر گرفته شده و با علامت اختصاری 2ndIG نشان داده می‌شود. در این فرمول‌بندی، دو ضریب اضافی نسبت به تئوری محلی در معادله ساختاری وارد شده‌اند و با صفر بودن هر کدام از آن‌ها یکی از تئوری‌های گرادیان کرنشی مرتبه دوم یا غیر محلی دیفرانسیلی حاصل می‌شود. در عین حال به منظور حفظ هماهنگی و فراهم نمودن شرایط مقایسه با تئوری‌هایی که بیشتر معرفی شد، در تئوری جاری، هر دو ضریب یکسان و به صورت $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ در نظر گرفته می‌شود.

۲-۴- تئوری کوپل تنش تغییر یافته

یادآوری می‌شود که قبلاً تئوری گرادیان کرنش مرتبه دوم معرفی شد. با توجه به اینکه با فرض تغییر شکل کوچک،

$$\theta_{i,j} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) + \frac{1}{2}(\theta_{i,j} - \theta_{j,i}) \quad (14)$$

در تئوری زوج تنش، در کنار تانسور کرنش، فقط قسمت متقارن تانسور انحنا یا همان گرادیان چرخش در انرژی الاستیک سهم است که با نماد $\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i})$ نمایش داده می‌شود. در این صورت، انرژی کرنشی با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \kappa_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (15)$$

همان‌گونه که در تئوری کلاسیک، ضریب تانسور کرنش در معادله فوق به نام تانسور تنش و مزدوج یکدیگر هستند، در تئوری زوج تنش، ضریب تانسور گرادیان چرخش یعنی κ_{ij} مزدوج آن نامیده می‌شود که دارای دیمانسیون تنش-طول است لذا تانسور کوپل تنش به آن اطلاق می‌شود. با وجودی که در تئوری‌های قبلی همه مؤلفه‌های تنش و کرنش در قالب یک معادله واحد با هم در ارتباط هستند ولی در تئوری زوج تنش، تنش‌های کلاسیک با کرنش‌های محلی بر اساس رابطه هوک یعنی معادلات (۲) یا (۳) با هم در ارتباط بوده و تانسور زوج تنش نیز در قالب معادله‌ای مجزا به صورت زیر با تانسور انحنا در ارتباط است. تعریف این ارتباط به یک ضریب اضافه نیاز دارد که در متن حاضر برای فراهم نمودن امکان مقایسه با تئوری‌های قبلی از همان سمبل ξ برای این منظور استفاده می‌شود:

$$\kappa_{ij} = 2G \xi^2 \chi_{ij} \quad (16)$$

تانسور انحنا معادل مشتقات مرتبه دوم تابع تغییر مکان است که به نوعی به جابجایی در نقطه مورد نظر و همچنین نقاط همسایه آن مربوط می‌شود. بنابراین تئوری زوج تنش را نیز می‌توان در زمره تئوری‌های غیر محلی قلمداد نمود و پارامتر ξ را نیز می‌توان به عنوان پارامتر غیر محلی یا ضریب مقیاس طول در نظر گرفت.

بنابراین به طور خلاصه در کنار تئوری الاستیسیته محلی یا همان کلاسیک هوک، چهار تئوری دیگر شامل غیر محلی دیفرانسیلی ارینگن، گرادیان کرنشی مرتبه دوم، گرادیان ضمنی

تانسور کرنش معادل قسمت متقارن تانسور گرادیان مرتبه اول تغییر شکل است پس می‌توان گفت که در تئوری ذکر شده قسمت متقارن تانسور گرادیان مرتبه سوم تغییر شکل وارد فرمول‌بندی شده است. در این مرحله از گرادیان مرتبه اول تانسور کرنش در توسعه فرمول‌بندی استفاده می‌شود و در واقع ترم‌های اول، دوم و سوم از معادله (۱) در توسعه معادلات ساختاری مورد استفاده قرار می‌گیرند. در نسخه اولیه تئوری گرادینی کرنش، پنج ضریب اضافه علاوه بر ضرایب الاستیک در فرمول‌بندی وارد می‌شود [۲۰]. با این حال در نسخه تغییر یافته از این تئوری تعداد ضرایب اضافه به سه عدد کاهش یافت [۲۱]. در واقع در این تئوری، قسمت متقارن تانسور گرادیان مرتبه اول تغییر شکل (کرنش) و تانسور گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل که لزوماً متقارن نیست وارد فرمول‌بندی می‌شود. در ویرایش دیگری از این تئوری فقط قسمت متقارن تانسور مذکور مد نظر قرار می‌گیرد که تحت عنوان تئوری اصلاح شده کوپل تنش شناخته شده [۲۲] و در متن حاضر با علامت اختصاری MCS نمایش داده می‌شود.

یادآوری می‌شود که تانسور گرادیان تغییر شکل به صورت زیر تعریف می‌شود که به دو قسمت متقارن به نام تانسور کرنش و غیر متقارن به نام تانسور چرخش تجزیه می‌شود:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (17)$$

در معادله فوق u_i بردار تغییر مکان، و پراتنژهای اول و دوم به ترتیب تانسورهای متقارن و پاد متقارن هستند. با توجه به اینکه تانسور پاد متقارن حاوی سه مؤلفه است می‌توان آن را با یک بردار به نام بردار چرخش به صورت زیر تعریف نمود:

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ipq} u_{q,p} \quad (18)$$

در معادله فوق، e_{ipq} تانسور مرتبه سوم جایگشت نام دارد. در اینجا تانسور انحنا به صورت گرادیان مرتبه اول تانسور یا بردار چرخش تعریف می‌شود. همان‌گونه که در رابطه زیر آورده شده است، این تانسور مرتبه دوم حاصل نیز به دو قسمت متقارن و پاد متقارن قابل تجزیه است:

$$\begin{cases} M_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} z dz \\ N_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} dz \end{cases} \quad i = x, y ; j = x, y \quad (18)$$

متغیرهای تنش در معادلات فوق بر اساس نوع معادله ساختاری مورد استفاده به کرنش‌ها وابسته است. از طرفی، با فرض کرنش‌های کوچک، تانسور کرنش به صورت زیر به گرادیان تغییر شکل وابسته است:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (19)$$

همچنین، با اعمال تئوری تغییر شکل سینماتیکی کرشلف، از مؤلفه‌های کرنش برشی خارج از صفحه صرف‌نظر شده و کرنش‌های نرمال و برشی درون صفحه نیز طبق روابط زیر برحسب خیز عرضی ورق بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (20)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

در ادامه، با استفاده از هر یک از معادلات ساختاری که در بخش قبل معرفی شد، و به کارگیری روابط کرنش-جابجایی (۱۹) و جایگذاری معادلات کرنش-خیز (۲۰)، معادله دیفرانسیل حاکم بر کماتش گرافین توسعه داده شده و در زیر بخش‌های پیش رو ارائه می‌گردد.

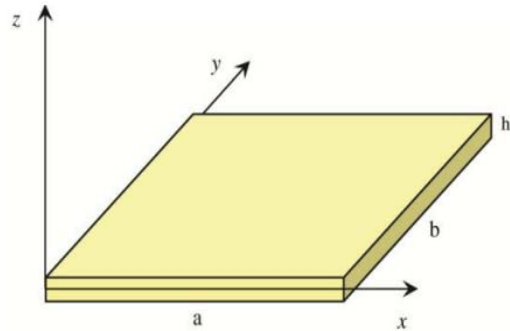
۳-۱- تئوری دیفرانسیلی کاهیده ارینگن

با استفاده از مدل دیفرانسیلی کاهیده ارینگن که در بخش قبل در رابطه (۷) معرفی شد معادله دیفرانسیل حاکم بر کماتش به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \quad (21)$$

$$\left(1 - \xi^2 \nabla^2\right) \left(N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

در معادله فوق مؤلفه‌های سفتی خمشی صفحه مطابق روابط زیر تعریف می‌شود:



شکل ۱- مدل پیوسته گرافین و دستگاه مختصات مورد استفاده

مرتبه دوم و زوج تنش مطرح شد. در واقع غیر از تئوری کلاسیک، در بقیه تئوری‌ها علاوه بر کرنش در محل مورد محاسبه تنش، کرنش‌ها در همسایگی آن نیز در شکل‌گیری معادلات ساختاری نقش ایفا می‌کنند لذا در اینجا از ادبیات تئوری‌های غیر محلی برای آن‌ها استفاده می‌شود. همچنین برای امکان مقایسه نتایج کمی این فرمول‌بندی‌ها، پارامتری واحد برای مطالعه اثر غیر محلی در نظر گرفته شد که در ادامه در تحلیل کماتش گرافین مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳- معادلات حاکم بر کماتش نانوصفحات

برای صفحه‌ای که در شکل (۱) نشان داده شده است و با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده، با به کارگیری روش اصل تغییرات یا با ترکیب معادلات تعادل نیرو و گشتاور در جهات مختلف، معادله کماتش صفحه تحت بارهای درون صفحه‌ای N_{xy} ، N_y ، N_x و عدم وجود نیروی عرضی، مطابق رابطه زیر به دست می‌آید [۲۳]:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \quad (17)$$

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

در معادله فوق، w خیز عرضی ورق، M ها گشتاورهای داخلی خمشی وارد بر هر مقطع ورق هستند که برحسب تنش توزیع شده در امتداد ضخامت صفحه که در راستای مؤلفه z دستگاه مختصات قرار دارد، مطابق رابطه (۱۸) قابل بیان هستند:

می‌شود.

۴-۳- تئوری زوج تنش تغییر یافته

با کاربرد تئوری ساختاری زوج تنش تغییر یافته، روابط (۱۵) و (۱۶)، می‌توان انرژی الاستیک جسم را برحسب گرادیان‌های جابجایی استخراج نمود. در این صورت با اجرای روش تغییرات یا کار مجازی معادله دیفرانسیل حاکم بر کماتش گرافین مطابق رابطه (۲۵) به دست می‌آید [۲۴]:

$$D'_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D'_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D'_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (25)$$

البته در این جا سفتی‌های خمشی D'_{ij} با رابطه $D'_{ij} = D_{ij} + Gh\xi_2^2$ با سفتی‌های خمشی تعریف شده قبلی در ارتباط هستند.

با مرور و مقایسه معادلات به دست آمده در این بخش، مشخص می‌شود که بر اساس تئوری کاهیده ارینگن و تئوری زوج تنش تغییر یافته، معادله حاکم از مرتبه چهار به دست آمده است، در حالی که بر اساس اعمال تئوری گرادیان کرنش مرتبه دو و تئوری گرادیان ضمنی مرتبه دو، معادله دیفرانسیل مرتبه شش حاصل شده است. تفاوت مهم دیگر این معادلات در چگونگی تأثیر ضریب اندازه یا همان پارامتر غیر محلی است؛ به گونه‌ای که در تئوری دیفرانسیلی کاهیده ارینگن این پارامتر فقط در سمت راست معادله به صورت ضریب نیروی خارجی ظاهر شده در حالی که در سایر تئوری‌ها به صورت ضریب مشتقات تابع خیز در سمت چپ معادله ظاهر شده است. با این حال، با صفر قرار دادن مقدار ضریب اندازه در هر کدام از چهار حالت ذکر شده، معادله کماتش صفحه برای حالت اعمال تئوری ساختاری محلی هوک حاصل می‌شود.

۵-۳- شرایط مرزی

برای تعیین پاسخ نهایی هر معادله دیفرانسیل مقدار مرزی، به تعدادی شرط مرزی متناسب با مرتبه معادله نیاز است. در این جا دو نوع شرط

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{12} = \frac{E_2 \nu_{12} h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad (22)$$

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12} h^3}{12}$$

در روابط فوق، E_1 و E_2 مدول‌های یانگ در راستاهای ارتوتروپی، $\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_2}{E_1}$ و ν_{21} ضرایب پواسن بزرگ و کوچک و G_{12} مدول برشی ورق ارتوتروپ نیست. لازم به ذکر است که در اینجا راستاهای ارتوتروپی ۱ و ۲ منطبق بر راستاهای مختصات x و y در نظر گرفته می‌شوند.

۲-۳- تئوری گرادیان کرنش مرتبه دو

بر اساس استفاده از فرمول‌بندی تئوری ساختاری گرادیان کرنش مرتبه دو که قبلاً در رابطه (۱۰) ارائه شد، معادله دیفرانسیل حاکم بر کماتش ورق به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \xi_2^2 \{ D_{11} (\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2}) + 2(D_{12} + 2D_{66}) (\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4}) + D_{22} (\frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4}) \} = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (23)$$

۳-۳- تئوری گرادیان ضمنی مرتبه دو

اگر فرمول‌بندی تئوری ساختاری گرادیان ضمنی مرتبه دو که قبلاً در رابطه (۱۱) معرفی شد به کار گرفته شود، معادله دیفرانسیل حاکم بر کماتش ورق به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \xi_1^2 \{ D_{11} (\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2}) + 2(D_{12} + 2D_{66}) (\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4}) + D_{22} (\frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4}) \} =$$

$$[1 - \xi_2^2 \nabla^2] (N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})$$

لازم به ذکر است که در بررسی عددی قید $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ لحاظ

مرزی شامل الف- همه مرزها کاملاً گیردار و ب- همه مرزها تکیه‌گاه ساده مورد مطالعه قرار می‌گیرد که به ترتیب با علامت اختصاری C و S نمایش داده می‌شوند. صرف‌نظر از بیان جزئیات، در نهایت معادلات مربوط به شرایط معرفی شده به صورت زیر قابل بیان است:

$$S \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ y=0, b \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{cases} \quad C \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}=0 \\ y=0, b \\ \frac{\partial w}{\partial y}=0 \end{cases} \quad (26)$$

در واقع با پیاده‌سازی روش تغییرات که پیشتر برای استخراج معادله دیفرانسیل به آن اشاره شد، شرایط مرزی نیز به دست می‌آیند [۲۵]. در نهایت فرم خلاصه شده روابط مربوطه برای شرایط معرفی شده در بالا به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$S \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \\ y=0, b \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0 \end{cases} \quad C \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \\ y=0, b \\ \frac{\partial w}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0 \end{cases} \quad (27)$$

۴- حل معادلات

در این‌جا از روش تقریبی صفر بودن انتگرال مانده‌های وزن‌دار روی حوزه هندسه مسئله با رویکرد گلرکین برای حل معادلات حاکم استفاده می‌شود. بر اساس این روش، مجهول اصلی به صورت ترکیب خطی از توابع تقریب درون‌یاب، $\Psi_k(x, y)$ ، با ضرایب ثابت α_k مطابق رابطه زیر انتخاب می‌شود:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{mn} \alpha_k \Psi_k(x, y) \quad (28)$$

لازم به ذکر است که توابع تقریب به گونه‌ای انتخاب می‌گردد که

شرایط مرزی مسئله را ارضا نمایند. در این‌جا برای ساده‌تر شدن بیان شرایط مرزی، تبدیل مختصات از دستگاه اولیه $x-y$ به دستگاه بی‌بعد $\zeta-\eta$ با مبدأ منطبق بر مرکز ورق انجام می‌شود. لازم به ذکر است که برای تغییر متغیرها از دستگاه اولیه به دستگاه جدید، ماتریس تبدیل به نام ژاکوبین انتقال به کار می‌رود که در اینجا با ماتریس $[J]$ نمایش داده می‌شود:

$$\zeta = \frac{1}{a}(2x-a), \quad \eta = \frac{1}{b}(2y-b) \quad (29\text{-الف})$$

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -1 \leq \zeta, \quad \eta \leq 1$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (29\text{-ب})$$

در ادامه، هر تابع تقریب دو متغیره به صورت حاصل ضرب دو تابع تک متغیره انتخاب می‌شود که در این‌جا از توابع هارمونیک زیر به ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار استفاده می‌شود که با بالا نویس S و C مشخص شده‌اند:

$$\Psi_k^S = \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{2}\right) \quad (30\text{-الف})$$

$$\Psi_k^C = \cos^2\left(\frac{m\pi\zeta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi\eta}{2}\right) \quad (30\text{-ب})$$

با قرار دادن پاسخ انتخابی ارائه شده در رابطه (۲۸) در هر کدام از معادلات دیفرانسیل به دست آمده در بخش قبل و پیاده‌سازی روش صفر نمودن انتگرال مانده‌های وزن‌دار گلرکین، معادلاتی جبری با شکل کلی ماتریسی زیر حاصل می‌شود که در واقع یک معادله مقدار ویژه است. تعداد این معادلات ماتریسی متناسب با تعداد جملات انتخابی در تابع تقریب است:

$$\{[A] - \Omega[B]\}\{\alpha\} = 0 \quad (31)$$

Ω بار بدون بعد در راستای یک و برابر مقدار ویژه ماتریس‌های سفتی رابطه (۳۱) است.

در معادله فوق، بردار ستونی نشان‌دهنده بردار ضرایب ثابت و جملات تابع تقریب و ماتریس‌های $[A] = A_{ij}$ و

$$B_{ij}^{2ndSG} = \int_{-1-1}^{+1+1} \int \psi_i \left[\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \zeta^2} + \Lambda \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \eta^2} \right] |\mathbf{J}| d\zeta d\eta \quad (\text{ب-۳۳})$$

$$A_{ij}^{2ndIG} = \int_{-1-1}^{+1+1} \int \psi_i \left\{ \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \zeta^4} + \right. \\ \left. 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{11}} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \eta^4} - \right. \\ \left. \xi^2 \left(\frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^6} + \frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^4 \partial \eta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{11}} \left(\frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^4 \partial \eta^2} + \frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^2 \partial \eta^4} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{D_{22}}{D_{11}} \left(\frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \eta^6} + \frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^2 \partial \eta^4} \right) \right\} |\mathbf{J}| d\zeta d\eta \quad (\text{الف-۳۴})$$

$$B_{ij}^{2ndIG} = \int_{-1-1}^{+1+1} \int \psi_i \left[1 - \xi^2 \nabla^2 \right] \left[\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \zeta^2} + \Lambda \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \eta^2} \right] |\mathbf{J}| d\zeta d\eta \quad (\text{ب-۳۴})$$

$$A_{ij}^{MCS} = \int_{-1-1}^{+1+1} \int \psi_i \left\{ \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \zeta^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{11}} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} \right. \\ \left. + \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \eta^4} \right\} |\mathbf{J}| d\zeta d\eta \quad (\text{الف-۳۵})$$

$$B_{ij}^{MCS} = \int_{-1-1}^{+1+1} \int \psi_i \left[\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \zeta^2} + \Lambda \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \eta^2} \right] |\mathbf{J}| d\zeta d\eta \quad (\text{ب-۳۵})$$

۵- نتایج عددی و بحث

خواص صفحه گرافین مورد بررسی مطابق جدول ۱ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که طی حل عددی، ضخامت نانوصفحه $h = 0.34 \text{ nm}$ در نظر گرفته شده و ابعاد آن متغیر است و در مواقعی که ابعاد صفحه ذکر نشده، مقدار $a = b = 5 \text{ nm}$ مدنظر است.

$[\mathbf{B}] = B_{ij}$ ماتریس‌های سفتی نامیده می‌شوند که متناسب با هر کدام از تئوری‌های ساختاری معرفی شده دارای مقادیر متفاوتی خواهند بود. با پیاده‌سازی روش حل بر روی معادله حاکم به دست آمده با کاربرد تئوری ساختاری دیفرانسیلی کاهیده ارینگن، معادله (۲۱)، این ماتریس‌ها به صورت زیر به دست می‌آید که برای مشخص شدن آن‌ها بالانویس خاص آن به کار رفته است:

$$A_{ij}^{TDNL} = \int_{-1-1}^{+1+1} \int \psi_i \left\{ \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \zeta^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{11}} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \eta^4} \right\} |\mathbf{J}| d\zeta d\eta \quad (\text{الف-۳۲})$$

$$B_{ij}^{TDNL} = \int_{-1-1}^{+1+1} \int \psi_i \left\{ (1 - \xi^2 \nabla^2) \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \zeta^2} + \Lambda \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \eta^2} \right) \right\} |\mathbf{J}| d\zeta d\eta \quad (\text{ب-۳۲})$$

در معادلات فوق، $|\mathbf{J}|$ دترمینان ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات، نسبت بارهای نرمال $\Lambda = N_y / N_x$ و هم‌چنین بار صفحه‌ای $N_{xy} = 0$ لحاظ شده است. به ترتیبی مشابه، با پیاده‌سازی روش حل بر روی معادلات (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) که به ترتیب مربوط به کاربرد تئوری‌های گرادیان کرنش مرتبه دو، گرادیان ضمنی مرتبه دو و زوج تنش تغییر یافته، ماتریس‌های سفتی مسأله مقدار ویژه به شرح زیر به دست می‌آیند که برای نمایش آن‌ها از بالانویس‌های معرفی شده مربوطه استفاده شده است:

$$A_{ij}^{2ndSG} = \int_{-1-1}^{+1+1} \int \psi_i \left\{ \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \zeta^4} + \right. \\ \left. 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{11}} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial \eta^4} - \right. \\ \left. \xi^2 \left(\frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^6} + \frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^4 \partial \eta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{11}} \left(\frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^4 \partial \eta^2} + \frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^2 \partial \eta^4} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{D_{22}}{D_{11}} \left(\frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \eta^6} + \frac{\partial^6 \psi_j}{\partial \zeta^2 \partial \eta^4} \right) \right\} |\mathbf{J}| d\zeta d\eta \quad (\text{الف-۳۳})$$

جدول ۱- خواص الاستیک صفحه تک لایه گرافین [۱۴]

ν_{21}	ν_{12}	E_2 (GPa)	E_1 (GPa)	
۰/۳	۰/۳	۱۰۶۰	۱۰۶۰	ایزوتروپیک
۰/۲۷	۰/۳	۱۵۸۸	۱۷۶۶	ارتوتروپیک

جدول ۲- مطالعه همگرایی بار کمانش ورق گرافین ایزوتروپیک با شرایط تکیه‌گاهی ساده تحت فشار دومیحوری با لحاظ $\xi = 0.4$ بر اساس تئوری غیرمحللی کاهیده

پارامتر کمانش				
تعداد توابع تقریب	گلرکین با استفاده از توابع تقریب هارمونیک (تحقیق جاری)	گلرکین با استفاده از توابع تقریب لاگرانژی [۱۶]	مربعات دیفرانسیلی	حل تحلیلی ناویر [۱۶, ۲۶]
(۳ و ۳)	۴/۷۴۷۰	۴/۷۶۱۹	-	
(۴ و ۴)	۴/۷۴۷۰	۴/۷۶۱۹	-	
(۵ و ۵)	۴/۷۴۷۰	۴/۷۴۷۰	-	۴/۷۴۷۰
(۶ و ۶)	۴/۷۴۷۰	۴/۷۴۷۰	-	
(۷ و ۷)	۴/۷۴۷۰	۴/۷۴۷۰	۴/۷۴۷۰	

۱-۵- همگرایی و اعتبارسنجی نتایج

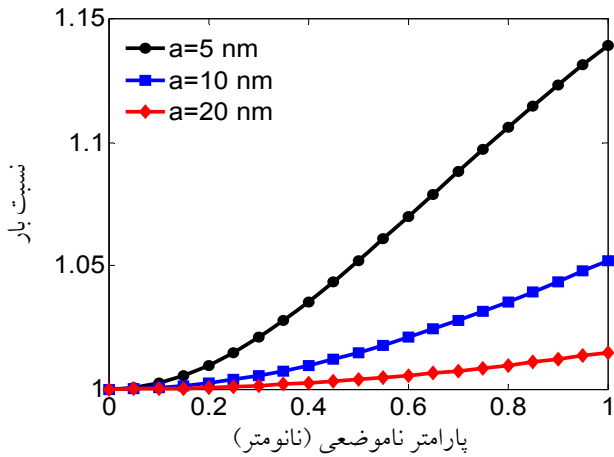
به منظور بررسی سرعت همگرایی و اعتبارسنجی روش حل، مقایسه‌ای بین نتایج حل حاضر و نتایج گزارش شده در سایر مراجع انجام می‌شود. همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده برقرار است. افزون بر این سرعت همگرایی نتایج در روش حل حاضر و با استفاده از توابع تقریب هارمونیک سریعتر است. همچنین با انتخاب چهار تابع درون یاب در راستای مورد نظر، پاسخ همگرا می‌شود. بنابراین در ادامه، از چهار تابع درون یاب در هر راستا استفاده می‌شود.

عددی این پارامتر چه تأثیری بر نتایج دارد. به منظور پاسخ به این سؤال، به‌ازای مقادیر مختلف از این پارامتر و همچنین برای اندازه‌های مختلف گرافین، بار بحرانی کمانش و نسبت بار کمانش تعیین می‌شود. منظور از این نسبت، نسبت بار کمانش محاسبه شده از هر کدام از تئوری‌های غیر محللی به بار محاسبه شده از تئوری کلاسیک است که در واقع با صفر کردن ضریب غیر محللی در هر کدام از تئوری‌های غیر محللی به دست می‌آید.

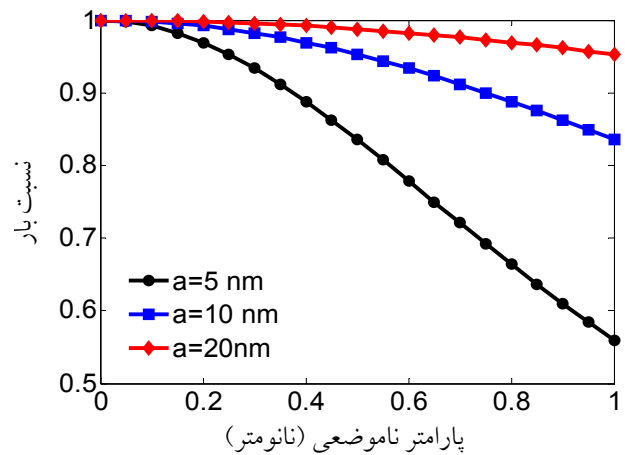
به‌عنوان نمونه در شکل‌های (۲) تا (۵) نسبت بار کمانش بر حسب ضریب اندازه برای ابعاد مختلف گرافین مربعی ارتوتروپ تحت فشار دومیحوری یکنواخت و با تکیه‌گاه‌های ساده بر اساس چهار تئوری غیر محللی مورد بررسی، ترسیم شده است. با توجه به نمودارهای ارائه شده، بار بحرانی کمانش در هر چهار تئوری به اثر اندازه وابسته است. مشاهده می‌شود که در نمودارهای مربوط به اندازه صفحه کوچک‌تر، نمو تغییرات

۲-۵- اثر ضریب اندازه و ابعاد نانو صفحه بر رفتار کمانش

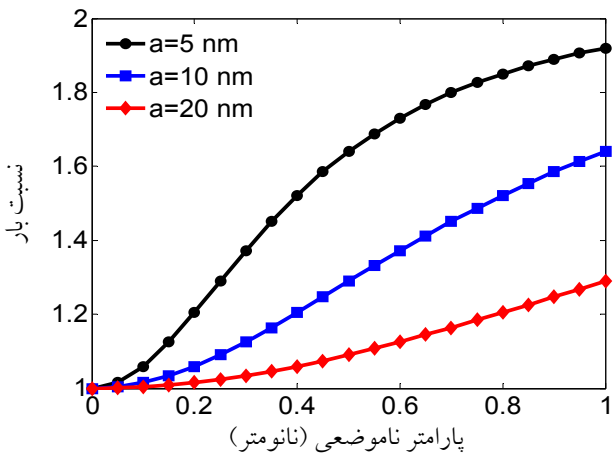
تفاوت اصلی تئوری‌های وابسته به مقیاس مورد استفاده در تحقیق جاری نسبت به تئوری کلاسیک، در وارد شدن پارامتر اثر اندازه است. حال سؤال این است که به صورت



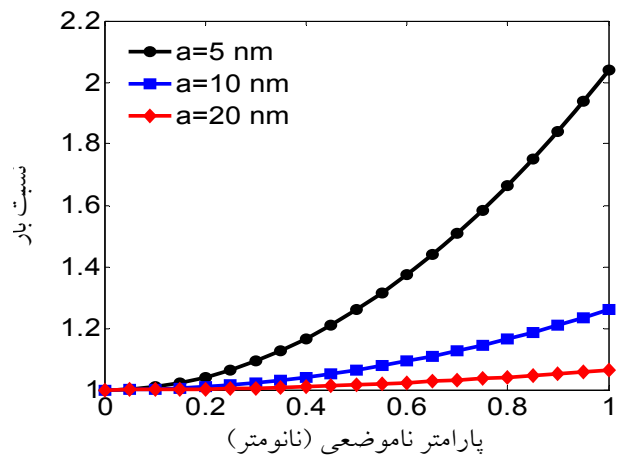
شکل ۴- نسبت بار کماتش برحسب ضریب غیر محلی برای صفحه گرافین با اندازه‌های مختلف- با اعمال تئوری گرادیان کرنش ضمنی مرتبه دو



شکل ۲- نسبت بار کماتش برحسب ضریب غیر محلی برای صفحه گرافین با اندازه‌های مختلف- با اعمال تئوری غیر محلی کاهیده



شکل ۵- نسبت بار کماتش برحسب ضریب غیر محلی برای صفحه گرافین با اندازه‌های مختلف- با اعمال تئوری زوج تنش تغییر یافته



شکل ۳- نسبت بار کماتش برحسب ضریب غیر محلی برای صفحه گرافین با اندازه‌های مختلف- با اعمال تئوری گرادیان کرنش مرتبه دو

واحد و در مقابل در تئوری گرادیان کرنش مرتبه دو، گرادیان ضمنی و زوج تنش این مقدار بزرگ‌تر از واحد است. این نکته بدان معناست که برای یک نانوصفحه با ابعاد ثابت، هر چه ضریب اندازه افزایش یابد تئوری غیر محلی کاهیده ارینگن بار بحرانی کماتش را کمتر پیش‌بینی می‌نماید و در مقابل تئوری‌های گرادیان کرنش مرتبه دو، گرادیان ضمنی و زوج تنش مقدار آنرا بیشتر پیش‌بینی می‌کند. حال این سؤال مطرح می‌شود که کدام یک از این پیش‌بینی‌ها صحیح‌تر است. بهترین روش برای پاسخ به این سؤال مقایسه نتایج حاصل با مقادیر واقعی اندازه‌گیری شده است. واقعیت این است که همان‌گونه

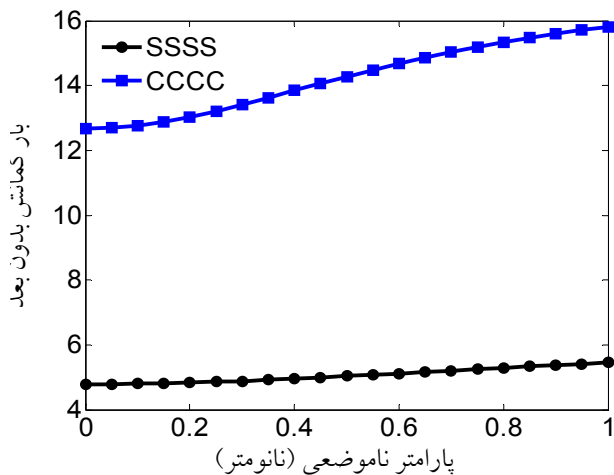
نمودارها یا به بیانی دیگر شدت تغییرات آن‌ها با ضریب اندازه، بسیار شدیدتر از نمودارهای مربوط به صفحه بزرگتر است. بنابراین، می‌توان گفت که در اندازه‌های صفحه کوچک تأثیر ضریب اندازه زیاد است و با افزایش ابعاد صفحه، تأثیر این پارامتر تضعیف می‌گردد. بدین ترتیب هر چهار فرمول‌بندی هدف اولیه توسعه تئوری الاستیسیته وابسته به مقیاس، یا به عبارتی لحاظ کردن اثر اندازه را برآورده می‌کند. با این همه، مشاهده می‌شود که از منظر تأثیر ضریب اندازه، نتایج تئوری دیفرانسیلی کاهیده ارینگن از نظر نوع وابستگی در تضاد با بقیه است به گونه‌ای که، همواره نسبت بار بحرانی کمتر از

که در مقدمه بیان شد، داده‌های تجربی اندکی در مورد مطالعه تأثیر اندازه نانوصفحه‌ها بر روی ویژگی‌های آن گزارش شده است. بر اساس نتایج روش دینامیک‌ملکولی که توسط نی و همکاران گزارش شده است در محدوده ابعاد صفحه دو تا حدود نه نانومتر، مدول یانگ گرافین چندان تغییر نمی‌کند [۴]. از سوی دیگر وانگ و همکاران با استفاده از روش دینامیک‌ملکولی پیش‌بینی می‌کنند که با افزایش ابعاد گرافین مدول الاستیک آن افزایش یافته و به یک مقدار حدی میل می‌کند [۵]. در کنار این‌ها گیاناپولوس و همکاران گزارش کرده‌اند که با افزایش اندازه عرض صفحه گرافین تا حدود دو نانومتر برخی ضرایب الاستیک آن کاهش می‌یابد و پس از آن شروع به افزایش کرده و به یک مقدار حدی میل می‌کند [۶]. نظر اخیر در مورد نوع وابستگی خواص به اندازه با عقیده نویسندگان تحقیق جاری تطابق بیشتری دارد. در ورق با اندازه‌های بسیار کوچک تعداد اتم‌های تشکیل‌دهنده آن بسیار کم است و انتظار می‌رود که سفتی الاستیک کل در محدوده سفتی پیوند محکم بین اتم‌های کربن باشد. از طرف دیگر با افزایش اندازه صفحه، تعداد اتم‌ها افزایش یافته و برآیند پیوندهای بین اتمی در راستاهای مختلف در خواص کلی تأثیر می‌گذارند که این مسأله می‌تواند باعث کاهش ضریب الاستیک گردد. با این حال با افزایش بیشتر اندازه صفحه، تعداد و راستای پیوندها نیز به‌طور چشم‌گیری افزایش یافته و از لحاظ آماری ویژگی‌ها به سمت پایداری به یک مقدار حدی پیش می‌رود. با جمع‌بندی این توضیحات، سفتی صفحه نمی‌تواند با کاهش ابعاد آن به‌طور پیوسته شکل کاهشی یا افزایشی داشته باشد بلکه پیش‌بینی می‌شود در طی مسیر تغییر خود به حد پایداری به‌صورت مجانبی میل کند. با توجه به اینکه طی کاهش ابعاد نانوصفحه، تئوری غیر محلی کاهیده ارینگن کاهش مداوم و سایر تئوری‌ها، افزایش پیوسته سفتی را پیش‌بینی می‌کنند به نظر می‌رسد هیچ یک از آن‌ها نمی‌توانند رفتار نانو صفحه در اندازه‌های مختلف را به‌طور دقیق نمایندگی کند. از این رو می‌توان پیش‌بینی کرد که ترکیبی

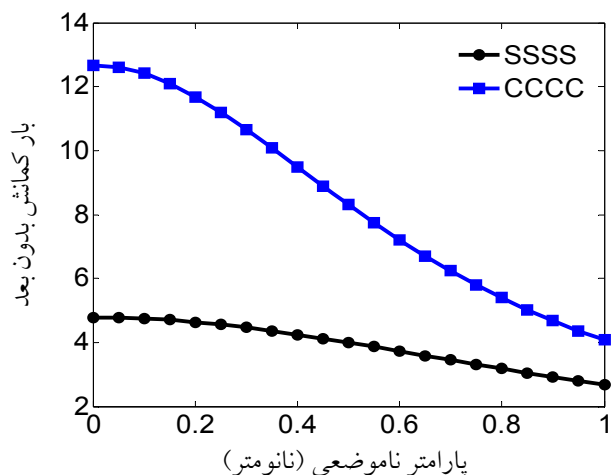
از تئوری‌های وابسته به مقیاس، بهتر می‌تواند رفتار وابستگی به اندازه را توصیف کند. در این راستا می‌توان گفت که، بهتر است در اندازه‌های صفحه بسیار کوچک، یکی از تئوری‌های گرادیان کرنش مرتبه دو، گرادیان ضمنی مرتبه دو یا زوج تنش تغییر یافته استفاده شود و برای صفحه با اندازه‌های بزرگتر، تئوری دیفرانسیلی کاهیده ارینگن سازگارتر به نظر می‌رسد نوع تغییرات نمودارهای مربوطه به آن دارای فرم مجانبی می‌باشد. علی‌رغم این‌ها نویسندگان تحقیق حاضر معتقدند که این نوع وابستگی به اندازه، در مواد مختلف یکسان نبوده و با توجه به نوع پیوند بین اتم‌های آن می‌تواند با کاهش اندازه نانوصفحه سفتی آن افزایش یا کاهش یابد. با این همه، لازم به‌ذکر است که بر اساس بیشتر نتایج ارائه شده با روش دینامیک‌ملکولی، مدول الاستیک گرافین با افزایش ابعاد آن افزایش یافته و به مقدار حدی ثابتی میل می‌کند لذا می‌توان گفت تئوری کاهیده ارینگن تطابق بیشتری با این دسته نتایج دارد. بر اساس آن با کاهش ضریب غیرمحلی نسبت بار بحرانی افزایش یافته و به مقدار حدی واحد میل می‌کند. به عبارت دیگر سفتی الاستیک گرافین با افزایش ابعاد صفحه افزایش می‌یابد، ولی برای پاسخ قطعی به نوع وابستگی خواص به ابعاد باید اطلاعات جامعی از اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی برای مواد مختلف در اختیار باشد.

۵-۳- اثر شرایط مرزی بر رفتار کمانش

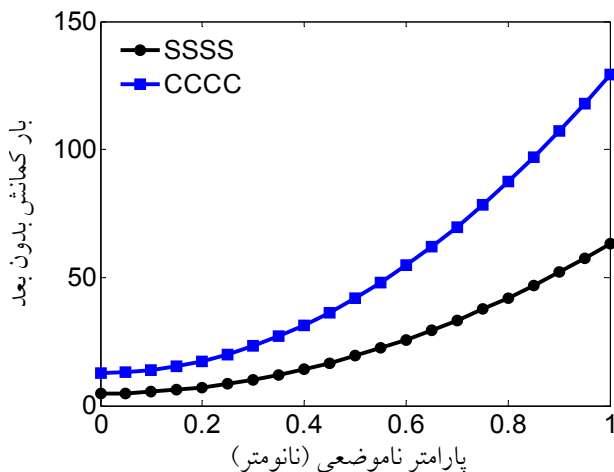
در شکل‌های (۶) تا (۹) وابستگی بار کمانش بدون بعد به ضریب اندازه برای صفحه گرافین با مشخصات ارتوتروپیک تحت فشار دومیحوری، با تکیه‌گاه ساده و گیردار ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که بر اساس هر چهار تئوری، بار کمانش بدون بعد و اثر ضریب اندازه بر رفتار کمانش به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی گیردار بیش از شرایط تکیه‌گاهی ساده است. با دقت بیشتر در نمودارها مشاهده می‌شود که نمو تغییرات نمودارهای مربوط به تکیه‌گاه گیردار در هر چهار تئوری بیش از شرایط تکیه‌گاه ساده است. به‌علاوه، مشاهده می‌شود که به ازای



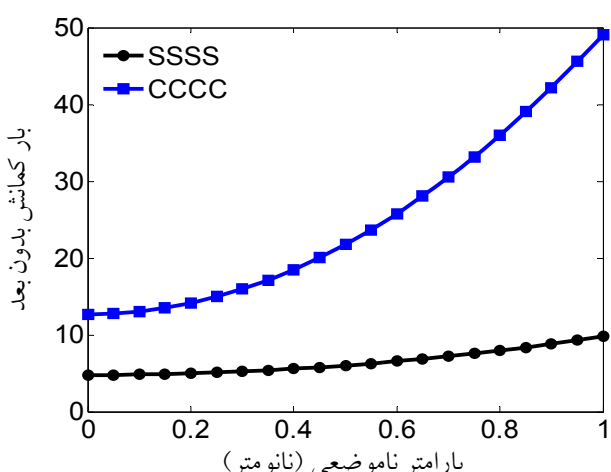
شکل ۸- بار کمانش بدون بعد بر حسب ضریب غیرمحلّی برای صفحه گرافین به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار- با اعمال تئوری گرادیان ضمنی مرتبه دو



شکل ۶- بار کمانش بدون بعد بر حسب ضریب غیر محلّی برای صفحه گرافین به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار- با اعمال تئوری غیرمحلّی کاهیده



شکل ۹- بار کمانش بدون بعد بر حسب ضریب غیرمحلّی برای صفحه گرافین به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار- با اعمال تئوری زوج تنش تغییر یافته



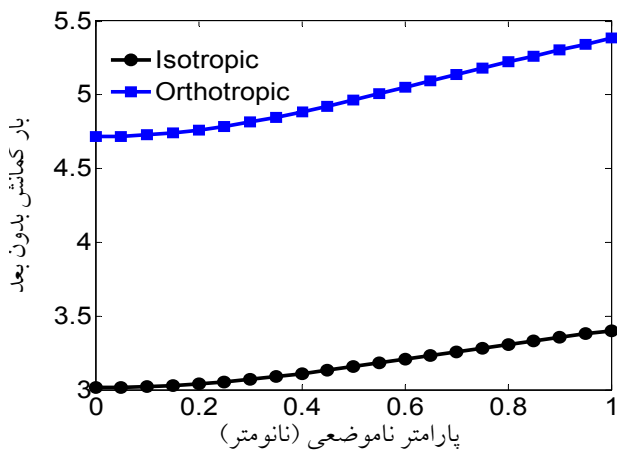
شکل ۷- بار کمانش بدون بعد بر حسب ضریب غیر محلّی برای صفحه گرافین به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار- با اعمال تئوری گرادیان کرنش مرتبه دو

کرنشی مرتبه دو، گرادیان ضمنی مرتبه دو و تا حدی زوج تنش تغییر یافته دارد ولی تأثیر کمی آن در هر کدام از آنها متفاوت است. لذا مجدد یادآوری می‌گردد که برای تعیین مقدار مناسب ضریب اندازه به نتایج تجربی بیشتر با طیف گسترده‌تر نیاز می‌باشد.

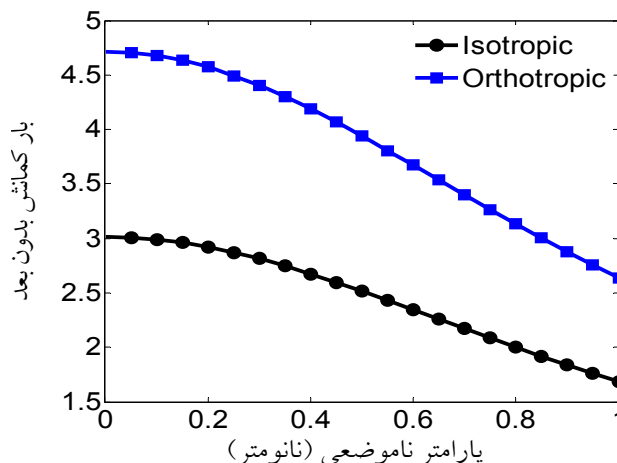
۴-۵- اثر خواص الاستیک بر رفتار کمانش

به‌منظور بررسی اثرات غیر ایزوتروپ بودن گرافین، بار کمانش

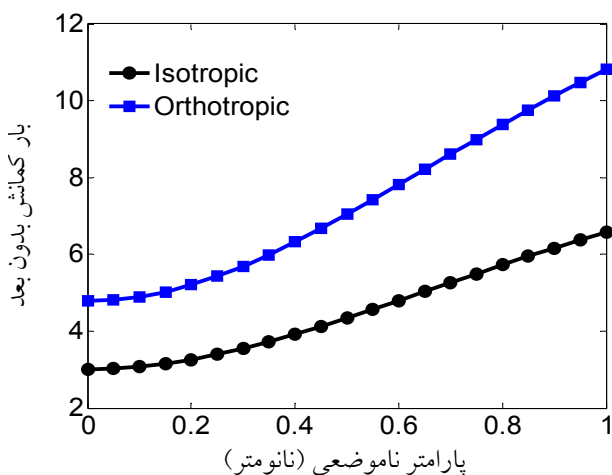
ضریب اندازه صفر، همه تئوری‌ها پاسخ یکسانی می‌دهند در حالی که با افزایش ضریب مذکور تفاوت پاسخ‌های آن‌ها بیشتر می‌شود. از طرفی، با اعمال تئوری دیفرانسیلی کاهیده ارینگن، افزایش ضریب اندازه باعث کاهش بار کمانش می‌شود در حالی که در سایر تئوری‌ها وابستگی معکوس است. مقایسه عددی مقادیر به‌دست آمده نشان می‌دهد که ضریب غیرمحلّی از نظر کیفی تأثیر مشابهی در تئوری‌های گرادیان



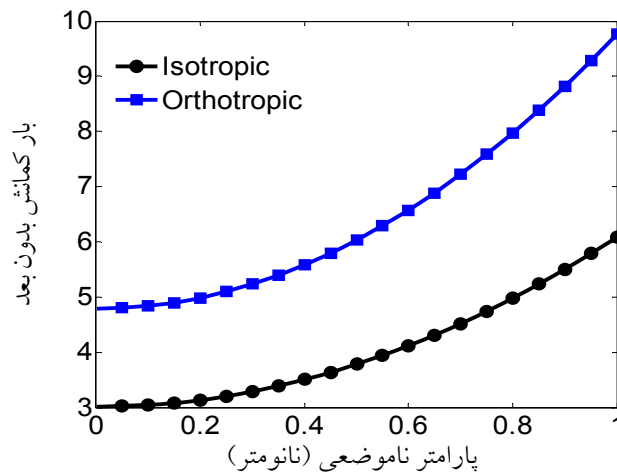
شکل ۱۲- اثر خواص الاستیک بر بار کمانش بدون بعد
گرافین به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده- با اعمال
تئوری گرادیان ضمنی مرتبه دو



شکل ۱۰- اثر خواص الاستیک بر بار کمانش بدون بعد
گرافین به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده- با اعمال
تئوری غیرمحلّی کاهیده



شکل ۱۳- اثر خواص الاستیک بر بار کمانش بدون بعد گرافین
به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده- با اعمال تئوری زوج
تنش تغییر یافته



شکل ۱۱- اثر خواص الاستیک بر بار کمانش بدون بعد گرافین
به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده- با اعمال تئوری گرادیان
کرنش مرتبه دو

ضرایب نظیر در حالت ایزوتروپ هستند، بزرگ‌تر بودن بار بحرانی کمانش صفحه ارتوتروپ نسبت به صفحه ایزوتروپ منطقی به نظر می‌رسد.

۶- نتیجه‌گیری

طی تحقیق جاری، این نتیجه حاصل شد که مدلسازی نانوصفحه وابسته به معادله الاستیسیته ساختاری است؛ به‌طوری که مرتبه معادله دیفرانسیل حاکم متناسب با نوع معادله

بدون بعد ورقه تک‌لایه گرافین ایزوتروپ و ارتوتروپ بر اساس هر چهار تئوری برحسب تغییرات ضریب غیرمحلّی به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی ساده، در شکل‌های (۱۰) تا (۱۳) نشان‌داده شده‌است. مشاهده می‌شود که بر اساس پیش‌بینی هر چهار تئوری بار کمانش بدون بعد ورقه گرافین ارتوتروپیک به‌ازای تمام مقادیر ضریب اندازه، بیش از بار کمانش بدون بعد ورقه گرافین با مشخصات ایزوتروپ است. با توجه به این که مطابق جدول ۱، مدول یانگ در راستای ۱ و ۲ ارتوتروپی بیش از

نمی‌توان با قاطعیت تئوری مناسب برای مدل‌سازی نانوصفحات را پیشنهاد داد. با این وجود به‌نظر می‌رسد هر کدام از تئوری‌ها برای محدوده‌ای از اندازه نانوصفحه سازگار است لذا ترکیبی از آنها می‌تواند برای مدل‌سازی نانوصفحات مناسب باشد. همچنین اثرات غیر ایزوتروپ بودن و نوع شرایط تکیه‌گاهی بر روی بار کمانش مورد مطالعه قرار گرفت و این نتیجه حاصل شد که ظرفیت کمانشی صفحه ارتوتروپ بیش از صفحه ایزوتروپ است.

ساختاری است. به‌علاوه نشان داده شد که چگونگی بروز اثر ضریب اندازه صفحه به نوع معادله ساختاری وابسته است. بر اساس نتایج عددی به‌دست آمده، با اعمال تئوری دیفرانسیلی غیرمحملی کاهیده، افزایش پارامتر غیرمحملی باعث کاهش بار کمانش می‌شود در حالی که طبق پیش‌بینی تئوری گرادیان کرنش مرتبه دو، تئوری گرادیان ضمنی مرتبه دو و تئوری زوج تنش تغییر یافته، بار کمانش افزایش می‌یابد. مرور مراجع نشان می‌دهد که یکتایی در نتایج گزارش شده وجود ندارد لذا

مراجع

- Chasiotis, I., and Knauss, W. G., "The Mechanical Strength of Polysilicon Films: Part 2. Size Effects Associated with Elliptical and Circular Perforations", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1551-1572, 2003.
- Wang, C., Frogley, M. D., Cinque, G., Liu, L. Q., and Barber, A. H., "Deformation and Failure Mechanisms in Graphene Oxide Paper Using in Situ Nanomechanical Tensile Testing", *Carbon*, Vol. 63, pp. 471-477, 2013.
- Jafari, A., Khatibi, A. A., and Mashhadi, M. M., "Evaluation of Mechanical and Piezoelectric Properties of Boron Nitride Nanotube: A Novel Electrostructural Analogy Approach", *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Vol. 9, pp. 461-468, 2012.
- Ni, Z., Bu, H., Zou, M., Yi, H., K. Bi, and Chen, Y., "An Isotropic Mechanical Properties of Graphene Sheets from Molecular Dynamics", *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 405, pp. 1301-1306, 2010.
- Wang, C. G., Lan, L., Liu, Y. P., and Tan, H. F., "Multiple Component Correlation Model for Elastic Modulus of Single Layer Graphene Sheets", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 56, pp. 372-376, 2014.
- Giannopoulos, G. I., Liosatos, I. A., and Moukanidis, A. K., "Parametric Study of Elastic Mechanical Properties of Graphene Nanoribbons by a New Structural Mechanics Approach", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, pp. 124-134, 2011.
- Narendar, S., "Buckling Analysis of Micro-/Nano-Scale Plates Based on Two-Variable Refined Plate Theory Incorporating Nonlocal Scale Effects", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 3093-3103, 2011.
- Akgöz, B., and Civalek, Ö., "Strain Gradient Elasticity and Modified Couple Stress Models for Buckling Analysis of Axially Loaded Micro-Scaled Beams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, pp. 1268-1280, 2011.
- Lim, C. W., "On the Truth of Nanoscale for Nanobeams Based on Nonlocal Elastic Stress Field Theory: Equilibrium, Governing Equation and Static Deflection", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 31, pp. 37-54, 2010.
- Song, F., Huang, G. L., Park, H. S., and Liu, X. N., "A Continuum Model for the Mechanical Behavior of Nanowires Including Surface and Surface-Induced Initial Stresses", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, pp. 2154-2163, 2011.
- Pradhan, S. C., and Murmu, T., "Small Scale Effect on the Buckling of Single-Layered Graphene Sheets under Biaxial Compression via Nonlocal Continuum Mechanics", *Computational Materials Science*, Vol. 47, pp. 268-274, 2009.
- Murmu, T., Sienz, J., Adhikari, S., and Arnold, C., "Nonlocal Buckling of Double-Nanoplate-Systems under Biaxial Compression", *Composites: Part B*, Vol. 44, pp. 84-94, 2013.
- Ghorbanpour Arani, A., Kolahchi, R., and Vossough, H., "Buckling Analysis and Smart Control of SLGS Using Elastically Coupled PVDF Nanoplate Based on the Nonlocal Mindlin Plate Theory", *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 407, pp. 4458-4465, 2012.
- Arani, A. G., Shiravand, A., Rahi, M., and Kolahchi, R., "Nonlocal Vibration of Coupled DLGS Systems Embedded on Visco-Pasternak Foundation", *Physica B*, Vol. 407, pp. 4123-4131, 2012.
- Eringen, A. C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, New York: Springer-Verlag, 2002.
- Babaei, H., and Shahidi, A. R., "Small-Scale Effects on the Buckling of Quadrilateral Nanoplates Based on Nonlocal Elasticity Theory Using the Galerkin Method", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, pp. 1051-1062, 2011.
- Aksencer, T., and Aydogdu, M., "Levy Type Solution Method for Vibration and Buckling of Nano Plates Using Non Local Elasticity Theory", *Physica*

- E*, Vol. 43, pp. 954–959, 2011.
18. Narendar, S., and Gopalakrishnan, S., "Scale Effects on Buckling Analysis of Orthotropic Nanoplates Based on Nonlocal Two-Variable Refined Plate Theory", *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 395-413, 2012.
 19. Aifantis, E. C., "On Thegradient Approach – Relation to Eringen's Nonlocal Theory", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, pp. 1367–1377, 2011.
 20. Mindlin, R. D., and Eshel, N. N., "On First Strain-Gradient Theories in Linear Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, pp. 109–124, 1968.
 21. Lam, D. C. C., Yang, F., Chong, A. C. M., Wang, J., and Tong, P., "Experiments and Theory Strain Gradient Elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1477–1508, 2003.
 22. Yang, F., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2731-2743, 2002.
 23. Venstel, E., and Krauthammer, T., *Thin Plates and Shells: Theory :Analysis, and Applications*, 1st ed.: CRC Press, 2001.
 24. Tsiatas, G. C., "A New Kirchhoff Plate Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 2757-2764, 2009.
 25. Papargyri-Beskou, S., Giannakopoulos, A. E., and Beskos, D. E., "Variational Analysis of Gradient Elastic Flexural Plates Under Static Loading", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 2755-2766, 2010.
 26. Malekzadeh, P., Setoodeh, A. R., and Alibeygi Beni, A., "Small Scale Effect on the Thermal Buckling of Orthotropic Arbitrary Straight-Sided Quadrilateral Nanoplates Embedded in an Elastic Medium", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2083-2089, 2011.