

## مدل‌سازی انفجار در آب به همراه کاویتاسیون با استفاده از روش ALE

علی جعفریان و احمد رضا پیشه‌ور\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱/۲۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۵/۵)

**چکیده** - در پژوهش حاضر از یک روش تک سیالی به همراه روش اویلری- لاگرانژی ALE برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر انفجار زیر آب استفاده شده است. همچنین از حلگر دقیق ریمان به همراه معادله حالت متناسب با رفتار ترمودینامیکی آب در فرآیند انفجار استفاده شده است. حل دوبعدی انفجار زیر آب در نزدیکی یک صفحه به همراه کاویتاسیون مدل‌سازی شده است. به منظور شبیه‌سازی دقیق محل موج از یک شبکه تطبیقی در دامنه حل استفاده شده است. شبیه‌سازی مسئله انفجار زیر آب دارای تطابق بسیار خوبی با کارهای مشابه عددی می‌باشد که نشان دهنده قابلیت روش حاضر در شبیه‌سازی فیزیک انفجار در زیر آب و مدل‌سازی تغییرات حجم حباب انفجاری و نیز ایجاد و اضمحلال ناحیه کاویتاسیون در انفجار زیر آب می‌باشد.

واژگان کلیدی: جریان تراکم‌پذیر، انفجار زیر آب، ALE، کاویتاسیون.

## Simulation of Underwater Explosion with Cavitation using ALE Method

A. Jafarian and A. Pishavar

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** *In the present paper the compressible flow of the underwater explosion has been simulated using One-fluid method along with the Eulerian-Lagrangian ALE method. Besides, the exact Riemann solver and an appropriate equation of state which is consistent with the thermodynamic behavior of water in underwater explosion, is employed. The two dimensional underwater explosion problem near a flat plate is modeled. In order to increase the accuracy of the method for simulating the wave front, the adaptive grid is used. The simulated underwater explosion results agreed well with other similar numerical simulations. The numerical results indicate the capability of the present study in simulating the physics of underwater explosion and modeling the fluctuations of explosive bubble and also predicting the creation and collapse of the cavitation zone.*

**Keywords:** *Compressible flow, underwater explosion, Arbitrary-Lagrangian-Eulerian (ALE), cavitation.*

\*:مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: apishe@cc.iut.ac.ir

$\rho$	چگالی	$\dot{x}$	سرعت حرکت شبکه
$V$	بردار سرعت	$U^*$	شرط مرزی سرعت
$P$	فشار	$x^n$	نقاط شبکه در زمان $n$
$U$	بردار کمیت‌های بقایی	$\Omega(t)$	حجم کنترل
$F$	بردار شار در راستای $x$	$\Gamma(t)$	سطح کنترل
$G$	بردار شار در راستای $y$	$\overline{U}_i$	مقدار متوسط سلولی
$u$	مؤلفه‌ی سرعت در راستای $x$	$\overline{F}_i$	فلاکس متوسط عبوری از سطح
$v$	مؤلفه‌ی سرعت در راستای $y$	$\hat{n}$	بردار نرمال سطح سلول
$B$	ضریب معادله تیت	$\hat{t}$	بردار مماس سطح سلول
$\alpha$	ضریب معادله تیت	$\hat{e}_{11}$	بردار یکه مماسی
$P_{sat}$	فشار اشباع	$\hat{e}_{n1}$	بردار یکه نرمال
$\rho_g$	چگالی بخار اشباع	$U_p$	بردار حالت آب یا گاز در $p$
$\rho_l$	چگالی مایع اشباع	$H_L, H_R$	شرایط چپ و راست

#### ۱- مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در سرعت‌های بسیار بالا در جریان ایجاد می‌شود و انتشار امواج تراکمی و انبساطی در فرآیندهای فیزیکی ناشی از سرعت بالا رخ خواهد داد. جریان سیال در این پدیده‌ها دارای ماهیتی تراکم‌پذیر بوده و بسیاری از مسائلی که در حوزه‌ی علوم مکانیک سیالات و یا هوافضا قرار می‌گیرند دارای این شرایط هستند. مسائلی نظیر حرکت موشک‌ها، جریان مافوق صوت در کانال‌ها و یا مسأله انفجار جزء این دسته از مسائل قرار خواهند گرفت.

انفجار پدیده پیچیده‌ای است که در طی آن در کسری از ثانیه ماده منفجره تبدیل به گاز با فشار و دمای بالا می‌شود و انرژی خود را به صورت ناگهانی در محیط آزاد می‌کند. در صورت مهار انرژی عظیم آزاد شده ناشی از یک واکنش انفجاری و استفاده از خصایص آن و هدایت آن می‌توان این انرژی را در بسیاری از فرآیندها و صنایع مورد استفاده قرار داد. از جمله کاربردهای انفجار می‌توان به استفاده از این مواد در کارهای عمرانی و معدنی، شکل‌دهی فلزات توسط موج

ضربه‌ای در محیط‌های مانند آب و هوا، جوش دادن قطعات و پوشش دهی مواد نام برد.

مواردی که در بالا ذکر شد اثر انفجار بر روی اجسام جامد در مجاورت ماده منفجره را نشان می‌دهند. طبیعی است که این اثر شدید و سریع بر روی این اجسام در اثر عبور امواج تراکمی از محیط سیال حاصل می‌شود و با توجه به اینکه انفجار در چه سیالی صورت پذیرد نحوه انتشار این امواج و سرعت انتشار امواج در محیط و در نهایت رسیدن موج فشاری به جسم مورد نظر اهمیت پیدا خواهد کرد. محیط آب، یکی از پرکاربردترین محیط‌هایی است که انفجار در آن صورت می‌گیرد. آب با توجه به خصوصیات ترمودینامیکی ویژه خود، در شرایط مختلف رفتارهای متفاوتی را نسبت به هوا بروز می‌دهد. یکی از این پدیده‌ها که در بسیاری از موارد حائز اهمیت است، پدیده کاویتاسیون می‌باشد. شناخت و مطالعه این پدیده به منظور استفاده مناسب از انرژی حاصل از انفجار در محیط آب از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. یکی از زمینه‌ها و کاربردهایی که فیزیک انفجار زیر آب و کاویتاسیون به‌وضوح در آن دیده

می‌شود صنایع دریایی و کشتی سازی و اژدرهای مورد استفاده است. انفجار مواد منفجره از قبیل موشک‌ها، مین‌های دریایی، چاه‌های نفتی، در نزدیکی سازه‌های دریایی مانند اسکله‌ها، خطوط انتقال زیر آب و کشتی‌ها نوعی بارگذاری را بر این سازه‌ها تحمیل می‌کند که به دلیل فیزیک پیچیده آن و همچنین صدمات وارده از لحاظ علمی و عملی دارای اهمیت بسزایی است.

به‌طور کلی پدیده کاویتاسیون در جریان‌های تراکم‌پذیر به معنای تشکیل فاز بخار در سیال است که خود معلول کاهش فشار سیال تا حد فشار اشباع سیال می‌باشد [۱ و ۲]. در طبقه‌بندی کاویتاسیون، این پدیده به دو گروه کاویتاسیون دائم یا متصل<sup>۱</sup> و کاویتاسیون غیردائم یا گذرا<sup>۲</sup> تقسیم بندی می‌شود. کاویتاسیون غیردائم شامل پدیده‌های پیچیده فیزیکی مانند تشکیل ناحیه کاویتاسیونی و سطح تماس دینامیک، توسعه کاویتاسیون و در نهایت اضمحلال این ناحیه می‌شود. در دهه اخیر کاویتاسیون به‌طور گسترده‌ای توسط محققین مختلف با روش‌های آزمایشگاهی و عددی مورد مطالعه قرار گرفته است [۳-۵]. همچنین لازم به‌ذکر است که عموم مطالعات صورت گرفته بر روی کاویتاسیون متصل تمرکز یافته است. این نوع کاویتاسیون به‌صورت جریان دائمی بوده و تغییر شکل ناحیه کاویتاسیون بسیار آهسته و یا به‌صورت تناوبی خواهد بود. از طرف دیگر شکل و سطح تماس ناحیه کاویتاسیون در کاویتاسیون غیردائم بسیار متحرک و پویا بوده و در پدیده انفجار زیر آب و خطوط لوله صنعتی قابل مشاهده است.

به‌منظور شبیه‌سازی جریان دوفازی در روش تک‌سیالی، با دو فاز موجود به‌صورت یک مخلوط برخورد خواهد شد. از اینرو بر خلاف روش‌های دیگر- نظیر روش دوسیالی- تنها یک دسته معادله دیفرانسیل برای بیان حرکت سیال کفایت می‌نماید. با توجه به آنکه یک دسته معادله دیفرانسیل در مدل‌سازی استفاده می‌شود، تنها یک معادله حالت نیز برای کل مخلوط به‌کار می‌رود. یکی از مهم‌ترین دغدغه‌ها در این روش، استفاده از معادله حالتی است که بتواند تغییرات سیال از حالت مایع اشباع

تا فاز بخار را پوشش دهد [۶-۸]. همان‌طور که مشخص است در این روش با توجه به ماهیت آن، جزئیات گذار از یک فاز به فاز دیگر و نیز میزان تبادل جرم و انرژی بین یک فاز با ناحیه کاویتاسیون محاسبه نمی‌شود. اما از جهت دیگر، در این روش مدل‌سازی ایجاد ناحیه کاویتاسیون و توسعه و در نهایت اضمحلال آن به‌سادگی انجام می‌پذیرد [۶ و ۷] و این مدل به‌طور گسترده‌ای در شبیه‌سازی پدیده انفجار زیر آب مورد استفاده قرار گرفته است. در بین مدل‌های تک‌سیالی، مدل خلاء<sup>۳</sup> یکی از اولین مدل‌های به‌کار گرفته شده است که توسط تنگ و هانگ در سال ۱۹۹۶ ارائه شده است [۹]. این مدل یک مدل با یک فاز خالص است و دارای مشکلاتی برای به‌کارگیری آن در چند بعد می‌باشد. یکی دیگر مدل‌های محبوب و پرکاربرد، مدل قطع<sup>۴</sup> می‌باشد. این مدل براساس یک ایده ساده شکل گرفته است و در این مدل هنگامی که میزان فشار به مقداری کمتر از فشار اشباع می‌رسد، فشار ناحیه کاویتاسیون برابر با فشار اشباع قرار داده می‌شود [۱۰]. مدل قطع نیز مانند مدل خلاء یک مدل با یک فاز خالص بوده و قوانین بقا را نقض می‌کند.

یکی دیگر از مدل‌های کاویتاسیون، مدل اشمیت است که نخستین بار توسط اشمیت و همکاران در سال ۱۹۹۰ برای جریان فشار بالا و سرعت بالا در یک نازل کوچک مورد استفاده قرار گرفت [۷]. در این مدل، جریان کاویتاسیون به‌صورت مخلوطی همگن و باروتروپیک از گاز و مایع در نظر گرفته شده است. در این روش رابطه مورد استفاده در معادله حالت<sup>۵</sup> با استفاده از انتگرال‌گیری از رابطه سرعت صوت در جریان دوفازی به‌دست می‌آید. در حقیقت، تنها در حالت‌هایی می‌توان مدل اشمیت را به‌کار بست که نسبت چگالی بسیار کوچک باشد و یا اینکه میزان پرش فشار در عرض مرز کاویتاسیون از یک حد خاصی بالاتر باشد. این شرایط تنها زمانی ارضاء می‌شود که فشار محیط بالا باشد و یا اندازه کاویتاسیون کوچک باشد. به همین دلیل است که این مدل برای جریان با فشار بالا داخل یک نازل کوچک مدل مناسبی است.

پس از مدل اشمیت یکی از مدل‌هایی که برای شبیه‌سازی

جریان کاویتاسیون معرفی شده است، مدل ایزنتروپیک می باشد که در سال ۲۰۰۴ میلادی توسط لیو و همکاران ارائه گردید [۱۱]. در این مدل، مولفه های بخار مخلوط کاویتاسیون به صورت همگن، تراکم پذیر و ایزنتروپیک در نظر گرفته می شود. این مدل قابلیت خوبی در پیش بینی اندازه پیک فشاری و سرعت انتشار امواج را دارد و در بسیاری از مسائل انفجار زیر آب مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲].

ژی و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۰۶ مدل دیگری به نام مدل اصلاح شده اشmit را ارائه کردند. این مدل تا حدی توانست ضعف های مدل اشmit را پوشش دهد و برای دسته وسیع تری از مسائل قابل استفاده باشد. همچنین این مدل برای شبیه سازی انفجار یک بعدی و دو بعدی مورد استفاده قرار گرفت.

در مقاله حاضر مسأله انفجار در زیر آب در نزدیکی جسم جامد با استفاده از روش اولیری - لاگرانژی ALE بر روی شبکه تطبیقی شبیه سازی شده است و انتشار امواج در داخل آب و تشکیل و اضمحلال ناحیه کاویتاسیون مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور حل جریان از یک معادله حالت متناسب با فیزیک حاکم بر انفجار زیر آب به همراه حلگر دقیق ریمان استفاده شده است. بخش های مختلفی که در ادامه آورده شده است به ترتیب عبارتند از: معادله حاکم، مسأله ریمان و معادله حالت، روش عددی و نتایج.

## ۲- معادلات حاکم

در جریان های تراکم پذیر با سرعت بالا به علت غالب بودن اثر عبارت های همرفت<sup>۷</sup> به عبارت های پخش<sup>۷</sup> از اثر عبارت های پخش در معادلات ناویر- استوکس صرف نظر شده و جریان سیال با استفاده از معادلات اولیر توصیف می گردد. این معادلات در فرم بقایی عبارتند از:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \end{bmatrix} \quad (2)$$

که  $U$  بردار کمیت های بقایی،  $F$  و  $G$  بردارهای شار می باشند. همچنین  $\rho$  چگالی،  $u$  و  $v$  سرعت های جریان در راستای  $x$  و  $y$  بوده و  $P$  بیانگر فشار می باشد.

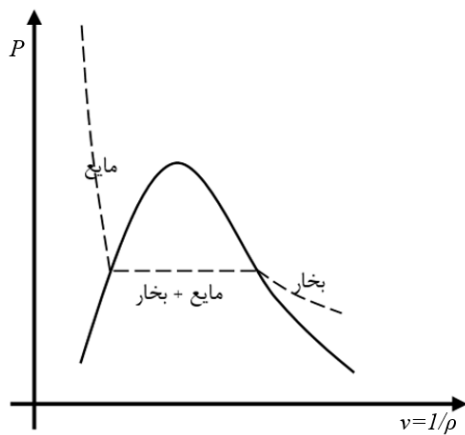
در مسأله انفجار در زیر آب در حل ALE<sup>۸</sup> با دو محیط مجزا شامل: محیط گازی داخل حباب انفجاری و محیط آب پیرامون حباب مواجه هستیم. از اینرو به منظور بسته شدن دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان از معادله حالت مناسب با هر یک از دو محیط باید استفاده شود. بدین منظور از رابطه معادله گاز ایده آل برای محیط گاز استفاده شده است. برای محیط آب نیز از معادله حالت مناسب استفاده شده است که در قسمت های بعد توضیح داده خواهد شد.

## ۳- حل دقیق مسأله ریمان

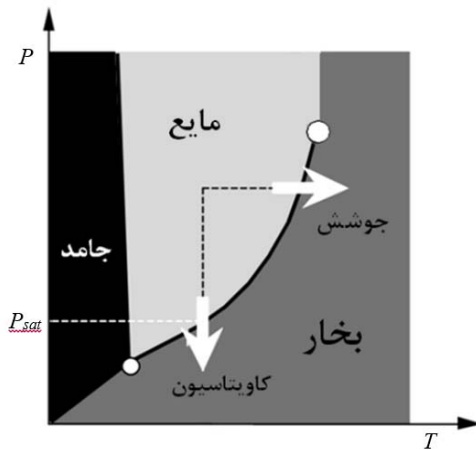
در بیشتر روش های عددی در جریان های تراکم پذیر به منظور به دست آوردن شار عبوری از سطوح سلولی نیاز به حل مسأله ریمان در هر مرز سلولی می باشد [۱۴]. در واقع مسأله ریمان عبارت است از بررسی جریان حاصل در معادله اولیر با یک شرط اولیه ناپیوسته در مرز. در حالت اولیه سمت راست سیال در حالت ثابت  $H_R$  و طرف چپ در حالت ثابت  $H_L$  می باشد:

$$U_{t=0} = \begin{cases} H_L & x < 0 \\ H_R & x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

لازم به ذکر است که حل دقیق مسأله ریمان تنها در موارد خاص و برای گاز ایده آل و آب با معادله حالت مشخص موجود بوده و در بسیاری از موارد از حل تقریبی ریمان به منظور به دست آوردن کمیت های برداری استفاده می شود. در روش های تک سیالی و به منظور تعیین ناحیه کاویتاسیون در آب، حلگرهای دقیق مسأله ریمان بدین صورت عمل می کنند که از حل دقیق ریمان تک فازی استفاده می شود و بردار کمیت های بقایی به دست می آید [۱۵]. پس از آن با استفاده از معادله حالت و دانستن مقدار فشار اشباع سیال، ناحیه کاویتاسیون تعیین می گردد. در این پژوهش از حلگر دقیق ریمان که در مرجع [۹] توسط تانگ و هوآنگ ارائه شده است استفاده شده است.



شکل ۲- تغییر فاز در یک فرآیند هم‌دما



شکل ۱- تغییر فاز در فرآیندهای مختلف

نزدیکی یکدیگر می‌شود. برهم‌کنش این دو و اثرات آنها بر یکدیگر که در هنگام انعکاس موج از مرزهای محیط روی می‌دهد نیز باید مورد توجه قرار گیرد. لازم به ذکر است در این پژوهش با توجه به حضور ناحیه کاویناسیون عملاً با سه محیط مواجه خواهیم بود که شامل ناحیه گازی، ناحیه آب و ناحیه دوفازی که در اثر کاهش فشار آب رخ می‌دهد خواهد بود و به منظور مدل‌سازی فیزیک این جریان پیچیده باید محل این نواحی و سطوح تماس بین این نواحی به کمک روش عددی شبیه‌سازی شود.

#### ۴-۱- روش حل عددی ALE

در کار حاضر از روش مرتبه دوم ALE برای حل معادلات حاکم و به دست آوردن خواص جریان استفاده می‌شود. با توجه به وجود مرز متمایز بین ناحیه حباب گازی و آب، مرز مشترک بین این دو ناحیه به صورت کاملاً لاگرانژی شبیه‌سازی شده و سایر نقاط شبکه نیز به صورت دلخواه حرکت داده خواهند شد. به منظور ایجاد کمترین پیچیدگی در شبکه محاسباتی در هنگام حرکت لاگرانژی نقاط شبکه محاسباتی در دو محیط حباب گازی و آب با استفاده از یک تابع هموار حرکت داده می‌شوند. در واقع با به کار بردن روش حاضر از مزیت‌های روش‌های اولیری و لاگرانژی به‌طور همزمان استفاده شده است.

ترتیب کار بدین صورت است که ابتدا خواص میدان حل در هر المان با توجه به این‌که این المان در کدامیک از دو محیط

در این حلگر از معادله حالت تیت<sup>۹</sup> مطابق با یک فرآیند تغییر فاز هم‌دما در فاز مایع استفاده شده است. همان‌طور که می‌دانیم پدیده کاویناسیون در جریان تراکم‌پذیر با کاهش فشار و در یک فرآیند دما ثابت رخ می‌دهد. شکل (۱) نشان‌دهنده این پدیده بر روی دیاگرام فازی می‌باشد.

همان‌طور که در شکل (۲) نشان داده شده است هنگام ایجاد کاویناسیون در جریان تراکم‌پذیر بر روی خط دما ثابت روی نمودار  $p-v$  حرکت کرده و از حالت مایع اشباع وارد ناحیه دوفازی و سپس ناحیه بخار خواهیم شد. بنابراین معادله حالت مورد نظر با توجه به فیزیک حاکم در یک فرآیند هم‌دما یک معادله باروتروپیک بوده و با استفاده از رابطه (۴) تعیین می‌گردد:

$$P = \begin{cases} (P_{\text{sat}} + B) \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\alpha - B & \rho > \rho_1 \\ P_{\text{sat}} & \rho_g \leq \rho \leq \rho_1 \\ C^{\gamma} \text{vap} \rho & \rho < \rho_g \end{cases} \quad (4)$$

#### ۴- روش عددی حل جریان دوفازی

عموماً جریان‌هایی که شامل انتشار امواج در دو محیط غیرقابل اختلاط با معادلات حالت متفاوت می‌شود، دو ناپیوستگی موج ضربه و مرز بین دو محیط وجود خواهد داشت. مثلاً در مساله انفجار زیر آب، به وجود آمدن موج ضربه ناشی از اختلاف فشار بسیار زیاد در دو سوی مرز، باعث حضور این دو ناپیوستگی در

$\dot{x}$  سرعت نقاط شبکه می باشد. در صورت در نظر گرفتن فرم نیمه منفصل معادلات حاکم به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d}{dt} \left( \bar{U}_i \Omega_i \right) + \tilde{F}_i = 0 \quad (7)$$

که  $\bar{U}_i$  مقدار متوسط سلولی است و  $\tilde{F}_i$  شار است که از سطح کنترل  $\Gamma_i$  عبور می کند:

$$(\bar{U}\Omega)_i = \int_{\Omega_i} U d\Omega \quad (8)$$

$$\tilde{F}_i = \mathbf{F} \left( \mathbf{U}, x_{i+\frac{\Delta x}{2}}, \dot{x}_{i+\frac{\Delta x}{2}} \right) - \mathbf{F} \left( \mathbf{U}, x_{i-\frac{\Delta x}{2}}, \dot{x}_{i-\frac{\Delta x}{2}} \right) \quad (9)$$

با انتگرال گیری از این معادلات در بازه زمانی  $[t^n, t^{n+1}]$  خواهیم داشت:

$$\Omega_i^{n+1} \bar{U}_i^{n+1} - \Omega_i^n \bar{U}_i^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tilde{F}_i dt = 0 \quad (10)$$

که به دلیل تغییر شکل حجم کنترل در بازه زمانی یادشده، انتگرال زمانی تابع شار به سرعت حرکت شبکه بستگی پیدا می کند و به صورت زیر خواهد بود:

$$\int \tilde{F}_i dt = \Delta t \tilde{F}_i \left( \mathbf{U}^k, x^{n+\frac{\Delta x}{2}}, \dot{x}^{n+\frac{\Delta x}{2}} \right) \quad (11)$$

برای تعمیم روش به حالت دوبعدی، ابتدا به هر نقطه مرزی یک محور مختصات نسبت داده می شود که جهات محورهای آن در مختصات کلی با توجه به شکل (۳) و از روابط (۱۲) محاسبه می شوند:

$$\hat{t} = \frac{\hat{e}_{t1} + \hat{e}_{t2}}{2} \quad \hat{n} = \frac{\hat{e}_{n1} + \hat{e}_{n2}}{2} \quad (12)$$

که  $\hat{n}$  و  $\hat{t}$  بردار نرمال عمود و مماس بر ضلع المان می باشد. سپس خواص سیال آب و گاز در دوسوی این نقطه با استفاده از خواص المان های هم نوعی که در این نقطه اشتراک دارند، به روش متوسط گیری وزنی بر اساس فاصله مراکز آن المان ها از نقطه مزبور به ترتیب زیر به دست آورده می شود (شکل (۴)):

$$U_{pg} = \frac{\sum_i \frac{U_{ig}}{d_{ig}}}{\sum_i \frac{1}{d_{ig}}} \quad U_{pl} = \frac{\sum_i \frac{U_{il}}{d_{il}}}{\sum_i \frac{1}{d_{il}}} \quad (13)$$

که  $U_p$  بردار حالت آب یا گاز در این نقطه و  $U_i$  بردار حالت

قرار گرفته است، مشخص می شود. سپس با استفاده از حل دقیق ریمان برای دو محیط آب و گاز، سرعت در نقاطی که مرز بین دو سیال را مشخص می کند تعیین می گردد. پس از مشخص شدن سرعت در نقاط مرزی سرعت حرکت بقیه نقاط شبکه به گونه ای تعیین می شود که کمترین درهم پیچیدگی را در المان های آن ایجاد کند. در شبیه سازی حاضر به منظور تعیین سرعت نقاط از حل معادله لاپلاس استفاده شده است. شرایط مرزی بر روی دیواره ها سرعت صفر و بر روی سطح حباب از سرعت لاگرانژی حرکت حباب که از حل دقیق مسأله ریمان به دست می آید استفاده می شود. پس از آن محل نقاط داخلی شبکه در گام زمانی بعدی محاسبه می شود.

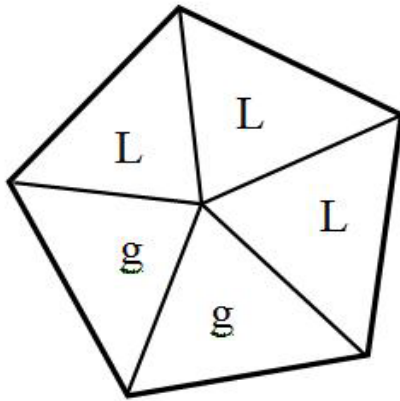
استفاده از حل معادله لاپلاس به دلیل هموار بودن آن و عدم وجود اکسترم های نسبی در دامنه حل این معادله است. پس از تعیین سرعت و موقعیت نقاط شبکه در گام زمانی مورد نظر معادلات جریان برای هر المان به روش حجم محدود انتگرال گیری می شوند. برای به دست آوردن شار جریان روی هر ضلع المان ها نیز مجدداً از حل دقیق معادله ریمان به همراه معادله حالت مناسب برای هر محیط استفاده می شود. پس از تعیین متغیرهای حالت در تمامی المان های شبکه لازم است که کیفیت شبکه برای استفاده در گام زمانی بعد مورد آزمون قرار گیرد و در صورت نیاز، میدان حل مجدداً شبکه بندی شده و اطلاعات از شبکه قبلی به شبکه جدید منتقل شوند و سپس عملیات حل با استفاده از شبکه جدید ادامه می یابد.

برای راحتی کار، ابتدا روش عددی برای حالت یک بعدی توضیح داده می شود. در این حالت معادلات حاکم برای حجم کنترل  $\Omega(t)$  با سطح کنترل  $\Gamma(t)$  را می توان به صورت زیر نوشت

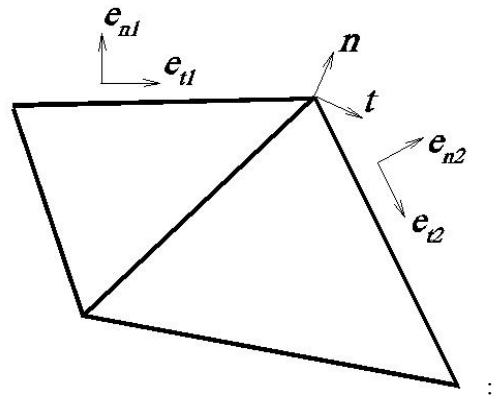
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\Gamma(t)} \mathbf{F} d\Gamma = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}) \\ \rho(\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}})\mathbf{u} + \mathbf{P} \\ \rho E(\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{P}\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (6)$$

که در آن  $\mathbf{U} = [\rho \quad \rho u \quad \rho E]^T$  تابع شار مطابق با رابطه (۶) و



شکل ۴- انتقال خواص از مراکز المان ها به رئوس آنها



شکل ۳- ایجاد محورهای مختصات محلی

$$x_p^{n+1}/\tau = \frac{x^{n+1} + x^n}{\tau}, y_p^{n+1}/\tau = \frac{y^{n+1} + y^n}{\tau}$$

در روابط فوق زیرنویس p مربوط به نقاط می باشد. پس از به دست آوردن سرعت هر نقطه از شبکه، سرعت هر ضلع از المان های شبکه از روابط (۱۷) محاسبه می شود:

$$\dot{y}_e = \frac{\dot{y}_{p1} + \dot{y}_{p2}}{\tau} \quad \dot{x}_e = \frac{\dot{x}_{p1} + \dot{x}_{p2}}{\tau} \quad (17)$$

که زیرنویس e مربوط به اضلاع شبکه است و نیز p1 و p2 معرف دو رأس طرفین هر ضلع هستند. این سرعت ها از مختصات کلی به مختصات محلی که در جهات عمود و مماس بر هر ضلع تعریف می شوند، منتقل می گردند (v<sub>n</sub> edge, v<sub>t</sub> edge در شکل (۵)).

از حل دقیق مساله ریمان بر روی هر ضلع شبکه در زمان t<sup>n</sup> در جهت عمود بر آن، بردار U\* برای این ضلع در این گام زمانی به دست می آید:

$$U^* = [\rho^* \quad \rho^* V_{Normal}^* \quad \rho^* V_{Tangential}^* \quad \rho^* E^*]^T \quad (18)$$

علامت \* معرف حالت عبورکننده از این ضلع است. با استفاده از U\* شار جریان بر روی هر ضلع به صورت زیر به دست می آید:

$$F(U^*) = \begin{bmatrix} \rho^* \left( V_{Normal}^* - v_n^{t+}/\tau \right) \\ \rho^* \left( V_{Normal}^* - v_n^{t+}/\tau \right) V_{Normal}^* + P \\ \rho^* \left( V_{Normal}^* - v_n^{t+}/\tau \right) V_{Tangential}^* \\ \rho^* E^* \left( V_{Normal}^* - v_n^{t+}/\tau \right) + P^* V_{Normal}^* \end{bmatrix} \quad (19)$$

هریک از المان های هم نوع پیرامون آن است. همچنین d<sub>i</sub> فاصله مرکز المان تا این نقطه می باشد. با استفاده از این خواص و به کارگیری حل دقیق مساله ریمان، سرعت این نقطه در جهت n-hat به دست می آید. مقدار سرعت در جهت t-hat نیز با توجه به جهت سرعت در امتداد n-hat به صورت زیر محاسبه می شود:

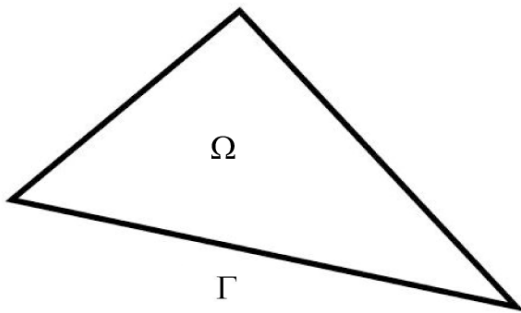
$$\text{if } v_n^* < 0 \Rightarrow v_t^* = v_{t1} \quad \text{if } v_n^* > 0 \Rightarrow v_t^* = v_{tg} \quad (14)$$

که v<sub>n</sub>\* سرعتی است که در جهت n-hat از حل دقیق مساله ریمان به دست می آید و v<sub>t1</sub> و v<sub>tg</sub> مولفه های سرعت در جهت t-hat هستند که از تصویر میانگین سرعت های المان های هم نوع پیرامونی در جهت t-hat در دوسوی نقطه مزبور به دست می آیند. پس از محاسبه v<sub>t</sub>\* و v<sub>n</sub>\* و تبدیل آنها از مختصات محلی به مختصات کلی (x, y) شرط مرزی در مرز بین دو محیط به دست می آید. علاوه بر آن شرط مرزی بر روی دیواره ها نیز صفر در نظر گرفته می شود. در نهایت معادله لاپلاس بر روی نقاط شبکه با استفاده از دو شرط مرزی به دست آمده حل شده و سرعت نقاط شبکه به دست می آید. سپس هندسه جدید شبکه با استفاده از روابط زیر به دست آورده می شود:

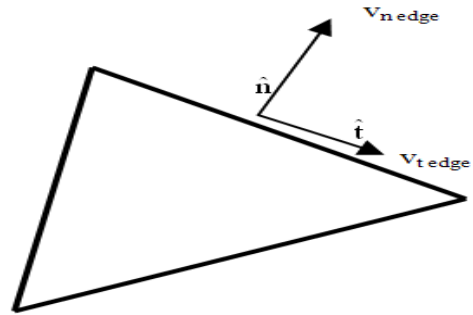
$$y_p^{n+1} = y_p^n + \Delta t \dot{y}_p^n \quad x_p^{n+1} = x_p^n + \Delta t \dot{x}_p^n \quad (15)$$

همچنین با استفاده از روابط زیر موقعیت و سرعت نقاط شبکه در زمان t<sup>n+1</sup>/τ محاسبه می شود:

$$\dot{x}_p^{n+1}/\tau = \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t}, \dot{y}_p^{n+1}/\tau = \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} \quad (16)$$



شکل ۶- حجم کنترل  $\Omega$  با سطح کنترل متحرک  $\Gamma$



شکل ۵- سرعت‌های عمودی و مماسی اضلاع شبکه

$$\text{رابطه } \beta = \frac{\rho - \rho_g}{\rho_l - \rho_g} \text{ محاسبه شده است.}$$

در این مسئله شرایط اولیه بدین ترتیب است که آب در سمت چپ و راست در حالت مایع اشباع و چگالی  $1010 \text{ kg/m}^3$  قرار دارد و در معرض یک انبساط شدید در میان لوله ضربه قرار گرفته است. در زمان  $t=0$  سیال در دو سمت لوله ضربه با سرعت  $200$ - و  $200$  متر بر ثانیه از یکدیگر دور می‌شوند (رابطه ۲۰). این انبساط شدید سبب می‌شود که از مرکز لوله ضربه یک موج انبساط به سمت چپ و یک موج انبساطی به سمت انتشار پیدا کند. در عرض این انبساط قوی شاهد کاهش چگالی خواهیم بود. با توجه به آنکه سیال در حالت اولیه در ناحیه مایع اشباع از دیگرام فازی قرار دارد، از اینرو ابتدا چگالی در فاز مایع کاهش خواهد یافت و پس از کاهش فشار و چگالی ناحیه کائیتاسیون در مرکز لوله ضربه تشکیل خواهد شد. تغییرات فشار، سرعت، چگالی و کسر حجمی در شکل (۷) نشان داده شده است:

$$\begin{cases} U = -200, \rho = 1010 & x < 0/5 \\ U = 200, \rho = 1010 & x > 0/5 \end{cases} \quad (20)$$

### ۵-۲- انفجار دوبعدی در نزدیکی دیوار

در این بخش مسئله دوبعدی انفجار زیر آب با استفاده از روش ALE تطبیقی شبیه‌سازی شده است. مسئله بدین صورت است که یک انفجار در نزدیکی یک دیواره رخ می‌دهد و به علت فشار بالا در داخل حباب انفجاری، امواج تراکمی و انبساطی در محیط آب منتشر خواهد شد. رفت و برگشت امواج در داخل آب سبب تغییر شکل و سایز حباب گازی و ایجاد ناحیه کائیتاسیون بر روی دیواره خواهد شد. به منظور شبیه‌سازی این پدیده، در حالت اولیه یک

برای محاسبه بردار نهایی  $U$  از  $F(U^*)$ ، که روی هر ضلع حجم کنترل شکل (۶) محاسبه شده است، و رابطه (۵) استفاده خواهد شد. پس از محاسبه  $U$  برای هر المان شبکه، لازم است کیفیت شبکه از نظر طول اضلاع و شکل المان‌های آن بررسی شود که در صورت لزوم شبکه اصلاح شده و برای گام‌های زمانی بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

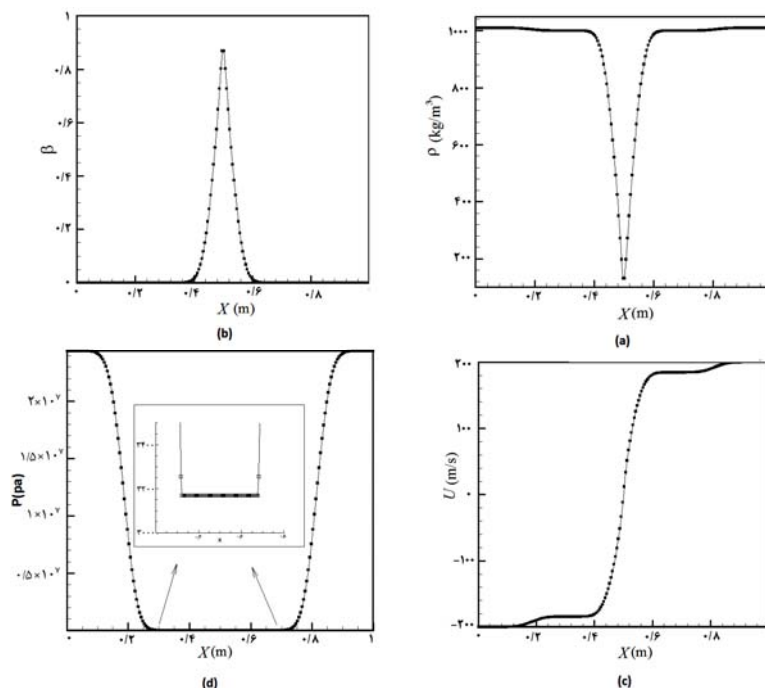
### ۵- نتایج

در این بخش نتایج حاصل از شبیه‌سازی برای حالت‌های مختلف یک بعدی و دوبعدی ارائه شده است. ابتدا نتایج حاصل از شبیه‌سازی یک بعدی لوله ضربه با حلگر دقیق ریمان ارائه شده است. سپس مسئله مربوط به شبیه‌سازی دوبعدی مسئله انفجار به همراه کائیتاسیون در نزدیکی دیواره با استفاده از روش ALE تطبیقی ارائه شده است و نتایج حاصل با نتایج عددی موجود مقایسه شده است.

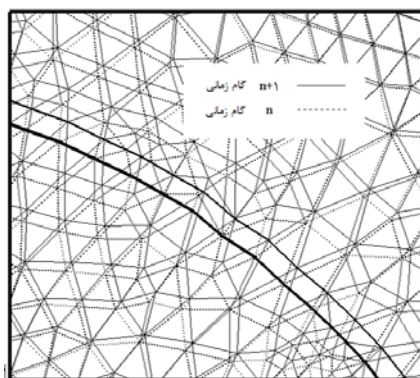
### ۵-۱- لوله ضربه یک بعدی

در اینجا مسئله لوله ضربه آب با یک شرط مرزی ناپیوسته در میان لوله شبیه‌سازی شده است. در این حالت یک انبساط قوی از دو طرف ایجاد و ناحیه کائیتاسیون در میان لوله تشکیل شده است. لازم به ذکر است که در این مسئله تعداد گره‌های محاسباتی برابر با  $400$  نقطه بوده و طول ناحیه برابر با  $1 \text{ m}$  در نظر گرفته شده است. آب با شرایط دمایی  $T=25^\circ\text{C}$  و  $P_{\text{sat}}=3169 \text{ Pa}$  بوده و شرایط بخار اشباع  $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$ ،  $\rho_g = 0/01 \text{ kg/m}^3$  است. همچنین کسر حجمی نیز با استفاده از  $\alpha=7/15$ ،  $\gamma=2$

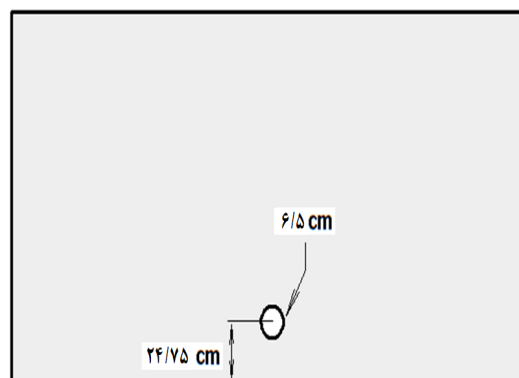




شکل ۷- نمودارهای تغییرات چگالی، کسر حجمی، سرعت و فشار



شکل ۹- نحوه‌ی جابجایی نقاط شبکه در گام‌های زمانی مختلف



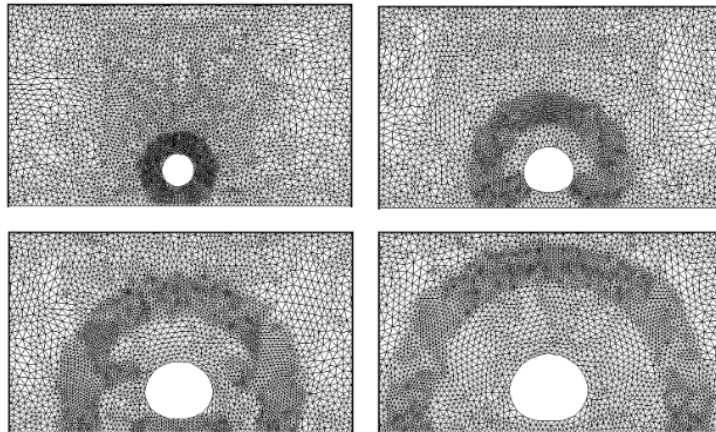
شکل ۸- طرحواره هندسه‌ی مسأله انفجار زیر آب در نزدیکی دیواره

$P=1 \text{ atm}$  در نظر گرفته شده است.

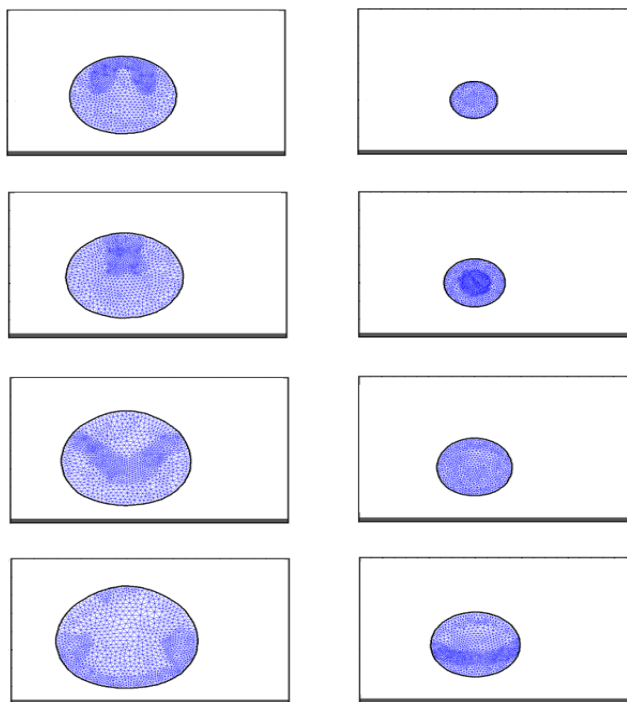
همان‌طور که در بخش اول نیز ذکر شد به منظور مدل‌سازی مسأله حاضر از حل ALE به همراه شبکه‌بندی مثلثی تطبیقی استفاده شده است. در اینجا حرکت نقاط روی سطح تماس حباب به صورت کاملاً لاگرانژی بوده و سایر نقاط شبکه با استفاده از یک تابع هموار و نیز با توجه به میزان فاصله‌ی آنها نسبت به نقاط روی سطح تماس سرعت دلخواهی کسب می‌کنند. شکل (۹) نشان دهنده نحوه‌ی حرکت نقاط شبکه در داخل دامنه و نیز روی سطح تماس می‌باشد که محل نقاط

حباب انفجاری با شعاع اولیه  $0/065 \text{ m}$  و در فاصله  $24/75 \text{ cm}$  از صفحه قرار گرفته است.

محیط پیرامون حباب آب بوده و در داخل حباب گازهای حاصل از انفجار می‌باشد. فشار اولیه برای گازهای داخل حباب برابر با  $P_{ini} = 1/1 \times 10^9$  در نظر گرفته شده است. مسأله حاضر توسط واردلا و همکاران [۱۶] و با استفاده از شبیه‌سازی عددی مورد بررسی قرار گرفته است. طرح‌واره مسأله مورد نظر در شکل (۸) قابل ملاحظه می‌باشد. در این مسأله نیز آب در دمای  $T=25^\circ\text{C}$  و  $P_{sat}=3169 \text{ Pa}$  بوده و نیز فشار اولیه آب برابر



شکل ۱۰- نحوه‌ی ریز شدن نقاط شبکه در طی حل جریان.

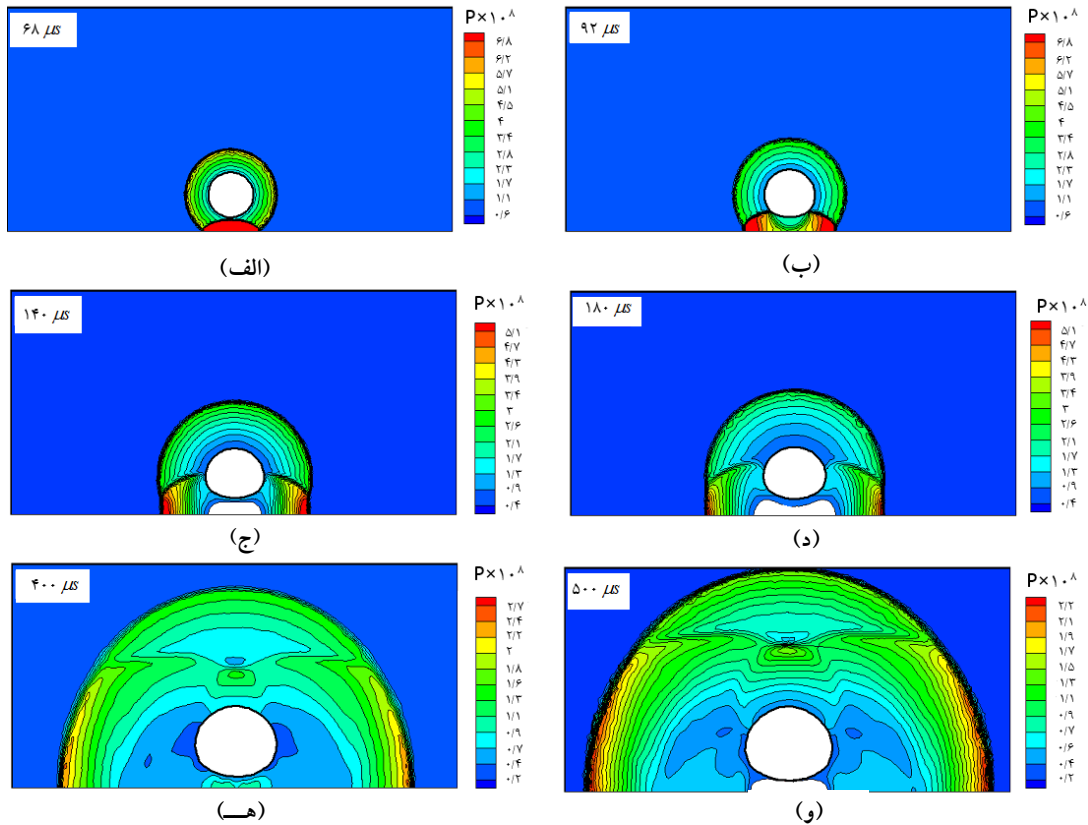


شکل ۱۱- تغییرات سایز حباب و شبکه مورد استفاده در داخل حباب انفجاری

حاضر از شبکه‌بندی تطبیقی<sup>۱۰</sup> استفاده شده است و شبکه‌بندی ناحیه‌ای از حل که دارای بیشینه تغییرات فشار است، ریز می‌شود. شکل (۱۰) تغییرات شبکه‌ی مثلثی با پیشروی جبهه موج را نشان می‌دهد.

به علت انتشار امواج مختلف تراکمی و انبساطی در محیط گازی، تغییرات شبکه در داخل ناحیه حباب انفجاری نیز اعمال می‌شود. در شکل (۱۱) تغییرات سایز حباب انفجاری به همراه تغییرات شبکه محاسباتی در داخل ناحیه حباب در گام‌های

شبکه در دو گام زمانی مختلف را نشان می‌دهد. علاوه بر مسأله فوق باید توجه داشت که در مسأله حاضر با توجه به حرکت امواج تراکمی و انبساطی، در هر گام زمانی، مکان این امواج تغییر می‌کند. در نتیجه محل وقوع بیشینه گرادیان کمیت‌های مختلفی مانند فشار و چگالی نیز تغییر می‌کند. با توجه به آنکه در محل حرکت موج بیشینه تغییرات در جریان نیز به وقوع می‌پیوندد، شبکه‌بندی ناحیه حل نیز باید در این مکان‌ها دارای بیشترین دقت باشد. بدین منظور در کار



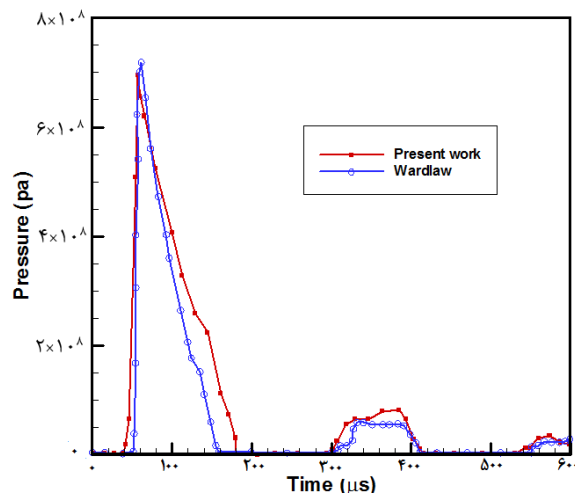
شکل ۱۲- میدان فشار در داخل سیلندر برای زمان‌های مختلف

قابل ملاحظه می‌باشد. پس از آن ناحیه کاویتاسیون گسترش می‌یابد و بزرگ می‌شود که در (شکل ۱۲-د) قابل ملاحظه است. موج انبساطی برگشت شده از دیواره پس از برخورد مجدد به سطح حباب انفجاری به صورت یک موج تراکمی به سمت دیواره انتشار می‌یابد. در اینجا برخورد موج تراکمی به ناحیه کاویتاسیون سبب رمیش حباب کاویتاسیونی و افزایش فشار بر روی دیواره می‌شود. همان‌طور که در (شکل ۱۲-ه) قابل ملاحظه است، این اتفاق در زمان ۳۰۰ می‌رود. میکروثانیه رخ می‌دهد و حباب کاویتاسیونی از بین می‌رود. روند ذکر شده انبساطی بعد از برخورد به سطح دیوار به صورت یک موج مجدداً تکرار می‌شود و رفت و برگشت امواج تراکمی و انبساطی مجدداً سبب ایجاد ناحیه کاویتاسیونی می‌شود. شکل (۱۲) به طور کاملاً گویا رفت و برگشت امواج و ایجاد ناحیه کاویتاسیون را نشان می‌دهد. شکل (۱۳) تغییرات فشار بر روی نقطه میانی بر روی

زمانی مختلف نشان داده شده است. در مسأله حاضر، در ابتدای حل موج تراکمی حاصل از حباب انفجاری با فشار بالا در آب منتشر می‌شود و این موج ابتدایی حدوداً در زمان ۴۰ میکروثانیه به دیواره‌ی صلب برخورد می‌کند و سبب افزایش فشار بر روی دیواره تا ۷۰۰۰ bar می‌شود (شکل ۱۲-الف). پس از آن موج تراکمی از روی سطح جسم برگشت خواهد کرد و به سطح حباب برخورد می‌کند. این موج تراکمی پس از برخورد به سطح حباب به صورت یک موج انبساطی برگشت می‌کند (شکل ۱۲-ب) و به سمت دیواره حرکت می‌کند و پس از برخورد به دیواره سبب کاهش فشار می‌شود. مجدداً موج انبساطی برگشت می‌کند و سبب کاهش مضاعف فشار بر روی دیواره و در نهایت ایجاد ناحیه کاویتاسیون می‌گردد. این پدیده حدوداً در زمان ۱۲۰ میکروثانیه رخ می‌دهد و به وضوح در در (شکل ۱۲-ج)

## ۶- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر از یک روش تک سیالی به همراه حلگر دقیق ریمان به منظور شبیه سازی کاویتاسیون در جریان تراکم پذیر استفاده شده است. مسأله لوله ضربه یک بعدی به همراه انبساط شدید شبیه سازی و تشکیل ناحیه کاویتاسیون در ناحیه میانی لوله ضربه به خوبی مدل شده است. در مسأله دوم از روش لاگرانژی- اویلری ALE برای شبیه سازی دوبعدی انفجار زیر آب بر روی شبکه تطبیقی استفاده شده است. در الگوریتم مورد استفاده از مزیت های لاگرانژی و اویلری این روش بهره برده شده است، سطح مشترک حباب و آب به خوبی شبیه سازی شده است و نیز نحوه حرکت امواج تراکمی و انبساطی و تغییرات حباب کاویتاسیون شبیه سازی شده است. علاوه بر آن تغییرات فشار به همراه ایجاد و اضمحلال ناحیه کاویتاسیون به خوبی مدل سازی شده است و اندازه و زمان وقوع نقاط اوج فشار و ناحیه کاویتاسیون تطابق بسیار خوبی با نتایج سایر کارهای عددی دارد. در نهایت می توان نتیجه گرفت که الگوریتم حاضر روشی بسیار مناسب برای شبیه سازی جریان های تراکم پذیر دوفازی بوده و مدل کاویتاسیونی استفاده شده قابلیت بسیار خوبی در شبیه سازی، ایجاد، توسعه و اضمحلال ناحیه کاویتاسیون را دارا می باشد.



شکل ۱۳- مقایسه نمودار فشار بر روی نقطه ی میانی دیواره بر حسب زمان

جداره ی سیلندر بر حسب زمان را نشان می دهد. در اینجا تغییرات فشار با شبیه سازی واردلا و همکاران [۱۶] مقایسه شده است. همان طور که ملاحظه می شود زمان ایجاد نقطه اوج اول فشاری برای تمامی حالات یکسان می باشد و میزان فشار پیش بینی شده نیز تطابق بسیار خوبی با دیگر کارهای انجام شده دارد. در کار حاضر زمان ایجاد نقطه اوج دوم فشاری حدوداً در ۳۰۰ میکرو ثانیه و پیک نقطه اوج حدوداً در ۵۰۰ میکرو ثانیه ایجاد شده است.

## واژه نامه

- |                          |                                  |                   |
|--------------------------|----------------------------------|-------------------|
| 1. steady or attached    | 5. equation of state             | 9. Tait           |
| 2. unsteady or transient | 6. convective term               | 10. adaptive grid |
| 3. vacuum model          | 7. diffusive term                |                   |
| 4. cut off               | 8. Arbitrary Lagrangian Eulerian |                   |

## مراجع

- Arndt, R. E., "Cavitation in Fluid Machinery and Hydraulic Structures", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 13, pp. 273-326, 1981.
- Rachid, F. B. F., "A Thermodynamically Consistent Model for Cavitating Flows of Compressible Fluids", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 38, pp. 1007-1018, 2003.
- McCoy, R., and Sun, C., "Fluid-Structure Interaction Analysis of a Thick-Section Composite Cylinder Subjected to Underwater Blast Loading", *Composite Structures*, Vol. 37, pp. 45-55, 1997.
- Rajendran, R., and Narasimhan, K., "Linear Elastic Shock Response of Plane Plates Subjected to Underwater Explosion", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 25, pp. 493-506, 2001.
- Ramajeyathilagam, K., and Vendhan, C., "Deformation and Rupture of Thin Rectangular Plates Subjected to Underwater Shock",

- International Journal of Impact Engineering*, Vol. 30, pp. 699-719, 2004.
6. Dellanoy, Y., and Kueny, J., "Two Phase Flow Approach in Unsteady Cavitation Modeling", in Proceedings of the Spring Meeting of the Fluids Engineering Division, pp. 153-158, June 1990.
  7. Schmidt, D. P., Rutland, C. J., and Corradini, M. L., "A Fully Compressible, Two-Dimensional Model of Small, High-Speed, Cavitating Nozzles", *Atomization and Sprays*, Vol. 9, pp. 255-276, 1999.
  8. Ventikos, Y., and Tzabiras, G., "A Numerical Method for the Simulation of Steady and Unsteady Cavitating Flows", *Computers and Fluids*, Vol. 29, pp. 63-88, 2000.
  9. Tang, H., and Huang, D., "A Second-Order Accurate Capturing Scheme for 1D Inviscid Flows of Gas and Water with Vacuum Zones", *Journal of Computational Physics*, Vol. 128, pp. 301-318, 1996.
  10. Van Aanhold, J., Meijer, G., and Lemmen, P., "Underwater Shock Response Analysis of a Floating Vessel", *Shock and Vibration*, Vol. 5, pp. 53-59, 1998.
  11. Liu, T., Khoo, B., and Xie, W., "Isentropic One-Fluid Modelling of Unsteady Cavitating Flow", *Journal of Computational Physics*, Vol. 201, pp. 80-108, 2004.
  12. Zhu, J., Liu, T., Qiu, J., and Khoo, B. C., "RKDG Methods with WENO Limiters for Unsteady Cavitating Flow", *Computers and Fluids*, Vol. 57, pp. 52-65, 2012.
  13. Xie, W., Liu, T., and Khoo, B., "Application of a One-Fluid Model for Large Scale Homogeneous Unsteady Cavitation: The Modified Schmidt Model", *Computers and Fluids*, Vol. 35, pp. 1177-1192, 2006.
  14. Pischevar, A., "An ALE Method for Compressible Multifluid Flows: Application to Underwater Explosion", *Proceedings of 11th Annual Conference of the CFD society*, Canada, 2006.
  15. Toro, E. F., "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction", Springer, 2009.
  16. Wardlaw Jr, A. B., and Luton, J. A., "Fluid-Structure Interaction Mechanisms for Close-in Explosions", *Shock and Vibration*, Vol. 7, pp. 265-275, 2000.