

تعیین مرز پایین^۱ بار حدی با استفاده از روش بدون شبکه شیپارد^۲ و برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو^۳

سید محمد بینش* و سارا راسخ

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی شیراز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۳/۰۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۰۸/۲۹)

چکیده - در این مقاله با استفاده از ترکیب تئوری حد پایین، روش بدون شبکه شیپارد و برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو، یک روش حدی عددی جدید برای تعیین مرز پایین بار زوال در مسائل پایداری در مکانیک خاک ارائه شده است. براساس روش پیشنهادی، دامنه مسئله صرفاً توسط گره‌ها شبیه‌سازی می‌شود و نیازی به استفاده از المان‌بندی‌های خاص در تحلیل‌های حدی عددی نمی‌باشد. به منظور ارضای شرایط مربوط به میدان تنش مجاز در تمام نقاط دامنه، در اطراف هر گره یک سلول ورونویی در نظر گرفته شده است و گرادیان تنش در داخل هر سلول هموار گردیده است. از آنجا که سلول‌های ورونویی کل دامنه مسئله را پوشش می‌دهند، میدان تنش هموار شده یک حل مرز پایین اکید را به دست می‌دهد. با توجه به فرمول‌بندی ارائه شده در مقاله، یک برنامه کامپیوتری تهیه شده است و کارآمدی و دقت روش در انتهای مقاله با حل مثال‌هایی مورد بررسی قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: مرز پایین، روش بدون شبکه، برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو.

Lower Bound Determination of Limit Load Using Shepard's Mesh-Free Method and Second Order Cone Programming

S. M. Binesh and S. Rasekh

Civil and Environmental Engineering Department, Shiraz University of Technology

Abstract: In this paper, a novel numerical limit analysis approach is presented for determination of lower bound of collapse load in the stability problems of soil mechanics by combining lower bound theory, Shepard's mesh-free technique and second order cone programming. Based on the proposed method, the domain of problem is simulated by nodes, and there is no need for traditional meshing process used in the conventional mesh-based numerical limit analysis approaches. To satisfy the conditions required for admissibility of stress field at the entire problem domain, a Voronoi cell is considered around each

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: smbinesh@yahoo.com

node and the stress gradient is smoothed in this Voronoi cell. As the Voronoi cells cover the entire domain, the obtained smoothed stress field leads to a rigorous lower bound solution. Based on the derived formulation, a computer code is developed and the accuracy and efficiency of proposed method is investigated at the end of the paper by solving some examples.

Keywords: Lower bound, mesh-free method, second order cone programming.

فهرست علائم

فشار سربار	q	معادلات مربوط به شرایط تعادل	a
فاصله بین نقطه x و نقطه x_j	r_j	اندازه مساحت سلول ورونویی	A_L
طول ناحیه تحت بارگذاری	S	نیروی حجمی	b_i
مقاومت برشی زهکشی نشده	S_u	به ترتیب نیروی حجمی وارد بر گره i در جهت ۱ و ۲	b_{1i} و b_{2i}
بردار مقادیر گره‌ای مربوط به گره‌های مجاور نقطه x	U_s	عرض دريچه مدفون	B
دو نقطه انتهایی ضلع مرزی Γ_k^D	x_q^{D+1} و x_q^D	بردار نیروهای حجمی	B_i
مقدار مؤثر بر شکل تابع درونیایی	α	چسبندگی خاک	C
دلتهای کرانیکر	δ	چسبندگی مؤثر	c'
وزن واحد خاک	γ	تابع قید تسلیم	f
مرز سلول ورونویی	Γ_L	ضخامت عمود بر صفحه	h
مقدار تنش در مختصات فضایی x	$\sigma_{ij}(x)$	ضخامت بر روی دريچه مدفون	H
تنش هموار شده	Φ_{ij}	مجموعه‌ای از نقاط واقع در دامنه تکیه‌گاهی یک گره	K
تنش نرمال	σ_n	طول ضلع Γ_k^D	L_D
تابع شکل شپارد	Φ	تعداد کل گره‌های سازنده هندسه مسئله	M
زاویه اصطکاک خاک	ϕ	به ترتیب طول مؤلفه‌های بردار نرمال وارد بر ضلع Γ_k^D	n_1^D و n_2^D
زاویه اصطکاک مؤثر	ϕ'	در جهت ۱ و ۲	n_2^D
تنش برشی	τ	بردار واحد نرمال در جهت j	n_j
وزن نقطه گاوس i	ω_i	عدد پایداری	N
تابع هموارکننده	Ψ	تعداد کل ضلع‌های سلول ورونویی مربوط به گره q	N_s
دامنه سلول ورونویی	Ω_L	تعداد نقاط گاوس واقع شده در طول ناحیه S	N_G
		بار حدی	Q

۱- مقدمه

تئوری‌ها با در نظر گرفتن رفتار صلب -خمیری^۴ برای خاک و با پیروی از قانون جریان وابسته^۵، محدوده‌ای برای بار واقعی زوال بین حدود بالا و پایین معرفی می‌گردد. در زمینه استفاده از تئوری‌های تحلیل حدی^۶ در حل مسائل پایداری در مکانیک

یکی از راهکارها در تعیین بار زوال سازه‌های ژئوتکنیکی استفاده از تئوری‌های حدی مرز بالا و پایین می‌باشد که توسط دراگر و همکاران [۱] معرفی گردیده است. براساس این

خاک مطالعات متعددی صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به مطالعات [۶-۲] اشاره کرد. نکته قابل توجه آن است که برای مسائلی با هندسه و بارگذاری پیچیده استفاده از این تئوری‌ها به تنهایی جوابگو نمی‌باشد و لازم است که آنها را با روش‌های عددی^۷ و برنامه‌ریزی ریاضی^۸ تلفیق نمود که منجر به پیدایش دسته جدیدی از روش‌های تحلیل حدی تحت عنوان روش‌های تحلیل حدی عددی شده است. این دسته از روش‌ها به دو دسته کلی روش‌های حد بالا و روش‌های حد پایین تقسیم شده‌اند. در روش‌های حد بالا یک مکانیزم زوال مجاز در نظر گرفته می‌شود و از طریق برابر قرار دادن نیروهای خارجی و توان اتلافی داخلی، یک مسئله بهینه یابی^۹ شکل می‌گیرد که با حل آن جواب مرز بالا برای بار زوال به دست می‌آید. در مسائل حد پایین یک میدان تنش^{۱۰} مجاز استاتیکی^{۱۱} در نظر گرفته می‌شود و از آن طریق تخمینی برای حد پایین بار حدی به دست می‌آید. هر چند که روش‌های حد بالا به دلیل سادگی در لحاظ کردن مکانیزم مجاز بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، اما روش‌های حد پایین به دلیل آنکه در ذات خود دارای یک حاشیه ایمنی هستند بیشتر مورد توجه مهندسان می‌باشند. استفاده از روش اجزا محدود^{۱۲} به همراه برنامه‌ریزی ریاضی برای تعیین حدود پایین در مسائل پایداری دو بعدی اولین بار توسط لیزمر [۷] صورت گرفت. هر چند که روش لیزمر یک پیشرفت قابل توجه در شاخه تحلیل عددی به حساب می‌آید، اما به دلیل فرمول‌بندی پیچیده و هزینه محاسباتی بالا و نیز وجود برخی نواقص نظیر عدم توانایی در مدلسازی محیط‌های نیمه بی‌نهایت چندان مورد توجه قرار نگرفت. پس از لیزمر، محققین دیگری چون آندره‌گن و ناپفل [۸]، پاستور [۹] و بوترو و همکاران [۱۰] راهکارهای دیگری را برای تحلیل حد پایین محیط‌های دو بعدی براساس روش برنامه‌ریزی خطی^{۱۳} ارائه دادند. این مطالعات منجر به یکسری پیشرفت‌های کلیدی نظیر معرفی اجزاء انبساطی^{۱۴} برای محیط‌های نیمه بی‌نهایت و نیز ارائه فرمول‌بندی‌های ساده شده برای روش تحلیل عددی مرز پایین گردید. با وجود قدرتی که روش‌های

تحلیل حدی پیشنهادی داشتند، کاربرد حلگرهای خطی^{۱۵} با الگوریتم‌های مقدماتی در آنها منجر به عدم توانایی در تحلیل مسائل مکانیک خاک در مقیاس‌های بزرگ گردید. این مشکل در سال ۱۹۸۸ توسط اسلوان از طریق ارائه یک الگوریتم پیشرفته به نام الگوریتم دسته فعال^{۱۶} برطرف گردید و این روش پیشنهادی در تحلیل مسائل مختلف مکانیک خاک نظیر تونل‌ها [۱۱]، پی‌ها [۱۲] و شیب‌ها [۱۳] مورد استفاده قرار گرفت.

با وجود موفقیتی که روش‌های حد پایین عددی با حلگرهای خطی در حل مسائل دو بعدی و نیز مسائل با تقارن محوری به دست آوردند، این راهکارها نتوانستند در مسائل سه بعدی کاربرد چندانی داشته باشند، زیرا خطی‌سازی توابع تسلیم در فضای سه بعدی حجم عظیمی از نامساوی‌ها را ایجاد می‌کند که عملاً حل مسئله را ناممکن می‌سازد. علاوه بر این، خطی‌سازی تابع تسلیم باعث کاهش دقت حل نیز می‌گردد. از اینرو دسته جدیدی از روش‌های حد پایین عددی براساس حلگرهای غیرخطی بنا نهاده شده‌اند که در آنها روش اجزا محدود با در نظر گرفتن تنش خطی در هر المان به همراه شرایط تسلیم غیرخطی در تعیین حد پایین مسائل به کار گرفته می‌شوند [۱۴]. این روش‌ها در حل مسائل مختلفی در مکانیک خاک مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۵ و ۱۶].

قسمت عمده تحقیقات صورت گرفته در گسترش روش‌های حد پایین عددی، به بهبود الگوریتم‌های حل مسئله بهینه‌یابی پرداخته‌اند. حال آن‌که تکنیک‌های عددی مورد استفاده برای مجزا سازی^{۱۷} محیط کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند و عمدتاً از روش المان محدود [۱۷ و ۱۸] جهت مجزاسازی محیط استفاده شده است. از طرفی با گسترش کاربرد روش‌های بدون شبکه در شاخه‌های مختلف علمی، تعدادی از مطالعات به استفاده از این روش‌ها در مجزاسازی محیط در تحلیل‌های حدی عددی معطوف شده‌اند. در این زمینه می‌توان مطالعه چن و همکاران [۱۹ و ۲۰] را به عنوان اولین تحقیقی مطرح نمود که با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین^{۱۸} یک روش حد پایین عددی

۲- کلیات

هدف از محاسبه مرز پایین یافتن میدان تنش است که معادلات تعادل و شرایط مرزی را در سراسر دامنه مسئله ارضا کند و در هیچ نقطه‌ای از دامنه نیز از معیار تسلیم تجاوز ننماید. در چنین حالتی بار به دست آمده از این میدان تنش از بار گسیختگی واقعی بیشتر نخواهد بود. به طور کلی صرف نظر از روش عددی استفاده شده، هر مسئله مرز پایین عددی را می‌توان به صورت یک مسئله بهینه‌سازی مقید به شکل زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Q(X) \\ \text{subject to:} \quad & a(X) = 0 \\ & f(X) \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

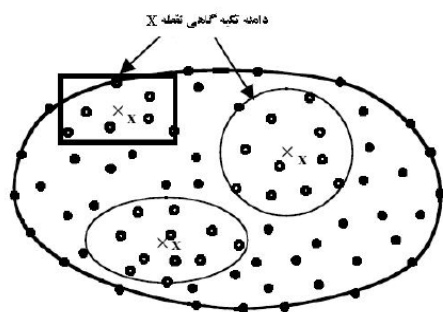
که در آن X بردار تنش، Q تابع هدف (بار گسیختگی)، a تابع شرایط تعادل و شرایط مرزی و f تابع قید تسلیم می‌باشند. ساختار توابع Q ، a و f بستگی به روش انتخابی جهت مجزاسازی محیط دارد. در این مقاله با توجه به خصوصیات ممتاز توابع شکل شپارد در تحلیل‌های حد پایین [۲۴] از روش بدون شبکه شپارد به منظور مجزاسازی محیط استفاده شده است. لذا در ادامه به تشریح روش بدون شبکه شپارد پرداخته شده است.

۳- معرفی روش بدون شبکه

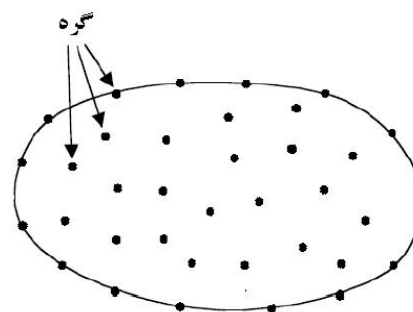
به طور کلی در روش‌های بدون شبکه، هندسه مسئله توسط مجموعه‌ای از گره‌ها در دامنه آن مدل‌سازی می‌شود و برای درونیابی^{۲۴} متغیر میدان^{۲۵} نیازی به شبکه‌بندی محیط نمی‌باشد (شکل ۱). گره‌ها نیز از طریق ایجاد دامنه تکیه‌گاهی^{۲۶} در اطراف هر گره با یکدیگر مرتبط می‌شوند. دامنه تکیه‌گاهی یک نقطه شامل گره‌هایی است که برای تقریب تابع، مورد استفاده قرار می‌گیرد و می‌تواند اشکال مختلفی داشته باشد (شکل ۲). در انواع روش‌های بدون شبکه تکنیک‌های مختلفی برای درونیابی متغیر میدانی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مقاله حاضر به علت خصوصیات منحصر به فرد روش شپارد جهت استفاده در تحلیل‌های حد پایین، از این روش در ساخت توابع شکل استفاده شده است.

را برای حل مسائل پایداری ارائه نموده‌اند. در این روش میدان تنش مجاز به صورت ترکیبی از یک میدان تنش با تعادل ذاتی^{۱۹} و ضریبی از میدان تنش ارتجاعی تعریف می‌شود. با مجزاسازی میدان تنش معرفی شده توسط روش بدون شبکه گالرکین و اعمال آن در تئوری حد پایین یک مسئله بهینه‌یابی به دست می‌آید که با حل این مسئله بهینه‌یابی توسط یک الگوریتم غیرخطی پیچیده جواب مسئله به دست می‌آید. روش ارائه شده توسط چن و همکاران با وجود ارائه یک راهکار جدید، روشی پیچیده است که به حل پایین اکید نیز منجر نمی‌گردد. پس از آن له و همکاران [۲۱] یک روش حد پایین بدون شبکه را برای تحلیل حدی ورق‌ها ارائه کردند که در آن از روش بدون شبکه گالرکین و مفهوم انتگرال‌گیری گره‌ای^{۲۰} استفاده شده است. روش آنها نیز فاقد توانایی در ارائه حل پایین اکید می‌باشد. در زمینه مهندسی ژئوتکنیک، غلامپور و بینش [۲۲] با بهره‌گیری از تابع شکل شپارد^{۲۱} و نیز مفهوم انتگرال‌گیری عددی، روشی بدون شبکه را برای تعیین مرز پایین ظرفیت باربری پی‌های نواری ارائه نمودند. این روش برخلاف روش‌های ارائه شده در مطالعات پیشین، یک مرز پایین اکید برای بار حدی ارائه می‌دهد. غلامپور و بینش [۲۳] هم‌چنین از روش ارائه شده در حل مسئله دریچه مدفون^{۲۲} استفاده نمودند.

در این مقاله هدف آن است که روش ارائه شده توسط غلامپور و بینش [۲۲]، با کاربرد برنامه‌ریزی غیرخطی^{۲۳} تقویت شود و نتایج آن برای مسائل مختلف پایداری در مکانیک خاک مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور با استفاده از تابع شکل شپارد و مفهوم انتگرال‌گیری گره‌ای و نیز تغییر ساختار تنش‌های گره‌ای مجهول یک مسئله بهینه‌یابی غیرخطی به دست می‌آید که این مسئله توسط روش برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو حل می‌گردد. در نهایت با حل چندین مثال، افزایش دقت و نیز قابلیت روش نسبت به حالتی که از برنامه‌ریزی خطی جهت حل مسئله بهینه‌یابی استفاده می‌شود، نشان داده شده است.



شکل ۲- دامنه تکیه گاهی نقطه x



شکل ۱- مدل سازی هندسی دامنه مسئله

توابع شکل شپارد دارای دو خاصیت منحصر به فرد هستند که در تحلیل حدی مرز پایین بسیار مفید هستند. خاصیت اول دارا بودن خاصیت دلتای کرانیکر^{۲۷} است که اعمال شرایط مرزی را ساده می سازد و خاصیت دوم، که از اهمیت بیشتری برخوردار است، ارضای اصل حداکثر می باشد [۲۴]. براساس این اصل کلیه مقادیر درونیابی شده توسط روش شپارد بین مقادیر گره ای حداقل و حداکثر قرار می گیرند. اصل حداکثر در ارضای شرایط عدم تسلیم کاربرد دارد که در بخش های آینده به آن پرداخته می شود.

۴- فرمول بندی تحلیل حدی عددی مرز پایین

همان طور که پیش از این اشاره شد، میدان تنش مجاز باید تعادل و شرایط مرزی را برای کل دامنه به صورت کامل ارضا نماید و وضعیت تنش در هیچ نقطه ای از دامنه از معیار تسلیم تجاوز نکند. از طرفی با توجه به رابطه (۴) و با در نظر گرفتن این واقعیت که در تحلیل حد پایین متغیر میدانی تنش است، می توان مقدار تنش در هر نقطه را به وسیله توابع شکل به مقادیر تنش گره ای ارتباط داد و به عبارتی می توان مجزاسازی میدان تنش پیوسته را توسط روش شپارد براساس رابطه زیر به انجام رساند:

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{z \in K} \Phi_z(x) \sigma_{ij}(x_z) \quad (A)$$

$\sigma_{ij}(x)$ مقدار تنش در مختصات فضایی x ، $\Phi_z(x)$ تابع شکل تعریف شده در رابطه (7) و $\sigma_{ij}(x_z)$ مقدار تنش گره ای در مختصات فضایی x_z می باشند. K نیز مجموعه گره های قرار

اگر N گره در محدوده اطراف نقطه x قرار داشته باشد و مقادیر تابع پیوسته u در گره ها مشخص باشند (یعنی $u_1 = u(x_1)$ ، $u_2 = u(x_2)$ و ...) تابع پیوسته درونیابی شده توسط روش شپارد به صورت زیر بیان می شود [۲۴]:

$$u(x) = \frac{\sum_{i=1}^N u_i \prod_{j \neq i} r_j^\alpha}{\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} r_j^\alpha} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

در رابطه (۲)، α ثابتی است که بر شکل تابع درونیابی شده تأثیرگذار می باشد. در مطالعات انجام شده توسط گوردن و ویکسوم [۲۵] به منظور هموار کردن تابع درونیابی $\alpha > 1$ در نظر گرفته شده است. r_j فاصله بین نقطه x و نقطه x_j است که در فضای دو بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$r_j = \left[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

معادله (۲) به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می شود:

$$u(x) = F \cdot U_s \quad (4)$$

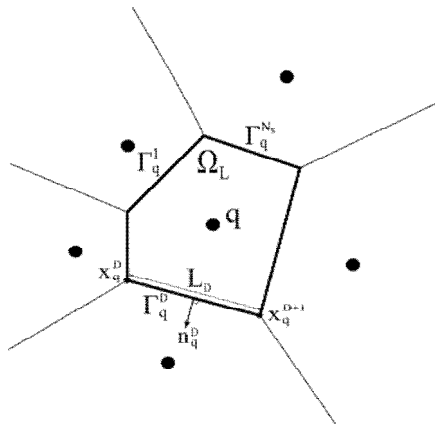
U_s بردار مقادیر گره ای مربوط به گره های مجاور نقطه x و F توابع شکل شپارد برای N گره محلی است:

$$U_s = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \quad (5)$$

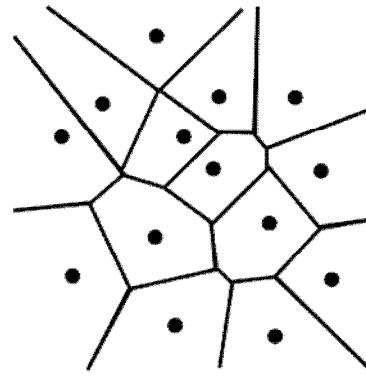
$$F(x) = [\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_N(x)] \quad (6)$$

که $\Phi_1(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Phi_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} r_j^\alpha}{\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} r_j^\alpha} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$



شکل ۴- سلول ورونویی اطراف نقطه q



شکل ۳- تشکیل سلول ورونویی در اطراف هر گره

به طوری که Ψ ، σ_{ij} و Ω_L به ترتیب تنش هموار شده، تابع هموار کننده و دامنه سلول ورونویی می باشند. در مطالعات چن و همکاران [۲۶] تابع هموار کننده به صورت زیر معرفی شده است:

$$\Psi = \begin{cases} \frac{1}{A_L} & x \in A_L \\ 0 & x \notin A_L \end{cases} \quad (11)$$

A_L مساحت سلول ورونویی است. با استفاده از تابع هموارکننده چن و همکاران و با قضیه دیورژانس^{۲۹}، معادله (۱۰) به صورت زیر ساده تر می شود:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (12)$$

Γ_L مرز سلول ورونویی و n_j بردار واحد نرمال در جهت j می باشد، که در شکل (۴) نشان داده شده اند.

با جای گذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۹) معادله تعادل به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \sigma_{ij} n_j d\Gamma + b_i = 0 \quad (13)$$

با ارضای رابطه (۱۳) در هر سلول ورونویی، شرط تعادل در کل دامنه ارضا خواهد شد؛ سپس مجزا سازی معادلات تعادل توسط روش بدون شبکه شپارد، با جای گذاری رابطه (۸) در رابطه (۱۳) انجام می شود:

گرفته در دامنه تکیه گاهی نقطه x می باشد.

در ادامه نحوه ارضای معادلات تعادل، شرایط مرزی و شرایط عدم تسلیم برای کل دامنه به تفصیل بیان می گردد.

۴-۱- ارضای معادلات تعادل

برای ایجاد یک میدان تنش مجاز استاتیکی، تنش در سراسر دامنه مسئله باید از معادلات تعادل پیروی کند:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (9)$$

σ_{ij} و b_i به ترتیب مؤلفه های تانسور تنش و نیروی حجمی هستند. ارضای معادله (۹) در گره ها، به معنای ارضای تعادل در همه نقاط دامنه نمی باشد. از این رو، یک سلول ورونویی^{۲۸} اطراف هر گره ساخته می شود (شکل ۳) و مشتق تنش در هر سلول هموار می گردد. به عبارت دیگر هر سلول ورونویی یک گره را نمایندگی می کند و هموارسازی مشتق تنش در واقع ارضای رابطه به صورت میانگین در کل سلول ورونویی است. از طرفی، با توجه به اینکه اجتماع سلول های ورونویی کل دامنه را پوشش می دهد، در واقع روابط تعادل به صورت متوسط در تمامی نقاط محیط ارضا می گردد.

مشتق تنش در سراسر سلول به صورت زیر هموار می گردد:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \int_{\Omega_L} \Psi \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega \quad (10)$$

که A_{bo} ماتریس ضریبی است که از اعمال رابطه (۲۶) به سلول‌های ورنوویی مرزی مسئله به دست می‌آید و B_{bo} بردار مرتبط با مقادیر مشخص تنش‌ها در طول مرز می‌باشد.

۴-۳- شرط تسلیم

یکی از خصوصیات منحصر به فرد تابع شپارد برخورداری از اصل حداکثر است. براساس این اصل، برای همه نقاط x_j که $j = 1, 2, \dots, N$ مقادیر تابع $u(x)$ توسط حداکثر مقدار گره‌ای $(\max(u_j))$ از بالا و حداقل مقدار گره‌ای $(\min(u_j))$ از پایین محدود شده است. این ویژگی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\text{let } M = \max(u_j), \quad m = \min(u_j) \quad \text{then} \quad m \leq u(x) \leq M \quad (28)$$

با توجه به اینکه متغیر میدانی در روش پیشنهادی در این مقاله، تنش‌ها می‌باشند؛ بنابراین با در نظر گرفتن اصل حداکثر، مقادیر درونیابی شده توسط روش شپارد همواره بین حداقل و حداکثر تنش‌های گره‌ای واقع می‌شوند. از اینرو اگر کنترل عدم تجاوز از میدان تسلیم برای میدان تنش درونیابی شده توسط روش شپارد تنها در گره‌ها صورت گیرد، متضمن ارضا شرط عدم تسلیم در کل نقاط دامنه خواهد بود.

در مقاله حاضر از معیار تسلیم مور-کولمب^{۳۱} در شرایط کرنش مسطح استفاده شده است. این معیار در فضای (1,2) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} + (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \phi - 2c \cos \phi \quad (29)$$

به طوری که، c و ϕ به ترتیب چسبندگی و زاویه اصطکاک خاک می‌باشند. شرط لازم برای مجاز بودن میدان تنش به لحاظ خمیری آن است که:

$$F \leq 0 \quad (30)$$

در واقع این شرطی است که برای وضعیت تنش‌های گره‌ای باید برقرار باشد تا میدان تنش در نظر گرفته شده به لحاظ خمیری سازگار باشد.

۵- تشکیل مسئله بهینه یابی

در قسمت‌های قبل شرایط تشکیل میدان تنش مجاز بیان گردید. این میدان تنش ناشی از یک تحریک خارجی است که در اکثر مسائل پایداری، بارگذاری خارجی در قسمتی از مرز می‌باشد. بنابراین مسئله تحلیل حدی مرز پایین در واقع یافتن یک میدان تنش مجاز است که حداکثر مقدار بار خارجی را به دست دهد. لذا روند حل در یافتن مرز پایین بار حدی به یک مسئله بهینه یابی مقید می‌انجامد که در آن تابع هدف^{۳۲} بارگذاری خارجی و قیود آن شرایط مربوط به تعادل، مرزها و عدم تسلیم نقاط هستند. بر این اساس تابع هدفی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = h \int_S \sigma_{nf} dS \quad (31)$$

که Q بار حدی، h ضخامت عمود بر صفحه، σ_{nf} تنش نرمال اعمال شده بر ناحیه بارگذاری در مرز و S طول ناحیه تحت بارگذاری می‌باشد. با استفاده از روش گاوس^{۳۳}، فرم گسسته رابطه (۳۱) به شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$Q = h \sum_{i=1}^{N_G} \omega_i \sigma_{nf}(x_G, y_G) \quad (32)$$

که N_G تعداد نقاط گاوس واقع شده در طول ناحیه S ، ω_i وزن نقطه گاوس i و (x_G, y_G) مختصات نقطه گاوس در فضای (x, y) می‌باشد.

در نهایت با مشخص بودن تابع هدف و قیود لازم، مسئله بهینه یابی به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } Q(s) \\ &\text{Subjected To:} \\ &A_{eq} s = B_{eq} \\ &A_{bo} s = B_{bo} \\ &f(s) \leq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

۶- حل مسئله بهینه یابی

پس از تشکیل مسئله بهینه یابی لازم است که روش حل آن نیز مشخص گردد. با توجه به اینکه ضابطه تسلیم یک رابطه غیرخطی از تنش است، مسئله بهینه یابی تولید شده نیز یک مسئله

که $a = \sin \phi$ و $k = c \cos \phi$ می‌باشند. با توجه به تغییرات اعمال شده، فضای تنش براساس بردار S_i به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$S_i = [\sigma_{m,i} \quad S_{xx,i} \quad S_{xy,i}]^T \quad (38)$$

که رابطه این فضا و فضای s_i به صورت زیر است:

$$S_i = P^{-1} s_i$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

با توجه به تغییرات در نظر گرفته شده، مسئله بهینه‌سازی (۳۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

Minimize $-Q(S)$

subject to :

$$\begin{aligned} A_{eq}^* S &= B_{eq} \\ A_{bo}^* S &= B_{bo} \\ z_i + a\sigma_{m,i} &= k \quad i = 1, \dots, N \\ \sqrt{S_{xx,i}^2 + S_{xy,i}^2} &\leq z_i \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (40)$$

که N تعداد نقاط ارزیابی تنش و $S = [S_1 \dots S_N]$

ماتریس‌های A_{eq}^* , A_{bo}^* به ترتیب ماتریس‌های تغییر یافته A_{eq} و A_{bo} برای فضای تغییر یافته تنش می‌باشند.

۷- نتایج عددی

به منظور ارزیابی صحت و کارآمدی روش پیشنهادی در این مقاله، ابتدا مثال بارگذاری زهکشی شده بر روی خاک چسبنده اصطکاکی که توسط غلامپور و بیش [۲۲] حل شده است مورد بررسی مجدد قرار می‌گیرد و کیفیت نتایج به دست آمده با نتایج پیشین مقایسه می‌گردد. سپس مسئله درجه مدفون در خاک چسبنده مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج به دست آمده با نتایج به دست آمده در سایر تحقیقات مقایسه می‌گردد.

۷-۱- بارگذاری زهکشی شده توسط پی نواری

بار دقیق گسیختگی (q_f) برای یک پی نواری صاف بر روی خاک چسبنده - اصطکاکی بدون وزن توسط پرنلد [۲۹]

غیرخطی است و نمی‌توان از تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی برای حل آن استفاده کرد و لذا باید به نحوه حل مسائل بهینه‌یابی مقید غیرخطی پرداخت. در این راستا، با توجه به بررسی‌های انجام گرفته مشخص گردید که تبدیل مسائل بهینه‌یابی به مسائل برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو و استفاده از روش حل نقطه داخلی^{۳۴} یکی از روش‌هایی است که به صورت گسترده برای حل مسائل بهینه‌یابی غیرخطی در مقیاس وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرد. از اینرو در ادامه ابتدا شکل کلی مسئله برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو بیان می‌گردد، سپس به چگونگی تغییر ساختار مسئله بهینه‌یابی به دست آمده برای تبدیل آن به مسئله برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو پرداخته می‌شود.

به طور کلی شکل عمومی مسئله برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه

دو به صورت زیر بیان می‌گردد [۲۷]:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f^T x \\ \text{Subjected to:} \quad & \|A_i x + b_i\| \leq C_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & Fx = g \end{aligned} \quad (34)$$

که در آن $x \in R^n$ متغیر بهینه‌یابی، $A_i \in R^{n_i \times n}$ ، $b_i \in R^{n_i}$ ، $d_i \in R$ ، $C_i \in R^n$ و $F \in R^{p \times n}$ پارامترهای مسئله می‌باشند. عملگر $\|\cdot\|$ معرف نرم اقلیدسی^{۳۵} است. n بعد مسئله است و برای مسائل بهینه‌سازی در فضای اقلیدسی دو بعدی و سه بعدی $p = 2$ یا $p = 3$ می‌باشد.

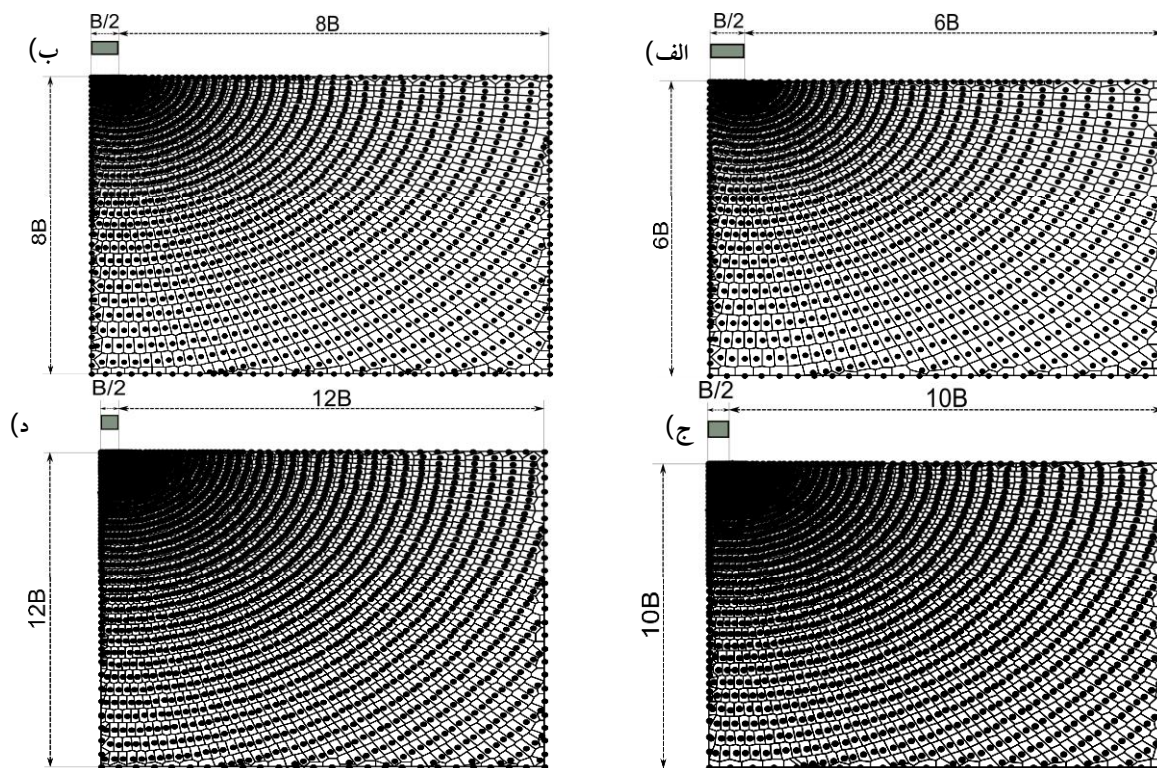
برای تبدیل مسئله بهینه‌یابی (۳۳) به صورت برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو لازم است که تغییراتی در نحوه تعریف تابع تسلیم اعمال شود. به همین منظور، قید تسلیم مجدداً به صورت زیر بازنویسی می‌شود [۲۸]:

$$\sqrt{S_{xx}^2 + S_{xy}^2} + \sigma_m \sin \phi - c \cos \phi \leq 0 \quad (35)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (36)$$

با تعریف متغیر Z ، قید تسلیم به یک قید تساوی خطی همراه با یک قید مخروطی مرتبه دو تبدیل می‌گردد:

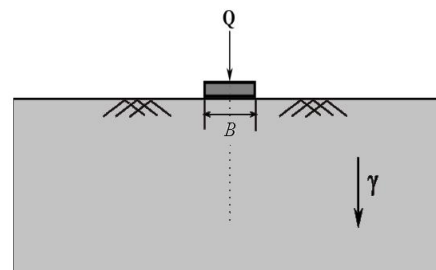
$$\begin{aligned} z + a\sigma_m &= k \\ \sqrt{S_{xx}^2 + S_{xy}^2} &\leq z \end{aligned} \quad (37)$$



شکل ۵- مدل بدون شبکه برای الف) $\phi' = 10^\circ$ ب) $\phi' = 20^\circ$ ج) $\phi' = 30^\circ$ د) $\phi' = 40^\circ$

در نظر گرفته شده توسط غلامپور و بینش [۲۲] مدلسازی گردیده است. نتایج به دست آمده از تحلیل‌ها با جواب به دست آمده از حل پرنده و نیز نتایج به دست آمده از مطالعه غلامپور و بینش در جدول ۱ ارائه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که برنامه‌ریزی غیرخطی علاوه بر کاهش قابل توجه تعداد قیود مسئله بهینه‌سازی که منجر به کاهش هزینه محاسبات می‌شود، به جواب دقیق‌تری نیز منجر می‌گردد. در ادامه، جهت وارد نمودن اثر وزن، هندسه نشان داده شده در شکل ۶ در نظر گرفته شده است. با انتخاب دامنه‌های مناسب برای مقادیر مختلف ϕ ، مقدار q_f/c برای نسبت‌های مختلف γ/c با در نظر گرفتن شرایط زیر برای ناحیه تماس پی و سطح خاک، محاسبه شده است. جهت بررسی صحت و دقت جواب‌ها، نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از رابطه ترزاقی [۳۰] مقایسه گردیده است. طبق رابطه ترزاقی، بار گسیختگی از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$q_f = cN_c + qN_q + 0.5\gamma BN_\gamma \quad (۴۳)$$



شکل ۶- خاک چسبنده - اصطکاکی با در نظر گرفتن وزن خاک تحت پی نواری

به صورت زیر ارائه شده است:

$$q_f = c'N_c + qN_q \quad (۴۱)$$

$$N_q = \exp(\pi \tan \phi') \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right) \quad (۴۲)$$

که q ، ϕ' و c' به ترتیب فشار سربار، زاویه اصطکاک مؤثر و چسبندگی مؤثر هستند.

به منظور ارزیابی روش، مطابق شکل ۵، چهار مدل بدون شبکه با هندسه، آرایش و تعداد گره‌های مشابه با مدل‌های

جدول ۱- نتایج تحلیل برای مقادیر مختلف زاویه اصطکاک

زاویه اصطکاک	$\phi = 10^\circ$	$\phi = 20^\circ$	$\phi = 30^\circ$	$\phi = 40^\circ$
حل براساس رابطه پرندل	۸/۳۴	۱۴/۸۳	۳۰/۱۳	۷۵/۳۱
نتایج مطالعات غلامپور و بینش	۸/۱۲۵۵	۱۴/۴۷۸۳	۲۹/۵۴۸۱	۷۳/۹۶۹۶
درصد خطا (%)	۲/۵۷	۲/۳۷	۱/۹۳	۱/۷۸
نتایج حد پایین روش ارائه شده	۸/۲۰۸	۱۴/۷۰۲	۲۹/۸۹۷	۷۵/۰۱۶
درصد خطا (%)	۱/۵۸	۰/۸۶	۰/۷۷	۰/۳۹

جدول ۲- نتایج به دست آمده برای c / q_f برای نسبت های مختلف γ / c

	$\phi = 10$		$\phi = 20$		$\phi = 30$		$\phi = 40$	
	حل ترزاقی	جواب حد پایین	حل ترزاقی	جواب حد پایین	حل ترزاقی	جواب حد پایین	حل ترزاقی	جواب حد پایین
$\gamma / c = 1$	۸/۸	۸/۳۰	۱۷/۸	۱۷/۷۴	۴۵/۲	۴۴/۵۳	۱۵۴/۸	۱۵۲/۱۸
$\gamma / c = 2$	۹/۲	۹/۱۹	۲۰/۸	۲۰/۶۵	۶۰/۳	۵۹/۶۷۷	۲۳۴/۳	۲۲۷/۴۶
$\gamma / c = 3$	۹/۶	۹/۵۴	۲۳/۸	۲۳/۱۷۶	۷۵/۴	۷۳/۲۳	۳۱۳/۸	۳۰۹/۳۸

این معادله ترکیبی از تأثیر چسبندگی، سربار و وزن خاک است که یک جواب تقریبی به دست می دهد. فاکتورهای ظرفیت باربری N_c ، N_q و N_γ به ترتیب تأثیر چسبندگی c ، سربار q و وزن γ خاک را نشان می دهند. مقادیر مختلفی برای این فاکتورها ارائه شده است که در اینجا از مقادیر ارائه شده توسط پرندل [۳۱] و ریسنر [۳۲] برای N_c و مقادیر ارائه شده توسط هانسن [۳۳] برای N_γ ، به منظور محاسبه جواب نزدیک به حل دقیق استفاده شده است. نتایج مربوط به این قسمت در جدول ۲ ارائه شده است. به طور کلی با توجه به نتایج به دست آمده نشان می دهند که روش حاضر با دقت مناسبی به محاسبه حد پایین بار حدى برای خاک های چسبنده - اصطکاکی می پردازد.

۲-۷- مسئله پایداری دریاچه مدفون

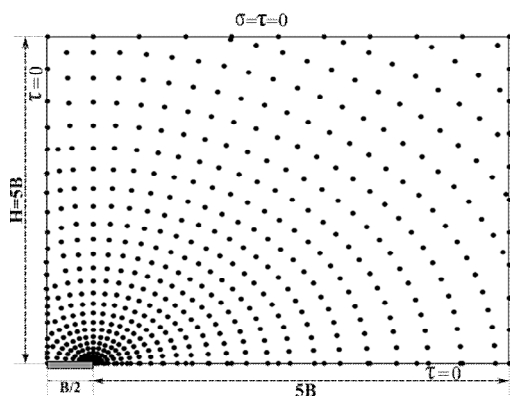
مسئله برآورد بار حدى برای یک دریاچه مدفون طی سال های متوالی مورد بررسی قرار گرفته است و در زمینه پایداری تونل (به خصوص در بحث سقف های موقت) و احداث معدن حائز

اهمیت است. این در حالی است که مقدار دقیق بار حدى این مسئله به صورت مجهول باقی مانده است. محیط و شرایط مسئله دریاچه مدفون در شکل ۷ نشان داده شده است. مطابق شکل، یک لایه خاک کاملاً چسبنده با مقاومت برشی زهکشی نشده S_u و ضخامت H بر روی یک دریاچه مدفون به عرض B قرار گرفته است. در اینجا فرض شده است که بستر زیر لایه خاک و خود دریاچه، تحت سربار اعمال شده (σ_s) و وزن لایه خاک دچار تسلیم نمی شوند. به این ترتیب فشار فعال لایه خاک روی دریاچه به وسیله تنش های کششی خارجی (σ_t) در قسمت دریاچه، مقابله می شود.

پایداری یک دریاچه مدفون را می توان در کمیت عدد پایداری (N) خلاصه کرد که به صورت زیر ارائه می شود:

$$N = (\gamma H + \sigma_s - \sigma_t) / S_u \quad (44)$$

عدد پایداری در واقع تابعی از نسبت H/B است که با افزایش این نسبت، مقدار آن افزایش می یابد. با توجه به عدم وجود جواب دقیق برای این مسئله، محاسبه حد پایین برای عدد پایداری از اهمیت زیادی برخوردار است، چرا که می توان



شکل ۸- دامنه انتخابی مسئله دریچه مدفون و آرایش گره‌ها

انتخابی برای تحلیل مسئله به‌همراه آرایش گره‌ها و نمودارهای ورونویی آنها برای حالت $H/B=5$ در شکل ۸ نمایش داده شده است. با توجه به تقارن مسئله تنها نیمی از دامنه مدل‌سازی می‌شود.

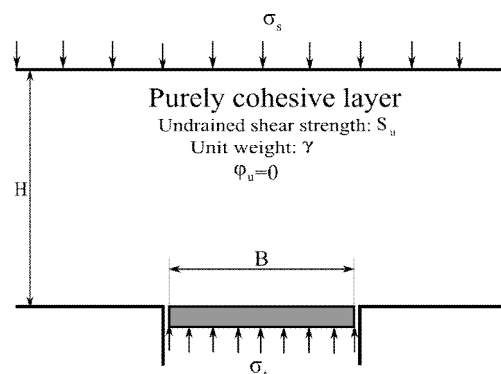
نتایج به‌دست آمده برای عدد پایداری N برای حالات مختلف H/B در جدول ۳ آورده شده است.

شایان ذکر است که در روش حد پایین بحث صاف یا زیر بودن ناحیه بارگذاری، به شرایط تنش برشی در این ناحیه مربوط می‌شود. در شرایط صاف تنش برشی در تمام ناحیه زیر منطقه بارگذاری مساوی صفر قرار می‌گیرد و این شرط در قالب قیدهایی مشابه قیدهایی مربوط به شرایط مرزی تنش به مسئله اعمال می‌شود. از طرف دیگر در حالت شرایط زیر، مجموعه تنش‌های برشی در ناحیه بارگذاری برابر صفر قرار می‌گیرد. یعنی برای ناحیه بارگذاری باید:

$$\int_S \tau dS = 0 \quad (46)$$

که در این رابطه t تنش برشی و S ناحیه قرار گرفته تحت بارگذاری می‌باشد.

برای بررسی صحت نتایج، مقادیر به‌دست آمده برای عدد پایداری با استفاده از روش پیشنهادی با تحقیقات انجام گرفته قبلی [۳۴-۳۶] در دو نمودار (الف) و (ب) مقایسه شده است. همان‌طور که مشخص است نتایج به‌دست آمده دارای دقت مناسب بوده و با توجه به مقادیر حد بالای نشان داده شده،



شکل ۷- جزییات مسئله دریچه مدفون

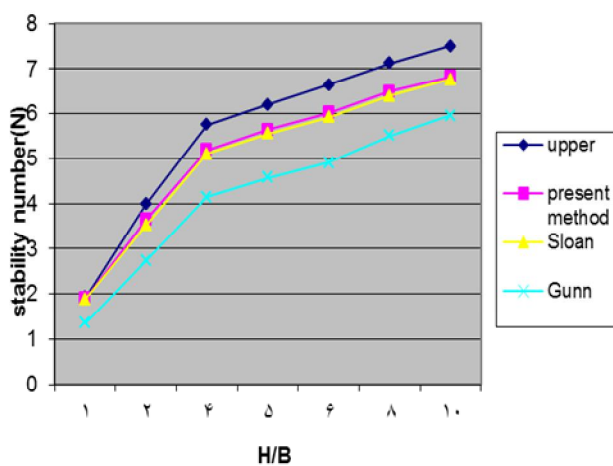
مستقیماً از این مقدار در طراحی استفاده کرد.

پیش از این، بررسی بار حدى دریچه مدفون توسط محققین متعددی انجام شده است. دیویس [۳۴] تعدادی میدان تنش ساده را مورد توجه قرار داد که شامل ناپیوستگی‌های مجاز تنش بود و به‌منظور یافتن عدد پایداری به بهینه‌سازی هندسه مسئله پرداخت که از این طریق برای دریچه کم عمق (یعنی $0 \leq H/B \leq 2$) یک بازه مناسب را برای حد بالا و حد پایین عدد پایداری به‌دست آورد. پس از آن گان [۳۵] با استفاده از جواب خمیری دقیق برای انبساط یک سیلندر ضخیم به ساخت میدان تنش مجاز استاتیکی پرداخت و عبارت زیر را برای عدد پایداری به‌دست آورد:

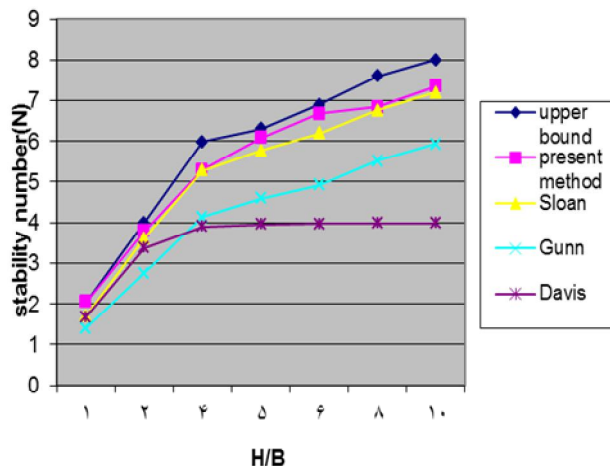
$$N = \frac{\gamma H + \sigma_s - \sigma_t}{S_u} \geq 2 \log_e \left(2 \frac{H}{B} \right); \quad H/B \geq 1/2 \quad (45)$$

ده سال بعد اسلون [۳۶] با استفاده از روش ترکیبی تحلیل حدى و روش المان محدود، جواب‌های مناسب‌تری را برای حد پایین و حد بالای عدد پایداری به‌دست آورد و بدین ترتیب یک بازه مناسب برای مقدار دقیق این پارامتر تعریف کرد.

در این بخش به بررسی کارایی روش ارائه شده در این مقاله برای محاسبه حد پایین عدد پایداری مسئله دریچه مدفون پرداخته شده است. نتایج به‌دست آمده برای نسبت مختلف H/B و دریچه صاف و زیر ارائه شده است. این نکته قابل ذکر است که تحلیل انجام شده با فرض عدم وجود سربار بوده و در محاسبات از وزن خاک صرف‌نظر شده است. ابعاد و دامنه



ب- شرایط صاف



الف- شرایط زیر

شکل ۹- مقایسه مقادیر به دست آمده برای عدد پایداری با مطالعات انجام شده قبلی

سازی دامنه مسئله با بهره‌گیری از روش بدون شبکه و به‌وسیله تعریف گره انجام گرفته که استفاده از این تکنیک سبب رفع مشکلات ناشی از شبکه‌بندی نظیر اختصاص هر گره تنها به یک المان و یا گسستگی در مرز بین المان‌ها می‌شود. برای اعمال شرط تعادل، دامنه مسئله به سلول‌های ورنوویی تقسیم‌بندی شده و پس از آن روابط تعادل برای هر سلول ورنوویی ارضا می‌شوند که از تابع شکل شپارد برای درونیابی استفاده گردیده است. شرایط مرزی نیز با توجه به هندسه مسئله به گره‌های مرزی اعمال می‌شود. شرط تسلیم نیز با توجه به خاصیت تابع شپارد که درونیابی را در محدوده حداقل و حداکثر مقادیر گره‌ای انجام می‌دهد، در گره‌ها بررسی شده است. در انتها، پس از تعیین یک تابع هدف مناسب و تغییر ساختار قیدهای مطرح شده، یک مسئله بهینه‌سازی به‌صورت مسئله برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو به‌دست می‌آید که مجهولات آن تنش‌های گره‌ای می‌باشند. با توجه به مثال‌های حل شده در این مقاله مشخص گردید که روش ارائه شده دارای دقت خوبی در تخمین حد پایین بار حادی در مسائل پایداری مکانیک خاک است.

جدول ۳- مقادیر به دست آمده برای عدد پایداری درپچه مدفون در

شرایط صاف و زیر بارگذاری

	شرایط زیر	شرایط صاف
H / B = 1	۲/۰۵	۱/۰۹
H / B = 2	۳/۷۹۲	۳/۶۳۸
H / B = 4	۵/۲۹۲	۵/۱۸۲
H / B = 5	۶/۰۷۸	۵/۶۴۴
H / B = 6	۶/۶۸	۶/۰۱۴
H / B = 8	۶/۸۴۲	۶/۱۹۲
H / B = 10	۷/۳۴۸	۶/۸۲۴

نتایج حاصل در جهت کوچک‌تر کردن بازه مربوط به جواب اصلی بوده و از دقت بیشتری نسبت به سایر تحقیقات برخوردار است.

۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق محاسبه حد پایین بار حادی برای مسائل پایداری در مکانیک خاک با استفاده از تلفیق تئوری حادی، یک روش بدون شبکه و برنامه‌ریزی غیرخطی انجام شده است. مجزا

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. lower bound | 13. linear programming | 24. interpolation |
| 2. Shepard's mesh-free method | 14. expansion components | 25. field variable |
| 3. second-order cone programming | 15. linear solvers | 26. support domain |
| 4. rigid-plastic behavior | 16. active set algorithm | 27. Kronecker delta property |
| 5. associated flow rule | 17. discretization | 28. Voronoi cell |
| 6. limit analysis | 18. element free Galerkin method | 29. divergence theorem |
| 7. numerical method | 19. self-equilibrium stress field | 30. trapezoidal method |
| 8. mathematical programming | 20. nodal integration | 31. Mohr-Coulomb yield criterion |
| 9. optimization problem | 21. Shepard's shape function | 32. objective function |
| 10. stress field | 22. trapdoor | 33. Gauss method |
| 11. statically admissible | 23. nonlinear programming | 34. interior point method |
| 12. finite element method | | 35. Euclidean norm |

مراجع

- Drucker, D. C., Greenberg, H. J., and Prager W., "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", *Quarterly Journal of Application Mathematics*, Vol. 9, pp. 381-89, 1952 .
- Merifield, R. S., Sloan, S. W. and Yu H. S., "Rigorous Plasticity Solutions for the Bearing Capacity of Two-Layered Clays", *Geotechnique*, Vol. 49(4), pp. 471-90, 1999.
- Kim, J., Salgado, R., and Yu, H. S., "Limit Analysis of Soil Slopes Subjected to Pore-Water Pressures", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 125, pp. 48-58, 1999.
- Yang, H., Shen, Zh. and Wang, J., "3D Lower Bound Bearing Capacity of Smooth Rectangular Surface Footings", *Mechanics Reaserch Communications*, Vol. 30, pp. 481-92, 2003.
- Hjiaj, H., Lyamin, A.V. and Sloan, S. W., "Numerical Limit Analysis Solutions for the Bearing Capacity Factor", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 1681-1704, 2005.
- Durand, A.F., Vargas, E.A. and Vaz, L. E., "Applications of Numerical Limit Analysis (NLA) to Stability Problems of Rock and Soil Masses", *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, Vol. 43, pp. 408-25, 2006 .
- Lysmer, J., "Limit Analysis of Plane Problem in Soil Mechanics", *Soil Mechanics and Foundation Division (ASCE)*, Vol. 96, No. 4, pp. 1311-33, 1970.
- Anderheggen, E., and Knopfel H., "Finite Element Limit Analysis using Linear Programming", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 8, pp.1413-1431, 1972.
- Pastor J., "Analyse Limits: Determination Numérique des Solution Statiques Completes. Application au Talusvertical", *Journal de Mécanique Appliquée*, Vol. 2(2), pp. 167-196, 1978.
- Bottero, A., Negre, R., Pastor, J. and Turgeman, S., "Finite Element Method and Limit Analysis Theory for Soil Mechanics Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22, pp. 131-149, 1980.
- Yamamoto, K., Lyamin, A. V., Wilson, D. W., Sloan, S. W. and Abbo, A. J., "Stability of a Circular Tunnel in Cohesive-Frictional Soil Subjected to Surcharge Loading", *Computers and Geotechnics*, Vol. 38, pp. 504-534, 2011.
- Hjiaj, H., Lyamin, A.V. and Sloan, S.W., "Numerical Limit Analysis Solutions for Bearing Capacity Factor N_γ ", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 1681-1704, 2005 .
- Yu, H.S., Salgado, R., Sloan, S.W. and Kim, J.M., "Limit Analysis Versus Limit Equilibrium for Slope Stability", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering (ASCE)*, Vol. 124, pp. 1-11, 1998 .
- Lyamin, A. V. and Sloan, S.W., "Lower Bound Limit Analysis Using Nonlinear Programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 55(5), pp. 573-611, 2002.
- Makrodimopoulos, A. and Artin, C. M., "Lower Bound Limit Analysis of Cohesive-Frictional Materials Using Second Order Cone Programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66(4), pp. 604-34, 2006.
- Martin, C. M. and Makrodimopoulos A., "Finite Element Limit Analysis of Mohr-Coulomb Materials in 3D Using Semidefinite Programming", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 133, No. 4, pp. 339-347, 2008.
- Kumar, J. and Battachrya P., "On Improving the Solution by Using Lower Bound Finite Elements Limit Analysis and Linear Programming", *Geotechnical and Geological Engineering*, Vol. 29, pp. 619-26, 2011.
- Kumar, J. and Battachrya P., "Reducing the Computational Effort for Performing Linear Optimization in the Lower Bound Finite Element Limit Analysis", *International Journal of*

- Geomechanics (ASCE)*, Vol. 11, No. 5, pp. 406-12, 2011.
19. Chen S., Liu Y., and Cen Zh., "Lower Bound Shakedown Analysis by Using the Element Free Galerkin Method and Non-Linear Programming", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 3911-21, 2008.
 20. Chen, S., Liu, Y. and Cen, Zh., "Lower Bound Limit Analysis by Using the EFG Method and Non-Linear Programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 391-415, 2008.
 21. Le, C. V., Gilbert, M. and Askes, H., "Limit Analysis of Plates Using the EFG Method and Second-Order Cone Programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 78, No. 13, pp. 1532-55, 2009.
 ۲۲. غلامپور، ا، و بینش، س.م، "تحلیل حدی پی های نواری با استفاده از روش تعادلی بدون شبکه"، *مجله روشهای عددی در مهندسی*، سال ۳۲، شماره ۱، صفحه ۱۴۵-۱۶۱، ۱۳۹۲.
 ۲۳. غلامپور، ا، و بینش، س.م، "تعیین حد پایین برای بار حدی در پیچه مدفون با استفاده از روش بدون شبکه"، *دومین کنفرانس ملی سازه-زلزله-ژئوتکنیک*، مازندران، آذرماه ۱۳۹۱.
 24. Shepard, D., "A Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularity-Spaced Data", *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, pp. 517-524, 1968.
 25. Gordon, W. and Wixom, J., "Shepard's Method of Metric Interpolation to Bivariate and Multivariate Interpolation", *Mathematics of Computation*, Vol. 32, pp. 253-64, 1978.
 26. Chen, J. S., Wu, CT., Yoon, S., and You, Y., "A Stabilized Conforming Integration for Galerkin Mesh-Free Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 435-66, 2001.
 27. Lobo, M.S., Vandenbergh, L., Boyed, S. and Lebret, H., "Applications of Second-Order Cone Programming", *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 284, pp. 193-228, 1998.
 28. Makrodimopoulos, A. and Martin, C. M., "Lower Bound Limit Analysis of Cohesive-Frictional Materials Using Second-Order Cone Programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, pp. 604-634, 2006.
 29. Prandtl, L., "Über die Harte Plastischer Körper", *Nachr. Ges. Wiss. Gott.*, *Math.-Phys. Kl.*, Vol. 12, pp. 74-85, 1920.
 30. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1943.
 31. Prandtl, L., "Über die Eindringungs-Festigkeit (Härte) Plastischer Bausoffe und die Festigkeit von Schneiden", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 1, No. 1, pp. 15-20, 1921.
 32. Reissner, H., "Zum Eddruck Problem. In: Biezend", C.B., Burgers, J.M. (Eds), *Proceedings of First Congress Applied Mechanics*, pp. 295-311, 1942.
 33. Hansen, J. B., "A Revised and Extended Formula for Bearing Capacity", *Bulletin of Danish Geotechnical Institute*, Vol. 28, pp. 5-11, 1970.
 34. Davis, E. H., "Theories of Plasticity and Failure of Soil Masses", *Soil Mechanics*, CH. 6, Ed. I.K. Lee London, 1968.
 35. Gunn, M. J., "Limit Analysis Undrained Stability Problems Using a Very small Computer", *Proceedings Symposium Computer Applications to Geotechnical problems in Highway Engineering*, Cambridge University Engineering Department, pp. 5-30, 1980.
 36. Sloan, S. W., Assadi, A. and Puruchctaman, N., "Undrained Stability of a Trapdoor", *Geotechnique*, No. 1, pp. 45-62, 1990.