بهبود تنش و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی

احمد گنجعلی[۱*] و بهروز حسنی[۲]

۱. دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود

۲. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۲/۲۵- دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۱۰/۲۲)

چکیده - اولین روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریک مسئله‌های دو بعدی، بر پایه استفاده از خاصیت فوق همگرایی در نقاط گوسی، توسط حسنی و همکاران معرفی شد. در این مقاله به توسعه این روش در تحلیل ایزوژئومتریک مسئله‌های سه بعدی و بررسی تأثیر استفاده از این نقاط نمونه جهت بهبود حل و برآورد خطای آن پرداخته شده است. به‌منظور بررسی کارایی این نقاط بهینه تنش در برآورد خطای مسئله‌های سه بعدی به مدل‌سازی دو مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. نتایج به‌دست آمده از این پژوهش، کارایی مناسب این نقاط بهینه تنش را در بهبود حل و برآورد خطای تحلیل سه بعدی مسئله‌ها به‌روش ایزوژئومتریک نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی : تحلیل ایزوژئومتریک، مسئله‌های سه بعدی، برآورد خطا، بازیافت تنش.

Stress Improvement and Error Estimation in Isogeometric Analysis of Three Dimensional Problems

A. Ganjali[1] and B. Hassani[2]

1. Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Shahrood Branch
2. Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Abstract: ***An isogeometrical approach, based on using the superconvergent property of the Gauss integration points, for error estimation and stress recovery of two-dimensional problems was introduced by Hassani et. al. In this paper, the method is further developed to deal with the isogeometrical analysis of three-dimensional problems. To investigate the performance of the approach in using the optimal stress points, two 3D examples with available analytical solutions are taken into consideration. The obtained results are indicative of the good performance of the method in improvement of stress and error estimation of 3D problems in the isogeometric analysis method.***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ahmad.ganjali@yahoo.com

Keywords: ***Isogeometric analysis, 3D problems, error estimation, stress recovery.***

فهرست علائم

$\mathbf{B}$	ماتریس کرنش واحد در مسائل سه بعدی	$\mathbf{P}$	بردار نقاط کنترلی نربز
$C(\xi)$	منحنی مربوط به توابع پایه بی- اسپلاین و یا نربز	$\bar{\mathbf{P}}$	بردار محلی نقاط کنترلی نربز
$\mathbf{D}$	ماتریس خواص ارتجاعی مصالح در مسائل سه بعدی	$\mathbf{P}_{\alpha}$	بردار مؤلفه مجهول نقاط کنترلی نربز تنش α
$\Vert e \Vert$	نرم خطای انرژی دقیق	$\bar{\mathbf{R}}$	ماتریس محلی توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای نربز
$\Vert \bar{e} \Vert$	نرم خطای انرژی تقریبی	$S(\xi,\eta)$	سطح تعریف شده توسط توابع پایه بی- اسپلاین و یا نربز
$\Vert e_{\sigma} \Vert_{L_2}$	نرم خطای L_2 تقریبی	$V(\xi,\eta,\zeta)$	حجم تعریف شده توسط توابع پایه نربز
$\mathbf{F}$	بردار نیروهای خارجی وارد بر کل دامنه	$\mathbf{u}$	بردار تغییر مکان دقیق هر نقطه در داخل زیر دامنه نربز
$\mathbf{F}_e$	بردار نیروهای خارجی وارد بر المان	$\bar{\mathbf{u}}^p$	بردار تغییر مکان تقریبی هر نقطه در داخل زیر دامنه نربز
$F(\mathbf{P}_{\alpha})$	تابع اختلاف تنش بهبود یافته و تنش ایزوژئومتریک مؤلفه تنش α	Ξ	بردار گرهی در فضای پارامتری ξ
$\mathbf{K}$	ماتریس ضرایب مربوط به کل دامنه مسئله	H	بردار گرهی در فضای پارامتری η
$\mathbf{K}_e$	ماتریس ضرایب مربوط به المان	ζ	بردار گرهی در فضای پارامتری ζ
$\mathbf{L}$	عملگر دیفرانسیل در مسائل سه بعدی	e	بردار کرنش در مسائل سه بعدی
$N_{i,0}(\xi)$	i امین تابع پایه‌ای بی‌اسپلاین از درجه صفر	s	بردار تنش در مسائل سه بعدی
$N_{i,P}(\xi)$	i امین تابع پایه‌ای بی‌اسپلاین از درجه P	s^*	بردار تنش بهبود یافته در مسائل سه بعدی
$R_{i,j}(\xi,\eta)$	توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای نربز	$P_{i,j,k}$	نقاط کنترلی حجم نربز

۱- مقدمه

تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود و بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰، به‌دلیل توسعه رایانه‌ها، پیشرفت‌های چشمگیری در علم مدل‌سازی هندسه به‌کمک رایانه[۱] شکل گرفت. واضح است که تحلیل مسائل مهندسی بر مبنای هندسه استوار است و استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل مهندسی در رفع نقایص خود نماید، اما به‌دلیل عدم هم زمانی پیدایش روش اجزای محدود و روش‌های طراحی به‌کمک رایانه، این اتصال بین تحلیل مهندسی و طراحی به‌کمک رایانه به‌وجود نیامد. برای اولین بار، ورود تکنیک‌های طراحی به‌کمک رایانه در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰٤ توسط کیگان و هولیگ صورت پذیرفت [۱، ۲ و۳] که در آن به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، از توابع پایه اسپلاین استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نربز (بی- اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت)[۲] که از توسعه توابع اسپلاین به‌دست می‌آیند، توسط هیوز و همکارانش تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت [۴]. در این روش ضمن استفاده از

خواص توابع پایه اسپلاین و نربز در تعریف منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آنها جهت درونیابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. به‌طور خلاصه از مزایای روش ایزوژئومتریک در مقایسه با دیگر روش‌های عددی می‌توان به مواردی چون، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر، دقت قابل ملاحظه در اقناع شرایط مرزی، عدم نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل دچار تغییر می‌شود، کاهش قابل ملاحظه اندازه دستگاه معادلات، انعطاف‌پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرائب آنها خود تابعی متغییر می‌باشند اشاره کرد [۵]. در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتریک به‌سرعت در زمینه‌های مختلفی همچون دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است. هم‌چنین در این زمینه یک کتاب به چاپ رسیده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [۶].

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به‌شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی محققین در قابلیت اعتماد نتایج بوده است. در حالت کلی روش‌های برآورد خطا در دو دستهٔ روش‌های بازیافت تنش (گرادیان) و روش‌های باقیمانده‌ای قرار می‌گیرند [۷]. بازیافت تنش روشی به‌منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش به‌دست آمده از تحلیل عددی مسائل می‌باشد. با استفاده از بازیافت تنش، یک جواب نزدیک به حل دقیق محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه خواهد داشت. از جمله ابتدایی‌ترین روش‌های بازیافت تنش در اجزای محدود می‌توان به‌روش تصویر L_2 که توسط اودن و براچلی در سال ۱۹۷۱ [۸] و روش میانگین‌گیری که توسط هینتن و کمپبل در سال ۱۹۷٤ [۹] به‌کار برده شده است اشاره کرد. در سال ۱۹۹۲ روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا SPR[۳] توسط زینکویچ و زو ابداع شد [۱۰]. اساس این روش برمبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق همگرا است که در آنها تنش به‌دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در سال ۱۹۹٤ تابارا، بلیکر و بلچکو، طی ارائه مقاله‌ای، بازیابی تنش را با استفاده از درونیابی حداقل مربعات متحرک برای آن دسته از مسائل اجزای محدود که از درجه C^{-1} بودند، پیشنهاد کردند [۱۱]. در سال ۱۹۹٤ ویبرگ، عبدالوهاب و زیوکاس طی مقاله‌ای سعی نمودند با اضافه کردن شرایطی به‌روش SPR، روش مذکور را بهبود بخشند [۱۲]. در سال ۱۹۹۷ برومند و زینکویچ روش قدرتمند دیگری در برآورد خطا ارائه کردند که نسبت به‌روش‌های قبلی دارای هیچ محدودیتی نبود [۱۳و۱۴]. این روش قابل استفاده در اکثر مسائل به‌ویژه مسائل پلاستیک است که این ویژگی یک مزیت مهم به‌شمار می‌آید. بعد از آن نیز تکنیک‌های بسیار دیگری توسط محققین ابداع شد که در هر یک به‌نوعی به بهبود روش‌های قبلی پرداخته می‌شود که به‌عنوان نمونه می‌توان به‌روش‌های LP [۱۵] و SPR-C [۱۶] و یا روش ارائه شده در مرجع [۱۷] اشاره کرد.

استفاده از روش بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریک اولین بار توسط حسنی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [۵]. اساس روش آنها برگرفته از دقت بیشتر تنش در نقاط انتگرال‌گیری گوسی است. در این روش با استفاده از نقاط نمونه گوسی برای هر مؤلفه تنش در حالت دو بعدی تنش و کرنش مسطح، یک سطح بهبود یافته تشکیل می‌شود که جهت برآورد خطای ایزوژئومتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵].

با توجه به اینکه تحلیل مسائل سه بعدی، کاربرد ویژه‌ای در طراحی مهندسی و حل مسائل واقعی دارد، ارائه یک راهکار مؤثر جهت برآورد خطا و افزایش قابلیت اعتماد نتایج حاصل از تحلیل سه بعدی مسائل، از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. در تحقیق حاضر به توسعه روش ارائه شده در مسائل دوبعدی، جهت بازیافت تنش و برآورد خطای روش ایزوژئومتریک در تحلیل مسائل سه بعدی پرداخته شده است. بدین منظور به مدل‌سازی و تحلیل دو مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. تیر طره با مقطع دایره و مربع دو مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. با توجه به تشابه توزیع نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق و دقت بیشتر مؤلفه‌های تنش

بازیافتی نسبت به حل ایزوژئومتریک برای دو مثال حل شده در این پژوهش، می توان بیان نمود که نقاط نمونه گوسی در بهبود حل و برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی نیز مؤثر بوده و قابل استفاده می‌باشند.

در بخش دوم به چگونگی تولید هندسه سه بعدی با استفاده از تکنیک نربز در تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته شده است. بخش سوم فرمول‌بندی تحلیل سه بعدی مسائل با استفاده از روش ایزوژئومتریک را بیان می‌کند. در بخش چهارم نحوه تشکیل تنش بهبود یافته در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی بیان می‌شود و در بخش پنجم به تعریف نرم خطا و شاخص تأثیر پرداخته شده است. بخش ششم و هفتم نتایج به‌دست آمده از مدل‌سازی و تحلیل دو مثال نمونه در روش ایزوژئومتریک و برآورد خطای آنرا بیان می‌کند و در نهایت در بخش هشتم به بیان نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

۲- معرفی تکنیک نربز در تولید هندسه

نربزها از بی- اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی-اسپلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه)[۴] تعریف می‌شوند. نواحی مذکور، دامنهٔ مدل‌سازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی[۵] در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به‌صورت زیر تشکیل می‌شود [۱۸]:

$$\Xi=\left\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+p+1}\right\} \qquad (۱)$$
$$\xi_{i+1}\geq\xi_i \qquad i=1,2,\ldots,n+p+1$$

که در آن x_i i امین گره، p مرتبه چند جمله‌ای و n تعداد توابع شکل تشکیل‌دهنده بی- اسپلاین به‌شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره‌ای وجود دارد ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره‌ای به نام بردارهای گره‌ای نامتناوب[۶] (یا باز)[۷] استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi=\left\{\underbrace{a,\ldots,a}_{p+1},\xi_{p+1},\ldots,\xi_{m-p-1},\underbrace{b,\ldots,b}_{p+1}\right\} \qquad (۲)$$

در این صورت i امین تابع پایه‌ای بی‌اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$N_{i,0}(\xi)=\begin{cases}1 & \text{if } \xi_i\leq\xi<\xi_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi) \qquad (۳)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی- اسپلاین از درجه p به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$C(\xi)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(\xi)P_i \qquad a\leq\xi\leq b \qquad (۴)$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله‌ای قطعه‌ای[۸] است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپلاین هستند که روی بردار گره‌ای نامتناوبی به‌صورت (۲)، با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می‌شوند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آنگاه می‌توان رابطه $m=n+p+1$ را برای آنها نوشت.

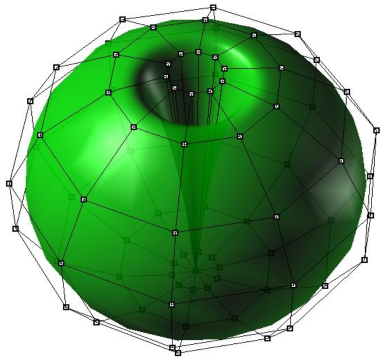
به طرز مشابهی سطوح بی- اسپلاین به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)P_{i,j} \qquad (۵)$$

که در آن:

$$\Xi=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1},\xi_{p+1},\ldots,\xi_{r-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\right\} \qquad (۶)$$
$$\mathrm{H}=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{q+1},\eta_{q+1},\ldots,\eta_{s-q-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\right\}$$

به‌طوری‌که بردار گره‌ای Ξ دارای $r+1$ گره و H دارای $s+1$ گره می‌باشد. هم‌چنین یک منحنی نربز از درجه p به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:



شکل ۱- شبکه نقاط کنترلی و حجم نربز مربوط به آن

$$C(\xi)=\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi)\,w_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi)\,w_i} \qquad a\le\xi\le b \tag{۷}$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی- اسپلاین از درجه p هستند، که برروی بردار گره‌ای به‌صورت (۲) تعریف شده‌اند.

یک سطح نربز که در جهت x از درجه p، و در جهت η از درجه q باشد، به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$S(\xi,\eta)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi)\,N_{j,q}(\eta)\,w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi)\,N_{j,q}(\eta)\,w_{i,j}} \qquad 0\le\xi\ ,\ \eta\le 1 \tag{۸}$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه‌ای بی- اسپلاین هستند که برروی بردارهای گره‌ای به‌صورت (٦) تعریف شده‌اند. اگر توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای را در (۸) به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)\,N_{j,q}(\eta)\,w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} N_{k,p}(\xi)\,N_{l,q}(\eta)\,w_{k,l}} \tag{۹}$$

خواهیم داشت:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\,P_{i,j} \tag{۱۰}$$

و در نهایت مشابه منحنی‌ها و سطوح، برای احجام نربز نیز می‌توان نوشت [۱۸]:

$$\begin{aligned} V(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\frac{N_{i,p}(\xi)\,N_{j,q}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} N_{i,p}} \\ &\times\frac{(\eta)\,N_{k,r}(\zeta)\,w_{i,j,k}}{(\xi)\,N_{j,q}(\eta)\,N_{k,r}(\zeta)\,w_{i,j,k}}P_{i,j,k} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} R_{i,j,k}P_{i,j,k} \qquad 0\le\xi,\eta,\zeta\le 1 \end{aligned} \tag{۱۱}$$

در این رابطه بردار گرهی ξ و η مطابق (٦) و ζ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{r+1},\zeta_{r+1},\ldots,\zeta_{z-r-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{r+1}\right\} \tag{۱۲}$$

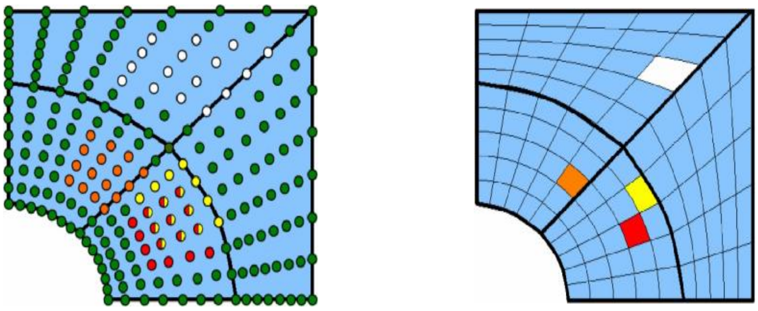
که دارای z+1 گره می‌باشد. $P_{i,j,k}$ نقاط کنترلی که به تعداد $(n+1)\times(m+1)\times(l+1)$ می‌باشند. $w_{i,j,k}$ وزن‌های متناظر با نقاط کنترلی $P_{i,j,k}$، و $N_{i,p}(\xi)$، $N_{j,q}(\eta)$ و $N_{k,r}(\zeta)$ به‌ترتیب توابع پایه بی- اسپلاین از درجه p، q و r می‌باشند.

به‌طور مثال در شکل ۱ شبکه نقاط کنترلی و حجم تولید شده از آن با استفاده از تکنیک نربز نشان داده شده است.

۳- فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل سه بعدی

کلی‌ترین مسائل در تحلیل سازه‌ها، مسائل سه بعدی هستند که در صنعت نیز کاربرد فراوان دارند. در این مسائل هزینه ساخت شبکه اجزای محدود نسبت به مسائل دو بعدی، به‌دلیل پیچیده بودن هندسه آن بسیار بیشتر است. بنابراین به‌نظر می‌رسد حل این مسائل به‌کمک روش ایزوژئومتریک از اهمیت بیشتری برخوردار باشد.

در مکانیک محیط‌های پیوسته، سازه‌های سه بعدی در هر نقطه، دارای سه درجه آزادی تغییر مکانی است. در این مسائل شش مؤلفه کرنش وجود دارد. ماتریس کرنش را در مسائل سه بعدی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:



شکل ۲- نقاط کنترلی مورد تأثیر هر المان از دامنه دو بعدی مدل‌سازی شده با چهار وصله و توابع شکل نربز درجه سه

$$e=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\partial u_x/\partial x\\ \partial u_y/\partial y\\ \partial u_z/\partial z\\ \partial u_x/\partial y+\partial u_y/\partial x\\ \partial u_y/\partial z+\partial u_z/\partial y\\ \partial u_z/\partial x+\partial u_x/\partial z\end{Bmatrix}=\mathbf{Lu} \qquad (۱۳)$$

که در این رابطه:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0 & 0\\ 0 & \partial/\partial y & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial z\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y\\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x\end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

$$\mathbf{u}=\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix} \qquad (۱۵)$$

بنابراین در مسائل سه بعدی سه مؤلفه تغییر مکانی u، v و w باید تقریب زده شوند. در روش ایزوژئومتریک این کار با استفاده از توابع پایه نربز به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\mathbf{u}\approx\bar{\mathbf{u}}^p(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{l}\sum_{k=0}^{m}R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta)\,\mathbf{P}^p_{i,j,k} \qquad (۱۶)$$

که در این رابطه $R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta)$، مطابق (۱۱) توابع پایه نربز می‌باشد و $\mathbf{P}^p_{i,j,k}$ متغییرهای کنترلی مربوط به زیردامنه p در مسئله هستند.

با توجه به خاصیت بازه تأثیر توابع نربز که بیان می‌کند برای هر ξ، η و ζ فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می‌باشند [۱۰]، می‌توان برای کاهش هزینه محاسبات، معادله (۱٦) را به‌صورتی‌که در ادامه بیان خواهد شد، تغییر داد. بدین منظور اگر فرض کنیم ξ، η و ζ به‌ترتیب در دهانه‌های گره‌ای i اُم، j اُم و k اُم قرار دارند (یعنی $\xi\in[\xi_i,\xi_{i+1})$، $\eta\in[\eta_j,\eta_{j+1})$ و $\zeta\in[\zeta_k,\zeta_{k+1})$)، و درجهٔ توابع پایه‌ای در جهت بردار گره‌ای Ξ، p، در جهت بردار گره‌ای H، q و در جهت بردار گرهی ζ، r باشند، آنگاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)(r+1)$ تابع پایه‌ای غیر صفر وجود خواهد داشت. در این صورت هر المان نربز تنها بر تعداد مشخصی از نقاط کنترلی پیرامون خود تأثیرگذار است. به‌طور مثال در شکل ۲ شبکه المان‌ها و نقاط کنترلی دامنه مدل‌سازی شده با چهار وصله توسط توابع پایه نربز درجه سه برای یک مسئله دوبعدی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر المان نربز در بازه تأثیر خود دارای ۱۶=(۳+۱)(۳+۱)=$(p+1)(q+1)$ نقطه کنترلی است.

با توجه به خاصیت بازه تأثیر توابع نربز می‌توان (۱٦) را به‌صورت (۱۷) بیان نمود. که در آن $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس محلی توابع پایه‌ای نسبی نربز و $\bar{\mathbf{P}}$ بردار محلی مختصات نقاط کنترلی به‌صورت (۱۸) و (۱۹) بیان می‌شوند:

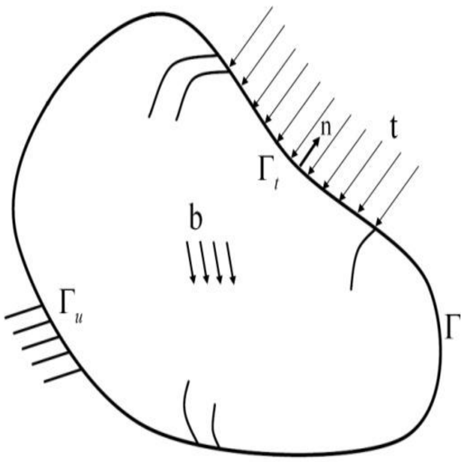
$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j,k}=\begin{Bmatrix}u^{i,j,k}(x,y,z)\\ v^{i,j,k}(x,y,z)\\ w^{i,j,k}(x,y,z)\end{Bmatrix}=$$

$$\begin{Bmatrix} \sum_{e=i-p}^{i}\sum_{f=j-q}^{j}\sum_{g=k-r}^{k} R_{e,f,g}(\xi,\eta,\zeta)\,P_{u_{e,f,g}} \\ \sum_{e=i-p}^{i}\sum_{f=j-q}^{j}\sum_{g=k-r}^{k} R_{e,f,g}(\xi,\eta,\zeta)\,P_{v_{e,f,g}} \\ \sum_{e=i-p}^{i}\sum_{f=j-q}^{j}\sum_{g=k-r}^{k} R_{e,f,g}(\xi,\eta,\zeta)\,P_{w_{e,f,g}} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{P}} \tag{۱۷}$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{i-p,j-q,k}(\xi,\eta,\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q,k}(\xi,\eta,\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{i-p,j-q,k}(\xi,\eta,\zeta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{i-p,j,k}(\xi,\eta,\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{i-p,j,k}(\xi,\eta,\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{i-p,j,k}(\xi,\eta,\zeta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta) \end{bmatrix}^{T} \tag{18}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} P_{u\ i-p,j-q,k-r} \\ P_{v\ i-p,j-q,k-r} \\ P_{w\ i-p,j-q,k-r} \\ \vdots \\ P_{u\ i-p,j-q,k} \\ P_{v\ i-p,j-q,k} \\ P_{w\ i-p,j-q,k} \\ \vdots \\ P_{u\ i-p,j,k} \\ P_{v\ i-p,j,k} \\ P_{w\ i-p,j,k} \\ \vdots \\ P_{u\ i,j,k} \\ P_{v\ i,j,k} \\ P_{w\ i,j,k} \end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

با توجه به (۱۷) مشاهده می‌شود که تنها پارامتر مجهول برای



شکل ۳- شرایط مرزی یک مسئله الاستیسیته

تعیین تغییر مکان در جهت x، y و z بردار $\bar{\mathbf{P}}$ می‌باشد. محدودیتی که بردار مؤلفه‌های چهارم مختصات نقاط کنترلی نربز را برای هر مؤلفه تغییر مکان مشخص می‌کند، ارضای معادله دیفرانسیل تعادل در دامنه تحلیل ایزوژئومتریک است.

معادله دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی نیرو و جابه‌جایی حاکم بر یک مسئله الاستیسیته را می‌توان به‌صورت (۲۰) تعریف نمود:

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}^{T}s+\mathbf{b}=0 && \text{in} \quad \Omega \\ &s_{ij}\mathbf{n}_{j}=\mathbf{t}_{i} && \text{on} \quad \Gamma_{t} \\ &\mathbf{u}_{i}=\hat{\mathbf{u}}_{i} && \text{on} \quad \Gamma_{u} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

که در آن $\mathbf{L}$ عملگر مشتق است و به‌صورت (۱٤) تعریف می‌شود. $\mathbf{u}$ و $\mathbf{b}$ به‌ترتیب بردارهای جابه‌جایی و نیروهای حجمی، s مشابه رابطه (۲۸)، بردار ستونی مؤلفه‌های تنش و s_{ij} ماتریس مربعی تنش می‌باشند. $\mathbf{t}_i$ نیروهای سطحی از پیش تعیین شده برروی مرز طبیعی Γ_t و $\hat{\mathbf{u}}_i$ جابه‌جایی از پیش تعیین شده برروی مرز ضروری Γ_u و $\mathbf{n}_j$ بردار یکه عمود بر هر نقطه از مرز طبیعی و به‌سمت خارج سطح می‌باشد (شکل ۳ را ببینید).

با جایگذاری (۱۷) در (۲۰) و با استفاده از روش تغییر مکان مجازی و یا روش مینیمم کردن تابع پتانسیل صورت ضعیف معادله (۲۰) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}(\mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{P}})\,d\Omega-\int_{\Omega}\bar{\mathbf{R}}^{T}\mathbf{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma_t}\bar{\mathbf{R}}^{T}\mathbf{t}\,d\Gamma=0 \tag{۲۱}$$

که در آن $\bar{\mathbf{R}}$ و $\bar{\mathbf{P}}$ مطابق با (۱۸) و (۱۹)، $\mathbf{D}$ ماتریس خواص

مصالح و $\mathbf{B}$ ماتریس مشتقات توابع شکل نربز به‌صورت (۲۲) و (۲۳) تعریف می‌شود:

$$
\mathbf{D}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}
\begin{bmatrix}
1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\
 & & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\
 & & & (1-2\nu)/2 & 0 & 0\\
 & \text{sym.} & & & (1-2\nu)/2 & 0\\
 & & & & & (1-2\nu)/2
\end{bmatrix}
\tag{۲۲}
$$

$$
\mathbf{B}=\mathbf{L}\bar{\mathbf{R}}=
\begin{bmatrix}
\frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} & 0 & 0 & \mathbf{L}\\
0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial y} & 0 & \mathbf{L}\\
0 & 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial z} & \mathbf{L}\\
\frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial y} & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} & 0 & \mathbf{L}\\
0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial z} & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial y} & \mathbf{L}\\
\frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} & \mathbf{L}
\end{bmatrix}
\tag{۲۳}
$$

هم‌چنین می‌توان (۲۱) را به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{P}}=\mathbf{F} \tag{۲۴}$$

که در آن $\mathbf{K}$ ماتریس ضرایب، $\bar{\mathbf{P}}$ مجهولات مسئله و $\mathbf{F}$ نیروهای خارجی وارد بر دامنه می‌باشند. حال با گسسته سازی دامنه، $\mathbf{K}$ و $\mathbf{F}$ به‌ترتیب از گردآوری ماتریس سختی و بردار نیروی هر المان از فضای پارامتری، مطابق با (۲۵) ساخته می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_e&=\int_{\Omega_e}\mathbf{B}^T(\mathbf{DB})\,d\Omega\\
\mathbf{F}_e&=\int_{\Omega_e}\bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{b}\,d\Omega+\int_{\Gamma_{t_e}}\bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{t}\,d\Gamma
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$

و در نهایت با حل (۲٤) و مشخص شدن بردار $\bar{\mathbf{P}}$ می‌توان مؤلفه‌های کرنش و تنش را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$e=\mathbf{B}\bar{\mathbf{P}} \quad , \quad s=\mathbf{D}e \tag{۲۶}$$

مشابه روش اجزای محدود در روش ایزوژئومتریک نیز از توابع پایه یکسان جهت تقریب تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. در این روش مختصات نقاط کنترلی طوری انتخاب می‌شوند که مؤلفه‌های اول، دوم و سوم مختصات این نقاط هندسه مسئله را در حالت سه بعدی برآورد کنند. در این‌صورت مؤلفهٔ چهارم مختصات نقاط کنترلی برای هر مؤلفهٔ تغییر مکان طوری محاسبه می‌شود که در هر نقطه از فضای سه بعدی مسئله مقدار آن تقریب زده شود. بنابراین در یک مسئله سه بعدی هندسه مسئله به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$
\mathbf{V}=\begin{Bmatrix}X(x,y,z)\\ Y(x,y,z)\\ Z(x,y,z)\end{Bmatrix}=
\begin{Bmatrix}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta)P_{x_{i,j,k}}\\
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta)P_{y_{i,j,k}}\\
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta)P_{z_{i,j,k}}
\end{Bmatrix}
\tag{۲۷}
$$

در روابط فوق توابع پایه نربز $R_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta)$ برحسب مختصات ξ، η و ζ نوشته شده‌اند که همانند روش اجزای محدود لزوم نیاز به نگاشت در محاسبات را ایجاب خواهد کرد. جهت اطلاع از نحوه انجام این نگاشت و آشنایی با فضاهای مختلف محاسباتی در روش ایزوژئومتریک می‌توان به [۶] مراجعه کرد.

۴- نحوه محاسبه تنش بهبود یافته

در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مؤلفهٔ تنش در هر ناحیه به‌صورت یک حجم نربز با مؤلفه چهارم مجهول نقاط کنترلی درنظر گرفته می‌شود. این حجم از سه مؤلفه اول نقاط کنترلی که هندسه مسئله را تولید می‌کنند، به‌دست می‌آید. در این‌صورت مؤلفهٔ چهارم نقاط کنترلی طوری محاسبه می‌شود که با استفاده از توابع شکل نربز، مقدار هر مؤلفهٔ تنش به‌صورت بهبود یافته تقریب زده شود. اساس محاسبه مختصات مؤلفهٔ چهارم نقاط کنترلی برای هر مؤلفهٔ تنش و در نتیجه به‌دست آوردن تنش بهبود یافته برگرفته از خاصیت نقاطی است که در آنها تنش به‌دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است. به‌همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می‌شود که اولین بار توسط

بارلو مطرح شده است[۱۹]. در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی نیز با توجه به اینکه حجم نربز در نهایت تشکیل یک چند جمله‌ای می‌دهد، می‌توان نتیجه گرفت که نقاط گوسی در این روش نیز دارای خاصیتی مشابه نقاط نمونه گوسی در اجزای محدود است. مختصات مؤلفهٔ چهارم نقاط کنترلی تنش بهبودیافته، با مینیمم کردن فاصله بین مقدار این تنش فرضی بهبود یافته و مقدار تنش به‌دست آمده از حل ایزوژئومتریک در نقاط گوس المان‌های هر ناحیه، با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می‌شود.

در مسائل سه بعدی، می‌توان تنش بهبود یافته هر یک از مؤلفه‌های تنش را با توجه به توابع شکل نربز به‌صورت زیر درنظر گرفت:

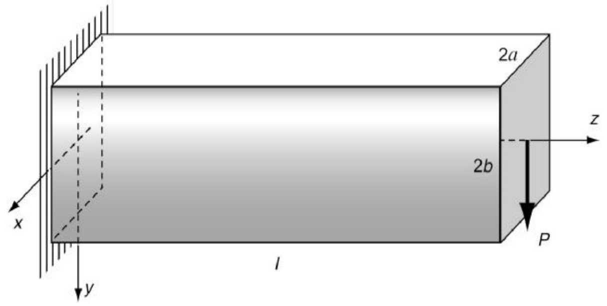
$$s^* = \begin{Bmatrix} s^*_x \\ s^*_y \\ s^*_z \\ t^*_{xy} \\ t^*_{yz} \\ t^*_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^T\mathbf{P}_{xx} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{P}_{yy} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{P}_{zz} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{P}_{yz} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{P}_{zx} \end{Bmatrix} \qquad (۲۸)$$

که در آن $\mathbf{R}$ و $\mathbf{P}_\alpha$ مطابق (۲۹) و (۳۰) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{R} = \left[R_{1,1,1}, R_{1,1,2}, ..., R_{1,1,l}, R_{1,2,1}, R_{1,2,2}, ..., R_{1,2,l}, ..., R_{n,m,l} \right]^T \qquad (۲۹)$$

$$\mathbf{P}_\alpha = \left[P_{1,1,1}, P_{1,1,2}, ..., P_{1,1,n}, P_{1,2,1}, P_{1,2,2}, ..., P_{1,2,n}, ..., P_{n,m,l} \right]^T$$
$$\alpha = xx, yy, zz, xy, yz, zx \qquad (۳۰)$$

در رابطه (۳۰)، سه مؤلفه اول بردار نقاط کنترلی هر مؤلفه تنش، هندسه مسئله سه بعدی را تقریب می‌زنند که معلوم بوده و مؤلفه چهارم که مجهول است، مقدار تنش بهبود یافته را در هر نقطه درونیابی می‌کند. برای تعیین این مقادیر مجهول، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می‌کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P}_\alpha)$ را برای هر مؤلفه تنش به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:



شکل ۴- تیر طره با مقطع مستطیلی [۲۰]

$$F(\mathbf{P}_\alpha) = \sum_{l=1}^{K} (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_\alpha - \tilde{\sigma}_\alpha)^2 \quad \alpha = xx, yy, zz, xy, yz, zx \qquad (۳۱)$$

که در آن $\tilde{\sigma}_\alpha$ مؤلفه تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و $\mathbf{K}$ تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه است. درنهایت با مشتق‌گیری از تابع $F(\mathbf{P}_\alpha)$ نسبت به مؤلفه‌های مجهول بردار $\mathbf{P}_\alpha$ و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات چهارم نقاط کنترلی تنش بهبود یافتهٔ هر یک از مؤلفه‌ها مطابق زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial F(\mathbf{P}_\alpha)}{\partial P_{i,j}} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha \;\Rightarrow\; \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_\alpha \qquad (۳۲)$$

که در آن:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \;,\; \mathbf{B}_\alpha = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{R}_i \tilde{\sigma}_\alpha \quad \alpha = xx, yy, zz, xy, yz, zx \qquad (۳۳)$$

با داشتن مختصات چهارم نقاط کنترلی هر مؤلفهٔ تنش، مقدار مربوط به آن نیز در هر نقطه از دامنه سه بعدی مسئله به‌دست می‌آید. همان‌گونه که در ادامه خواهیم دید، این میدان مؤلفه تنش نسبت به تنش به‌دست آمده از روش ایزوژئومتریک دقیق‌تر می‌باشد و از این‌رو می‌تواند به‌عنوان یک تخمین‌کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک به‌کار رود. روش کار این تخمین‌کننده خطا بدین صورت است که با درنظر گرفتن اختلاف بین تنش بهبودیافته و تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای نقاط مختلف هر المان، می‌توان به‌صورت تقریبی به یک معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد.

در ادامه جهت بررسی سنجش کارایی تخمین‌کننده خطا، به

مقایسه شاخص تأثیر و نرم خطای L_2 تقریبی و دقیق و مقایسه مؤلفه‌های تنش ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته (بازیافتی) با حل دقیق، برای دو مسئله سه بعدی الاستیسیته که دارای حل تحلیلی می‌باشند، پرداخته شده است.

۵- معیارهای بیان خطا

استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به‌صورت زیر بیان می‌شود[۷]:

$$\| e \| = \left[\int_{\Omega} (s - \bar{s})^T \mathbf{D}^{-1} (s - \bar{s})\, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۴}$$

در این رابطه s مقدار دقیق بردار تنش، $\bar{s}$ تنش به‌دست آمده از حل تقریبی، $\mathbf{D}$ ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نمی‌باشد، لذا به‌جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این‌صورت نرم خطای انرژی تقریبی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| \bar{e} \| = \left[\int_{\Omega} (s^* - \bar{s})^T \mathbf{D}^{-1} (s^* - \bar{s})\, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۵}$$

که در اینجا s^* تنش بازیافتی و $\bar{s}$ تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد. هم‌چنین درصورتی که نیاز به تمرکز برروی یک کمیت خاص باشد از نرم خطای L_2 استفاده می‌شود. نرم L_2 برای خطای تنش به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| e_\sigma \|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T (\sigma - \sigma_h)\, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۶}$$

هم‌چنین برای بعضی مسائل خاص که می‌توان معیار خطای دقیق را به‌دست آورد معیار دیگری به نام شاخص تأثیر، θ تعریف می‌شود. شاخص تأثیر مطابق رابطه (۳۷)، نسبت معیار خطای انرژی تقریبی کل دامنه مسئله به معیار خطای انرژی دقیق است، که بیانگر نزدیک شدن حل بهبود یافته به‌سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا می‌باشد.

$$\theta = \frac{\| \bar{e} \|}{\| e \|} \tag{۳۷}$$

هنگامی یک محاسبه‌گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تأثیر به عدد یک نزدیک باشد.

۶- تیر طره مکعب مستطیلی

در این قسمت به بیان نتایج گرفته شده از مدل‌سازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک در حالت سه بعدی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ٤ را ببینید). پارامترهای به‌کار برده شده در مدل‌سازی و آنالیز این تیر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$a = 1,\ b = 1,\ L = 10,\ P = 300,\ E = 1500,\ \nu = 0.25$$

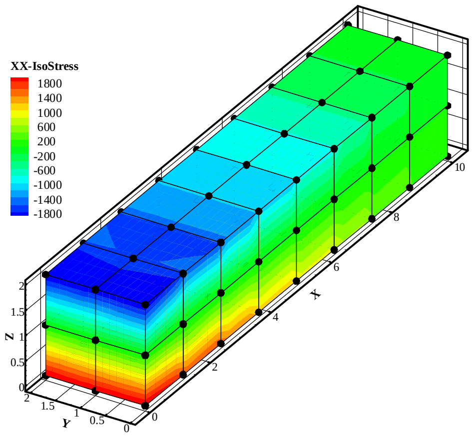
تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن برای تنش‌های غیر صفر، و با توجه به دستگاه مختصات درنظر گرفته شده در شکل ٤، به‌صورت روابط (۳۸) تا (٤۰) ارائه شده است [۲۰]:

$$\tau_{xz} = \frac{2\nu a^2 P}{(1+\nu)\pi^2 I_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a}}{\cosh\frac{n\pi b}{a}} \tag{۳۸}$$

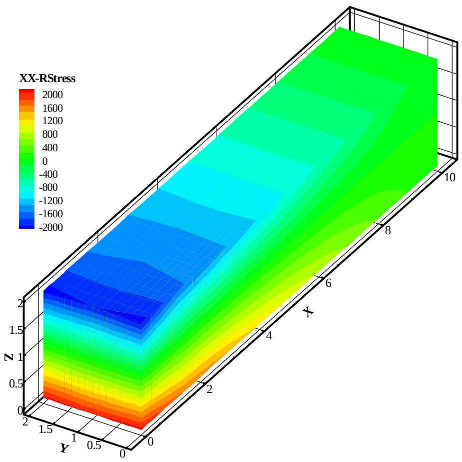
$$\tau_{yz} = \frac{P}{2I_x}(b^2 - y^2) + \frac{\nu P}{6(1+\nu)I_x} \times \left[3x^2 - a^2 - \frac{12a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi y}{a}}{\cosh\frac{n\pi b}{a}} \right] \tag{۳۹}$$

$$\sigma_z = \frac{P}{2I_x} y(l - z) \tag{۴۰}$$

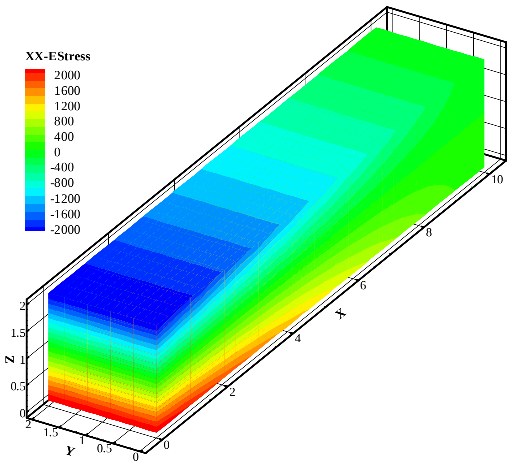
که در آن I_x ممان اینرسی مقطع حول محور x است.



الف) شبکه نقاط کنترلی و توزیع تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک



ب) توزیع تنش حاصل از حل بهبود یافته



ج) توزیع تنش حاصل از حل دقیق

شکل ۵- توزیع تنش s_x تیر طره مکعب مستطیلی

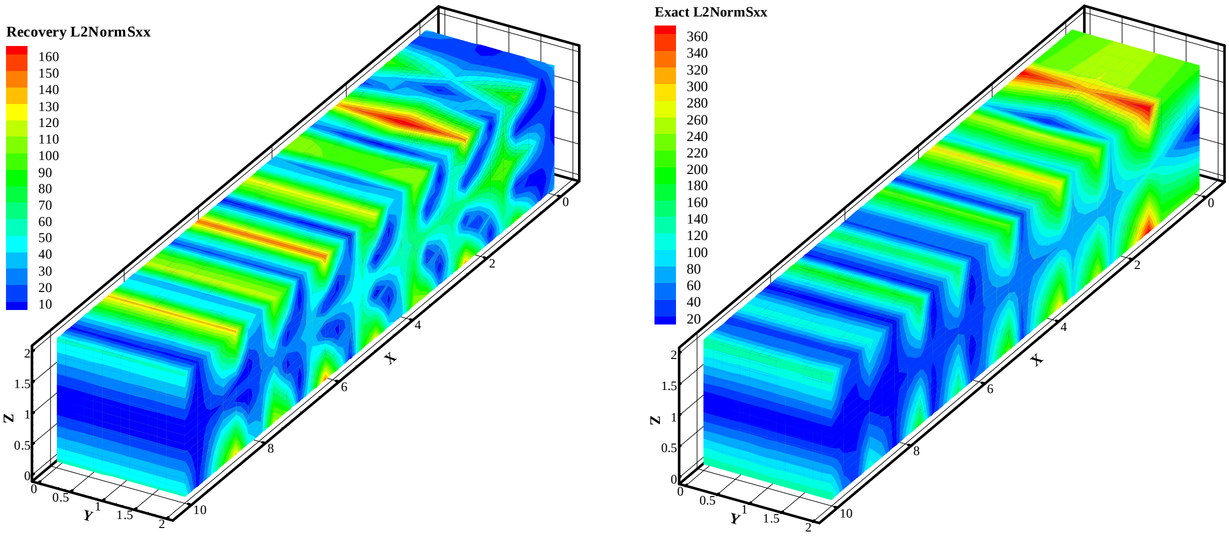
برای مدل‌سازی و تحلیل این مسئله به‌روش ایزوژئومتریک از یک ناحیه و ۸۱ نقطه کنترلی استفاده شده است. هم‌چنین در هر سه جهت ξ، η و ζ از توابع شکل نربز درجه یک استفاده شده است و از بیست و هفت نقطه گوسی جهت انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات ξ، η و ζ به‌صورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\xi = \{0, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0.5, 1, 1\} \quad , \quad \zeta = \{0, 0, 0.5, 1, 1\}$$

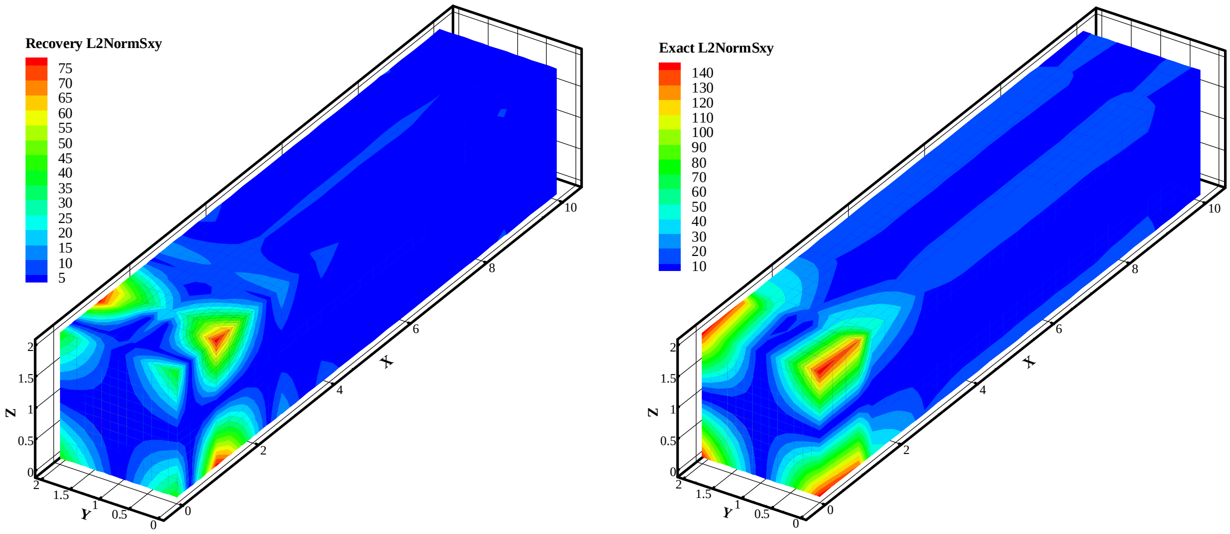
در شکل ۵، نحوه آرایش نقاط کنترلی تیر طره مکعب مستطیلی و کانتور تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک، حل بهبود یافته و حل دقیق برای مؤلفه تنش σ_x نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش بهبود یافته نسبت به حل ایزوژئومتریک، تشابه بیشتری با حل دقیق دارد.

شاخص تأثیر نرم خطای انرژی برای این مثال $\theta = 0.81$ محاسبه شده است. در شکل‌های ٦، ۷ و ۸ به‌ترتیب نحوه توزیع نرم خطای L_2 دقیق و تقریبی برای تنش‌های σ_x، τ_{xy} و τ_{zx} نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تشابه نرم خطای تقریبی و دقیق در این مثال، نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی برای برآورد خطای مسائل سه بعدی با استفاده از روش ایزوژئومتریک می‌باشد. لازم به‌ذکر است که این تشابه، در نحوه تغییرات کانتور نرم خطا می‌باشد (اگر چه محدوده آنها متفاوت است)؛



ب) نرم خطای تقریبی   الف) نرم خطای دقیق

شکل ۶- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش σ_x

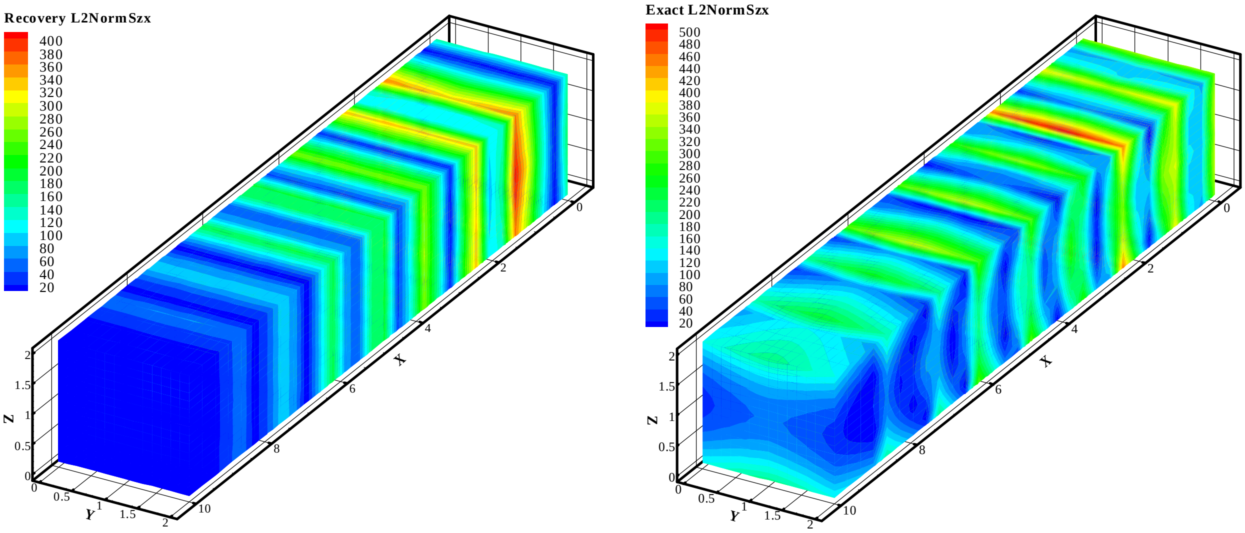


ب) نرم خطای تقریبی   الف) نرم خطای دقیق

شکل ۷- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{xy}

به‌طوری‌که در قسمت‌هایی که نرم خطای دقیق مقدار زیادی را نشان می‌دهد، نرم خطای تقریبی نیز نسبت به سایر نقاط مقدار بیشتری را نشان داده است. این تشابه نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق، نشان می‌دهد که درصورت اتصال الگوریتم تخمین‌کننده خطا به یک زیر برنامه بهبود شبکه، برآورد کننده خطا زیر برنامه بهبود شبکه را به‌طور صحیح در بهبود محلی شبکه در قسمت‌هایی که خطا نسبت به سایر نقاط دامنه بیشتر است، راهنمایی خواهد کرد.

هم‌چنین جهت مقایسه نحوه تغییرات تنش حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته آن با حل دقیق، در شکل ۹، ۱۰ و ۱۱، به ترسیم مؤلفه‌های مختلف تنش در بعضی از مسیرهای نمونه پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در تمام آنها تنش بهبود یافته نسبت به تنش ایزوژئومتریک دقیق‌تر است.



الف) نرم خطای دقیق
ب) نرم خطای تقریبی

شکل ۸- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{zx}

۷- تیر طره استوانه‌ای

مثال دیگری که جهت بررسی کارایی تخمین‌کننده خطای پیشنهادی در این بخش مورد توجه قرار گرفته است، مدل‌سازی و تحلیل تیر طره با مقطع دایره می‌باشد (شکل ۱۲ را ببینید).

پارامترهای به‌کار برده شده در مدل‌سازی و آنالیز این تیر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$a = 4 \quad , \quad L = 30 \quad , \quad P = 800 \quad , \quad E = 1500 \quad , \quad \nu = 0.25$$

تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن برای تنش‌های غیر صفر و با توجه به دستگاه مختصات درنظر گرفته شده در شکل ۱۲، به‌صورت روابط (٤١) تا (٤٣) ارائه شده است[۲۰]:

$$\tau_{xz} = -\frac{P}{4I_x}\frac{1+2\nu}{1+\upsilon}xy \tag{۴۱}$$

$$\tau_{yz} = \frac{P}{I_x}\frac{3+2\upsilon}{8(1+\upsilon)}\left[a^2 - y^2 - \frac{1-2\upsilon}{3+2\upsilon}x^2\right] \tag{۴۲}$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{I_x}y(l-z) \tag{۴۳}$$

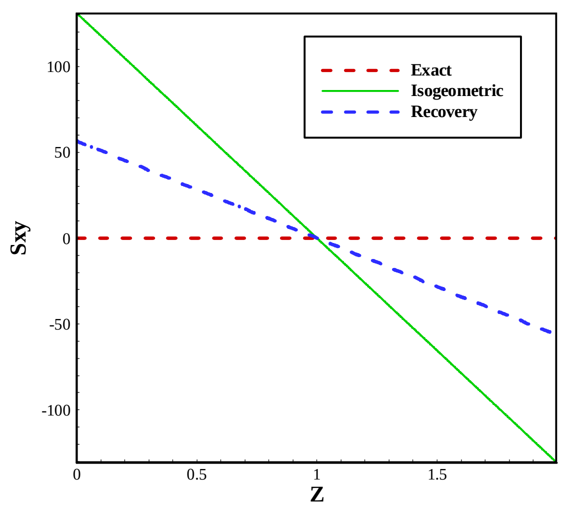
که در آن I_x ممان اینرسی مقطع حول محور x می‌باشد.

برای مدل‌سازی و تحلیل این مسئله به‌روش ایزوژئومتریک از یک ناحیه و ٣٦٤ نقطه کنترلی استفاده شده است. هم‌چنین در جهت ξ، که در راستای طولی تیر می‌باشد از توابع شکل درجه یک و در جهت η و ζ از توابع شکل نربز درجه دو استفاده شده است و از بیست و هفت نقطه گوسی جهت انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات ξ، η و ζ به‌صورت زیر درنظر گرفته شده است:

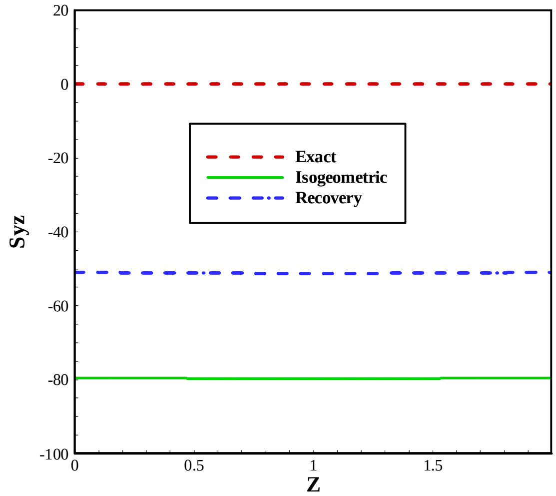
$$\xi = \{0, 0, 0.166667, 0.33333, 0.5, 0.66667, 0.83333, 1, 1\}$$
$$\eta = \{0, 0, 0, 0.125, 0.25, 0.25, 0.375, 0.5, 0.5, 0.625, 0.75, 0.75, 0.875, 1, 1, 1\}$$
$$\zeta = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$$

در شکل ۱۳، نحوه آرایش نقاط کنترلی تیر طره استوانه‌ای و کانتور تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک، حل بهبود یافته و حل دقیق برای مؤلفه تنش σ_x نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این مثال نیز نحوه تغییرات تنش بهبود یافته نسبت به حل ایزوژئومتریک، تشابه بیشتری با حل دقیق دارد.

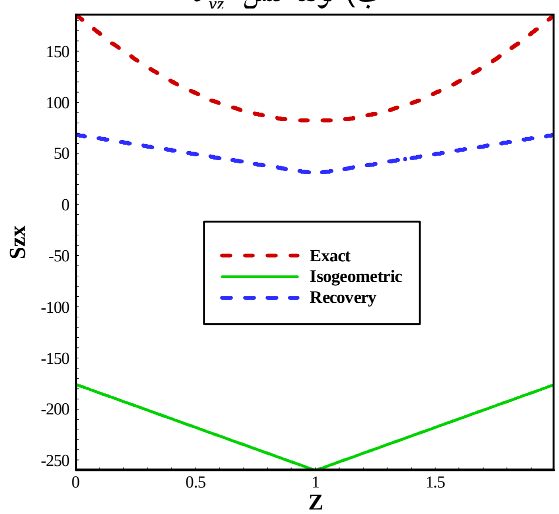
شاخص تأثیر نرم خطای انرژی برای این مثال نیز $\theta = 0.57$ محاسبه شده است. به‌نظر می‌رسد که علت کاهش شاخص تأثیر و درنتیجه کاهش کارایی برآورد کننده خطا در این مثال نسبت به مثال قبل استفاده از توابع شکل با درجه بالاتر از یک می‌باشد. نتایج عددی نشان می‌دهند که معمولاً در روش‌های برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش با افزایش درجه توابع



الف) مؤلفه تنش τ_{xy}

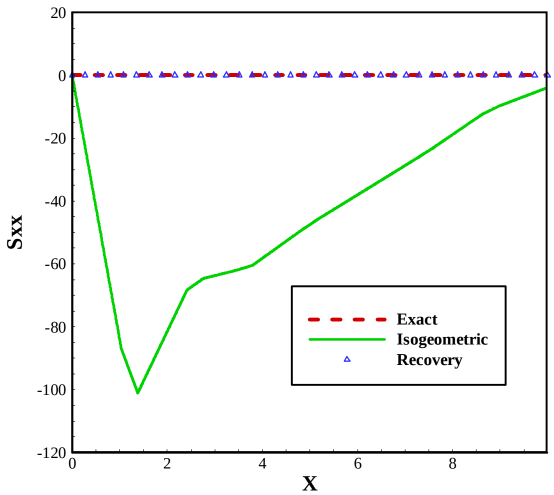


ب) مؤلفه تنش τ_{yz}

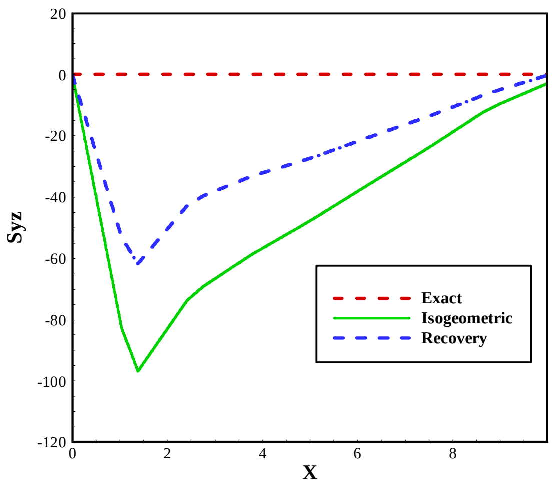


ج) مؤلفه تنش τ_{zx}

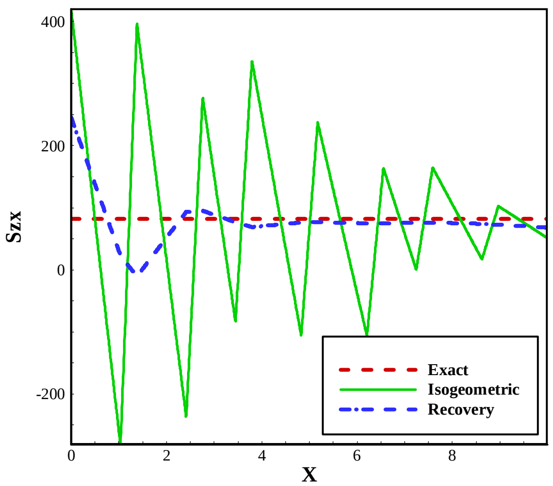
شکل ۹- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره مکعبی در مسیر (x=1, y=0)



الف) مؤلفه تنش σ_x

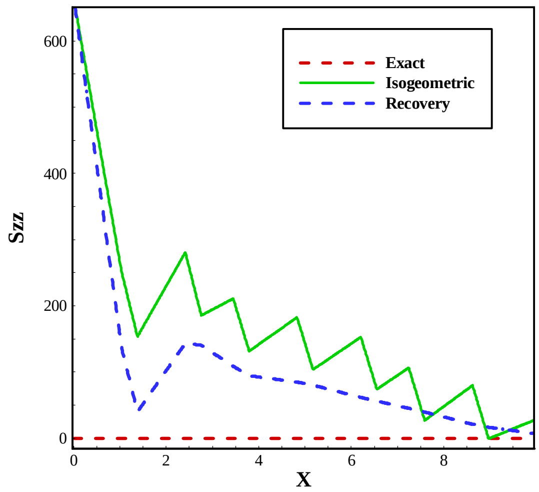


ب) مؤلفه تنش τ_{yz}

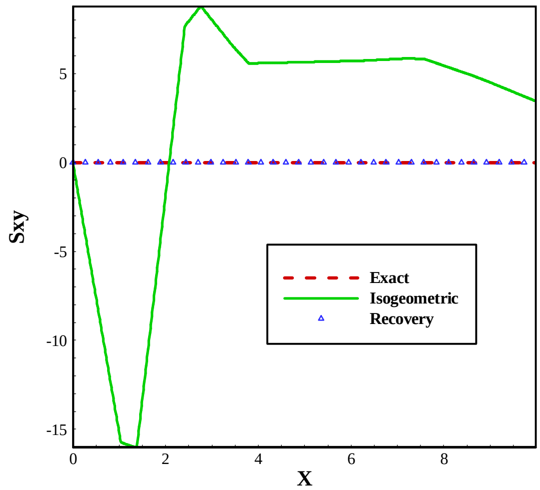


ج) مؤلفه تنش τ_{zx}

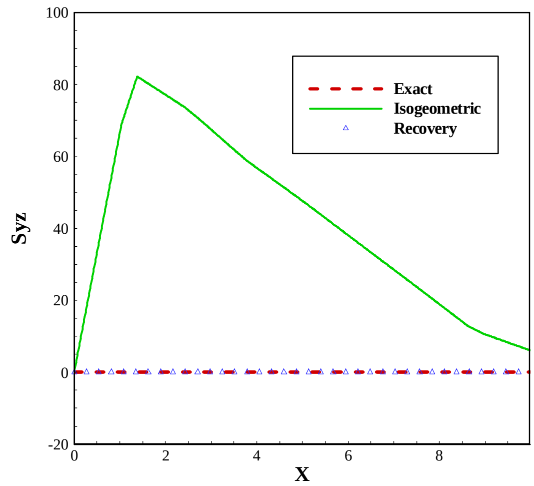
شکل ۱۰- نحوه تغییرات مولفه‌های تنش دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره مکعبی در مسیر (z=1, y=0)



الف) مؤلفه تنش s_z

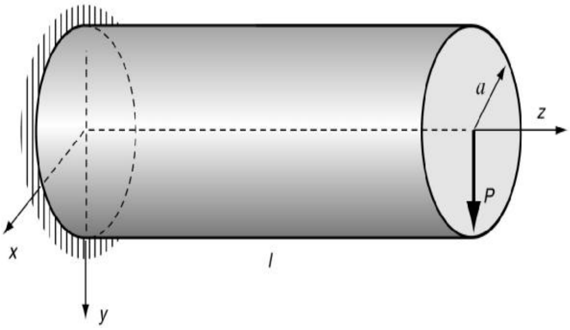


ب) مؤلفه تنش t_{xy}



ج) مؤلفه تنش t_{yz}

شکل ۱۱- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره مکعبی در مسیر (z=0, y=1)

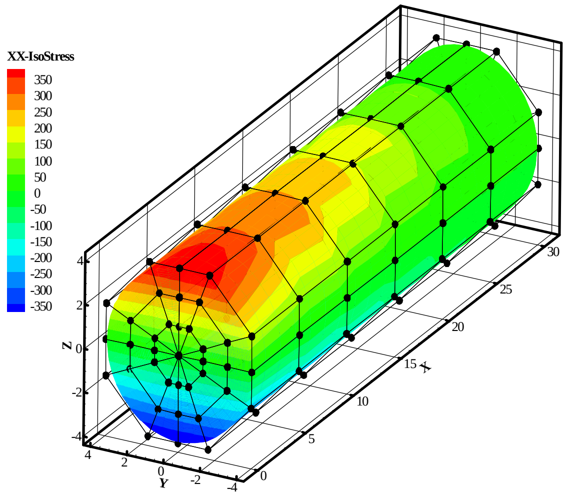


شکل ۱۲- تیر طره با مقطع دایره [۲۰]

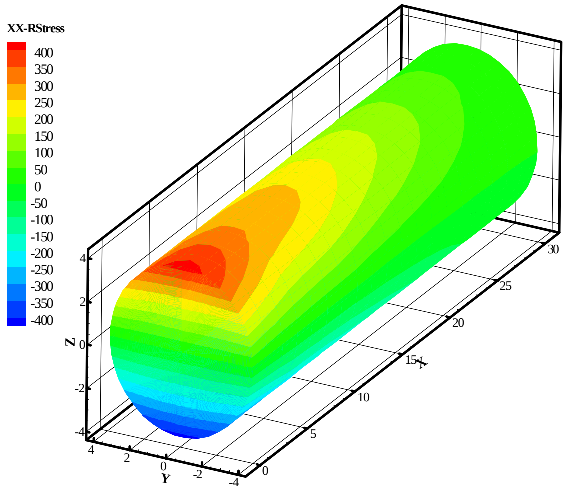
شکل از یک، کارایی برآورد کننده خطا پایین می‌آید [۲۱]. در شکل‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۶ به‌ترتیب نحوه توزیع نرم خطای L_2 دقیق و تقریبی برای تنش‌های σ_x، τ_{xy} و τ_{zx} تیر طره استوانه‌ای نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تشابه نرم خطای تقریبی و دقیق در این مثال نیز وجود دارد و نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی برای برآورد خطای نتایج تحلیل سه بعدی مسائل با استفاده از روش ایزوژئومتریک می‌باشد. هم‌چنین در شکل‌های ۱۷، ۱۸ و ۱۹ به ترسیم مؤلفه‌های مختلف تنش در بعضی از مسیرهای نمونه پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این مثال نیز در تمام شکل‌ها، نحوه تغییرات تنش بهبود یافته نسبت به تنش ایزوژئومتریک به تنش دقیق نزدیک‌تر است.

۸- نتیجه‌گیری

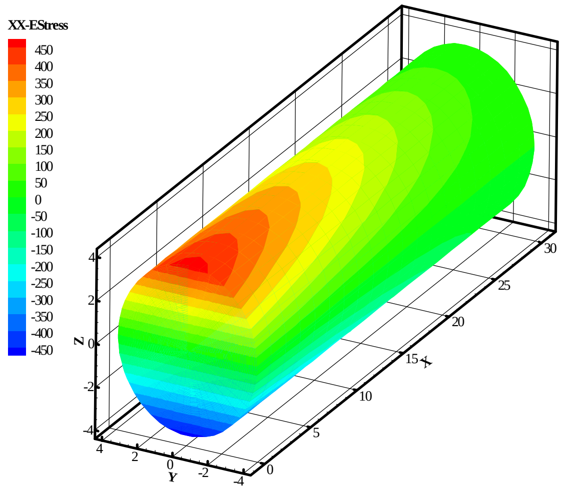
در این مقاله به توسعه روش ارائه شده در مرجع [۵] جهت برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی و تأثیر نقاط نمونه انتگرال‌گیری در تشکیل مؤلفهٔ تنش بهبود یافته پرداخته شد. با توجه به تشابه توزیع نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در مسائل حل شده در این پژوهش و هم‌چنین نزدیکی توزیع مولفه تنش بهبود یافته σ_x به حل دقیق، نسبت به مؤلفه تنش ایزوژئومتریک در این مسائل، و مقدار قابل قبولی که برای شاخص تأثیر به‌دست آمده، می‌توان بیان نمود که نقاط



الف) شبکه نقاط کنترلی و توزیع تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک

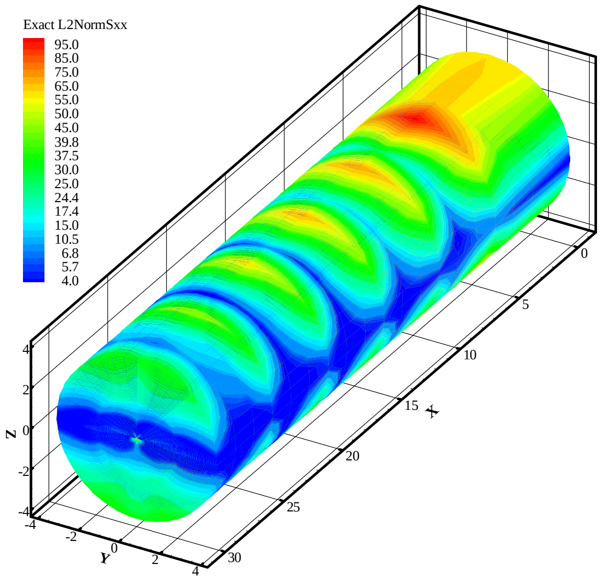


ب) توزیع تنش حاصل از حل بهبود یافته

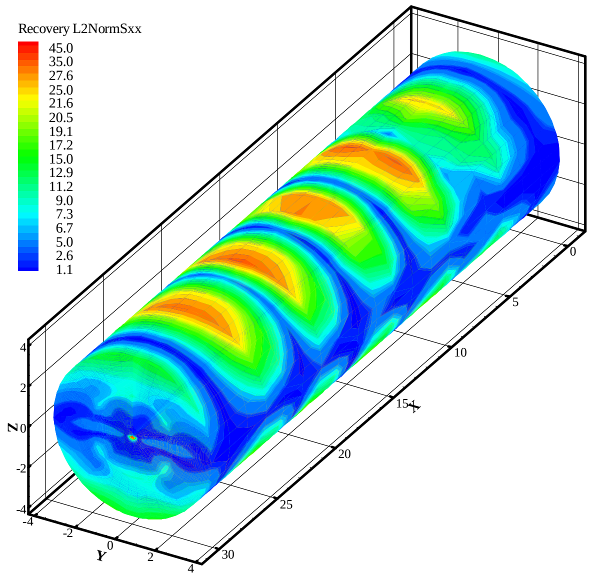


ج) توزیع تنش حاصل از حل دقیق

شکل ۱۳- توزیع تنش S_x تیر طره استوانه‌ای

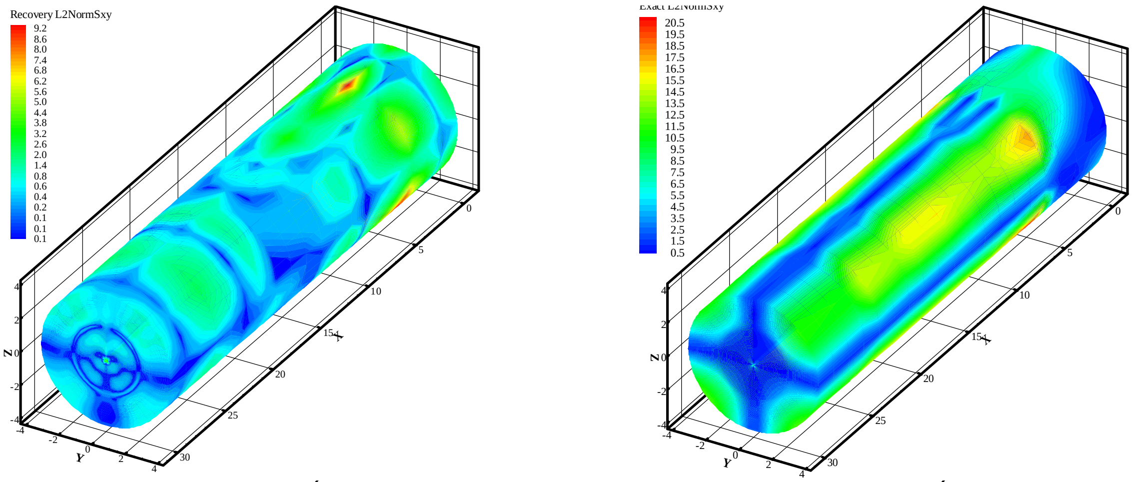


الف) نرم خطای دقیق



ب) نرم خطای تقریبی

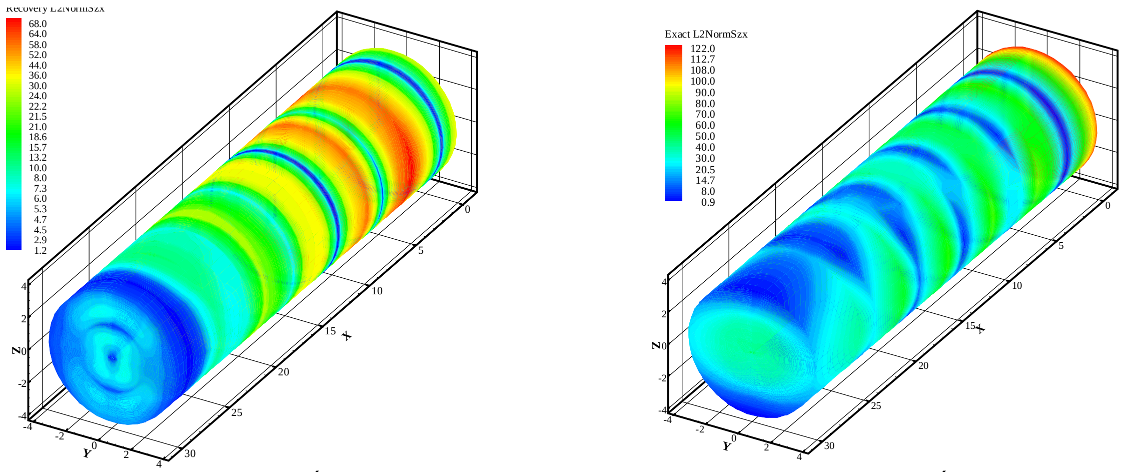
شکل ۱۴- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش S_x



الف) نرم خطای دقیق

ب) نرم خطای تقریبی

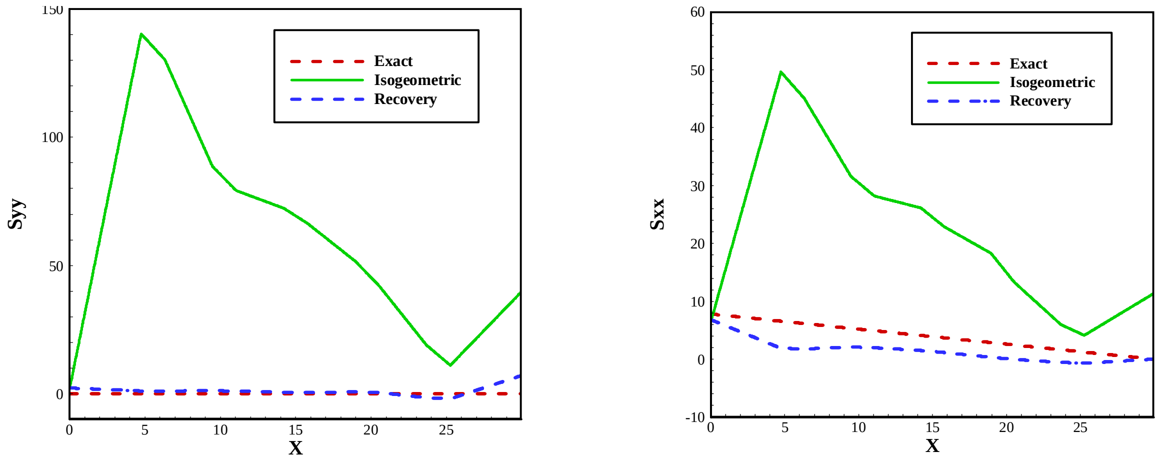
شکل ۱۵- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{xy}



الف) نرم خطای دقیق

ب) نرم خطای تقریبی

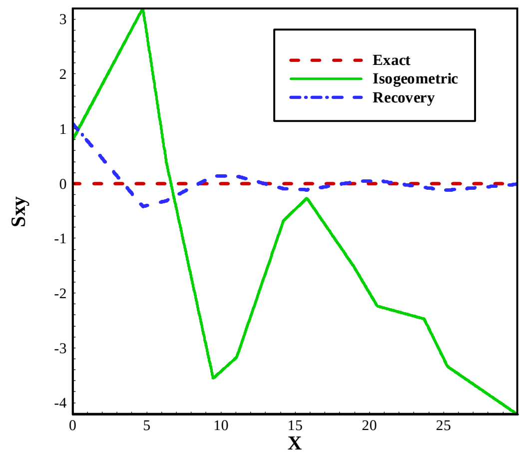
شکل ۱۶- نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{zx}



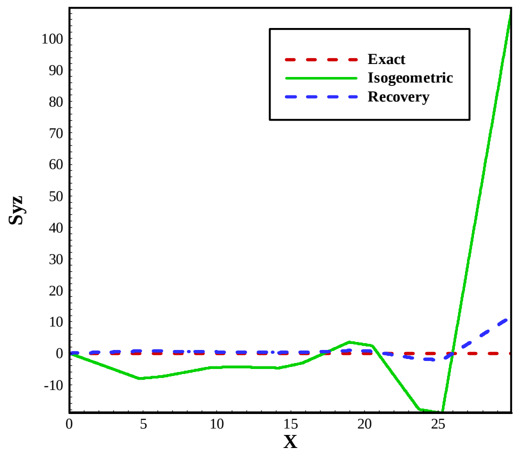
الف) مؤلفه تنش S_x

ب) مؤلفه تنش S_y

شکل ۱۷- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش قائم S_x و S_y حاصل از حل دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره دایره‌ای در مسیر (z=0.065, y=0)

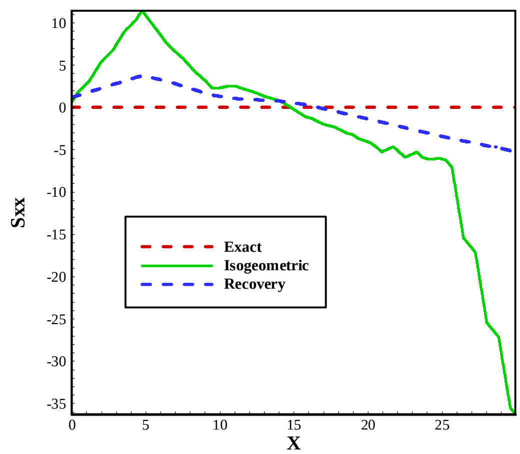


الف) مؤلفه تنش t_{xy}

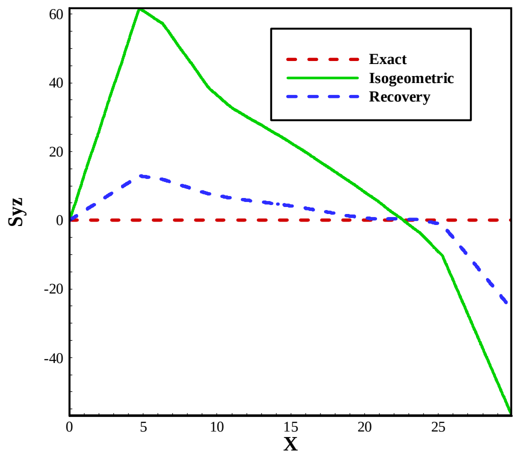


ب) مؤلفه تنش t_{yz}

شکل ۱۸- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش برشی t_{xy} و t_{yz} حاصل از حل دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره دایره‌ای در مسیر (z=0.065, y=0)



الف) مؤلفه تنش s_x



ب) مؤلفه تنش t_{yz}

شکل ۱۹- نحوه تغییرات مؤلفه‌های تنش s_x و t_{yz} حاصل از حل دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته تیر طره دایره‌ای در مسیر (z=1, y=0.065)

نمونه انتگرال‌گیری در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی نیز از کارایی مناسبی برخوردار است و می‌توان از آنها به‌عنوان راه حلی ساده و مهندسی جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش به‌دست آمده از تحلیل مسائل سه بعدی به‌روش ایزوژئومتریک نام برد.

واژه نامه

1. computer aided design
2. non-uniform rational B-splines (NURBS)
3. superconvergent patch recovery
4. patch
5. knot Vector
6. nonperiodic knot vector
7. open
8. piecewise polynomial curve

مراجع

1. Kagan, P., Fischer, A., and Bar-Yoseph, P.Z., “New B-Spline Finite Element Approach for Geometrical Design and Mechanical Analysis”, *International. Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol 41, pp. 435-458, 1998.
2. Hollig, K., Reif, U., and Wipper, J., “Weighted Extended B-Spline Approximation of Dirichlet Problems”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 39, 2, pp. 442-462, 2001.
3. Kagan, P., Fischer, A., and Bar-Yoseph, P.Z., “Mechanically Based Models: Adaptive Refinement for B-Spline Finite Element”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 57, pp. 1145-1175, 2003.
4. Hughes, T. G. R., Cottrell, J. A., and Bazilevs, Y., “Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 194, pp. 4135–4195, 2005.
5. Hassani, B., Ganjali, A., and Tavakkoli, M., “An Isogeometrical Approach to Error Estimation and Stress Recovery”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol 31, pp. 101-109, 2012.
6. Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., and Bazilevs, Y., *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley, 2009.
7. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Zhu, J. Z., *The Finite Element Method*, 6th ed., Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
8. Oden, T J., and Brauchli, J., “ On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 3, pp. 317–325, 1971.
9. Hinton, E., and Campbell, J., “Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 8, pp. 461–480, 1974.
10. Zienkiewicz, O. C. and Zhu, Z. "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1331-1364, 1992.
11. Tabbara, M., Blacker, T., and Belytschko, T., “Finite Element Derivative Recovery by Moving Least Square Interpolants”, Computer *Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 117, pp 211-223, 1994.
12. Wiberg, N. E., Abdulwahab, F., and Ziukas, S., “Enhanced Superconvergent Patch Rcovery Incorporation Equilibrium and Boundary Conditions”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3417-3440, 1994.
13. Boroomand, B., and Zienkiewicz, O. C., “Recovery by Equilibrium in Patchs (REP)”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, pp. 137-164, 1997.
14. Boroomand, B., and Zienkiewicz, O. C., “An Improved REP Recovery and Effectivity Robustness Test”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 3247-3277, 1997.
15. Lee, T., Park, H. C., and Lee, S. W., “A Superconvergent Stress Recovery Technique with Equilibrium Constraint”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 1139-1160, 1997.
16. R´odenas, J. J., Tur, M., Fuenmayor, F. J., and Vercher, A., “Improvement of the Superconvergent Patch Recovery Technique by the Use of Constraint Equations: The SPR-C Technique”, *International. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 70, pp. 705–727, 2007.
17. Payen, D.J., and Bathe, K.J., “The use of Nodal Point Forces to Improve Element Stresses”, *Computers and Structures*, Vol. 89, pp. 485–495, 2011.
18. Piegl, L., and Tiller, W., *The NURBS Book*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
19. Barlow, J., “Optimal Stress Locations in Finite Element Models”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 10, pp. 243–251, 1976.
20. Sadd, M.H., *Elasticity:Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier Butterworth–Heinemann, 2005.
21. Gratsch, T., and Bathe, KJ., “A Posteriori Error Estimation Techniques in Practical Finite Element Analysis” *Computers and Structures*, Vol. 83, pp. 235–265, 2005.