

توسعه روش نوار محدود دقیق برای ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی متقارن ممتد دارای سرعت در امتداد طولی

محمدرضا سلطانی^۱، شهاب‌الدین حاتمی^{۱*} و مجتبی ازهری^۲

۱. دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یاسوج

۲. دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۱۰/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۱۱/۲۸)

چکیده - در این مقاله، روش نوار محدود دقیق برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق نازک ساندویچی ناهمسان در ضخامت متقارن دارای حرکت محوری توسعه داده می‌شود. برای این منظور، ورق مورد بررسی به تعداد معدودی نوار محدود تقسیم می‌شود. تابع تغییر شکل هر نوار، در راستای عمود بر حرکت محوری به شکل توابع مثلثاتی فرض شده و تابع تغییر شکل در راستای دیگر به صورت نمایی خواهد بود به گونه‌ای که معادله دیفرانسیل حرکت ورق ساندویچی مبتنی بر تئوری کلاسیک ورق و شرایط مرزی مسئله را ارضاء نماید. بدین ترتیب با تعریف بردارهای تغییر مکان و نیروهای خطوط گرهی، ماتریس سختی دقیق هر نوار محدود به صورت تابعی غیرجبری از فرکانس‌های ارتعاش آزاد، سرعت محوری، نیروهای درون صفحه، توان کسر حجمی لایه‌های ناهمسان و سایر پارامترهای هندسی و مصالح مسئله استخراج می‌گردد. با تشکیل ماتریس سختی کل ورق در حال حرکت، امکان محاسبه فرکانس‌های ارتعاش آزاد دقیق ورق ساندویچی در حالی که تحت نیروهای درون صفحه بروی تعدادی غلتک موازی در حال حرکت است، فراهم می‌گردد. با مقایسه فرکانس‌های به دست آمده با نتایج تحقیقات سایر محققین، صحت و دقت روش نوار محدود دقیق توسعه یافته تأیید می‌شود. نتایج دقیق به دست آمده از این تحلیل می‌تواند به عنوان مرجعی جهت بررسی صحت و دقت سایر روش‌های عددی به کار گرفته شود.

واژگان کلیدی: ارتعاش آزاد، ورق ساندویچی، مواد ناهمسان در ضخامت، تئوری کلاسیک ورق، نوار محدود دقیق، حرکت محوری.

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: hatami@yu.ac.ir

Exact Finite Strip Method for Free Vibration of Axially Moving Sandwich Plate with FGM Face Sheets

M. Soltani¹, S. Hatami¹ and M. Azhari²

1. Civil Engineering Department, Yasouj University

2. Civil Engineering Department, Isfahan University of Technology

Abstract: In this article, an exact finite strip method is developed for free vibration of axially moving thin sandwich plate made of functionally graded material (FGM). For this purpose, the plate is divided to several finite strips. Displacement function of the strip along direction perpendicular to moving direction is assumed sinusoidal. The function along another direction has an exponential form as satisfies the differential equation governing the vibration of such sandwich plates and the boundary conditions of the problem. By defining nodal displacement and nodal forces at any line of a finite strip, the exact stiffness matrix of the strip is extracted. This matrix is a transcendental function of natural frequencies, axial speed, membrane forces, volume fraction exponent, and other parameters of geometry and material characteristics of the problem. Using global stiffness matrix of the plate, the natural frequencies of the plate which is under in-plane forces and moves on several rollers are calculated. Comparison studies are performed to verify the validity of the present results. The exact vibration solutions obtained for such plates are indeed valuable as they serve as important benchmark solutions for checking the convergence and accuracy of numerical methods for the analysis of such plates.

Keywords: Free vibration, FGM, plate, Exact Finite Strip, Classical Plate Theory.

فهرست علائم

خواص ماده در سطح بالایی	T_t	بعد ورق در راستای x	b
خواص ماده در سطح پایینی	T_b	سرعت محوری نرمال شده	c
زمان	t	سختی خمشی ورق	D
سرعت محوری در راستای x	v	مدول الاستیسیته لایه j	$E^{(j)}$
کسر حجمی	V_c	ضخامت ورق	h
جابه‌جایی عمود بر صفحه ورق	w	واحد موهومی برابر $\sqrt{-1}$	i
محور مختصات عمود بر صفحه ورق	z	شماره لایه	j
علائم یونانی		نیروی‌های بی‌بعد درون‌صفحه ورق	k
نسبت طول به عرض	a	بعد ورق در راستای y	L
نسبت ضخامت به طول	b	بعد یک نوار ورق در امتداد x	l
چگالی در لایه j	$r^{(j)}$	گشتاورهای داخلی ورق	M_x, M_y, M_{xy}
چگالی ماده‌ای در سطح پایینی	r_b	نیروی‌های درون‌صفحه ورق	N_x, N_y
چگالی ماده‌ای در سطح بالایی	r_t	شماره لایه	n
فرکانس ارتعاش آزاد ورق	w	توان کسر حجمی	p
فرکانس بی‌بعد شده ارتعاش ورق	Ω	نیروی‌های برشی ورق	Q_x, Q_y
ضریب پواسون	J	ماتریس سختی نوار محدود	$S_n(l)$
		یکی از خواص لایه j مانند چگالی، الاستیسیته	$T^{(j)}(z)$
		یا ضریب پواسون	

۱- مقدمه

اجسام پیوسته دارای حرکت محوری^۱ کاربردهای زیادی در صنعت دارند. الیاف منسوجات و کامپوزیت‌ها هنگام تولید، کابل تراموای هوایی، تسمه‌ها و زنجیرهای انتقال نیرو، تیغه اره‌های نواری، نوارهای مغناطیسی، ورقه‌های کاغذ، پلاستیک و کامپوزیت در حین تولید و ورقه‌های نازک فلزی در مسیر تولید و فرآوری از جمله این کاربردها هستند.

ارتعاش عمدتاً یک پدیده ناخواسته در اجسام دارای حرکت محوری است. اما در عین حال از مشخصه‌های این اجسام در سرعت‌های بالا می‌باشد. به عنوان نمونه، حرکت جانبی در تیغه اره‌های نواری باعث کاهش کیفیت سطوح برش گردیده و ضایعات را افزایش می‌دهد. در نوارهای مغناطیسی که برای ثبت داده‌ها بر روی آنها از حرکت محوری نوار مقابل یک اهرم استفاده می‌شود، ارتعاش نوار در مقابل اهرم باعث ورود سیگنال‌های اشتباه می‌گردد. در صنعت چاپ، ارتعاش ورق‌های کاغذ متحرک باعث کاهش کیفیت چاپ می‌شود و ارتعاش ورق‌های فولادی در خط پیوسته گالوانیزاسیون، موجب می‌شود که ضخامت لایه فلزی روی، یکنواخت نگردد.

در مواردی که بعد جسم متحرک در راستای عمود بر حرکت قابل ملاحظه باشد، مانند ورق‌های کاغذ و فولاد در حال حرکت، برای دستیابی به جواب‌های قابل اعتماد، مدل‌سازی دو بعدی ضروری است. در این میان در موارد خاصی استفاده از مدل دو بعدی اهمیتی دوچندان می‌یابد: مثلاً وقتی که نیروی محوری غیریکنواخت در عرض ورق متحرک اعمال می‌شود، بارهای گسترده غیریکنواخت بر صفحه اعمال شود و یا ورق متحرک ایزوتروپیک نباشد. برخلاف مدل‌سازی یک بعدی اجسام متحرک که تحقیقات بسیار زیادی روی آن انجام شده و قدمتی بیش از یک قرن دارد، مدل‌سازی دو بعدی در مطالعات محدودی به کار رفته است. در ادامه، مطالعات صورت گرفته با بهره‌گیری از مدل دو بعدی ورق یا غشاء بررسی خواهد شد.

مدل‌سازی دو بعدی ورق‌های در حال حرکت محوری با دو مدل غشاء و ورق قابل انجام است. در مدل غشاء از صلیب خمشی ورق صرف‌نظر می‌شود، در حالی که در مدل ورق علاوه بر نیروهای درون‌صفحه، لنگرهای خمشی نیز در صفحه متحرک قابل محاسبه‌اند و بر تغییر شکل‌های آن اثر می‌گذارند. تئوری غشاء برای حل مسائل ورق‌های متحرک با صلیب خمشی ناچیز مناسب می‌باشد ولی برای حالتی که صلیب خمشی ورق متحرک قابل صرف‌نظر کردن نیست، استفاده از تئوری ورق برای دستیابی به پاسخ‌های قابل قبول الزامی است. نیمی و پرامیلا [۱] ارتعاش آزاد جانبی یک غشاء در حال حرکت در یک سیال ایده‌آل را با استفاده از روش اجزاء محدود تحلیل کردند. اثرات تراکم شبکه المان‌بندی و فاصله مرزهای صلب مدل سیال تا غشاء و اثرات روش‌های مختلف متمرکزسازی جرم سیال بر دقت نتایج، بررسی شدند. کیوورا و پرامیلا [۲] یک فرمولاسیون تئوری و عددی برای تحلیل غیرخطی یک غشاء متحرک محوری ارائه نمودند. آنها اثرات غیرخطی هندسی یعنی تغییر مکان‌های بزرگ، تغییر در تنش‌های درون صفحه و سرعت محوری به واسطه تغییر شکل را در مطالعه خود مدنظر قرار دادند. شین و همکارانش [۳] ارتعاش آزاد درون صفحه یک غشاء دارای سرعت محوری را بررسی کرده و اثرات سرعت محوری، نسبت طول به عرض غشاء و شرایط مرزی را بر روی ارتعاشات درون صفحه غشاء مورد ارزیابی قرار دادند. ایشان [۴] هم‌چنین مشخصه‌های دینامیکی ارتعاش برون صفحه این غشاء را نیز بررسی نموده‌اند. بعد از جداسازی معادلات حرکت درون صفحه و برون صفحه به روش گالرکین، فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی محاسبه و اثرات سرعت محوری، شرایط مرزی و نسبت طول به عرض بر روی فرکانس‌های طبیعی، شکل‌های مودی و پایداری غشاء در ارتعاش جانبی بررسی شدند.

به نظر می‌رسد یولسوی و مت [۵] در سال ۱۹۸۲ میلادی برای اولین بار از یک مدل دو بعدی ورق برای تحلیل اجسام

دارای سرعت محوری بهره جستند. آنها از روش ریتز کلاسیک و روش اجزاء محدود-ریتز برای تحلیل خطی نوسان ورق متحرک محوری به عنوان مدلی از تیغه پهن اره های نواری استفاده کرده اند. لین و مت [۶] با توسعه تئوری غیرخطی ورق ون کارمن برای محیط دو بعدی در حال حرکت^۲ و منظور کردن نیروهای ماند ناشی از حرکت محوری، تغییر مکان جانبی و توزیع تنش ها را در محیط تحت بار عرضی به دست آوردند. ایشان با فرض کوچک بودن صلبیت خمشی، آن را به صورت یک پارامتر اغتشاشی مدل نموده و با استفاده از تئوری اغتشاشی منفرد^۳ و تئوری لایه مرزی^۴، یک روش تحلیلی برای حل تعادل غشاء متحرک با دو لبه آزاد در راستای حرکت، یافتند.

لنگک و مک کالین [۷، ۸] برای حل ارتعاشات تیغه اره نواری تحت بارهای درون صفحه از مدل دو بعدی ورق استفاده و اثرات سرعت حرکت و تنش های کششی غیریکنواخت اعمال شده در عرض ورق را بر روی فرکانس های طبیعی سیستم بررسی کردند. آنها برای جداسازی^۵ در معادلات حرکت و در شرایط مرزی از روش گالرکین تعمیم یافته^۶ سود بردند و شرایط مرزی ابتدا و انتهای تیغه را با تکیه گاه مفصلی مدل نموده اند. ایشان هم چنین اثر نیروهای درون صفحه را بر روی پایداری تیغه های اره بررسی نمودند. لین [۹] مشخصه های پایداری دینامیکی و ارتعاش آزاد یک ورق متحرک با دو لبه آزاد و دو لبه ساده و تحت کشش ثابت را برای یک دهانه به دست آورد. در این مطالعه برای معرفی میدان تغییر مکان جانبی ورق، در راستای طولی از توابع سینوسی و در راستای عرضی از تابعی شامل دو رشته از توابع سینوس هایپربولیک استفاده می شود.

ونگ [۱۰] یک فرمولاسیون اجزاء محدود مخلوط^۷ را براساس تئوری ورق میندلین-ریزنر^۸ برای تحلیل خطی ورق نازک ارتوتروپیک در حال حرکت توسعه داد. او این روش را برای تحلیل ارتعاش آزاد و تحلیل دینامیکی گذرا^۹ و برای مواجه نشدن با قفل شدگی برشی^{۱۰} مناسب دانست. در مطالعه دیگری لو و هوتن [۱۱] یک المان مثلثی برای حل ورق های در حال حرکت تحت نیروهای درون صفحه به روش اجزاء محدود

توسعه دادند و به وسیله آن فرکانس های طبیعی یک ورق مستطیلی با سرعت های محوری و نیروهای درون صفحه مختلف را به دست آوردند. لوکانن [۱۲] یک المان چهار گرهی ورق با تئوری میندلین-ریزنر برای تحلیل خطی صفحات کاغذ دارای سرعت محوری ارائه داد. برای اجتناب از قفل شدگی برشی در مورد ورق های نازک، دو تکنیک تصحیح برش در تحلیل ارتعاش آزاد و تحلیل دینامیکی گذرا مورد استفاده قرار گرفت. کیم و همکارانش [۱۳] نیز مشخصه های پایداری و ارتعاش آزاد یک ورق با دو لبه آزاد و دو لبه ساده تحت کشش یکنواخت را با استفاده از یک نوع تحلیل مودی به دست آوردند. لو و حمیدزاده [۱۴] معادلات غیرخطی حرکت را برای یک ورق نازک مستطیلی در حال حرکت محوری به دست آوردند. ایشان با حل معادلات حرکت از روش اغتشاشی، تحلیل پایداری و حل غیرخطی تعادل را برای ورق متحرک، با فرض تکیه گاه های مفصلی در چهار لبه ورق، به انجام رساندند. حاتمی و همکاران [۱۶] ارتعاش آزاد ورق های در حال حرکت ویسکوالاستیک^{۱۱} را توسعه دادند. مارینووسکی [۱۷] به بررسی ارتعاش آزاد ورق های ویسکوالاستیک در حال حرکت پرداخت. هرچند مطالعه ای در مورد ورق های ساندویچی در حال حرکت در منابع موجود مشاهده نشد، اما مطالعات چندی در تحلیل یک بعدی ارتعاش آزاد اجسام ساندویچی در حال حرکت به انجام رسیده است؛ که از آن می توان به آنالیز دینامیکی تیرهای ساندویچی در حال حرکت با هسته ویسکوالاستیک توسط مارینووسکی [۱۸] اشاره کرد.

در این مقاله، مسئله ارتعاش آزاد ورق های ساندویچی ناهمسان در ضخامت متقارن در حال حرکت محوری تحت بارهای درون صفحه توسط روش نوار محدود دقیق مورد بررسی قرار می گیرد. در این روش با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، ماتریس سختی دقیق هر نوار محدود به صورت تابعی غیر جبری از فرکانس های ارتعاش آزاد، سرعت محوری، نیروهای دورن صفحه، تابع های مختلف مدول حجمی لایه های ناهمسان

گرادیان حرارتی به کار می‌روند (شکل ۱). این مواد که اکثراً از ترکیب سرامیک و فولاد ساخته می‌شوند، در جهت ارتقاء خواص مواد مرکب طراحی شده‌اند. مواد ناهمسان در ضخامت ساختار متالورژیکی غیریکنواختی دارند. این مواد در دسته‌بندی مواد غیرهمگن قرار می‌گیرند؛ لذا خواص فیزیکی آنها مانند مدول الاستیسیته و یا ضریب هدایت حرارتی متغیر است. با این حال ساختار این مواد به گونه‌ای است که فرض ایزوتروپیک بودن آنها در اکثر موارد معتبر می‌باشد.

برای ساخت ورق‌های ساندویچی ناهمسان در ضخامت، معمولاً یک لایه همگن در وسط ورق قرار می‌گیرد که هسته نام دارد (لایه ۲ در شکل ۲) و دو لایه از مواد ناهمسان در ضخامت در دو طرف آن قرار داده می‌شوند که این دو لایه، پوسته نامیده می‌شوند (لایه‌های ۱ و ۳ در شکل ۲). ورق‌های ساندویچی می‌توانند برحسب ضخامت پوسته و هسته، آرایش‌های متفاوتی بگیرند؛ که هر آرایش به صورت شماره‌ای مرکب از چند عدد نمایش داده می‌شوند. به عنوان مثال شماره ۱-۱-۱ نشان‌دهنده یک ورق ساندویچی سه لایه است که ضخامت هسته و پوسته‌ها برابر است و شماره ۲-۱-۲ ورقی سه لایه را مشخص می‌کند که ضخامت پوسته‌ها دو برابر ضخامت هسته است.

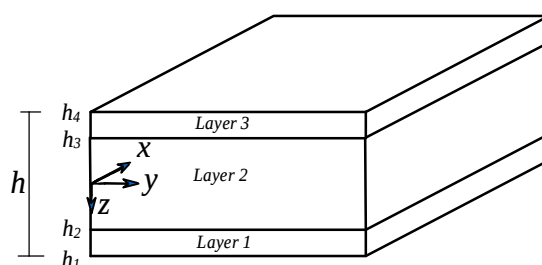
همان‌طور که بیان شد، در ورق‌های مورد مطالعه در این تحقیق، لایه‌های پوسته از مواد ناهمسان در ضخامت تشکیل می‌شوند. در این مواد، تغییرات خصوصیات ماده در ضخامت به صورت توابعی پیوسته مدل می‌شود. خواص مصالح در ضخامت لایه، مانند مدول الاستیسیته E و چگالی ρ که در حالت کلی با پارامتر $T(z)$ نمایش داده می‌شود، از رابطه (۱) قابل محاسبه است:

$$T^{(j)}(z) = (T_t - T_b) V_c^{(j)} + T_b \quad (1)$$

که $T^{(j)}$ در رابطه بالا، خواص مصالح در لایه j ام می‌باشد. T_t و T_b ، به ترتیب مقادیر این مشخصه در وجوه بالایی و پایینی این لایه می‌باشند که با تغییرات کسر حجمی $V_c^{(j)}$ ($j=1,2,3$) در ضخامت تغییر می‌کنند. واقعیت فیزیکی مسئله و سادگی



شکل ۱- تغییرات تدریجی مواد ناهمسان در ضخامت [۲۱]

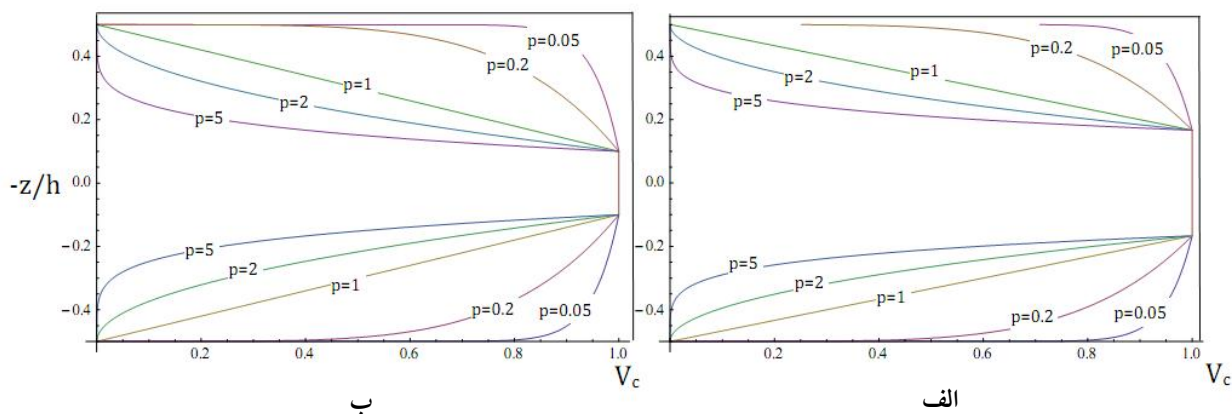


شکل ۲- هندسه ورق ساندویچی مستطیلی ناهمسان در ضخامت در مختصات کارتزین

در ضخامت و سایر پارامترهای هندسی و مصالح مسئله استخراج می‌گردد. با تشکیل ماتریس سختی کل ورق در حال حرکت، امکان محاسبه فرکانس‌های ارتعاش آزاد دقیق این ورق‌ها که تحت نیروهای درون صفحه برروی تعدادی غلتک موازی در حال حرکتند، فراهم می‌گردد. فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی ناهمسان در ضخامت و سایر پارامترهای هندسی و مصالح مسئله استخراج می‌گردد. فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی ناهمسان در ضخامت حاصل از این روش می‌توانند به عنوان مرجعی برای بررسی دقت نتایج حاصله از روش‌های عددی ارائه شده توسط سایر محققین به کار گرفته شوند.

۲- ورق‌های ساندویچی ناهمسان در ضخامت

مواد با ساختار ناهمسان در ضخامت، مواد مرکب پیشرفته‌ای هستند که به منظور تحمل حرارت بسیار بالا با ضخامت کم و یا تحمل



شکل ۳- آرایش لایه‌ها و تغییرات کسر حجمی در ضخامت ورق، الف) مدل ۱-۱-۱ با پوسته‌هایی با ضخامت $h/3$ ،
ب) مدل ۲-۱-۲ با پوسته‌هایی با ضخامت $2h/5$

۳- روش نوار محدود دقیق

در روش نوار محدود دقیق، سازه دوبعدی ورق به تعداد معدودی نوار تقسیم شده و ماتریس سختی هر نوار به کمک میدان تغییر مکانی که از حل تحلیلی معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق به دست می‌آید، محاسبه می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر ورق‌های ساندویچی متقارن در حال حرکت، براساس تئوری کلاسیک ورق با استفاده از معادله دیفرانسیل توسعه داده شده برای ورق‌های کامپوزیت در حال حرکت [۱۵] به صورت معادله (۳) قابل ارائه است:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + I_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3)$$

که در رابطه بالا، v سرعت انتقال محوری در راستای محور x و w تغییر مکان خارج از صفحه ورق می‌باشد. N_x و N_y نیروهای درون صفحه به ترتیب در راستای x و y می‌باشند. D و I_0 به ترتیب معرف اینرسی و صلبیت خمشی ورق بوده و از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$I_0 = \sum_{j=1}^3 \int_{h_j}^{h_{j+1}} \rho^{(j)} dz \quad (\text{الف-۴})$$

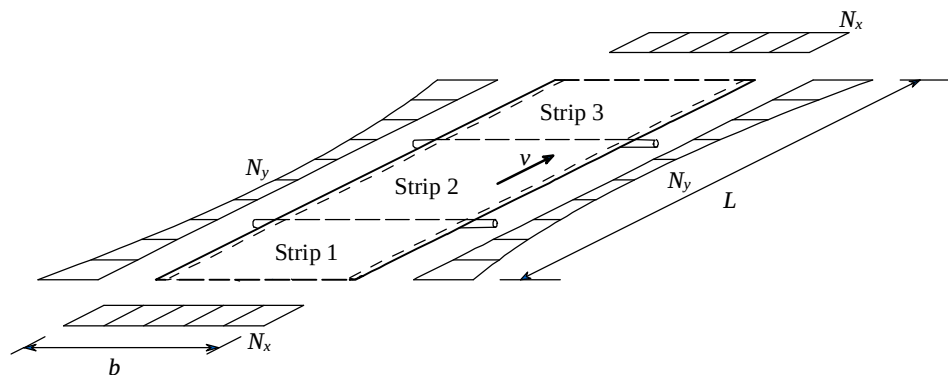
تابع‌های تغییر، دو ویژگی مهم برای انتخاب تابع کسر حجمی پیشنهادی می‌باشند. توابع توانی که در ادامه به توضیح آن خواهیم پرداخت، توجه بیشتری را از سوی محققان به خود معطوف کرده است. تغییرات مواد در ضخامت لایه‌های ۱، ۲ و ۳ از ورق ساندویچی سه لایه متقارن (شکل ۲) با استفاده از فرم توانی کسر حجمی، به شکل روابط (۲) تعریف می‌شود:

$$V_c^{(1)} = \left(\frac{h_1 - z}{h_1 - h_2} \right)^p, \quad h_2 \leq z \leq h_1 \quad (\text{الف-۲})$$

$$V_c^{(2)} = 1, \quad h_3 \leq z \leq h_2 \quad (\text{ب-۲})$$

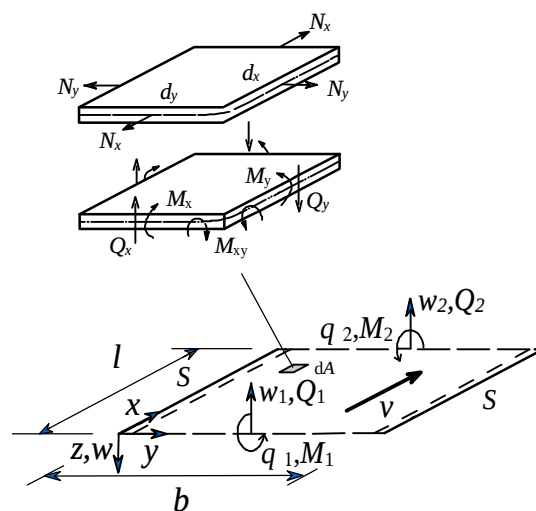
$$V_c^{(3)} = \left(\frac{h_3 - z}{h_3 - h_4} \right)^p, \quad h_4 \leq z \leq h_3 \quad (\text{ج-۲})$$

توزیع توانی نشان داده شده در رابطه (۲) معرف ترکیب ساده‌ای از دو ماده است که کارایی مفید و مورد نیاز را ایجاد می‌کند. p ، توان کسر حجمی، چگونگی توزیع ماده در ضخامت را نشان می‌دهد. مثلاً چنانچه این عدد برابر با یک باشد، تغییرات خطی است و چنانچه صفر باشد، ماده‌ای همگن خواهیم داشت. با افزایش p ، مقدار ماده تشکیل دهنده وجه پایینی لایه افزایش می‌یابد. شکل (۳) تغییرات کسر حجمی در ضخامت ورق را برای دو نمونه از ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت متقارن نشان می‌دهد.



شکل ۴- ورق در حال حرکت تحت بارگذاری محوری که به چند نوار محدود تقسیم شده است

لبه‌هایی دیگر به صورت دلخواه در نظر گرفته می‌شود. برای به کارگیری روش نوار محدود دقیق، این ورق به چند بخش یا نوار محدود تقسیم می‌شود؛ به طوری که هر بخش مابین تکیه‌گاه‌های پیرامونی و غلتک‌های میانی محصور شده است. به عنوان مثال، برای حل ارتعاش ورق شکل (۴)، کافی است که این ورق به سه نوار محدود تقسیم شود. شکل (۵) یک نوار محدود نوعی از این ورق را نشان می‌دهد که درجات آزادی و نیروهای گرهی بر روی آن مشخص شده‌اند. علاوه بر این، بر روی یک المان بی‌نهایت کوچک از این نوار محدود، جهات مثبت نیروهای درون صفحه و گشتاورهای داخلی ترسیم شده‌اند.



شکل ۵- یک نوار محدود نوعی با تغییر مکان‌ها و نیروهای گرهی آن به همراه یک المان بی‌نهایت کوچک dA از نوار با جهات مثبت نیروهای داخلی

برای نوار محدود نشان داده شده در شکل (۵)، با توجه به شرایط مرزی ساده در لبه‌های $y=0$ و $y=b$ و وجود تقارن در بارگذاری، هندسه و مصالح مسئله نسبت به محور $y=b/2$ ، تابع شکل در راستای y به صورت سینوسی در نظر گرفته می‌شود. تابع شکل در راستای x از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش ورق محاسبه می‌گردد. لذا تابع تغییر مکان خارج از صفحه ورق به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$w(x, y, t) = W_n(x) \left(e^{k_n y i} - e^{-k_n y i} \right) e^{\lambda t} \quad (5)$$

در معادله (۵)، $k_n = n\pi/b$ و اندیس n نشان‌دهنده شماره مود سینوسی در راستای y می‌باشد. λ مقدار ویژه ارتعاش آزاد ورق است.

با توجه به این که هر معادله دیفرانسیل از درجه q با مجموع

$$D = \sum_{j=1}^3 \int_{h_j}^{h_{j+1}} \frac{E^{(j)} z^2}{4(1-\nu^2)} dz \quad (4-b)$$

$E^{(j)}$ و $\rho^{(j)}$ به ترتیب دانسیته و مدول الاستیسیته لایه j از ورق هستند.

شکل ۴ ورقی پیوسته را نشان می‌دهد که با سرعت ثابت محوری v بر روی چند غلتک حرکت می‌کند. طول L از ورق متحرک در راستای حرکت مورد بررسی است و بعد ورق در راستای عمود بر حرکت، b می‌باشد. شرایط مرزی در لبه‌های موازی جهت حرکت، به صورت ساده بوده و شرایط مرزی در

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

بردارهای تغییر مکان و نیروی گرهی هر نوار محدود، برای مود n ارتعاش به شکل زیر تعریف می‌شوند (شکل ۵):

$$\{d_n\} = \{\theta_{1n}, w_{1n}, \theta_{2n}, w_{2n}\}^T \quad (13)$$

$$\{p_n\} = \{M_{1n}, Q_{1n}, M_{2n}, Q_{2n}\}^T \quad (14)$$

با کمک روابط (۹) تا (۱۲) می‌توان درایه‌های بردارهای فوق را برحسب تغییر مکان عمود بر صفحه، w ، محاسبه کرد و تغییر مکان w نیز از معادلات (۵) و (۶) به دست می‌آید؛ لذا بردارهای تغییر مکان و نیروی گرهی به شکل زیر قابل ارائه هستند:

$$\{d_n\} = \{\bar{d}_n\} \left(e^{k_n \times y_i} - e^{-k_n \times y_i} \right) e^{\lambda \times t} \quad (15)$$

$$\{p_n\} = \{\bar{p}_n\} \left(e^{k_n \times y_i} - e^{-k_n \times y_i} \right) e^{\lambda \times t} \quad (16)$$

که در این روابط:

$$\{\bar{d}_n\} = - \sum_{m=1}^4 \left\{ \begin{array}{c} r_{mn} \\ 1 \\ r_{mn} e^{r_{mn} \times l} \\ e^{r_{mn} \times l} \end{array} \right\} C_{mn} = [X_n]_{4 \times 4} \{C_n\}_{4 \times 1} \quad (17)$$

$$\{\bar{p}_n\} = \sum_{m=1}^4 \left\{ \begin{array}{c} (D \times r_{mn}^2 - D \times \vartheta \times k_n^2) \\ (D \times k_n^2 r_{mn} (2 - \vartheta) - D \times r_{mn}^3 + \\ r_{mn} (N_x - I_0 \times v^2) - \lambda \times I_0 \times v) \\ - (D \times r_{mn}^2 - D \times \vartheta \times k_n^2) e^{r_{mn} l} \\ - (D \times k_n^2 r_{mn} (2 - \vartheta) - D \times r_{mn}^3 + \\ r_{mn} (N_x - I_0 \times v^2) - \lambda \times I_0 \times v) e^{r_{mn} l} \end{array} \right\} C_{mn} \\ = [Y_n]_{4 \times 4} \{C_n\}_{4 \times 1} \quad (18)$$

با ترکیب معادلات (۱۷) و (۱۸) و حذف بردار ضرایب ثابت $\{C_n\}$ از این معادلات، داریم:

$$\{\bar{p}_n\} = [S_n] \{\bar{d}_n\} \quad (19)$$

به‌طوری‌که $[S_n]$ ماتریس سختی دینامیکی نوار محدود ورق

q تابع نمایی با ضرائب مختلف قابل حل است؛ از اینرو می‌توان فرم تابع تغییر مکان عمود بر صفحه در راستای محور x یعنی $W_n(x)$ را به فرم توابع نمایی رابطه (۶) در نظر گرفت:

$$W_n(x) = \sum_{m=1}^4 C_{mn} e^{r_{mn} x} \frac{1}{2} \quad (6)$$

در معادله بالا C_{mn} ضرائب ثابت جواب عمومی معادله بوده و r_{mn} عدد موج در راستای x می‌باشد. برای محاسبه r_{mn} ، تابع تغییر مکان $w(x, y, t)$ در معادله دیفرانسیل ورق (معادله ۳) جایگذاری می‌شود؛ که در نتیجه، معادله جبری از درجه چهار برحسب r_{mn} به شکل زیر به دست می‌آید:

$$r_{mn}^4 + \alpha_2 r_{mn}^2 + \alpha_1 r_{mn} + \alpha_0 = 0 \quad (7)$$

به‌طوری‌که در آن:

$$\alpha_2(n) = (I_0 \times v^2 - N_x - 2D \times k_n^2) / D \\ \alpha_1(n) = 2I_0 \times \lambda \times v / D \quad (8)$$

$$\alpha_0(n) = (I_0 \times \lambda^2 + D \times k_n^4 + N_y \times k_n^2) / D$$

با حل معادله جبری درجه چهار (معادله ۷)، چهار ریشه برای r_{mn} به دست می‌آیند. با معلوم شدن مقادیر r_{mn} ، با استفاده از شرایط مرزی در لبه‌های موازی محور y از نوار ورق، ماتریس سختی آن نوار محاسبه می‌شود. لذا شرایط مرزی تغییر مکانی و نیرویی در $x=0$ و $x=1$ به صورت زیر برای نوار ورق نشان داده شده در شکل (۵)، نوشته می‌شود:

در $x=0$:

$$Q_x = Q_1, \quad w = -w_1, \quad M_x = -M_1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_1 \quad (9)$$

در $x=1$:

$$Q_x = -Q_2, \quad w = -w_2, \quad M_x = M_2, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_2 \quad (10)$$

برای ورق دارای حرکت محوری در راستای x ، نیروی برشی Q_x و لنگر خمشی M_x در معادلات فوق، طبق روابط ذیل برحسب تغییر مکان عمود بر صفحه، w ، به دست می‌آیند:

$$Q_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \vartheta) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ + (N_x - I_0 \times v^2) \frac{\partial w}{\partial x} - I_0 v \frac{\partial w}{\partial t} \quad (11)$$

برای مود n ام چنین است:

$$[S_n] = [Y_n][X_n]^{-1} \quad (20)$$

ماتریس $[S_n]$ به واسطه سرعت محوری v دارای درایه‌های مختلط بوده و در حالت کلی به صورت هرمیتی است. درایه‌های این ماتریس توابعی غیرجبری از λ ، سرعت محوری v ، نیروهای غشایی N_x و N_y ، خواص ماده و ابعاد نوار ورق می‌باشند. درایه‌ای سطر اول ماتریس سختی دینامیکی، به عنوان نمونه در پیوست ارائه شده‌اند. با سرهم نمودن ماتریس سختی نوارهای مختلف در یک ماتریس کلی و حذف درجات آزادی بسته شده در لبه‌های انتهایی، ماتریس سختی دقیق یک ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت در حال حرکت (مانند ورق شکل ۴) به دست می‌آید. بررسی ارتعاش آزاد ورق با حل تابع ویژه غیراستاندارد زیر و استخراج مقادیر ویژه λ ممکن می‌شود:

$$\text{Det}[S_n(\lambda)] = 0 \quad (21)$$

σ و ω به ترتیب، بخش‌های حقیقی و موهومی λ هستند. برای ورق بدون سرعت محوری و ورق دارای حرکت محوری با سرعتی کمتر از سرعت بحرانی، σ برابر صفر است. سرعت بحرانی ورق، سرعتی است که در آن سرعت، فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد ورق صفر شده و به عبارت دیگر، ورق ناپایدار می‌شود.

۴- نتایج عددی

۴-۱- کلیات

برای استخراج نتایج عددی از تئوری توسعه یافته، برنامه‌ای رایانه‌ای در محیط برنامه‌نویسی متماتیکا^{۱۲} تهیه شده که قابلیت مدل‌سازی شرایط مختلف ورق‌ها از نظر شرایط مرزی، تکیه‌گاه‌های میانی و نیروهای غشایی در محدوده تئوری ارائه شده را دارا می‌باشد. معادله (۲۱) تابع ویژه مسئله ارتعاش آزاد می‌باشد. با حل این معادله، مقادیر ویژه مسئله یعنی فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آیند. در حالت کلی این معادلات توابع ضمنی

از مقادیر ویژه با تعداد جملات زیاد می‌باشند. افزایش تعداد دهانه‌های مورد تحلیل، موجب افزایش تعداد نوارهای ورق و در پی آن پیچیده‌تر شدن توابع ویژه می‌گردد. در برنامه رایانه‌ای، الگوریتمی مؤثر برای استخراج سریع و دقیق مقادیر ویژه از تابع ویژه مسئله طراحی شده است.

در این بخش، مثال‌هایی جهت تأیید صحت و کارایی روش حاضر در تحلیل ارتعاش ورق‌ها ارائه می‌شود. برای یکسان‌سازی و قابل قیاس نمودن نتایج، بیشتر نتایج عددی به صورت بی بعد ارائه می‌شود. متغیرهای بدون بعد مورد استفاده در این بخش عبارتند از:

$$\alpha = \frac{L}{b}, \quad \beta = \frac{h}{b}, \quad \Omega = \omega \frac{b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \quad (22)$$

$$(k_x, k_y) = (N_x, N_y) \frac{b^2}{\pi^2 D_0}, \quad c = v \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{\rho_0 h}{D_0}}$$

که مطابق شکل (۴)، α ، نسبت طول ورق در محدوده مورد مطالعه، L ، به عرض آن، b ، بوده و β نسبت ضخامت ورق به عرض b ، c ، مقدار بدون بعد سرعت محوری و Ω ، مقدار نرمال شده فرکانس طبیعی ورق، ω ، و ρ_0 و E_0 مقادیر واحد چگالی و مدول الاستیسیته می‌باشند. k_x و k_y نیز مقادیر بدون بعد نیروهای غشایی هستند. در مثال‌های عددی، ضریب پواسون، ν ، در ضخامت تغییر نمی‌کند و عددی ثابت برابر با $1/3$ می‌باشد. D_0 سختی خمشی ورق ایزوتروپیک همگن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_0 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (23)$$

عدد طبیعی n در نتایج، بیانگر تعداد نیم‌موجهای سینوسی در راستای محور y ، به هنگام ارتعاش می‌باشد.

برای مشاهده نمونه‌ای از مشخصات یک لایه ناهمسان در ضخامت، ذیلاً مشخصات نوعی دو ماده زمینه سرامیک و فلز که خواص ماده ناهمسان، به صورت تدریجی در ضخامت لایه

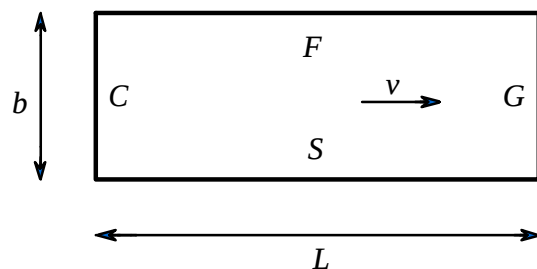
جدول ۱- فرکانس‌های ارتعاش آزاد بی‌بعد ورق ایزوتروپیک چهار دهانه ایستا با تکیه‌گاه‌های ساده

مد	حاضر	مرجع [۱۵]
۱	$0.970744^{(۱)}$	$0.970744^{(۱)}$
۲	$1.023560^{(۱)}$	$1.021783^{(۱)}$
۳	$1.162890^{(۱)}$	$1.146242^{(۱)}$
۴	$1.333730^{(۱)}$	$1.330662^{(۱)}$
۵	$2.426860^{(۱)}$	$2.414658^{(۱)}$
۶	$2.426860^{(۲)}$	$2.426860^{(۲)}$

دقیق می‌پردازیم. شکل (۷) یک ورق چهار دهانه با لبه‌های پیرامونی ساده را نشان می‌دهد. حل ارتعاش آزاد این ورق تنها با چهار نوار و پنج درجه آزادی امکان‌پذیر است. هر نوار ورق شامل بخشی از ورق است که در یکی از دهانه‌ها قرار می‌گیرد و پنج درجه آزادی، دوران خطوط گرهی (خطوط موازی محور y در شکل ۷) می‌باشند. جدول ۱ مقادیر بدون بعد فرکانس طبیعی شش مود اول ارتعاش را برای این ورق نشان می‌دهد. اعداد درون پرانتز تعداد نیم‌موج‌های سینوسی در عرض ورق به هنگام ارتعاش هستند. برای ورق ایستا و فاقد نیروهای غشایی، مودهای ارتعاشی اول تا پنجم، یک نیم‌موج سینوسی را در راستای عرضی تجربه می‌کنند، اما مود ششم، دو نیم‌موج عرضی خواهد داشت. اولین مود ارتعاشی در هر دهانه مانند اولین مود یک ورق مربعی چهارطرف مفصل بوده که در هر دو راستا یک نیم‌موج سینوسی را تجربه می‌کند. برای این ورق نتایج تحلیل با نتایج سعادت‌پور و همکارانش [۱۵] مقایسه می‌شود. فرکانس‌های بی‌بعد محاسبه شده با مقادیر مرجع [۱۵] تطابق بسیار خوبی دارد. البته نتایج تحقیق حاضر، مقادیر دقیق این فرکانس‌ها مبتنی بر تئوری کلاسیک ورق می‌باشند.

۳-۴- ورق ساندویچی ناهمسان تک دهانه ایستا

در این بخش، با بررسی ارتعاش آزاد ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت تک دهانه ایستا با شرایط تکیه‌گاهی چهار طرف مفصل، به بررسی صحت روش نوار محدود دقیق در بررسی این نوع ورق‌ها می‌پردازیم. در جدول ۲، فرکانس ورق‌های ساندویچی با



شکل ۶- ورق با شرایط تکیه‌گاهی CSGF

مابین خواص این دو تغییر می‌کند [۲۰]، ارائه می‌شوند:

سرامیک آلومینا با مشخصات:

Alumina (Al_2O_3)

$$E = 380 \text{ (Gpa)}, \nu = 0.3, \rho = 3800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

و فلز آلومینیوم با مشخصات:

Aluminum (Al)

$$E = 70 \text{ (Gpa)}, \nu = 0.3, \rho = 2702 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

برای نمایش شرایط تکیه‌گاهی در لبه‌های پیرامونی ورق، از چهار حرف بزرگ لاتین در چهار لبه ورق استفاده می‌شود. طبق قرار داد، حرف اول مربوط به لبه سمت چپ بوده و از این لبه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت نام‌گذاری می‌شود. به عنوان مثال، علامت CSGF معرف ورقی با لبه‌های گیردار، ساده، هدایت‌شونده و آزاد است (شکل ۶).

۲-۴- ورق ایزوتروپیک بر روی تکیه‌گاه‌های میانی

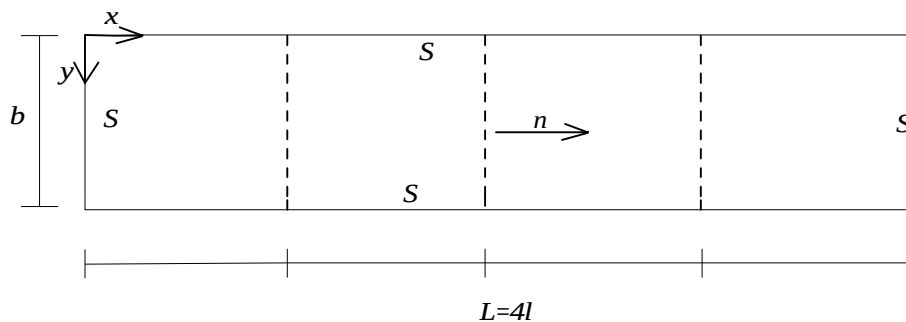
با تحلیل ارتعاش آزاد یک ورق چهار دهانه ایزوتروپیک ایستا به بررسی صحت الگوریتم نوشته شده برای روش نوار محدود

جدول ۲- فرکانس ارتعاش آزاد بی‌بعد (Ω) ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت چهار طرف ساده ایستا ($b=0.01$)

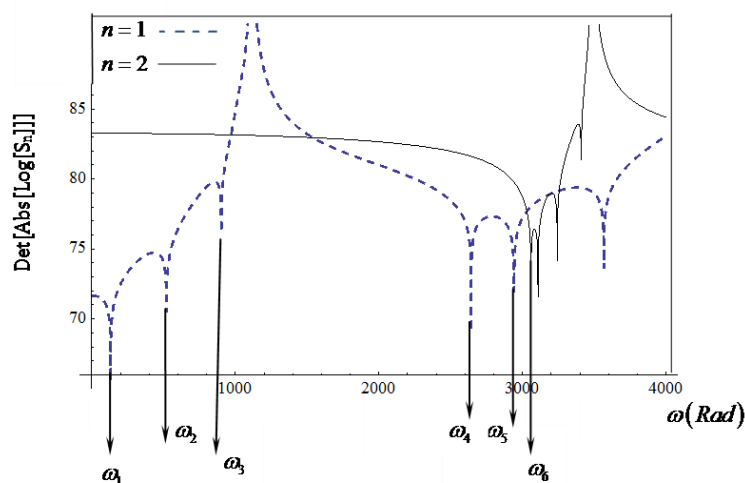
p	تئوری	Ω	
		1-1-1	2-1-2
0/0	مطالعه حاضر	1/88894	1/88894
	مرجع [19]	1/88840	-
	مرجع [20]، تئوری کلاسیک ورق	1/87359	1/87359
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه اول	1/82442	1/82442
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه سوم	1/82445	1/82445
0/5	مطالعه حاضر	1/56120	1/52436
	مرجع [19]	1/56050	-
	مرجع [20]، تئوری کلاسیک ورق	1/54903	1/51242
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه اول	1/54695	1/48159
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه سوم	1/51922	1/48408
1/0	مطالعه حاضر	1/38589	1/33058
	مرجع [19]	1/38520	-
	مرجع [20]، تئوری کلاسیک ورق	1/37521	1/32023
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه اول	1/35072	1/29729
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه سوم	1/35333	1/30011
5/0	مطالعه حاضر	1/06393	0/99998
	مرجع [19]	1/06310	-
	مرجع [20]، تئوری کلاسیک ورق	1/05565	0/99190
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه اول	1/04183	0/97870
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه سوم	1/04466	0/98184
10/0	مطالعه حاضر	1/01322	0/96036
	مرجع [20]، تئوری کلاسیک ورق	1/00524	0/95244
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه اول	0/99256	0/93962
	مرجع [20]، تئوری برشی مرتبه سوم	0/99551	

بهره گرفته، مقایسه می‌شود. فرکانس‌های بی‌بعد برای ورق نازک با نسبت ضخامت به عرض $\beta = 0.01$ و بازاء نسبت‌های مختلف کسر حجمی ($p = 0, 0.5, 1, 5, 10$) محاسبه شده است که برای این ورق نازک، تطبیق خوبی با نتایج سایر مراجع مشاهده می‌شود.

آرایش ۱-۱-۱ و ۲-۱-۲ با نتایج ناتاراجان و مانیکام [۱۹] که براساس تئوری برشی مرتبه بالا، فرکانس ارتعاش آزاد ورق ساندویچی را محاسبه نموده و با نتایج زنکور [۲۰] که از تئوری کلاسیک ورق، تئوری برشی مرتبه اول و تئوری برشی مرتبه سوم



شکل ۷- ورق چهار دهانه با شرایط تکیه گاهی چهار طرف ساده



شکل ۸- شش فرکانس اول ارتعاش آزاد ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت

ضخامت به عرض $\beta = 0.05$ بررسی می شود. ورق دارای سرعت محوری ($c=20$) و نیروی کششی غشایی در راستای محور x ها ($k_x = 20$, $k_y = 0$) می باشد. شکل (۸) تغییرات $\text{Det}[S_n(\omega)]$ در مقیاس لگاریتمی بر حسب ω به ازاء مقادیر مختلف نیم موجهای سینوسی، n ، را برای این ورق چهار دهانه نشان می دهد. نقاطی که در آن $\text{Log}(\text{Abs}(\text{Det}[S_n(\omega)]))$ به سمت $-\infty$ میل می کند، همان فرکانس های طبیعی، ω_i ، می باشند. همان طور که در شکل (۸) قابل مشاهده است، در این مثال، مدهای ارتعاش اول، دوم، سوم، چهارم و پنجم دارای یک نیم موج در عرض ورق هستند ($n=1$)، اما ورق در مود ششم دو نیم موج ($n=2$) را در عرض خود تجربه می کند. مدهای ارتعاشی بعدی نیز به همین صورت قابل حصول هستند.

۴-۴- ورق ساندویچی ناهمسان دارای حرکت محوری بر روی

غلتک های میانی

بعد از اطمینان از صحت تئوری توسعه یافته و کارایی الگوریتم طراحی شده برای حل این تئوری، در این بخش مثال هایی از ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت متکی بر غلتک های میانی مورد بررسی قرار می گیرد. شرایط تکیه گاه های میانی و پیرامونی مسئله مشابه بخش ۴-۲ و مطابق شکل (۷) به صورت چهاردهانه در نظر گرفته می شود. غلتک های میانی با خط چین نمایش داده شده اند و تکیه گاه های انتهایی در $x=0$, L نیز غلتک هایی هستند که شرایط مرزی ورق بر روی آنها به صورت ساده فرض شده است. ابتدا ارتعاش آزاد یک ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت متحرک با آرایش لایه های ۲-۱-۲ و توان حجمی $p=4$ با نسبت

جدول ۳- فرکانس ارتعاش آزاد بی‌بعد (Ω) ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت با آرایش ۲-۱-۲ دارای چهار دهانه با لبه‌های پیرامونی ساده ($\beta = 0.01$, $p = 0.05$)

c	k_x	k_y	شماره مد					
			۱	۲	۳	۴	۵	۶
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۱/۵۲۴۳ (n=۱)	۱/۶۰۷۳ (n=۱)	۱/۸۳۲۲ (n=۱)	۲/۱۴۸۴ (n=۱)	۳/۸۱۰۹ (n=۱)	۳/۸۵۹۶ (n=۲)
			۱/۸۲۷۹ (n=۱)	۱/۹۰۷۵ (n=۱)	۲/۱۱۶۹ (n=۱)	۲/۳۰۶۵ (n=۱)	۳/۹۴۲۱ (n=۲)	۳/۹۹۲۶ (n=۲)
			۱/۷۲۰۳ (n=۱)	۱/۸۰۶۵ (n=۱)	۲/۰۲۴۸ (n=۱)	۲/۲۸۶۷ (n=۱)	۳/۷۴۳۵ (n=۲)	۳/۷۹۶۷ (n=۲)
۲/۰	۴۰۰	۰/۰	۱/۹۴۰۷ (n=۲)	۵/۶۲۶۹ (n=۲)	۶/۷۴۰۲ (n=۲)	۷/۰۴۵۷ (n=۱)	۷/۶۲۰۳ (n=۲)	۷/۶۵۰۸ (n=۲)
			۴/۶۷۸۲ (n=۱)	۴/۸۸۵۶ (n=۲)	۵/۸۸۹۵ (n=۲)	۶/۶۵۱۹ (n=۲)	۶/۸۹۱۸ (n=۲)	۷/۱۰۰۲ (n=۲)

مفصل (SSSS) دارای حرکت محوری تحت کشش طولی یکنواخت، N_x ، در نظر گرفته می‌شود. آرایش لایه‌ها به صورت ۲-۱-۲ بوده و تابع توانی با توان کسر حجمی $p = 4$ ، تغییرات مواد ناهمسان در ضخامت را بیان می‌کند. فرکانس ارتعاش آزاد این ورق، تنها با یک نوار ورق و با دو درجه آزادی چرخشی به دست آمده است. شکل (۹)، تغییرات فرکانس اصلی بی‌بعد در مقابل سرعت محوری را برای این ورق در چهار مقدار مختلف نیروی کششی نشان می‌دهد. فرکانس اصلی با افزایش سرعت محوری کاهش یافته تا در سرعت بحرانی به مقدار صفر می‌رسد. مقادیر سرعت بحرانی ورق، با افزایش کشش طولی، افزایش می‌یابند. هم‌چنین فرکانس ارتعاش آزاد، در یک سرعت محوری ثابت، با زیاد شدن نیروی کششی محوری، بیشتر می‌شود.

۴-۶- تأثیر نیروی محوری بر ارتعاش ورق ساندویچی

ناهمسان در ضخامت

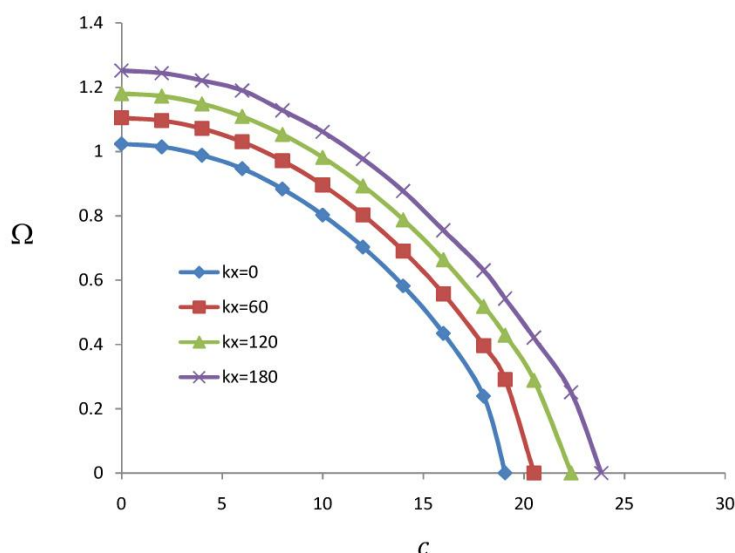
برای مشاهده تأثیر نیروی درون‌صفحه بر ارتعاش ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت، ورق مربعی SSSS با نسبت ضخامت به عرض $\beta = 0.01$ و آرایش ۲-۱-۲ تحت کشش

در ادامه، ورق ساندویچی ناهمسان با آرایش لایه‌های ۲-۱-۲، توان حجمی $p = 0.05$ و نسبت ضخامت به عرض $\beta = 0.01$ تحلیل می‌گردد. ورق دارای چهار دهانه بوده و ارتعاش آن در دو حالت ایستا و دارای حرکت محوری بررسی می‌گردد. جدول ۳ مقادیر بدون بعد فرکانس طبیعی شش مود اول ارتعاش ورق را در این دو حالت نشان می‌دهد. اعداد درون پرانتز تعداد نیم‌موج‌های سینوسی در عرض ورق به هنگام ارتعاش هستند. برای حالت ایستا ($c=0$)، سه وضعیت نیروهای غشایی، شامل ورق فاقد نیروی غشایی ($k_x = k_y = 0$)، ورق با نیروی کششی در امتداد X ($k_x = 400$, $k_y = 0$) و ورق تحت نیروی کششی و فشاری به ترتیب در امتداد X و Y ($k_x = 400$, $k_y = -150$) مدنظر قرار گرفته است. برای حالت دارای حرکت محوری ($c=2.0$)، دو وضعیت مختلف برای نیروهای غشایی فرض شده است.

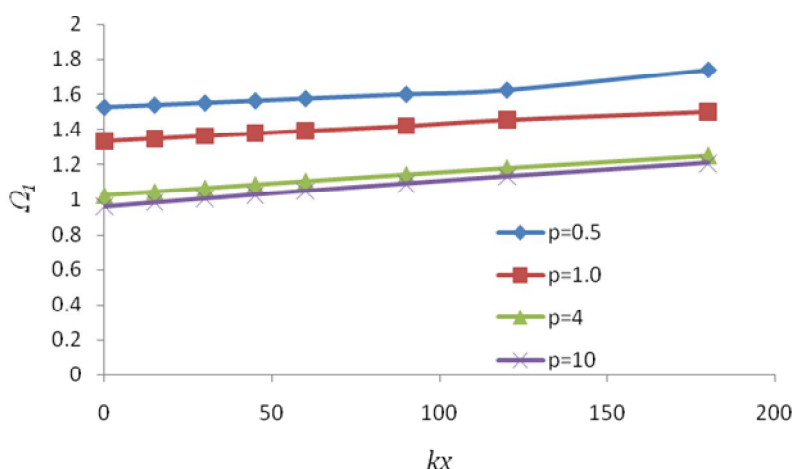
۴-۵- تأثیر سرعت محوری بر فرکانس ورق ساندویچی

ناهمسان در ضخامت

یک ورق ساندویچی تک دهانه مربعی ($\alpha = 1$) چهار طرف



شکل ۹- اثر سرعت محوری بر فرکانس اصلی ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت SSSS ($p=4.0$)



شکل ۱۰- اثر نیروی محوری بر فرکانس اصلی ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت SSSS

۷-۴- ارتعاش ورق ساندویچی ناهمسان در حال حرکت با شرایط تکیه‌گاهی مختلف

در این قسمت، حالت‌های مختلف از ورق‌های متحرک ساندویچی ناهمسان در ضخامت تک دهانه دارای حرکت محوری، از لحاظ شرایط مرزی، نیروهای غشایی و ابعاد ورق مورد تحلیل قرار می‌گیرد. جدول ۴ فرکانس‌های بی‌بعد ارتعاش آزاد ورقی با تکیه‌گاه‌های ساده در راستای طولی (موازی محور X) و با وضعیت‌های مختلف تکیه‌گاه‌های انتهایی (موازی محور Y در $x=0$ و $x=1$) را نشان می‌دهد.

طولی بررسی می‌شود. شکل (۱۰)، نمودار تغییرات فرکانس ارتعاش آزاد بی‌بعد در مقابل تغییرات نیروی محوری در راستای طولی برای این ورق ساندویچی را در حالت ایستا نشان می‌دهد. در این شکل، چهار نمودار بازا چهار مقدار مختلف توان کسر حجمی ($p=0.5, 1, 4, 10$) رسم شده است. نتایج، با یک نوار ورق و با دو درجه آزادی چرخشی به‌دست آمده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود، فرکانس ارتعاش ورق، با افزایش نیروی محوری کششی افزایش می‌یابد.

جدول ۴- فرکانس ارتعاش آزاد بی‌بعد (Ω) ورق ساندویچی ناهمسان در ضخامت نازک ($\beta = 0.01$) با شرایط مختلف تکیه‌گاهی و آرایش لایه‌های ۲-۱-۲ با توان حجمی $p=4$

	α	$k_x=0$	$k_x=0$	$k_x=400$
		$k_y=0$	$k_y=0$	$k_y=-150$
		$c=0$	$c=20$	$c=20$
SSSS	0.3333	5/118640	3/793080	4/860720
	1/0	1/0.23540	1/614980	0/619558
	3/3	0/558197	0/243163	0/171819
SSCS	0.3333	7/585910	6/485640	7/289420
	1/0	1/226140	0/266879	0/837314
	3/3	0/565575	0/15841	0/220159
CSCS	0.3333	5/626940	9/786830	10/38680
	1/0	0/772740	0/670508	1/195150
	3/3	0/295395	0/404580	0/268667

وضعیت تکیه‌گاه‌های انتهایی شامل دو سر ساده (SSSS)، یک سر ساده-یک سر گیردار (SSCS)، و دو سر گیردار (CSCS) می‌باشد. برای حالت SSSS، تنها به یک نوار ورق با دو درجه آزادی دورانی در دو انتها، نیاز می‌باشد. برای شرایط SSCS، یک نوار ورق و تنها یک درجه آزادی دورانی در انتهای ساده، لازم است؛ و برای حالت CSCS با دو نوار ورق و دو درجه آزادی در محل تلاقی آنها، یکی دورانی و دیگری انتقالی، می‌توان به نتایج دقیق دست یافت.

نتایج مندرج در جدول ۴ برای سه نسبت طول به عرض $a = 0.3, 1.0, 3.333$ و نسبت ضخامت به عرض $b = 0.01$ محاسبه شده‌اند. هم‌چنین، دو وضعیت نیروهای غشایی، شامل ورق بدون نیروی غشایی، ورق با نیروی کششی در امتداد x و نیروی فشاری در امتداد y ، مدنظر قرار گرفته‌اند. آرایش لایه‌های تشکیل‌دهنده در ضخامت به‌صورت ۲-۱-۲ با توان کسر حجمی $p=4$ ، می‌باشد. ستون سوم جدول ۴، نتایج تحلیل ورق ایستا ($c=0$) و فاقد نیروهای غشایی

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های در حال حرکت ساندویچی ناهمسان در ضخامت متقارن به‌روشنوار محدود دقیق بررسی شده است. تحلیل دقیق ارتعاش آزاد خارج از صفحه این ورق‌ها، به‌دلیل غیردرگیر بودن تغییر مکان‌های درون صفحه و برون صفحه، با حل معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار برون صفحه ورق میسر است. در این تحقیق، پس از ارائه معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد این ورق‌ها، روش نوار محدود دقیق برای حل این معادله دیفرانسیل توسعه یافته است. به این منظور، ورق مورد

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۳، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۳

عمود بر سرعت محوری و از جمله مدلسازی غلتک‌های میانی اشاره کرد. با این روش، فرکانس‌های ارتعاش آزاد ورق ساندویچی ناهمسان متحرک، با حل یک مسئله مقادیر ویژه غیراستاندارد به دست می‌آید. پاسخ‌های حاصل از این روش با نتایج موجود سایر محققین مقایسه شده و صحت و دقت روش حاضر تأیید می‌شود. در نهایت، مثال‌هایی چند برای اثبات قابلیت روش توسعه یافته، در حل مسائل متنوع از حیث وضعیت لایه‌های ورق، خواص ماده ناهمسان در ضخامت، شرایط مرزی، نیروهای غشایی و سرعت محوری ارائه شده است.

بررسی به تعداد معدودی نوار محدود تقسیم می‌شود. تابع تغییر شکل هر نوار، در راستای عمود بر حرکت محوری به شکل توابع مثلثاتی فرض شده و تابع تغییر شکل در راستای دیگر به صورت توابعی نمایی خواهد بود که معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی ورق را ارضاء نمایند. بدین ترتیب با تعریف بردارهای تغییر مکان و نیروهای خطوط گرهی، ماتریس سختی دقیق هر نوار حاصل می‌شود. ماتریس سختی کل ورق از سرهم نمودن ماتریس سختی نوارهای محدود و اعمال شرایط مرزی میانی و انتهایی حاصل می‌شود. از توانایی‌های این روش، می‌توان به مدل کردن شرایط تکیه‌گاهی مختلف در راستای

واژه نامه

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------|----------------------|
| 1. axially moving continua | 5. discretization | 9. transient dynamic |
| 2. axially moving web | 6. extended Galerkin method | 10. shear locking |
| 3. singular perturbation theory | 7. mixed finite element | 11. viscoelastic |
| 4. boundary layer theory | 8. Mindlin-Reissner | 12. Mathematica |

مراجع

- Niemi, J., and Pramila, A., "FEM-Analysis of Transverse Vibrations of an Axially Moving Membrane Immersed in Ideal Fluid", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 2301-2313, 1987.
- Koivurova, H., and Pramila, A., "Nonlinear Vibration of Axially Moving Membrane by Finite Element Method", *Computational Mechanics*, Vol. 20, pp. 573-581, 1997.
- Shin, C., Kim, W., and Chung, J., "Free In-Plane Vibration of an Axially Moving Membrane", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, pp. 137-154, 2004.
- Shin, C., Chung, J., and Kim, W., "Dynamic Characteristics of the Out-of-Plane Vibration for an Axially Moving Membrane", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 286, pp. 1019-1031, 2005.
- Ulsoy, A. G., and Mote, C. D., "Vibration of Wide Band Saw Blades", *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 104, pp. 71-78, 1982.
- Lin, C. C., and Mote, C. D., "Equilibrium Displacement and Stress Distribution in a Two Dimensional, Axially Moving Web under Transverse Loading", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 772-779, 1995.
- Lengoc, L., and McCallion, H., "Wide Bandsaw Blade under Cutting Conditions: Part I: Vibration of a Plate Moving in its Plane While Subjected to Tangential Edge Loading", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, pp. 125-142, 1995.
- Lengoc, L., and McCallion, H., "Wide Bandsaw Blade under Cutting Conditions: Part II: Stability of a Plate Moving in its Plane while Subjected to Parametric Excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, pp. 143-162, 1995.
- Lin, C. C., "Stability and Vibration Characteristics of Axially Moving Plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, pp. 3179-3190, 1997.
- Wang, X., "Numerical Analysis of Moving Orthotropic Thin Plates", *Computer & Structures*, Vol. 70, pp. 467-486, 1999.
- Luo, Z., and Hutton, S. G., "Formulation of a Three Node Traveling Triangular Plate Element Subjected to Gyroscopic and In-Plane Forces", *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 1935-1944, 2002.
- Laukkanen, J., "FEM Analysis of a Travelling Web", *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 1827-1842, 2002.
- Kim, J., Cho, J., Lee, U., and Park, S., "Modal Spectral Element Formulation for Axially Moving Plates Subjected to In-Plane Axial Tension", *Computers & Structures*, Vol. 81, pp. 2011-2020, 2003.

14. Luo, A .C. J., and Hamidzadeh, H. R., "Equilibrium and Buckling Stability for Axially Traveling Plates", *Communications in Nonlinear Science and Numerical simulation*, Vol. 9, pp. 343-360, 2004.
15. Saadatpour, M. M., Azhari, M., and Bradford, M. A., "Vibration Analysis of Simply Supported Plates of General Shape with Internal Point and Line Supports Using the Galerkin Method", *Engineering Structures*, Vol. 22, no. 9, pp. 1180-1188, 2000.
16. Hatami, S., Ronagh, H. R., and Azhari, M., "Exact Free Vibration Analysis of Axially Moving Viscoelastic Plates", *Computers & Structures*, Vol. 86, pp. 1738-46, 2008.
17. Marynowski, K., "Free Vibration Analysis of the Axially Moving Levy-Type Viscoelastic Plate", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 29, pp. 879-886, 2010.
18. Marynowski, K., "Dynamic Analysis of an Axially Moving Sandwich Beam with Viscoelastic Core", *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 2931-2936, 2012.
19. Natarajan, S., and Manickam, G., "Bending and Vibration of Functionally Graded Material Sandwich Plates Using an Accurate Theory", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 57, pp. 32-42, 2012.
20. Zenkour, A. M., "A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part 2- Buckling and Free Vibration", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 5243-5258, 2004.
21. Birman, V., and Byrd, L.W., "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 60, pp. 195-216, 2007.

پیوست

$$S_n(1,1) = - \left(\begin{array}{c} D \left(\begin{array}{l} -e^{l(r_{1n}+r_{4n})} r_{2n} r_{3n} (r_{2n}^2 - r_{3n}^2) (r_{1n} - r_{4n}) + e^{l(r_{2n}+r_{4n})} r_{1n} r_{3n} (r_{1n}^2 - r_{3n}^2) (r_{2n} - r_{4n}) - \\ e^{l(r_{3n}+r_{4n})} r_{2n} r_{1n} (r_{1n}^2 - r_{2n}^2) (r_{3n} - r_{4n}) + e^{l(r_{2n}+r_{3n})} r_{4n} (r_{1n}^2 - r_{4n}^2) r_{1n} (r_{2n} - r_{3n}) + \\ e^{l(r_{1n}+r_{3n})} r_{2n} (r_{2n}^2 - r_{4n}^2) r_{4n} (r_{1n} - r_{3n}) - e^{l(r_{2n}+r_{1n})} r_{4n} (r_{3n}^2 - r_{4n}^2) r_{3n} (r_{1n} - r_{2n}) + \end{array} \right. \\ I_o \left(\begin{array}{l} e^{l(r_{2n}+r_{3n})} (r_{2n} - r_{3n}) (r_{1n} - r_{4n}) + e^{l(r_{1n}+r_{4n})} (r_{2n} - r_{3n}) (r_{1n} - r_{4n}) - \\ e^{l(r_{1n}+r_{3n})} (r_{1n} - r_{3n}) (r_{2n} - r_{4n}) + e^{l(r_{2n}+r_{4n})} (r_{1n} - r_{3n}) (r_{2n} - r_{4n}) + \\ e^{l(r_{1n}+r_{2n})} (r_{1n} - r_{2n}) (r_{3n} - r_{4n}) + e^{l(r_{3n}+r_{4n})} (r_{1n} - r_{2n}) (r_{3n} - r_{4n}) \end{array} \right) v\lambda \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} e^{l(r_{2n}+r_{3n})} (r_{2n} - r_{3n}) (r_{1n} - r_{4n}) + e^{l(r_{1n}+r_{4n})} (r_{2n} - r_{3n}) (r_{1n} - r_{4n}) - \\ e^{l(r_{1n}+r_{3n})} (r_{1n} - r_{3n}) (r_{2n} - r_{4n}) + e^{l(r_{2n}+r_{4n})} (r_{1n} - r_{3n}) (r_{2n} - r_{4n}) + \\ e^{l(r_{1n}+r_{2n})} (r_{1n} - r_{2n}) (r_{3n} - r_{4n}) + e^{l(r_{3n}+r_{4n})} (r_{1n} - r_{2n}) (r_{3n} - r_{4n}) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
S_n(1,2) = & - \left(\begin{aligned} & \left(e^{l(r_{2n}+r_{3n})} (r_{2n}-r_{3n})(r_{1n}-r_{4n}) + e^{l(r_{1n}+r_{4n})} (r_{2n}-r_{3n})(r_{1n}-r_{4n}) - \right. \\ & e^{l(r_{1n}+r_{3n})} (r_{1n}-r_{3n})(r_{2n}-r_{4n}) + e^{l(r_{2n}+r_{4n})} (r_{1n}-r_{3n})(r_{2n}-r_{4n}) + \left. \left(N_x - I_o v^2 \right) + \right. \\ & \left. e^{l(r_{1n}+r_{2n})} (r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) + e^{l(r_{3n}+r_{4n})} (r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) \right) \\ & D \left(\begin{aligned} & -e^{l(r_{3n}+r_{4n})} (r_{1n}^2 + r_{1n}r_{2n} - r_{2n}^2 + k^2(-2+\vartheta))(r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) - \\ & e^{l(r_{2n}+r_{4n})} (r_{1n}^2 + r_{1n}r_{3n} - r_{3n}^2 + k^2(-2+\vartheta))(r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) + \\ & e^{l(r_{1n}+r_{4n})} (r_{2n}^2 + r_{2n}r_{3n} - r_{3n}^2 + k^2(-2+\vartheta))(r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) + \\ & e^{l(r_{2n}+r_{3n})} (r_{1n}^2 + r_{1n}r_{4n} - r_{4n}^2 + k^2(-2+\vartheta))(r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) - \\ & e^{l(r_{1n}+r_{3n})} (r_{2n}^2 + r_{2n}r_{4n} - r_{4n}^2 + k^2(-2+\vartheta))(r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) + \\ & e^{l(r_{1n}+r_{2n})} (r_{3n}^2 + r_{4n}r_{3n} - r_{4n}^2 + k^2(-2+\vartheta))(r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\
S_n(1,3) = & - \left(\begin{aligned} & \left(e^{l(r_{2n}+r_{3n})} (r_{2n}-r_{3n})(r_{1n}-r_{4n}) + e^{l(r_{1n}+r_{4n})} (r_{2n}-r_{3n})(r_{1n}-r_{4n}) - \right. \\ & e^{l(r_{1n}+r_{3n})} (r_{1n}-r_{3n})(r_{2n}-r_{4n}) + e^{l(r_{2n}+r_{4n})} (r_{1n}-r_{3n})(r_{2n}-r_{4n}) + \\ & e^{l(r_{1n}+r_{2n})} (r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) + e^{l(r_{3n}+r_{4n})} (r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) \end{aligned} \right) \\ & D \left(\begin{aligned} & -e^{lr_{4n}} r_{4n} (r_{1n}-r_{2n})(r_{1n}-r_{3n})(r_{2n}-r_{3n})(r_{1n}+r_{2n}+r_{3n}) + \\ & e^{lr_{3n}} r_{3n} (r_{1n}-r_{2n})(r_{1n}-r_{4n})(r_{2n}-r_{4n})(r_{1n}+r_{2n}+r_{4n}) - \\ & e^{lr_{2n}} r_{2n} (r_{1n}-r_{3n})(r_{1n}-r_{4n})(r_{3n}-r_{4n})(r_{1n}+r_{3n}+r_{4n}) + \\ & e^{lr_{1n}} r_{1n} (r_{2n}-r_{3n})(r_{2n}-r_{4n})(r_{3n}-r_{4n})(r_{3n}+r_{2n}+r_{4n}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\
S_n(1,4) = & - \left(\begin{aligned} & \left(e^{l(r_{2n}+r_{3n})} (r_{2n}-r_{3n})(r_{1n}-r_{4n}) + e^{l(r_{1n}+r_{4n})} (r_{2n}-r_{3n})(r_{1n}-r_{4n}) - \right. \\ & e^{l(r_{1n}+r_{3n})} (r_{1n}-r_{3n})(r_{2n}-r_{4n}) + e^{l(r_{2n}+r_{4n})} (r_{1n}-r_{3n})(r_{2n}-r_{4n}) + \\ & e^{l(r_{1n}+r_{2n})} (r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) + e^{l(r_{3n}+r_{4n})} (r_{1n}-r_{2n})(r_{3n}-r_{4n}) \end{aligned} \right) \\ & D \left(\begin{aligned} & e^{lr_{4n}} (r_{1n}^3 (r_{2n}-r_{3n}) + r_{2n}r_{3n} (r_{2n}^2 - r_{3n}^2) + r_{1n} (-r_{2n}^3 + r_{3n}^3)) + \\ & e^{lr_{3n}} (-r_{2n}^3 r_{4n} + r_{4n}^3 r_{2n} + r_{1n}^3 (-r_{2n} + r_{4n}) + r_{1n} (r_{2n}^3 - r_{4n}^3)) + \\ & e^{lr_{1n}} (-r_{3n}^3 r_{4n} + r_{3n} r_{4n}^3 - r_{2n}^3 (-r_{3n} + r_{4n}) + r_{2n} (r_{3n}^3 - r_{4n}^3)) + \\ & e^{lr_{2n}} (r_{1n} (-r_{3n}^3 + r_{4n}^3) + r_{1n}^3 (r_{3n}-r_{4n}) + r_{3n} r_{4n} (r_{3n}^2 - r_{4n}^2)) + \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$