

بررسی شکل‌گیری موج خودنگهدار شکافان هسته‌ای در یک راکتور سریع بحرانی

محسن حسامی و مهدی نصرآبادی*

گروه مهندسی هسته‌ای، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۵/۱۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۰۷/۲۷)

چکیده - این مقاله به بررسی پدیده‌ای به نام موج پایای شکافان هسته‌ای که با برقراری سیکل U-Pu در یک راکتور هسته‌ای سریع ایجاد می‌شود، می‌پردازد. از موارد جالب توجه در مورد این نوع راکتور، ایمنی حاصل از حالت خودبخودی موج و همچنین بازده حدود ۵۰ درصدی مصرف سوخت آن است که در راکتورهای حرارتی امروزی در حدود ۱ تا ۲ درصد می‌باشد. جهت بررسی امکان تشکیل این موج، سیستم حاصل از معادله پخش نوترون که با معادلات مصرف سوخت و سینتیک کوپل شده است در نظر گرفته شد. روش خطی‌سازی به کار گرفته شده در حل این سیستم نه تنها زیرسیستم‌های پخش و واکنش را از یکدیگر جدا می‌کند بلکه مسئله روبرو شدن با چند صد زمان واقعی شبیه‌سازی را نیز بسیار ساده‌تر می‌سازد. گسسته‌سازی فضائی و زمانی زیرسیستم خطی شده پخش به ترتیب با استفاده از روش المان محدود سه بعدی و روش کرانک - نیکلسون و نهایتاً همگرایی آن به کمک تکرارهای مبتنی بر روش بهینه BiCGStab(L) انجام شد. روش المان به المان به کار گرفته شده در کنار BiCGStab(L) حافظه مورد نیاز را به اندازه یک دهم مقدار حافظه استفاده شده در غیاب این روش کاهش داد. با توجه به تغییرات اندک غلظت عناصر موجود در زیرسیستم واکنش، روش دقیق رانگ - کوتا (۵) برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول این زیرسیستم استفاده گردید. با توجه به زمان طولانی شبیه‌سازی، سه بعدی بودن مسئله و محاسبات سنگین حاصل از آن، از روش OpenMp جهت موازی کردن برنامه نوشته شده به زبان فرترن ۹۵ استفاده شد.

واژگان کلیدی: موج خودنگهدار شکافان هسته‌ای، سیستم نوترونیک، خطی‌سازی، BiCGStab(L)، روش المان محدود سه بعدی المان به المان، OpenMp.

Analysis of Self-Sustained Nuclear Fission Wave Evolution in a Fast Critical Reactor

M. Hesami and M. N. Nasrabadi

Department of Nuclear Engineering, Faculty of Advanced Sciences & Technologies,
University of Isfahan, Isfahan, Iran

Abstract: *Present paper deals with the phenomenon known as self-sustained nuclear fission wave that is set up with establishment of the U-Pu cycle in a fast nuclear reactor. The safety arises from self-sustained state of the wave and also 50% the possibility of initiation and evolution of the wave, the system comprised of neutron diffusion equation coupled with burn-up and kinetic equations have been considered. The linearization method used to solve this system not only separates diffusion subsystem*

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mnnasrabadi@ast.ui.ac.ir

from reaction one but also simplifies greatly dealing with several real hundred days of simulation. Space and time discretizations of the linearized diffusion subsystem were performed by 3D finite element and crank-nicolson methods, respectively. The convergence of equation was carried out using the iterations based on the optimized BiCGStab(L) method. Rung-Kutta (5) method was used to solve the first order differential equations of the reaction subsystem since the concentrations of elements in the reaction subsystem changed slowly. Using the element by element FEM and BiCGStab(L) used for solving the system dropped the required memory down to 1/10. Considering the long period of the simulation, 3D case of the problem and heavy computations, the OpenMp method was used to parallelize the code written in FORTRAN 95.

Keywords: Nuclear reactor, self-sustained nuclear fission wave, neutronic system, linearization, BiCGStab(L), 3D element by element FEM, OpenMp.

فهرست علائم

ϕ	شار نوترون ($\text{n/cm}^2.\text{s}$)	D	ضریب پخش نوترون (cm^{-1})
λ_i	ثابت واپاشی دختر هسته‌های شش گروهی (s^{-1})	N_8	چگالی اورانیوم ۲۳۸ (n/cm^3)
ν	سرعت نوترون (m/s)	N_9	چگالی اورانیوم ۲۳۹ (n/cm^3)
σ_a^8	سطح مقطع جذب میکروسکوپی اورانیوم ۲۳۸ (cm^2)	NPu	چگالی پلوتونیوم ۲۳۹ (n/cm^3)
σ_a^{Pu}	سطح مقطع جذب میکروسکوپی پلوتونیوم ۲۳۹ (cm^2)	$\bar{N}$	چگالی تک گروه مؤثر پاره‌های شکافت (n/cm^3)
σ_f^{Pu}	سطح مقطع شکافت میکروسکوپی پلوتونیوم ۲۳۹ (cm^2)	q	چگالی منبع نوترون ($\text{n/cm}^3.\text{s}$)
τ	نیمه عمر مؤثر واپاشی اورانیوم ۲۳۹ از طریق دو کاهش بتا (s)	t	زمان (s)

۱- مقدمه

Terra Power به پشتیبانی مالی بیل گیتس روی آن انجام شود. این گروه در سال ۲۰۱۰ طی مقاله‌ای نتایج حاصل از تحقیقات خود را که با استفاده از روش مونت کارلو انجام شده بود منتشر کردند. آنها در این مقاله حداقل میزان سوزش سوخت جهت شکل‌گیری موج را ۱۴٪ به‌دست آورده‌اند [۴].

خیلی قبل‌تر از عنوان شدن چنین رژیم کاری برای یک راکتور هسته‌ای، افرادی نظیر فینبرگ^۷ و دریسکول^۸ مسائلی مانند استفاده از سوخت طبیعی (غنی نشده) و هم‌چنین نقش زایش و تبدیل در قلب راکتور را بررسی نموده بودند ولی احتمالاً فوکسیستوف^۹ اولین کسی است که موج پایای شکافان هسته‌ای بر مبنای زایش، تبدیل و سوزش را مطرح نموده و شرایط لازم جهت شکل‌گیری آن را مورد بررسی قرار داده است [۸-۹]. افرادی مانند سکیموتو^{۱۰}، فومین^{۱۱} و وندام^{۱۲} نیز پژوهش‌هایی در این زمینه انجام داده‌اند. سکیموتو با فرض ثابت بودن موج در طول قلب و با درنظر گرفتن مسائل ترموهیدرولیک، راکتوری بر مبنای این موج طراحی کرده است [۲]. فومین با درنظر گرفتن معادلات چند گروهی در

اخیراً تحقیقاتی در جهت بررسی فیزیکی و نوترونی گونه‌ای جدید از راکتورهای هسته‌ای تحت عنوان‌های شمع^۱ [۱-۳]، راکتور موج متحرک^۲ [۴]، راکتور موج ایستا^۳ [۵]، راکتور کاملاً اتوماتیک^۴ [۶-۷] و یا راکتور خود ایمن [۸-۹] انجام شده است. همه این تحقیقات بر مبنای پدیده‌ای به نام موج پایای شکافان هسته‌ای می‌باشد. این پدیده منحصراً به‌فرد، راکتور را قادر می‌سازد که سوخت شکافان مورد نیاز خود جهت بحرانی شدن و تولید قدرت پایدار را از طریق زایش و تبدیل^۵ ایجاد و سپس مصرف کند، بدون اینکه نیازی به غنی‌سازی یا فرآیندی تحت عنوان بازفرآوری باشد. تحقیقات اولیه نشان داده است که در صورت وجود شرایط لازم، سوزش سوخت^۶ می‌تواند به بیشتر از ۵۰٪ برسد و این درحالی است که سیستم‌های حرارتی امروزی درصداً به مراتب کمتری از سوخت خود را در جهت تولید قدرت مصرف می‌کنند. این ویژگی جالب به‌همراه چندین خصوصیت منحصراً به‌فرد دیگر این نوع راکتور، باعث شده است که سرمایه‌گذاری‌های قابل توجهی از طرف شرکت

۲- مدل نوترونیک

همواره در بررسی یک پدیده نوترونی جدید سعی می‌شود از مدل‌های ساده نوترونی ولی به اندازه کافی دقیق و مؤثر استفاده شود. از این جهت در این تحقیق از معادله پخش تک گروهی برای بررسی پدیده‌ای به نام موج پایای شکافان هسته‌ای استفاده شده است. صورت کلی این معادله به صورت زیر است:

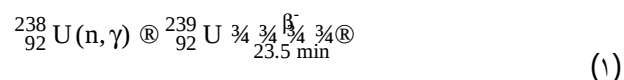
$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot D \nabla \phi + q \quad (2)$$

که در آن q چگالی منبع نوترون، D ضریب پخش و v سرعت نوترون‌های تک گروهی است. شکل q با توجه به سیکل استفاده شده، عناصر شرکت کننده در سوزش، دختر هسته‌ها^{۱۵}، نحوه برخورد با نوترون‌های تأخیری و... می‌تواند شکل‌های متفاوتی به خود بگیرد. در تحقیقات گذشته [۴، ۶، ۱۰] دو سیکل معروف U-Pu و Th-U استفاده شده‌اند. به‌طور کلی شکل‌گیری موج با به‌کارگیری سیکل U-Pu آسان‌تر انجام می‌شود. این به خاطر سطح مقطع‌های مناسب‌تر اورانیوم ۲۳۸ در این رژیم کاری، کوتاه‌تر بودن دوره زمانی تبدیل اورانیوم ۲۳۸ به پلوتونیوم ۲۳۹ به نسبت یک دهم دوره زمانی تبدیل توریم ۲۳۲ به اورانیوم ۲۳۳ و امکان رسیدن به چگالی سوخت عملی بالاتر با استفاده از اورانیوم ۲۳۸ است. هم‌چنین پسماند موجود راکتورهای هسته‌ای فعلی عمدتاً اورانیوم ۲۳۸ می‌باشد که با توجه به قابل استفاده بودن آن در این نوع راکتور، مناسب‌تر است که تحقیقات روی سیکل کاری U-Pu انجام شود [۴].

اگر به این سیکل و پارامترهای زمانی آن توجه کنیم در خواهیم یافت که با توجه به کوتاه بودن زمان حضور اورانیوم ۲۳۹ و هم‌چنین نزدیک بودن خصوصیات این عنصر با نپتونیوم ۲۳۹، جابه‌جا کردن این دو با یک عنصر، نه تنها خطای قابل توجهی در محاسبات به وجود نخواهد آورد، بلکه طول محاسبات نیز کمتر خواهد شد. تعداد دختر هسته‌های ایجاد شده از شکافت پلوتونیوم ۲۳۹ نسبتاً زیاد می‌باشد؛ در نظر گرفتن تمام آنها، هم به جهت افزایش میزان محاسبات و هم به جهت اینکه بعضی از آنها احتمال شکل‌گیری کمی داشته و نقش ناچیزی در مسئله دارند،

حالت دو بعدی شکل‌گیری موج را بررسی کرده است [۱۰]. وندام نیز با تکیه بر اصول ریاضی و حضور یک فاکتور فیدبک، جوابی تحلیلی برای موج به دست آورده و به بررسی خصوصیات نظیر سرعت موج و عرض فعال موج پرداخته است [۱۱-۱۲].

برای بررسی چنین موجی لازم است که معادله ترابرد نوترون، معادلات سوزش و سینتیک^{۱۳} به صورت کوپل شده با یکدیگر حل شوند. در ابتدای کار این راکتور، جهت راه‌اندازی موج از یک چشمه خارجی استفاده می‌شود. چشمه نوترون خارجی، اورانیوم ۲۳۸ موجود درون قلب راکتور را طبق رابطه زیر به پلوتونیوم ۲۳۹ تبدیل می‌کند:



با توجه به نحوه توزیع اولیه شار حاصل از چشمه نوترون خارجی، به دلیل انرژی نسبتاً بالای نوترون‌های ورودی، آن نواحی از قلب که سرشار از اورانیوم ۲۳۸ و نزدیک‌تر به مرز چشمه می‌باشند، بیشتر به پلوتونیوم ۲۳۹ تبدیل خواهند شد. در این ناحیه عمل شکافت نیز انجام می‌گیرد ولی فرآیند غالب تولید پلوتونیوم ۲۳۹ خواهد بود. با گذشت زمان و انباشته شدن پلوتونیوم ۲۳۹ طبق شرایط لازم و کافی که فوکتیستوف بیان کرده است، یک ناحیه بحرانی موضعی در سمت چشمه و نزدیک آن ایجاد خواهد شد. مقداری جلوتر از این ناحیه بحرانی به طرف داخل قلب شرایط زیر بحرانی بوده و دارای ضریب تکثیر^{۱۴} کوچک‌تر از یک است. این ناحیه بحرانی موضعی طبق شرایط گفته شده توسط فوکتیستوف می‌تواند در حکم چشمه‌ای برای ناحیه زیر بحرانی روبروی خود عمل کرده و به این صورت موج شکافان هسته‌ای مورد نظر ایجاد خواهد شد. با توجه به استراتژی گفته شده، این موج به صورت خود به خود به سمت جلو حرکت خواهد کرد و به هیچ‌گونه دخالت خارجی نیاز نخواهد داشت. امتیاز تئوری فوکتیستوف در مورد این پدیده در همین خودکار بودن موج و عدم نیاز به کنترل خارجی جهت ادامه حرکت آن است.

نوترون‌های آزاد شده به ازای هر شکافت پلوتونیوم ۲۳۹ می‌باشد.

۳- حل سیستم معادلات

۳-۱- استراتژی کلی

سیستم تشکیل شده از معادلات به دست آمده در قسمت قبل در واقع یک سیستم پخش - واکنش^{۱۶} است. با توجه به شکل q و میزان پیچیدگی آن، راه حل‌های متفاوتی را می‌توان برای حل آن در پیش گرفت [۱۳]. معادله پخش نوترون از نوشتن قانون پیوستگی برای نوترون به دست می‌آید. اگر به معادله پخش دقت شود (رابطه ۲)، برای اینکه معادله فقط برحسب شار نوترون باشد، طبق رابطه شار با نوترون (در حالت تک انرژی) سمت چپ این معادله در معکوس سرعت نوترون‌ها ضرب شده است [۱۴]. سرعت نوترون‌ها حتی در سطح انرژی حرارتی آنها عدد بزرگی است. این ضریب حساسیت سیستم را بالا برده و هنگام بررسی همگرایی سیستم به ناچار بایستی پله‌های زمانی کوچک انتخاب شوند. در غیر این صورت آشفتگی^{۱۷} وارد شده به سیستم زیاد بوده و تکرارها جهت همگرایی سیستم بسیار زیاد خواهند شد و یا سیستم اصلاً همگرا نخواهد شد [۱۵].

نکته مهم این است که شار نوترون در حالت پایای سیستم یعنی وقتی که تغییرات شار فقط در اثر تغییر غلظت عناصر باشد، تغییرات اندک و آهسته‌ای را به خود خواهد دید. مقیاس زمانی این نوع تغییرات بسیار بزرگ‌تر از مقیاس زمانی تغییراتی است که بر اثر آشفتگی سریع ایجاد می‌شود. اگر بخواهیم سیستم را در حالت کاملاً غیرخطی حل کنیم، با توجه به نکته گفته شده، شبیه‌سازی بسیار زمان‌گیر خواهد بود. می‌توان گفت به شرط اینکه تغییرات شدیدی در شار وجود نداشته باشد و تغییرات شار فقط در اثر تغییرات غلظت عناصر باشد، دقت استراتژی کاملاً غیرخطی نسبت به دقت استراتژی‌های خطی خیلی متفاوت نخواهد بود. با توجه به نوع و ذات مسئله و

معقول و اقتصادی به نظر نمی‌رسد. به این ترتیب برای بررسی نقش پاره‌های شکافت و هم‌چنین نقش نوترون‌های تأخیری از شش گروه پاره‌های شکافت استفاده شده است و مابقی دختر هسته‌ها به صورت یک گروه مؤثر در معادلات مربوط به سوزش وارد شده‌اند. با توجه به موارد بیان شده معادلات مربوط به سوزش به صورت زیر خواهند بود:

$$\frac{\partial N_8}{\partial t} = -\phi \sigma_a^8 N_8 \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial t} = \phi \sigma_a^8 N_8 - \frac{1}{\tau} N_9 \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_{Pu}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} N_9 - \phi (\sigma_a^{Pu} + \sigma_f^{Pu}) N_{Pu} \quad (5)$$

با فرض اینکه شکافت به دو پاره شکافت، حداکثر احتمال را داشته باشد، برای یک گروه مؤثر پاره‌های شکافت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = 2 \left(1 - \sum_{i=1}^6 \beta_i \right) \phi \sigma_f^{Pu} N_{Pu} - \sum_{i=1}^6 \lambda_i \bar{N}_i \quad (6)$$

و در نهایت معادلات مربوط به سیستم نیز به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial t} = \beta_i \phi \sigma_f^{Pu} N_{Pu} - \lambda_i \bar{N}_i \quad i=1, \dots, 6 \quad (7)$$

در معادلات فوق N_8 ، N_9 ، N_{Pu} و $\bar{N}$ و $\bar{N}_i$ به ترتیب غلظت اورانیوم ۲۳۸، اورانیوم ۲۳۹، پلوتونیوم ۲۳۹، یک گروه مؤثر پاره‌های شکافت و دختر هسته‌های شش گروهی می‌باشند. τ زمان مؤثر تبدیل اورانیوم ۲۳۹ از طریق کاهش بتا به پلوتونیوم ۲۳۹ است. سطح مقطع‌های σ_a^8 ، σ_a^{Pu} و σ_f^{Pu} به ترتیب سطح مقطع‌های جذب اورانیوم ۲۳۸، پلوتونیوم ۲۳۹ و شکافت پلوتونیوم ۲۳۹ می‌باشند. β_i کسر نوترون‌های تأخیری و λ_i ثابت واپاشی دختر هسته‌های شش گروهی هستند. در نهایت شکل q ظاهر شده در معادله پخش به صورت زیر خواهد بود:

$$q = [\nu (1 - \beta)] \phi \sigma_f^{Pu} N_{Pu} + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \bar{N}_i - \phi \times \left[\sum_{i=8,9,Pu} \sigma_a^i N_i + \sum_{i=1}^6 \sigma_a^i \bar{N}_i + \bar{\sigma} \bar{N} \right] + S_{ext} \quad (8)$$

در این رابطه $\bar{\sigma}$ سطح مقطع مؤثر در نظر گرفته شده برای مابقی پاره‌های شکافت، S_{ext} منبع نوترون خارجی و ν تعداد متوسط

ترتیب معادله پخش به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot D \nabla \phi + a \phi + b \quad (11)$$

با توجه به روند کلی روش المان محدود، دو طرف رابطه (۱۱) را در یک تابع تست ضرب کرده و روی فضای مربوط به مسئله انتگرال گیری می کنیم. بدین ترتیب معادله پخش به رابطه زیر تبدیل خواهد شد:

$$\int_{\Omega} v \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} dX = \int_{\Omega} v \nabla \cdot D \nabla \phi dX + \int_{\Omega} v a \phi dX + \int_{\Omega} v b dX \quad (12)$$

که در آن $X = (x, y, z)$ و Ω فضای مورد نظر است. با توجه به توابع گرین^{۲۰} داریم:

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot D \nabla \phi dX = - \int_{\Omega} D \nabla \phi \cdot \nabla v dX + \int_{\partial \Omega} v D \frac{\partial \phi}{\partial n} dX \quad (13)$$

و همچنین داریم [۱۶]:

$$D \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot D \nabla \phi \quad (14)$$

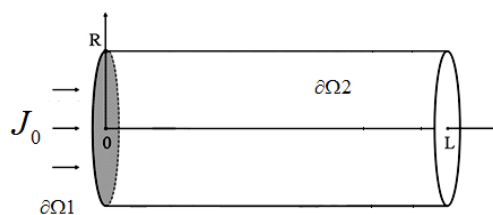
که در این دو رابطه $\partial \Omega$ مرز سیستم و $\mathbf{n}$ بردار نرمال^{۲۱} آن می باشد. با توجه به هندسه راکتور و شرایط مرزی خاص در نظر گرفته شده برای مسئله، $\partial \Omega$ به دو ناحیه تقسیم می شود. ناحیه اول ($\partial \Omega 1$) صفحه دایره ای شکل منتهی الیه سمت چپ قلب و ناحیه دوم ($\partial \Omega 2$) مابقی مرزهای خارجی سیستم است (شکل ۱). در ناحیه اول شرط مرزی به صورت شار ثابت (نوترونهایی با انرژی ۱ MeV که به صورت عمود وارد قلب می شوند) فرض شده است که در آن $\mathbf{n} \cdot D \nabla \phi = J_0$ می باشد. در ناحیه دوم شرط مرزی به صورت ALBEDO (رابطه ۱۵) در نظر گرفته شده است [۱۷].

شرایط مرزی و اولیه در نظر گرفته شده به صورت روابط زیر می باشند:

$$\mathbf{n} \cdot D \nabla \phi|_{\partial \Omega 2} + \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)} \phi|_{\partial \Omega 2} = 0 \quad (15)$$

$$\phi(r, t)|_{y=0, t=0} = J_0, \quad \phi(r, t)|_{y \neq 0, t=0} = 0 \quad (16)$$

$$N8(r, t)|_{y=0-L, t=0} \approx \frac{\rho_8}{238} N_A \quad (17)$$



شکل ۱- شکل قلب و شرایط مرزی آن

نکات گفته شده، در این تحقیق از روش خطی سازی جهت حل این سیستم استفاده شده است. نتیجه اصلی این روش این است که زیر سیستم های پخش و واکنش نسبت به زمان به صورت جدا از هم و در فاصله های متوالی حل خواهند شد.

در نهایت روش اتخاذ شده جهت حل زمانی این سیستم به این صورت است که شار در هر فاصله ۱۰۰ ثانیه ای ثابت فرض شده و تغییرات مربوط به غلظت عناصر در این فاصله با استفاده از این شار ثابت به دست آمده است. البته در لحظات اولیه توزیع چشمه خارجی و تغییرات شدید شار، شار در فاصله های کوچک تری حساب شده است. بعد از کمتر شدن تغییرات شار و تقریباً پایا شدن آن، روش مذکور به کار گرفته شد. به این ترتیب معادله پخش هر ۱۰۰ ثانیه یک بار حل گردید و در این فاصله زمانی، تغییرات عناصر و نوترون های تأخیری با یک شار ثابت به دست آمد.

۳-۲- حل زیر سیستم پخش

در قسمت قبل روش اتخاذ شده برای حل زمانی سیستم پخش - واکنش مربوطه شرح داده شد. در این قسمت به زیر سیستم پخش پرداخته خواهد شد. این زیر سیستم یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه دو است. حل این معادله را با گسسته سازی فضایی^{۱۸} شروع کرده و برای این کار از روش شناخته شده المان محدود^{۱۹} استفاده می کنیم. بر طبق رابطه (۲) داریم:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot D \nabla \phi + q \quad (9)$$

برای راحتی کار q را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$q = a \phi + b \quad (10)$$

که در آن a و b به راحتی از رابطه (۸) به دست می آیند. به این

$$\Phi ; \sum_{j=1}^N \Phi_j(X) \Phi_j(t) \quad (20)$$

با یکسان فرض کردن شکل فضایی Φ (تابع وزن در روش باقیمانده وزن دار شده^{۲۴}) و تابع تست v طبق روش گالرکین^{۲۵} [۱۶]، معادله پخش به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j dX \frac{d\Phi_j}{dt} = & - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot D \nabla \Phi_j dX \Phi_j - \\ & \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \int_{\partial\Omega_2} \Phi_i \Phi_j dX \Phi_j + \int_{\partial\Omega_1} \Phi_i J_{0i} dX + \\ & \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \Phi_i a_i \Phi_j dX \Phi_j + \int_{\Omega} \Phi_i b_i dX \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن N تعداد گره‌های^{۲۶} در نظر گرفته شده (یا تعداد معادلات موجود در دستگاه کلی) در فضای قلب در جهت مش‌بندی هندسه مورد نظر است. با فرض:

$$\int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j dX = M_{ij} \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot D \nabla \Phi_j dX = K_{ij} \quad (23)$$

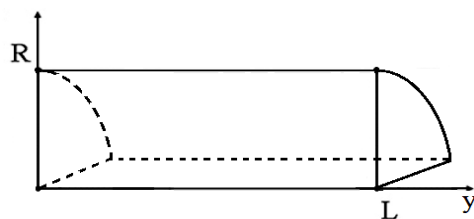
$$\int_{\Omega} \Phi_i b_i dX = \bar{b}_i \quad (24)$$

$$\int_{\Omega} \Phi_i a_i \Phi_j dX = \bar{a}_{ij} \quad (25)$$

سیستم گسسته شده فضایی زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N M_{ij} \frac{d\Phi_j}{dt} = & - \sum_{j=1}^N K_{ij} \Phi_j - \frac{1}{2} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \sum_{j=1}^N M_{ij} b_{\partial\Omega_2} \Phi_j + \\ & \int_{\partial\Omega_1} \Phi_i J_{0i} dX + \sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} \Phi_j + \bar{b}_i \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (26)$$

نقطه اثر قسمت‌های مربوط به شرایط مرزی که در اثر اعمال توابع گرین ایجاد شده‌اند، بستگی به اندیس‌های اختصاص داده شده به گره‌ها و المان‌های مرزی خواهد داشت. شرط مرزی ناحیه اول با استفاده از روش پنالته^{۲۷} و شرط مرزی ناحیه دوم با محاسبه یک سری انتگرال‌های برداری سه بعدی و انجام تصحیحات لازم در ماتریس ضرائب اعمال خواهد شد [۱۸]. فعلاً برای ساده بودن شکل معادله و اینکه بتوانیم مسئله زمان و



شکل ۲- نمای یک چهارم قلب

$$\begin{aligned} N9(r,t)|_{t=0} = 0, \quad N P u(r,t)|_{t=0} = 0 \\ \bar{N}(r,t)|_{t=0} = 0, \quad \bar{N}_i(r,t)|_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن $\alpha = \frac{J_{L-\partial\Omega_2}}{J_{L+\partial\Omega_2}}$ است. $J_{L-\partial\Omega_2}$ جریان جزئی خارج شونده از یک سطح کوچک مرز و $J_{L+\partial\Omega_2}$ جریان جزئی منعکس شده (داخل شونده) از یک سطح کوچک مرز خارجی به طرف داخل قلب است.

با توجه به تقارن موجود در هندسه قلب و همچنین تغییرات مکانی شار، یک چهارم از قلب در شبیه‌سازی در نظر گرفته شده است (شکل ۲). این عمل به نوبه خود باعث ایجاد نوعی دیگر از شرط مرزی می‌شود که در محاسبات عددی به شرط مرزی آزاد^{۲۲} معروف است [۱۸]. خوشبختانه برای اعمال این نوع شرط مرزی نیازی به انجام تغییرات در ماتریس ضرائب نمی‌باشد. هنگام استفاده از این نوع شرط مرزی باید از وجود تقارن اطمینان حاصل شود، در غیر این صورت جواب مناسب به دست نخواهد آمد. با ترکیب روابط (۱۳، ۱۴، ۱۵) و معادله پخش و همچنین اضافه کردن شرط مرزی ناحیه اول، به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dX = & - \int_{\Omega} D \nabla \Phi \cdot \nabla v dX + \int_{\partial\Omega_2} v \left(\frac{1}{2} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Phi \right) dX + \\ & \int_{\partial\Omega_1} v J_0 dX + \int_{\Omega} v a \Phi dX + \int_{\Omega} v b dX \end{aligned} \quad (19)$$

در این رابطه به دنبال جوابی از Φ هستیم که در فضای سوبولف^{۲۳} از مرتبه یک $H_0^1(\Omega)$ صدق کند. یعنی Φ باید روی این فضا پیوسته بوده و مشتق آن پیوسته تکه‌ای باشد [۱۶]. در ادامه Φ را با مقدار تقریبی آن (فرم ضعیف روش المان محدود) جایگزین می‌کنیم:

نحوه برخورد با آن را ساده تر بیان کنیم، این دو قسمت را از معادله حذف می کنیم. با بسط رابطه (۲۶) روی اندیس i در نهایت سیستم ماتریس گونه زیر را خواهیم داشت:

$$[M].\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\} + [K].\{\Phi\} = \{a\}^T.\{\Phi\} + \{b\} \quad (27)$$

که در آن $\{ \}$ ، T و به ترتیب بیانگر ماتریس، بردار و ترانهاده می باشند. با به کارگیری روش تتا^{۲۸} می توان شار در لحظه جدید را با استفاده از متوسط وزن دار شده دو گرادیان زمانی متوالی شار به دست آورد [۱۹]. طبق این روش برای شار در لحظه جدید خواهیم داشت:

$$\{\Phi\}_1 = \{\Phi\}_0 + \Delta t((1-\theta)\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_0 + \theta\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_1) \quad (28)$$

گرادیان های زمانی موجود در این رابطه با استفاده از رابطه (۲۷) قابل محاسبه هستند:

$$[M].\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_0 + [K].\{\Phi\}_0 = \{a\}^T.\{\Phi\}_0 + \{b\} \quad (29)$$

$$[M].\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_1 + [K].\{\Phi\}_1 = \{a\}^T.\{\Phi\}_1 + \{b\} \quad (30)$$

در نهایت سیستم گسسته شده کامل به دست خواهد آمد:

$$([M] + \theta \Delta t [K]).\{\Phi\}_1 = ([M] - \Delta t (1-\theta) [K]).\{\Phi\}_0 + \theta \Delta t (\{a\}^T.\{\Phi\}_1 + \{b\}) + \Delta t (1-\theta)(\{a\}^T.\{\Phi\}_0 + \{b\}) \quad (31)$$

تغییرات θ از صفر تا یک ما را از روش صریح کامل^{۲۹} به روش ضمنی کامل^{۳۰} هدایت خواهد کرد [۱۹]. بهترین انتخاب با قرار دادن $\theta=0.5$ و رسیدن به روش معروف کرانک - نیکلسون^{۳۱} حاصل خواهد شد. این روش به لحاظ پایداری و مسائل مربوط به همگرایی، شرایط خوبی را برای مسئله ایجاد می کند. انتخاب این مقدار برای θ ، ظاهراً میزان محاسبات را افزایش خواهد داد ولی با این انتخاب مرتبه دقت بالاتر رفته و تعداد تکرارها در جهت رسیدن به محدوده خطای^{۳۲} مورد نظر و تأمین شدن معیار توقف^{۳۳} تکرارکننده کمتر خواهد شد [۱۵].

در حالت پایای سیستم، استفاده از روش صریح کامل یعنی $\theta=0$ نیز با توجه به Δt ی کوچک در نظر گرفته شده، دقت مناسبی را در پی خواهد داشت. این موضوع حالت غیرخطی حاصل شده از روش تتا برای $\theta=0.5$ را از بین خواهد برد.

موارد مربوط به تحلیل خطا و تعیین پله زمانی در مراجع [۱۵] و [۱۹] آمده است که برای طولانی نشدن مطلب از طرح آنها خودداری می شود. با مشخص شدن θ و پله زمانی، سیستم خطی آشنای زیر به دست خواهد آمد:

$$A.X=B \quad (32)$$

این سیستم را می توان با استفاده از روش هایی که براساس زیرفضای کرایلف^{۳۴} شکل گرفته اند، به مراتب سریع تر، بهینه تر و دقیق تر از روش های سنتی حل کرد. از میان آنها می توان به روش های GMRES، Arnoldi، Lanczos و CG اشاره کرد. در این روش ها به جای تشکیل سیستم کلی ماتریس ضرائب و حل کردن مستقیم آن، تنها از یک سری ضرب های بردار در ماتریس استفاده می شود. این روش ها خصوصاً وقتی که با مسائل بزرگ روبرو هستیم مؤثرتر و دقیق تر عمل خواهند کرد و میزان حافظه و محاسبات مورد نیاز آنها کمتر خواهد بود.

در این تحقیق به طور خاص از روش BiCGStab(L) که نمونه توسعه یافته روش CG می باشد و مشکلات اولیه این روش را به همراه ندارد [۲۰] استفاده شده است. از نکات مهم در مورد این روش، ساده تر بودن اجرای موازی آن نسبت به روش های سنتی مانند گوس - جردن جهت انجام محاسبات موازی می باشد. وقتی از روش BiCGStab(L) در کنار روش المان محدود استفاده شود، حل سیستم عنوان شده در رابطه (۳۲) به انجام یک سری حلقه های for و ضرب بردار در ماتریس مربوط به تک المان ها تبدیل خواهد شد [۱۸]. این حلقه ها چه در سطح حافظه تسهیم شده^{۳۵} و چه در سطح حافظه توزیع شده^{۳۶} به راحتی قابل موازی سازی هستند. تعیین مقدار L در روش BiCGStab(L) به نوع مسئله بستگی دارد. به طور کلی با افزایش L میزان حافظه مورد نیاز افزایش و میزان محاسبات برای رسیدن به یک دقت مشخص کاهش خواهد یافت [۲۰]. در این تحقیق مقدار L برابر ۴ در نظر گرفته شده است. برای برآورده شدن تلورانس در محاسبه خطا، تعداد تکرارهای خارجی (در مقابل عدد L که در این روش به تکرارهای داخلی معروف است) این روش در حدود ۴ تا ۵

باقی ماند. روش‌های مبتنی بر زیرفضای کرایلف نیاز به یک حدس اولیه برای جواب دارند و هرچه این حدس بهتر انتخاب شود تکرارها در جهت رسیدن به محدوده خطای مجاز کمتر خواهد شد. در این تحقیق از پیش حلگر قطری^{۳۷} استفاده شده است.

۳-۳- حل زیر سیستم واکنش

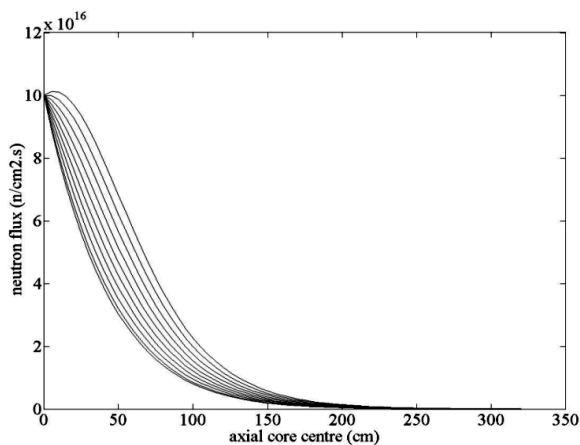
زیرسیستم واکنش شامل مابقی معادلات مرتبه اول مربوط به تغییر غلظت عناصر و نوترون‌های تأخیری که در نهایت تغییرات مربوط به q را رقم می‌زنند، می‌شود. با توجه به تکرارهای فوق‌العاده زیاد موجود در مسیر حل مسئله و امکان گسترش خطا، تغییرات اندک غلظت عناصر و هم‌چنین نکات اشاره شده در قسمت (۳-۱)، یکی از بهترین راهکارها استفاده از روش رانگ - کوتا می‌باشد. دقت این روش کمک خواهد کرد که تغییرات غلظت عناصر را که دلیل اصلی تغییرات شار است بسیار بهتر ثبت کنیم. هزینه محاسباتی این روش نسبت به روشی مانند تتا زیادتر است ولی با انتخاب تعداد گام‌های مناسب، می‌توان به دقت به مراتب بهتر دست پیدا کرد. در ابتدا از روش صریح اولر ($\theta=0$) برای این کار استفاده شد که نتیجه مناسبی در بر نداشت و به واگرایی جواب‌ها منجر می‌شد. در این تحقیق به‌طور خاص از روش ۵ گامی رانگ - کوتا استفاده شده است. ضرائب مربوط به این روش در کتب مربوط به معادلات دیفرانسیل معمولی آمده است که جهت جلوگیری از اطناب کلام از آوردن آنها صرف‌نظر می‌شود.

هر یک از معادلات دیفرانسیل معمولی زیر سیستم واکنش، نشان‌دهنده تغییر غلظت یک عنصر منحصر به فرد، با زمان مشخصه مربوط به خود می‌باشد. این زمان مشخصه از کسری از یک ثانیه برای نوترون‌های تأخیری تا حدود چندین روز برای اورانیوم ۲۳۹ تغییر می‌کند. تعیین کردن زمان مشخصه جهت حل این معادلات با توجه به کوپل بودن آنها از نظر تئوری مشکل به‌نظر می‌رسد. با توجه به تکرارهای فوق‌العاده زیاد مربوط به حل این معادلات و هم‌چنین بار محاسباتی روش

رانگ - کوتا، اهمیت تعیین هر چه دقیق‌تر فاصله زمانی کلی برای حل این معادلات بیشتر جلوه می‌کند. هر چه این فاصله زمانی بزرگ‌تر باشد میزان محاسبات کمتر خواهد شد که البته دقت مناسب نیز باید حاصل شود. این کار با انجام چندین نمونه محاسبات آزمایشی با فواصل زمانی متفاوت (۰/۱، ۰/۲، ۱، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰) صورت پذیرفت و در نهایت با مقایسه جواب‌ها، فاصله زمانی ۱ ثانیه مورد استفاده قرار گرفت.

۴- موازی سازی

دسته‌بندی‌های متفاوتی روی انواع موازی سازی بر مبنای سخت‌افزار، نرم‌افزار و یا ترکیبی از این دو وجود دارد. بر مبنای استراتژی اتخاذ شده در به‌کارگیری حافظه، روش‌های موازی سازی به سه دسته حافظه تسهیم شده، توزیع شده و هیبرید^{۳۸} تقسیم می‌شوند. در مورد مسئله حاضر بیش از هر عامل، امکانات موجود تعیین‌کننده روش مناسب بود. از این رو با توجه به پردازنده‌های چند هسته‌ای موجود، استفاده از روش OpenMp ساده‌ترین و ارزان‌ترین راه حل به‌نظر می‌رسید. در این روش براساس راهکاری که به Fork-Join معروف است قسمت‌های مختلف یک برنامه به‌صورت موازی اجرا خواهند شد. این بدین معناست که بنا بر نیاز، می‌توان هر کجای برنامه تعداد رشته^{۳۹} مورد نیاز را ایجاد و بعد از انجام مأموریت مربوطه آنها را به حالت پردازش واحد برگرداند. با توجه به نوع دستورالعمل به‌کار گرفته شده در برنامه، تکنیک‌های متفاوتی برای موازی سازی وجود دارد. مثلاً برای جمع دو بردار می‌توان از Workshare استفاده کرد. یک دستور شرطی مانند if-else را نمی‌توان موازی اجرا کرد و در صورت مواجهه با چنین دستوری باید رشته‌ها را به اصطلاح Join کرده و تنها از رشته اصلی استفاده کرد. در عمل مشکلات متعددی مانند Data Racing وجود دارد که بعضاً به واگرایی جواب مسئله خواهد انجامید. برای استفاده از تکنیک‌های OpenMp، کامپایلر مناسبی مانند Intel Parallel Studio XE 2011 لازم است.



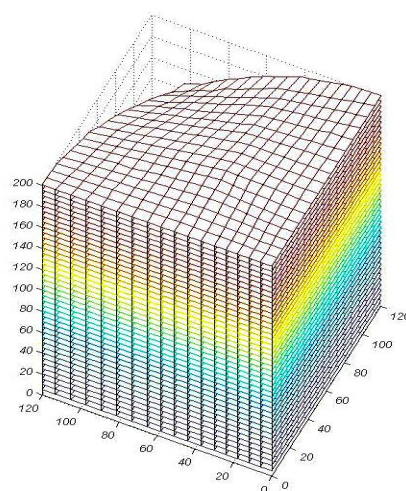
شکل ۴- شار در مرکز قلب بین روزهای ۱۱۵/۷-۱

درصد می‌باشد. ناحیه دوم کاملاً از اورانیوم ۲۳۸ تشکیل شده است. در این تحقیق قلب به صورت یک ناحیه در نظر گرفته شده و تماماً از اورانیوم ۲۳۸ می‌باشد. این مسئله باعث می‌شود که حضور چشمه نوترون خارجی برای زمان طولانی‌تری لازم باشد. در تحقیقات فومین چشمه بعد از حدود ۱۰ روز خاموش شده است [۱۰]. در این تحقیق لازم شد که چشمه تا حدود بیش از ۱۰۰ روز روشن بماند. این ایده بیش‌تر از این که به غنی‌سازی اورانیوم برای ناحیه چاشنی نیاز داشته باشد، به یک چشمه نوترون خارجی مانند آنچه توسط شتاب‌دهنده برای سیستم‌های ADS⁺ فراهم می‌شود نیاز دارد. تغییرات شار در شکل‌های ۴ تا ۷ آمده است.

نحوه تشکیل و حرکت رو به جلوی موج به روشنی از شکل‌های مربوطه نمایان است. این منحنی‌ها برای مشاهده بهتر تغییرات شار، به ترتیب در فاصله‌های حدود ۱۲ روز پشت سر هم رسم شده‌اند. با رسیدن موج به منتهی الیه سمت راست قلب، نشت نوترون‌ها به دلیل نزدیکی مرکز موج به مرز خارجی قلب افزایش یافته و موج فروکش خواهد کرد. این فرآیند در شکل ۷ نشان داده شده است.

۶-۲- سرعت موج

سرعت موج یعنی سرعت حرکت قله موج به پارامترهای متعددی بستگی دارد. برای مثال برای یک ترکیب مشخص،



شکل ۳- نمای یک چهارم قلب راکتور

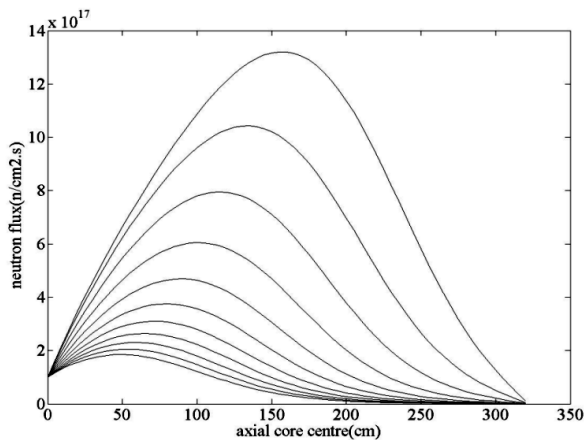
۵- هندسه راکتور

در این تحقیق از روش المان محدود برای تقسیم‌بندی فضایی قلب استفاده شده است. به طور متوسط طول هر ضلع المان‌های مکعبی شکل به کار گرفته شده در حدود ۵ سانتی‌متر می‌باشد. به منظور کاهش محاسبات و با توجه به تقارن موجود در شکل قلب و جواب‌ها، قلب به چهار قسمت تقسیم شده است. شعاع قلب حدود ۱۲۰ سانتی‌متر و طول آن نیز ۳/۲۵ متر می‌باشد. در هر مقطع شعاعی (یک چهارم قلب) حدود ۱۸*۱۸ گره و در طول نیز حدود ۶۵ گره داریم. بنابراین ۱۷*۱۷*۶۴ المان خواهیم داشت (شکل ۳).

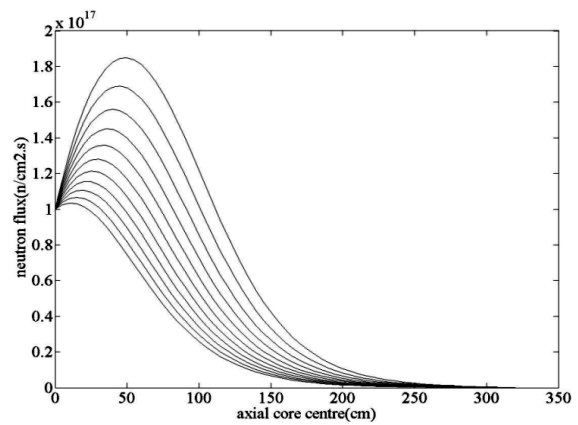
۶- بحث و نتیجه‌گیری

۶-۱- تغییرات شار نوترون

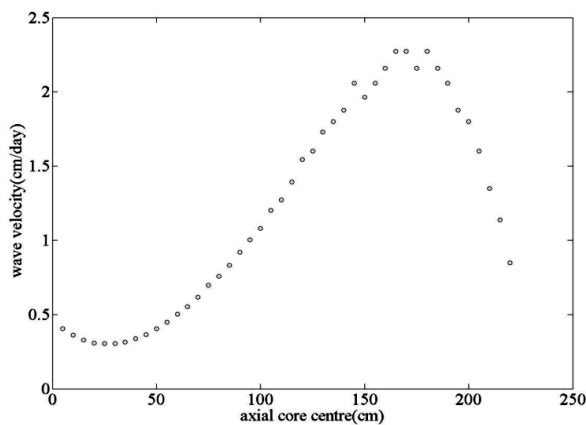
بعد از رسیدن چگالی پلوتونیوم به حد بحرانی آن، می‌توان چشمه نوترون خارجی را خاموش کرد. با خاموش کردن چشمه، علی‌رغم افت ناگهانی ایجاد شده در شار، موج به مسیر خود ادامه خواهد داد. محاسباتی که توسط فومین [۱۰] انجام شده است برای قلبی با دو ناحیه کاری می‌باشد. ناحیه اول ناحیه چاشنی بوده و غلظت اولیه پلوتونیوم در آن حدود ۱۲



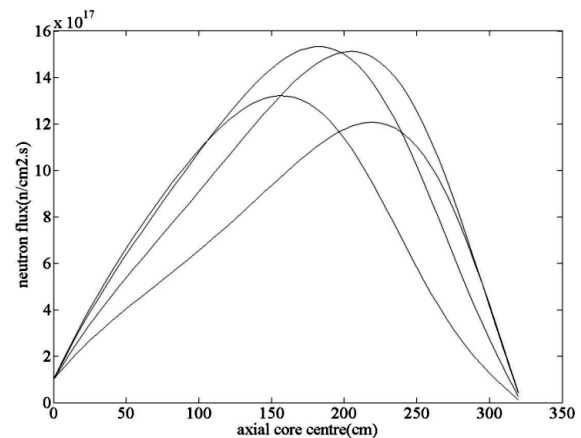
شکل ۶- شار در مرکز قلب بین روزهای ۲۴۳ - ۲۷۰/۳



شکل ۵- شار در مرکز قلب بین روزهای ۱۱۵/۷ - ۲۴۳



شکل ۸- سرعت نقطه به نقطه ی موج



شکل ۷- شار در مرکز قلب بین روزهای ۲۷۰/۳ - ۳۱۶/۶

موج ثابت نخواهد بود [۱۰]. تغییرات سرعت با پیشروی موج به صورت شکل ۸ می باشد. اگر کل مسیر طی شده توسط موج بر مدت زمان عبور آن تقسیم شود، سرعت میانگینی در حدود 0.71 (cm/day) به دست خواهد آمد. این مقدار با یافته های فومین، سکیموتو و فوکیتستو همخوانی خوبی دارد [۲، ۳ و ۱۰]. حضور ناحیه چاشنی در تحقیقات فومین باعث می شود که در شروع کار موج، سرعت موج به صورت ناگهانی افزایش یابد که این حالت در تحقیق حاضر کمتر به چشم می آید، زیرا حالت بحرانی موضعی اولیه، به مرور زمان و با تبدیل اورانیوم ۲۳۸ به پلوتونیوم ۲۳۹ تشکیل می شود.

هرچه شعاع قلب بیشتر شود سرعت موج افزایش خواهد یافت. این افزایش سرعت به نوبه خود باعث افزایش میزان مصرف سوخت خواهد شد [۱۰].

با پیشرفت موج به سمت جلو به دلیل افزایش شار، میزان مصرف سوخت نیز افزایش می یابد. این افزایش تا جایی ادامه خواهد داشت که موج به حالت تقریباً پایای خود برسد. با نزدیک شدن موج به انتها الیه سمت راست قلب و کم شدن اندازه شار، این مقدار رو به کاهش خواهد گذاشت. آنچه مسلم است این است که برای قلبی با طول محدود، در حالتی که ترکیب یکنواخت سوخت دست نخورده باقی بماند، سرعت

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. CANDLE | 15. dauther isotope | 29. full explicit method |
| 2. traveling wave reactor | 16. diffusion-reaction | 30. full implicit method |
| 3. solitary wave reactor | 17. perturbation | 31. Cranck-Nicolson |
| 4. completely automated reactors | 18. space discretization | 32. telorance |
| 5. breed and transmutation | 19. finite element method | 33. stopping criteria |
| 6. burn-up | 20. green's functions | 34. Krylov subspace |
| 7. Fienberg | 21. direction cosine | 35. shared memory |
| 8. Driscoll | 22. free boundary condition | 36. distributed memory |
| 9. Feoktistov | 23. sobolev space | 37. diagonal preconditioner |
| 10. Sekimoto | 24. wheighted residual method | 38. hybrid |
| 11. Fomin | 25. galerkin method | 39. thread |
| 12. Van Dam | 26. node | 40. accelerator driven system |
| 13. kinetics | 27. penalty method | |
| 14. multiplication factor | 28. theta method | |

مراجع

1. Sekimoto, H., and Yan, M., "Design Research of Small Long Life CANDLE Fast Reactor", *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 35, pp. 18-36, 2008.
2. Sekimoto, H., and Yan, M., "Design Study on Small CANDLE Reactor", *Energy Conversion and Management*, Vol. 49, pp. 1868-1872, 2008.
3. Sekimoto, H., and Miyashita, S., "Startup of "Candle" Burnup in Fast Reactor from Enriched Uranium Core", *Energy Conversion and Management*, Vol. 47, pp. 2772-2780, 2006.
4. Weaver, K. D., Gilleland, J., Ahlfeld, C., Whitmer, C., and Zimmerman, G., "A Once-Through Fuel Cycle for Fast Reactors", *Journal of Engineering Gas Turbine Power*, Vol. 132, Issue 10, p. 102917, 2010.
5. Chen, X. N., and Maschek, W., "Transverse Buckling Effects on Solitary Burn-up Waves", *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 32, pp. 1377-1390, 2005.
6. Teller, E., Ishikawa, M., and Wood, L., "Completely Automated Nuclear Reactors for Long-Term Operation", *Proceedings of the Frontiers in Physics Symposium* 1995.
7. Teller, E., Ishikawa, M., and Wood, L., "Completely Automated Nuclear Power Reactors for Long-Term Operation", *Proceedings of the Frontiers in Physics Symposium*, 2003.
8. Feoktistov, L. P., "The Analysis of One Concept of Physical Safety of the Reactor", Preprint of the Kurchatov University of Nuclear Energy N4605/4, Moscow 1988.
9. Feoktistov, L.P., "The Perspective Systems of Nuclear Reactors with Inherent Safety," Soviet School on Theoretical Nuclear Physics, MIFI 1988.
10. Fomin, S. P., Mel'nik, Y. P., Pilipenko, V. V., and Shul'ga, N. F., "Self Organized Regime of Nuclear Burning Wave in Safe Fast Reactor", *Progress in Nuclear Energy* 50, pp. 163-169, 2008.
11. Van Dam, H., "The Self-Stabilizing Criticality Wave Reactor", *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 27, pp.1505-1521, 2000
12. Van Dam, H., "Flux Distributions in Stable Criticality Waves", *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 30, pp. 1495-1504, 2003.
13. Amir L., and Kern, M., "A Global Method for Coupling Transport with Chemistry in Heterogeneous Porous Media", *Computational Geosciences*, Vol. 14, pp. 465-481, 2010.
14. Duderstadt, J. J., and Hamilton, L. J., "Nuclear. Reactor Analysis", John Wiley & Sons Inc., ISBN 0-471-22363-8, 1976.
15. Ropp, D. L., Shadid, J. N., and Ober, C. C., "Studies of the Accuracy of Time Integration Methods for Reaction-Diffusion Equations", The United States Department of Energy's National Nuclear Security Administration under contract DE-AC04-94AL85000, 2005.
16. Gockenbach, M. S., "Understanding and Implementing the Finite Element Method", Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, ISBN:0-89871-614-4, 2006.
17. Smith, I. M., and Griffiths, D.V., "Programming the finite element method", John Wiley & Sons Inc., ISBN:0-470-84969-X, 2004.
18. Stacey W. M., "Nuclear Reactor Physics", John Wiley & Sons Inc. 2001.
19. Lowrie R. B., , "A Comparison of Implicit Time Integration Methods for Nonlinear Relaxation and Diffusion" *Journal of Computational Physics*, Vol. 196, pp. 566-590, 2004.
20. Sleijpen, G. L. G., and Fokkema, D. R., "BicgStab(l) for Linear Equations Involving Unsymmetric Matrices with Complex Spectrum", Kent State University, Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 1, 1993.