

گسترش روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی برای حل مسائل تکین ورق

فرشید مسیبی* و مائده نصر اصفهانی

گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۷/۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱/۲۴)

چکیده-وجود نقاط تکین درون دامنه حل و یا بر روی مرزها موجب کاهش دقت و شیب هم‌گرایی روش‌های عددی می‌شود. این پدیده در مسائل مهندسی عمدتاً به دلیل وجود ناپیوستگی در شرایط مرزی و یا تغییر ناگهانی در شکل دامنه به وقوع می‌پیوندد. در این تحقیق حل مسائل تکین ورق با استفاده از روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی مورد توجه قرار می‌گیرد. در این روش توابع مجهول به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌نمایی در نظر گرفته شده و ضرایب ثابت آن با برآورده شدن تقریبی شرایط مرزی محاسبه می‌شود. برای بهبود دقت حل و شیب هم‌گرایی در مسائل دارای نقاط تکین، یک سری توابع تکین شبه‌نمایی به توابع پایه‌نمایی روش اضافه می‌شود. این توابع دارای ناپیوستگی مناسب در محل نقاط تکین بوده و مانند سایر توابع پایه‌نمایی معادله دیفرانسیل همگن را برآورده می‌کنند. نتایج حاصل از حل سه نمونه از مسائل ورق ترک خورده بیانگر افزایش چشم‌گیر دقت و شیب هم‌گرایی روش پیشنهادی نسبت به روش توابع پایه‌نمایی بدون افزایش زیادی در هزینه محاسباتی است.

واژگان کلیدی: روش‌های بدون شبکه، مسائل تکین، توابع پایه‌نمایی، معادلات بای‌هارمونیک، ورق.

Extending the Exponential Basis Functions Meshless Method to Solve Singular Plate Problems

F. Mossaiby* and M. Nasr Esfahani

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan

Abstract: Existence of singular points inside the solution domain or on its boundary deteriorates the accuracy and convergence rate of numerical methods. This phenomenon usually happens due to discontinuities in the boundary conditions or abrupt changes in the domain shape. This study has focused on the solution of singular plate problems using the exponential basis functions method. In this method, unknown functions are considered as a linear combination of exponential basis functions and the coefficients are calculated by approximate satisfaction of the boundary conditions. To increase the accuracy and convergence rate in problems with singular points, a series of singular, quasi-exponential functions are added to the method's exponential basis functions. These functions have proper discontinuity in location of the singular points and satisfy the homogenous differential equation. The results obtained from the solution of three cracked plate problems show considerable increase in the accuracy and convergence rate of the proposed method compared with the exponential basis functions method

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mossaiby@eng.ui.ac.ir

without any noticeable increase in the computational cost.

Keywords: Meshless methods, singular problems, exponential basis functions, bi-harmonic equation, plate.

فهرست علائم

حل خصوصی تکین	u_{sing}^p	عملگر شرایط مرزی ضروری	L_D
حل همگن تکین	u_{sing}^h	عملگر شرایط مرزی طبیعی	L_N
ماتریس توابع پایه همگن	V^h	تعداد پایه‌های حل همگن	m^h
علائم یونانی		تعداد پایه‌های همگن تکین	$n^{s,h}$
زاویه تکینگی	Θ	تعداد پایه‌های خصوصی تکین	$n^{s,p}$
مرز ضروری	Γ_D	حل همگن تحلیلی	u_{anal}^h
مرز طبیعی	Γ_N	حل خصوصی تحلیلی	u_{anal}^p

۱- مقدمه

پیشرفت‌های چشم‌گیری در زمینه علوم مهندسی و پایه به‌وجود آورده است. با این وجود این روش در برخورد با برخی مسائل محدودیت‌های متعددی نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال روش اجزا محدود در شبیه‌سازی ناپیوستگی ایجاد شده در مسائل تکین با مشکلاتی مواجه است. مدل‌سازی رشد ترک با استفاده از این روش دشوار است، زیرا مرز بین المان‌ها یک مسیر پیش‌فرض برای رشد ترک محسوب می‌شود. به‌علاوه فرایند المان‌بندی مجدد نیز که به‌عنوان راهکاری برای رفع این معضل به‌کار گرفته می‌شود، موجب افزایش حجم و زمان محاسبات شده و در بسیاری از موارد از کارایی مناسبی برخوردار نیست. به‌طور کلی نیاز به تولید شبکه المان در روش‌های متکی به شبکه موجب افزایش زمان محاسبات به‌خصوص در مسائل سه‌بعدی و یا در مسائلی با شکل هندسی پیچیده می‌شود. به‌کارگیری فرم ضعیف معادلات و نیاز به انتگرال‌گیری عددی برای حل مسئله از دیگر محدودیت‌های این روش‌ها محسوب می‌شود. از اینرو در سال‌های اخیر به‌منظور کاهش مشکلاتی از این نوع، روش‌های بدون شبکه مورد توجه محققان قرار گرفته است.

روش‌های بدون شبکه را می‌توان از جدیدترین روش‌های عددی دانست که بستر مناسب و وسیعی در زمینه‌های علمی، تحقیقاتی و مهندسی برای حل این معادلات فراهم کرده است.

درک رفتار پدیده‌های طبیعی از دیرباز مورد توجه دانشمندان بوده است. به‌منظور کشف و شناخت بسیاری از این پدیده‌ها، نیاز به مدل‌سازی و تبدیل آنها به یک و یا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل است. این معادلات شامل مجموعه‌ای از توابع مجهول و مشتقات آنها هستند. تاکنون روش‌های متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه شده است. دقت و سرعت حل معادلات از جمله عوامل مهم در انتخاب یک روش حل مناسب است. در این میان روش‌های تحلیلی حل معادلات، با ارائه حل دقیق معادلات دیفرانسیل در برخی از مسائل مورد استفاده قرار گرفته است، اما به‌کارگیری این روش‌ها در بیشتر موارد دشوار و یا غیر ممکن است. پیچیدگی‌های معادلات دیفرانسیل و مشکلات مربوط به برآورده نمودن آنها در دامنه حل و یا بر روی مرزها موجب محدودیت در استفاده از روش‌های تحلیلی می‌شود. از سوی دیگر بسیاری از معادلات حاصل از مدل‌سازی مسائل مهندسی از نوع معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هستند که وجود پیچیدگی‌های خاص در روند حل آنها از عوامل پیدایش روش‌های تقریبی یا روش‌های عددی است.

روش اجزا محدود^۱ در طول دهه‌های اخیر به‌عنوان یکی از قدرتمندترین روش‌ها در زمینه حل مسائل مکانیک شناخته شده و

ایده اصلی این روش‌ها، گسسته‌سازی دامنه حل مسئله با استفاده از نقاط گره‌ای و عدم نیاز به تولید شبکه المان است. در این روش‌ها حل مسئله مبتنی بر شبکه‌ای از نقاط گره‌ای است که با توزیع دلخواه در سطح دامنه پراکنده شده‌اند. از مزایای بارز روش‌های بدون شبکه می‌توان به ساده‌تر بودن تولید نقاط گره‌ای در مقایسه با تولید شبکه المان، به‌ویژه در مسائلی با هندسه پیچیده اشاره نمود. این ویژگی امکان حل ساده‌تر و سریع‌تر مسائل را فراهم می‌کند. به‌علاوه اصلاح شکل هندسی دامنه حل با حذف و یا اضافه نمودن تعدادی از نقاط گره‌ای به راحتی امکان‌پذیر است.

پیدایش روش‌های بدون شبکه به سال ۱۹۷۷ بازمی‌گردد؛ زمانی که گینگلد، لوسی و موناگان روشی لاگرانژی را بر پایه نمایش انتگرالی یا تقریب کرنل برای تحلیل پدیده‌های بدون مرز نجومی ابداع کردند [۱ و ۲]، این روش هیدرودینامیک هموار شده ذرات^۲ نام گرفت. روش بدون المان گالرکین^۳ در سال ۱۹۹۴ توسط بلیچکو ارائه گردید [۳]. این روش نیازمند یک شبکه المان زمینه به‌منظور انتگرال‌گیری عددی است. آتلوری و همکاران با ارائه روش بدون شبکه محلی پترو گالرکین^۴ و با به‌کارگیری فرم محلی ضعیف شده، امکان انتگرال‌گیری بدون نیاز به شبکه المان زمینه‌ای را فراهم نمودند [۴]. در سال‌های اخیر روش دیگری تحت عنوان روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی^۵ به گروه روش‌های بدون شبکه افزوده شده است. این روش اولین بار در سال ۲۰۱۰ توسط برومند و همکاران به‌منظور حل مسائل استاتیکی و دینامیکی الاستیسیته توسعه یافت [۵] و پس از آن در بسیاری از کاربردهای مهندسی مورد توجه قرار گرفت [۶-۲۱].

این روش که یک روش بدون شبکه مرزی است، دارای محاسنی مانند سهولت استفاده از توابع نمایی، عدم نیاز به گسسته‌سازی دامنه حل، سادگی تعمیم به انواع معادلات دیفرانسیل و سادگی پیاده‌سازی رایانه‌ای است. از آنجا که توابع به‌کار گرفته شده در این روش، فراگیر و بدون نقاط تکین^۶ است، حل مسائل در نزدیکی چنین نقاطی با مشکلاتی همراه

است، از این رو در این تحقیق سعی شده تا با ارائه راهکارهایی ویژه این مشکلات برطرف شود.

مباحث مربوط به مسائل تکین در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. این‌گونه مسائل عمدتاً در مدل‌سازی مسائل مهندسی به‌دلیل وجود ناپیوستگی در شرایط مرزی، تغییر ناگهانی در شکل دامنه، مصالح مورد استفاده، منابع خارجی تأثیرگذار و یا ترکیبی از حالت‌های مذکور به‌وقوع می‌پیوندد. دقت و همگرایی نتایج حاصل از روش‌های عددی استاندارد به‌واسطه وجود نقاط تکین در دامنه مسئله به‌شدت کاهش می‌یابد. به‌طور کلی راهکار روش‌های عددی در مقابله با مسائل تکین، به‌کارگیری تمهیداتی ویژه در همسایگی نقاط تکین است. یکی از راه‌حل‌های به‌کار گرفته شده در روش اجزا محدود برای مقابله با این مشکل، ریز کردن المان‌ها در اطراف نقاط تکین است. این عمل با افزایش زمان و هزینه محاسباتی همراه بوده و البته در بسیاری از موارد دقت مورد نیاز کاربر را فراهم نمی‌کند. راه حل دیگر استفاده از توابع تکین مناسب در ناحیه اطراف نقاط تکین است. در این روش به‌منظور بازتولید حل تکین، دسته‌ای از توابع مکمل به توابع عادی اجزا محدود افزوده می‌شود [۲۲]. این ایده در بسیاری از روش‌های دیگر مانند روش تفاضلات محدود [۲۳] و روش معادله انتگرالی مرزی^۷ [۲۴] اعمال شده است.

در بسیاری از سازه‌ها، مسئله انتشار ترک از مهم‌ترین مکانیزم‌های شکست محسوب می‌شود که نیازمند یک مدل‌سازی عددی دقیق به‌منظور پیش‌بینی شکست است. از جمله مشهورترین روش‌ها در این زمینه می‌توان به روش اجزا محدود اشاره کرد که به‌طور گسترده‌ای برای آنالیز شکست ترک‌ها مورد استفاده واقع شده است. با وجود سودمند بودن بسیاری از تحقیقات انجام شده، حل برخی مسائل مکانیک جامدات با استفاده از این روش با محدودیت‌های جدی مواجه است. از جمله محدودیت‌های آن می‌توان به زیاد بودن دفعات تولید شبکه المان به‌منظور نمایش مسیر دلخواه و پیچیده ترک اشاره نمود. به‌طور کلی روش‌های متکی به شبکه در مدل‌سازی

ترک‌هایی با مسیر غیر منطبق با شکل شبکه المان، دارای نقاط ضعف می‌باشند. تنها راه حل مناسب برای برطرف نمودن این مشکل، شبکه‌بندی مجدد در هر مرحله مجزا از سیر تکامل مدل است؛ به گونه‌ای که در طول آنالیز خطوط شبکه المان با مسیر ترک تطابق داشته باشد، که این عمل، محاسبات را دشوار نموده و موجب کاهش دقت حل و پیچیدگی برنامه‌های کامپیوتری می‌شود [۲۶].

بسیاری از مسائل تکین با معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم شامل ناپوستگی‌های مرزی بیان می‌شوند. مسئله موتز را می‌توان از جمله معروف‌ترین مسائل تکین لاپلاس به حساب آورد که اولین بار توسط موتز در سال ۱۹۴۷ به روش آزادسازی^۸ مورد بررسی قرار گرفت [۲۶]. این مسئله تاکنون برای مقایسه دقت و کارآمدی بسیاری از روش‌های عددی به کار گرفته شده است. مسئله موتز در سال ۱۹۹۶ با استفاده از روش المان مرزی مورد بررسی قرار گرفت [۲۷] که در آن با تعریف معادلات انتگرالی مرزی، ضرایب بسط در نقاط تکین محاسبه می‌شوند.

از گروه روش‌های بدون شبکه نیز روش توابع پایه شعاعی^۹، روش حل‌های اساسی^{۱۰}، روش ترفتنز^{۱۱} و روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی به حل مسائل تکین هارمونیک پرداخته‌اند. در روش توابع پایه شعاعی با اضافه کردن توابع تکین به توابع پایه شعاعی، رفتار تابع در نزدیکی نقاط تکین تقریب زده می‌شود [۲۸]. ایده اولیه روش حل‌های اساسی برای حل مسائل تکین، صرف‌نظر کردن از نقطه تکین بوده است که در آن با تعریف یک مرز ساختگی خارج از دامنه فیزیکی مسئله نقطه تکین بیرون از مرز جایگذاری می‌شود. پس از آن با ارائه روش اصلاح شده حل‌های اساسی با در نظر گرفتن نقطه تکین بر روی مرز واقعی مسئله، نتایج بهتری در همسایگی نقاط تکین استخراج شده است [۲۹]. همچنین مسائل تکین لاپلاس با استفاده از روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی مورد بررسی قرار گرفته است که در آن با افزودن توابع تکین به توابع نمایی، تقریب توابع مجهول حاصل می‌شود [۳۰]. در تحقیق حاضر

به منظور تکمیل تحقیقات انجام شده در مرجع [۳۰]، حل مسائل تکین بای هارمونیک به کمک روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی مورد نظر است.

مسائل تکین بای هارمونیک کمتر از سایر مسائل تکین مورد توجه قرار گرفته و تعداد مراجع مرتبط با این دسته از مسائل تکین کمتر است. از این گروه می‌توان مسائل ورق دارای تکیه‌گاه میانی را نام برد. لی و همکاران با بررسی سه مدل ترک در ورق نازک کشسان به روش تقریب مرزی ترفتنز، ضرایب حل را با دقت بالایی ارائه داده‌اند [۳۱]. همچنین این مسائل با استفاده از روش انتگرال مرزی تابع تکین^{۱۲} مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش از تئوری گالریکین و توابع تکین برای وزن‌دهی معادله دیفرانسیل بای هارمونیک استفاده شده است. سپس با به کارگیری انتگرال‌های مرزی به کمک قضیه دیورژانس، ضرایب تشدید تنش یا ضرایب تابع تکین محاسبه شده است. ارضای شرایط مرزی در این روش با تعیین ضرایب لاگرانژ انجام می‌شود [۳۲].

۲- فرمول‌بندی مسئله ورق

فرمول‌بندی مسئله ورق در این تحقیق به کمک تئوری کلاسیک ورق انجام می‌شود. میدان جابه‌جایی ورق در این تئوری در جهات x ، y و z با u_1 ، u_2 و u نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u_{1,0}(x, y, t) - z \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ u_2(x, y, z, t) &= u_{2,0}(x, y, t) - z \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t)$ که در آن $u_{1,0}$ ، $u_{2,0}$ و u_0 به ترتیب مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای x ، y و z دستگاه مختصات، در یک نقطه از میان صفحه ($z=0$) است.

معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییر مکان ورق‌ها تحت اثر بارگذاری خارجی به صورت زیر است:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (2)$$

در رابطه فوق u تابع جابه‌جایی عمود بر ورق، p_z بارگذاری

که در آن L عملگر اصلی معادله دیفرانسیل و L_D و L_N به ترتیب عملگرهای شرایط مرزی ضروری و شرط مرزی طبیعی است. همچنین Γ ، Γ_D و Γ_N به ترتیب نشان دهنده مرز مسئله، مرز ضروری و مرز طبیعی است. حل معادله به صورت مجموع دو حل همگن و خصوصی نوشته می شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^p \quad (7)$$

با استفاده از رابطه (7) نتایج زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{u}^h = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{L}\mathbf{u}^p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{L}_D\mathbf{u}^h = \mathbf{f}_D - \mathbf{L}_D\mathbf{u}^p & \text{on } \Gamma_D \\ \mathbf{L}_N\mathbf{u}^h = \mathbf{f}_N - \mathbf{L}_N\mathbf{u}^p & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (8)$$

تابع مجهول \mathbf{u} را می توان به صورت ترکیب خطی از توابع پایه به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{V}_k \quad (9)$$

در رابطه فوق \mathbf{V}_k ، توابع پایه و c_k ضرایب ثابت هستند. در روش مورد استفاده توابع پایه به صورت توابع نمایی به فرم $\exp(\alpha x + \beta y)$ در نظر گرفته می شود که در آن α و β مقادیر ثابت مختلط هستند. با در نظر گرفتن تعداد محدودی از جملات رابطه (9)، بخش همگن تابع مجهول را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{k=1}^{m^h} c_k^h \exp(\alpha_k^h x + \beta_k^h y) \quad (10)$$

در رابطه فوق m^h تعداد پایه های حل همگن است. به منظور تعیین ضرایب ثابت، شرایط مرزی مربوطه در نظر گرفته می شود. فرم برداری این رابطه را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{V}^h \mathbf{c}^h \quad (11)$$

که در آن \mathbf{u}^h مقادیر معلوم مرزی و \mathbf{V}^h ماتریس توابع پایه همگن به ازای مختصات نقاط مرزی است. بنابراین بردار ضرایب از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\mathbf{c}^h = [\mathbf{V}^h]^{(-1)} \mathbf{u}^h \quad (12)$$

خارجی و ثابت D بیانگر سختی خمشی ورق است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

E مدول الاستیسیته ماده ورق، ν نسبت پواسون و h ضخامت ورق است. در این تحقیق مقادیر این سه پارامتر ثابت فرض می شود. با استفاده از عملگر لاپلاس دوبعدی رابطه (2) را می توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$D\nabla^2 \nabla^2 u(x, y) = p_z(x, y) \quad (4)$$

این رابطه معادله دیفرانسیل پاره ای ناهمگن مرتبه چهارم با ضرایب ثابت است که معادله بای هارمونیک غیرهمگن نیز نامیده می شود. پاسخ دقیق این رابطه با برآورده کردن معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی مربوط به مسئله ورق به دست می آید. از آنجا که رابطه (4) یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم است، در هر نقطه از مرز نیاز به وجود سه شرط مرزی است.

توابع مجهول میدان جابه جایی ورق در هر گره را می توان شامل سه عضو تغییر مکان در راستای قائم، شیب در جهت x و شیب در جهت y در نظر گرفت. بنابراین حل مسئله ورق با استفاده از این روش با فرض وجود سه درجه آزادی در هر گره انجام می شود:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u} \quad \mathbf{u}_x \quad \mathbf{u}_y]^T \quad (5)$$

که در آن \mathbf{u}_x و \mathbf{u}_y به ترتیب مشتق \mathbf{u} نسبت به x و y است.

۳- فرمول بندی روش بدون شبکه توابع پایه نمایی

حل یک مسئله معادله دیفرانسیل علاوه بر ارضای معادله در دامنه حل، نیازمند برآورده ساختن شرایط مرزی آن مسئله است. به طور کلی مسئله معادله دیفرانسیل را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{L}_D\mathbf{u} = \mathbf{f}_D & \text{on } \Gamma_D, \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma \\ \mathbf{L}_N\mathbf{u} = \mathbf{f}_N & \text{on } \Gamma_N, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \end{cases} \quad (6)$$

پایه حل همگن شامل دو عضو دیگر است که همان مشتقات رابطه فوق نسبت به x و y است. بنابراین ابعاد ماتریس توابع پایه در هر گره برابر $3 \times m^h$ است. مؤلفه‌های ماتریس توابع پایه حل همگن در هر گره به صورت زیر قابل توسعه است:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \left[\exp(\lambda_k x + i\lambda_k y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \exp(\lambda_k x + i\lambda_k y) \quad \frac{\partial}{\partial y} \exp(\lambda_k x + i\lambda_k y) \right]^T \\ \mathbf{f}_2 &= \left[\exp(\lambda_k x - i\lambda_k y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \exp(\lambda_k x - i\lambda_k y) \quad \frac{\partial}{\partial y} \exp(\lambda_k x - i\lambda_k y) \right]^T \\ \mathbf{f}_3 &= \left[\exp(i\lambda_k x + \lambda_k y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \exp(i\lambda_k x + \lambda_k y) \quad \frac{\partial}{\partial y} \exp(i\lambda_k x + \lambda_k y) \right]^T \\ &\vdots \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین ماتریس توابع پایه حل همگن در هر گره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{V}_k^h = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3 \quad \dots \quad \mathbf{f}_\lambda] \quad (18)$$

۴- حل مسئله ورق به روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی

جهت بررسی دقت روش توابع پایه‌نمایی در حل مسائل هموار ورق، یک ورق مستطیلی به طول دو و عرض یک در نظر گرفته شده است. گسسته‌سازی به صورت منظم بر روی مرز دامنه انجام شده که در آن نقاط با فاصله $h = 0.05$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. تابع حل دقیق در نظر گرفته شده برای این مسئله به صورت رابطه زیر است:

$$u = x^3 y + xy^3 + y^2 \quad (19)$$

در شکل‌های (۱) و (۲) به ترتیب تابع حل دقیق بردار جابه‌جایی و اختلاف آنها با حل تقریبی به دست آمده نشان داده شده است. نرم خطای به دست آمده برای هر یک از مقادیر u ، u_x و u_y به ترتیب برابر مقادیر $2/78 \times 10^{-14}$ ، $8/75 \times 10^{-14}$ و $1/72 \times 10^{-13}$ است. شکل (۳) شیب همگرایی حاصل از حل مسئله ورق به روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که شیب بهترین خط برازش شده به نقاط نمودار به عنوان شیب در نظر گرفته شده و روی شکل نشان داده شده است.

بالانویس (۱-) در رابطه فوق نشان‌دهنده وارون تعمیم‌یافته مور پنروز است. این وارون در حالتی که ماتریس مورد نظر مربعی نباشد، مورد استفاده قرار می‌گیرد و برای یک ماتریس مربعی غیرتکین با وارون عادی آن یکسان است. با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادله دیفرانسیل همگن بای هارمونیک، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\left((\alpha_k^h)^2 + (\beta_k^h)^2 \right)^2 = 0 \quad (13)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \alpha_k^h = \pm i\beta_k^h & \text{(folded roots)} \\ \beta_k^h = \pm i\alpha_k^h & \text{(folded roots)} \end{cases} \quad (14)$$

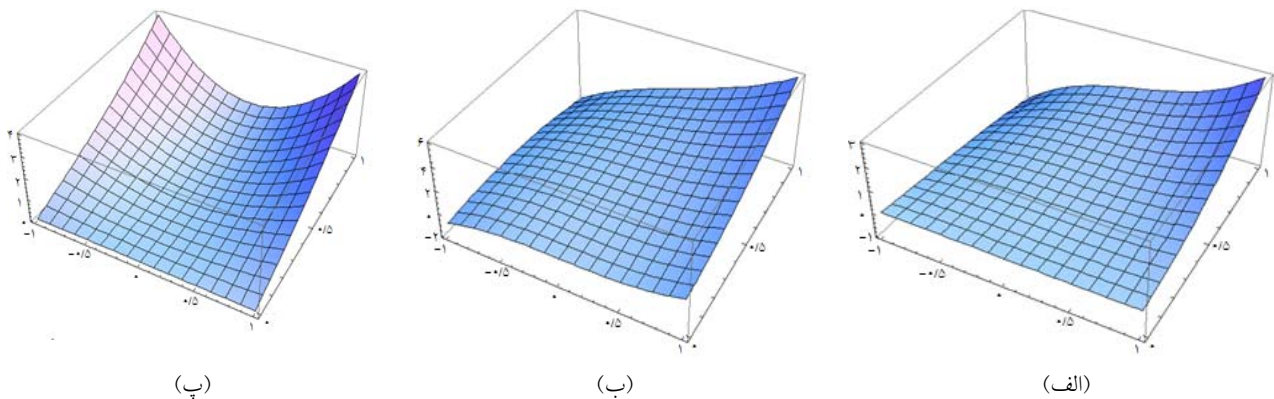
پایه‌های تولید شده با استفاده از رابطه فوق همان پایه‌های به دست آمده برای معادله دیفرانسیل لاپلاس است. با این تفاوت که رابطه (۱۳) دارای ریشه‌های تکراری است. بنابراین این معادله دارای تعدادی جواب گمشده است. به منظور تکمیل سری جواب، یک چندجمله‌ای خطی به صورت $ax + by + c$ در پایه‌های قبلی ضرب می‌شود. با انتخاب مقادیر ضرایب این رابطه به شکل زیر جواب‌های گمشده قابل تعیین است:

$$a = b = 1, \quad c = 0 \quad (15)$$

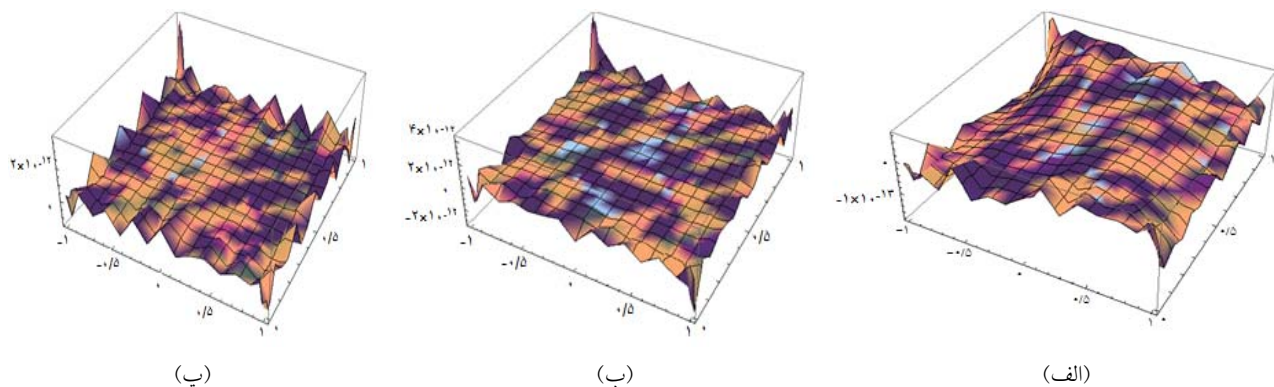
لازم به ذکر است افزودن هر ترکیب مستقل خطی جدید از ضرایب a ، b و c برای ساخت پایه‌های حل، نه تنها به افزایش دقت حل محاسبات کمکی نخواهد کرد، بلکه موجب افزایش حجم و هزینه‌های محاسبات می‌شود [۳۳]. بنابراین پایه‌های حل معادله دیفرانسیل بای هارمونیک به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= c_1 \exp(\lambda_k x + i\lambda_k y) + \\ & c_2 \exp(\lambda_k x - i\lambda_k y) + \\ & c_3 \exp(i\lambda_k x + \lambda_k y) + \\ & c_4 \exp(-i\lambda_k x + \lambda_k y) + \\ & c_5 (x + y) \exp(\lambda_k x + i\lambda_k y) + \\ & c_6 (x + y) \exp(\lambda_k x - i\lambda_k y) + \\ & c_7 (x + y) \exp(i\lambda_k x + \lambda_k y) + \\ & c_8 (x + y) \exp(-i\lambda_k x + \lambda_k y) \end{aligned} \quad (16)$$

با توجه به وجود سه درجه آزادی در هر گره، ماتریس توابع



شکل ۱- حل دقیق مسئله ورق، (الف) u ، (ب) u_x و (پ) u_y



شکل ۲- اختلاف حل دقیق مسئله ورق با حل تقریبی به دست آمده، (الف) u ، (ب) u_x و (پ) u_y

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{hs} + \mathbf{u}^{ps}$$

$$\mathbf{u}^{hs} = \mathbf{u}_{anal}^h + \mathbf{u}_{sing}^h$$

$$= \sum_{k=1}^{m^h} c_k^h \mathbf{V}_k^h + \sum_{k=1}^{n^{s,h}} c_k^{s,h} \mathbf{V}_k^{s,h} = \mathbf{V}^h \mathbf{c}^h + \mathbf{V}^{s,h} \mathbf{c}^{s,h} \quad (20)$$

$$\mathbf{u}^{ps} = \mathbf{u}_{anal}^p + \mathbf{u}_{sing}^p$$

$$= \sum_{k=1}^{m^p} c_k^p \mathbf{V}_k^p + \sum_{k=1}^{n^{s,p}} c_k^{s,p} \mathbf{V}_k^{s,p} = \mathbf{V}^p \mathbf{c}^p + \mathbf{V}^{s,p} \mathbf{c}^{s,p}$$

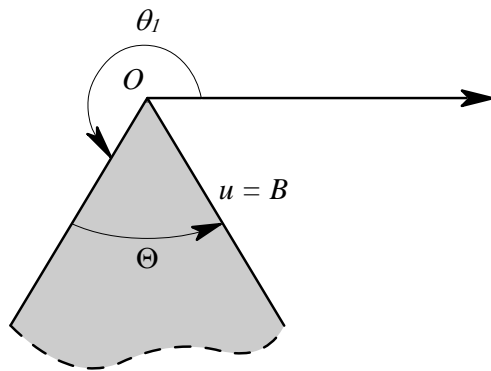
که در آن منظور از $\hat{\mathbf{u}}$ تقریب تابع، \mathbf{u}_{anal}^h حل همگن تحلیلی، \mathbf{u}_{anal}^p حل خصوصی تحلیلی، \mathbf{u}_{sing}^h حل همگن تکین، \mathbf{u}_{sing}^p حل خصوصی تکین، \mathbf{V}_k^h پایه‌های همگن روش مورد استفاده، $\mathbf{V}_k^{s,h}$ پایه‌های همگن تکین، $n^{s,h}$ تعداد پایه‌های همگن تکین، $\mathbf{V}_k^{s,p}$ پایه‌های خصوصی تکین و $n^{s,p}$ تعداد پایه‌های خصوصی تکین است.

در شکل (۴) نمای کلی یک مسئله تکین مشاهده می‌شود که در آن نقطه O نقطه تکین، \mathbf{n} بردار نرمال خارجی عمود بر

۵- توسعه روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی برای

حل مسائل تکین

همان‌گونه که در بخش‌های قبل بیان شد به دلیل هموار بودن توابع پایه در روش مورد استفاده، عملکرد این روش در حل مسائل تکین از کارایی مناسبی برخوردار نیست. وجود نقاط تکین در دامنه حل مسائل موجب کاهش شدید دقت حل و شیب همگرایی این روش می‌شود. از اینرو لازم است با به‌کارگیری تمهیداتی ویژه، فرمول‌بندی این روش به‌گونه‌ای توسعه یابد که حل مسائل تکین با دقت و شیب هم‌گرایی مطلوبی حاصل شود. راهکار پیشنهادی در این تحقیق، اضافه کردن توابع پایه تکین متناسب با شرایط مسئله است. این پایه‌ها دارای ناپیوستگی مناسب در نقطه تکین بوده و معادله دیفرانسیل مربوطه را برآورده می‌کنند [۳۴]. این کار به‌شکل زیر انجام می‌شود:



شکل ۵- چرخش زیرناحیه محلی زاویه دار

$$\nabla^* u = \nabla^* (\nabla^* u) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u = 0 \quad (22)$$

می توان نشان داد توابع زیر معادله دیفرانسیل فوق را برآورده می کنند و به ازای مقادیر غیر صحیح α دارای ناپیوستگی در $r=0$ هستند [۳۴]:

$$\bar{u} = \bar{c}_r r^\alpha \cos \alpha \theta + \bar{c}_\tau r^\alpha \sin \alpha \theta + \bar{c}_\tau r^\alpha \cos(\alpha - \nu)\theta + \bar{c}_r r^\alpha \sin(\alpha - \nu)\theta \quad (23)$$

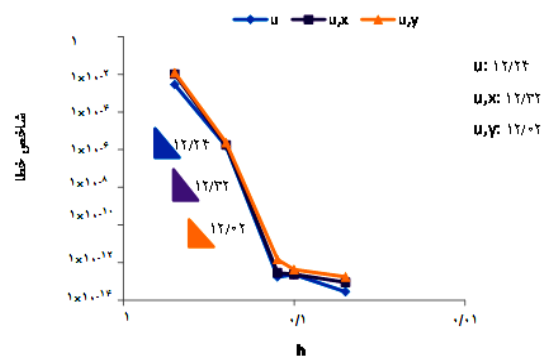
به دلیل خطی بودن عملگر معادله دیفرانسیل بای هارمونیک، هر ترکیب خطی از توابع فوق این معادله را برقرار می نمایند. ترکیب پیشنهادی در این بخش به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}} = & \bar{c}_r r^\alpha (\cos \alpha \theta + i \sin \alpha \theta) + \\ & \bar{c}_\tau r^\alpha (\cos \alpha \theta - i \sin \alpha \theta) + \\ & \bar{c}_\tau r^\alpha (\cos(\alpha - \nu)\theta + i \sin(\alpha - \nu)\theta) + \\ & \bar{c}_r r^\alpha (\cos(\alpha - \nu)\theta - i \sin(\alpha - \nu)\theta) \end{aligned} \quad (24)$$

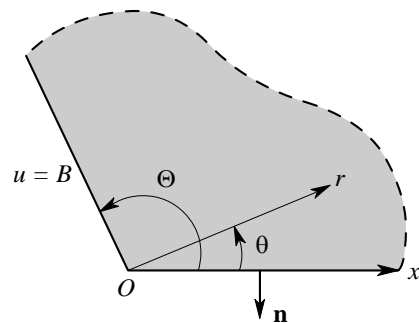
فرم شبه نمایی ترکیبات فوق به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} r^\alpha (\cos \alpha \theta \pm i \sin \alpha \theta) &= r^\alpha \exp(\pm i \alpha \theta) \\ r^\alpha (\cos(\alpha - \nu)\theta \pm i \sin(\alpha - \nu)\theta) &= r^\alpha \exp(\pm i(\alpha - \nu)\theta) \end{aligned} \quad (25)$$

در حالت کلی α به شرایط مرزی اطراف نقطه تکین و زاویه تکینگی Θ بستگی دارد و در هر صورت ضرب زوج یا فردی از $\Theta/\pi/4$ است. چنانچه اطلاعاتی از حل دقیق در دسترس باشد، می توان با توجه به آن پایه های شبه نمایی را انتخاب نمود؛ در غیر این صورت می توان هر دو دسته را در نظر گرفت. با افزایش تعداد نقاط مرزی، ضرایب مودهایی که نیازی به آنها وجود



شکل ۳- شیب همگرایی حاصل از حل مسئله ورق به روش بدون شبکه توابع پایه نمایی



شکل ۴- نمایش زیرناحیه محلی زاویه دار

مرز و Θ زاویه تکینگی است. همچنین (r, θ) مختصات قطبی نقاط داخل دامنه نسبت به نقطه تکین است که با استفاده از رابطه زیر قابل تبدیل به فرم کارتزین است:

$$r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} \quad (21)$$

$$\theta = \tan^{-1}((y - y_s)/(x - x_s))$$

در رابطه بالا (x_s, y_s) مختصات کارتزین نقطه تکین است. در صورتی که دامنه مورد نظر مسئله، دارای چرخشی به میزان θ_1 باشد (شکل (۵))، موده های تکین مورد استفاده نیز می بایست به همان اندازه چرخانده شوند. در این حالت تبدیل $\theta^* = \theta - \theta_1$ را می توان اعمال نمود که در آن $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ است.

۶- تعیین پایه های تکین مسئله ورق

فرم قطبی معادله دیفرانسیل بای هارمونیک همگن را می توان به صورت زیر تعیین نمود:

ندارد به سمت صفر میل خواهد نمود و می توان آنها را حذف کرد.

با توجه به این که توابع مجهول میدان جابه جایی ورق در هر گره شامل سه عضو تغییر مکان در راستای قائم، شیب در جهت x و شیب در جهت y در نظر گرفته می شود، توابع پایه تکین مورد استفاده در حل این مسائل نیز به همین ترتیب به صورت سه مؤلفه ای به کار گرفته می شود. اعضای ماتریس توابع پایه تکین در هر گره به صورت زیر قابل توسعه است:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^s &= \left[r^{\alpha_k} \exp(i\alpha_k \theta^*) \frac{\partial}{\partial x} \left(r^{\alpha_k} \exp(i\alpha_k \theta^*) \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(r^{\alpha_k} \exp(i\alpha_k \theta^*) \right) \right]^T \\ \mathbf{f}_2^s &= \left[r^{\alpha_k} \exp(-i\alpha_k \theta^*) \frac{\partial}{\partial x} \left(r^{\alpha_k} \exp(i\alpha_k \theta^*) \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(r^{\alpha_k} \exp(i\alpha_k \theta^*) \right) \right]^T \\ \mathbf{f}_3^s &= \left[r^{\alpha_k} \exp(i(\alpha_k - \nu)\theta^*) \frac{\partial}{\partial x} \left(r^{\alpha_k} \exp(i(\alpha_k - \nu)\theta^*) \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(r^{\alpha_k} \exp(i(\alpha_k - \nu)\theta^*) \right) \right]^T \\ \mathbf{f}_4^s &= \left[r^{\alpha_k} \exp(-i(\alpha_k - \nu)\theta^*) \frac{\partial}{\partial x} \left(r^{\alpha_k} \exp(-i(\alpha_k - \nu)\theta^*) \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(r^{\alpha_k} \exp(-i(\alpha_k - \nu)\theta^*) \right) \right]^T \end{aligned} \quad (26)$$

بنابراین ماتریس پایه های همگن تکین در هر گره به صورت رابطه زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{V}_k^{s,h} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^s & \mathbf{f}_2^s & \mathbf{f}_3^s & \mathbf{f}_4^s \end{bmatrix} \quad (27)$$

۷- نتایج عددی

یک ورق مستطیلی الاستیک نازک که دارای ترک داخلی است، در نظر گرفته می شود. محاسبه تنش در نوک ترک در چنین ورقی از جمله مسائل مهم در مکانیک شکست است. این مسئله را می توان توسط معادله دیفرانسیل پاره ای بای هارمونیک مدل سازی نمود. در این بخش ضمن حل این مسائل، توانایی

روش پیشنهادی در حل مسائل تکین بای هارمونیک مورد بررسی قرار می گیرد.

لی در مطالعات خود به بررسی سه مدل ترک در ورق پرداخته است [۳۱] که در این قسمت مورد بررسی قرار خواهند گرفت. به دلیل تقارن ورق ها فقط نیمه بالایی آن در نظر گرفته می شود. دامنه مسئله مستطیلی به طول دو و عرض یک $\Omega = [-1 \times 1] \times [0 \times 1]$ است. در هر سه مدل، ضلع OD نشان دهنده تکیه گاه میانی تحت شرایط گیرداری ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_n = 0$) و نقطه مبدأ نقطه تکین است (اشکال ۶، ۱۱ و ۱۶). در این نقطه یک دستگاه مختصات قطبی در نظر گرفته می شود. تابع حل دقیق این مسئله در مرجع [۳۱] به صورت رابطه زیر تعریف شده است:

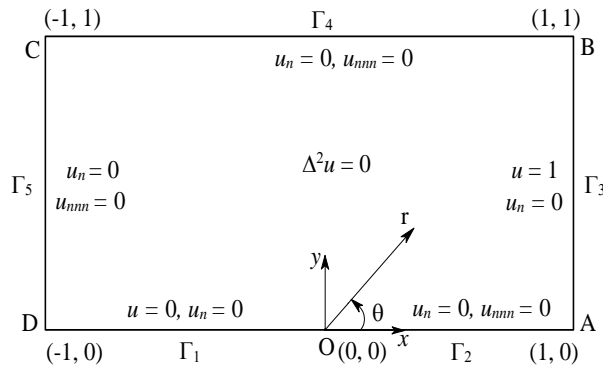
$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{k=1}^n (d_k \mathbf{f}_k(r, \theta) + c_k \mathbf{g}_k(r, \theta)) \\ \mathbf{f}_k(r, \theta) &= r^{k+1} \{ \cos(k-1)\theta - \cos(k+1)\theta \} \\ \mathbf{g}_k(r, \theta) &= r^{k+1/2} \left\{ \cos(k-\nu/2)\theta - \frac{k-\nu/2}{k+1/2} \cos(k+1/2)\theta \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن \mathbf{g}_k بخش تکین پاسخ، \mathbf{f}_k بخش تحلیلی پاسخ، (r, θ) مختصات قطبی و c_k و d_k ضرایب ثابت هستند.

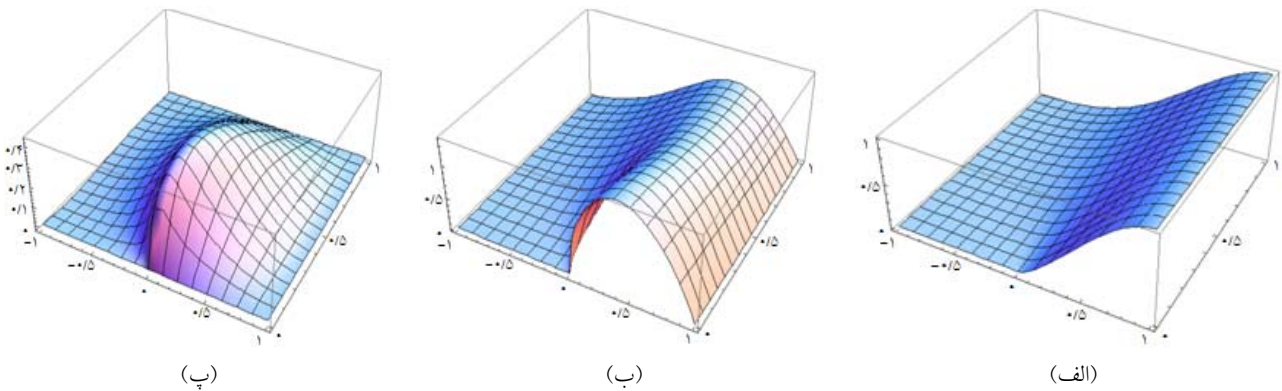
گسسته سازی بروی مرز به صورت منظم انجام می شود، به گونه ای که فاصله نقاط از یکدیگر برابر $h = 0.05$ است. بهبود تکینگی در این مسائل، با به کارگیری توابع پایه تکین به دست آمده در بخش قبل انجام می پذیرد. ابعاد ماتریس توابع پایه تکین در هر گره برابر $3 \times 4n^s$ است. ضریب α_k در رابطه (۲۶) برابر $k - 1/2$ تعیین می شود. در هر یک از مسائل حل شده تعداد پایه های تکین در نظر گرفته شده برابر ۱۰ است. در هر سه مدل نتایج با حل دقیق ارائه شده در مرجع [۳۱] مقایسه شده و به منظور ارزیابی میزان خطا، نرم خطا به صورت رابطه زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{e} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N (\hat{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x}_j} - \mathbf{u}|_{\mathbf{x}_j})^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (\mathbf{u}|_{\mathbf{x}_j})^2}} \quad (29)$$

که در آن \mathbf{u} بردار حل دقیق، $\hat{\mathbf{u}}$ بردار حل تقریبی به دست



شکل ۶- نمایش مدل اول ورق با تکیه‌گاه میانی



شکل ۷- حل دقیق مدل اول مسئله ورق، (الف) u، (ب) u_x و (پ) u_y

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \nabla^4 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{on } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 & \text{on } \Gamma_2 \\ u = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{on } \Gamma_3, \quad \cup \Gamma_i = \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 & \text{on } \Gamma_4 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 & \text{on } \Gamma_5 \end{cases} \quad (32)$$

در شکل (۷) حل دقیق بردار جابه‌جایی نشان داده شده است. نرم خطای به‌دست آمده برای هر یک از مقادیر u ، u_x و u_y به ترتیب برابر مقادیر $4/68 \times 10^{-4}$ ، $1/58 \times 10^{-3}$ و $5/94 \times 10^{-3}$ است. به‌منظور مقایسه نتایج حاصل شده با روش اجزا محدود، این مسئله توسط نرم‌افزار انسیس مدل‌سازی شده است. در این مدل از المان SHELL63 استفاده شده که یک المان چهار گره‌ای است. شبکه المان‌بندی به‌صورت یکنواخت و تعداد نقاط

آمده، و نیز \mathbf{x}_j و N به ترتیب موقعیت و تعداد نقاط دامنه است:

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u} \quad \hat{u}_x \quad \hat{u}_y]^T \quad (30)$$

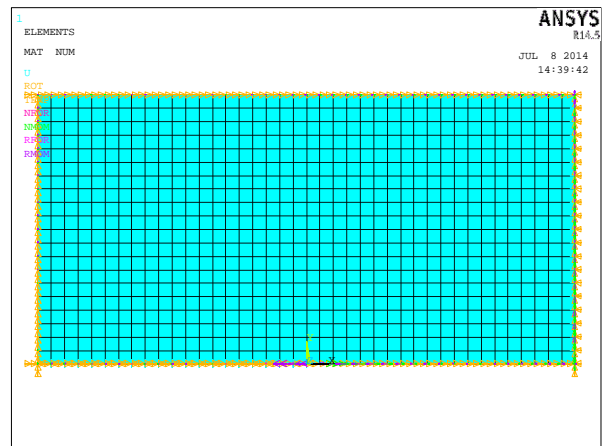
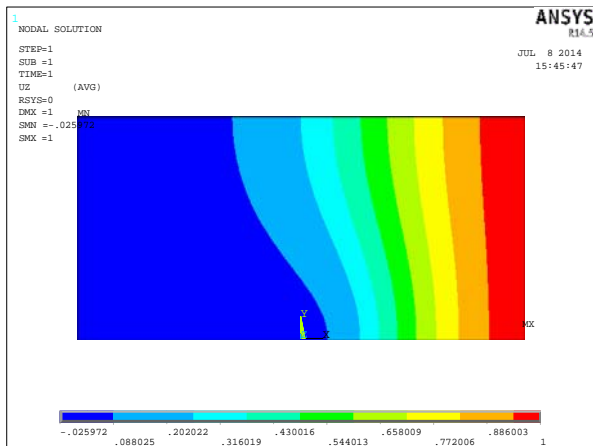
به‌منظور ارزیابی و مقایسه دقت و نرخ همگرایی روش پیشنهادی با روش اجزا محدود، مدل‌های اول و دوم ورق تکین در نرم‌افزار انسیس مدل‌سازی شده که نتایج حاصل از آن ارائه خواهد شد.

۸- مدل اول ورق با تکیه‌گاه میانی

شکل هندسی و شرایط مرزی در این مدل مطابق شکل (۶) است.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \\ u_{nn} &= \frac{\partial}{\partial n} (u_n) \\ u_{nnn} &= \frac{\partial}{\partial n} (u_{nn}) \end{aligned} \quad (31)$$

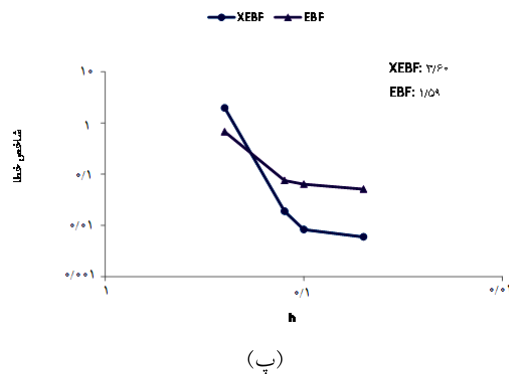
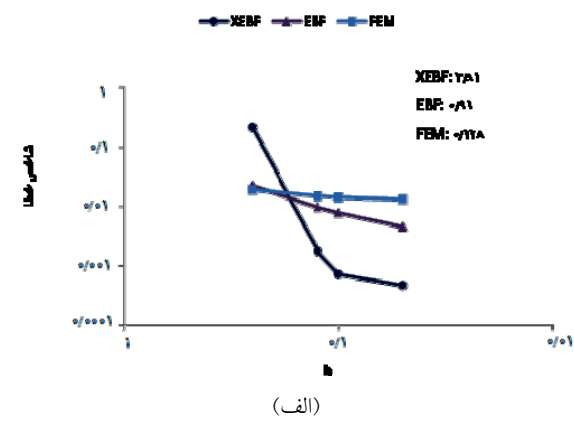
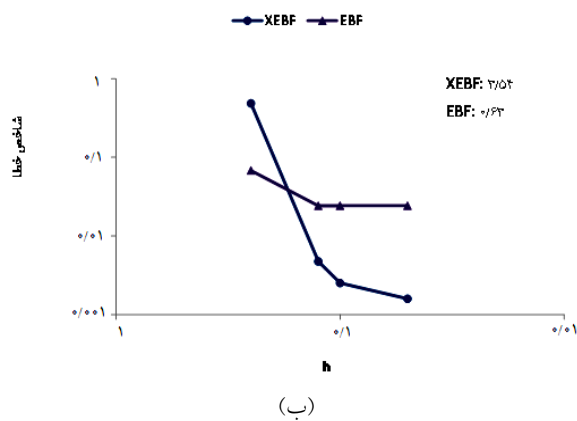
دستگاه معادله دیفرانسیل مدل اول ورق عبارت است از:



شکل ۹- نتیجه حاصل از حل مدل اول ورق تکین با استفاده از

شکل ۸- نمایش مدل اول ورق تکین در نرم افزار انسیس

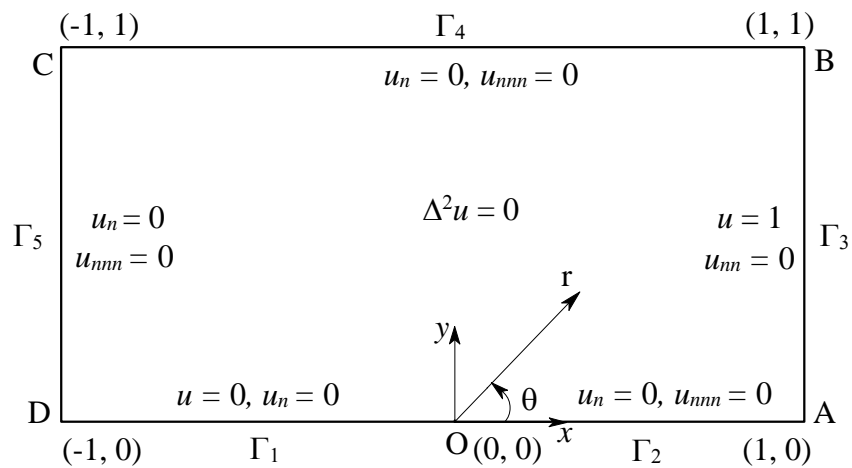
نرم افزار انسیس



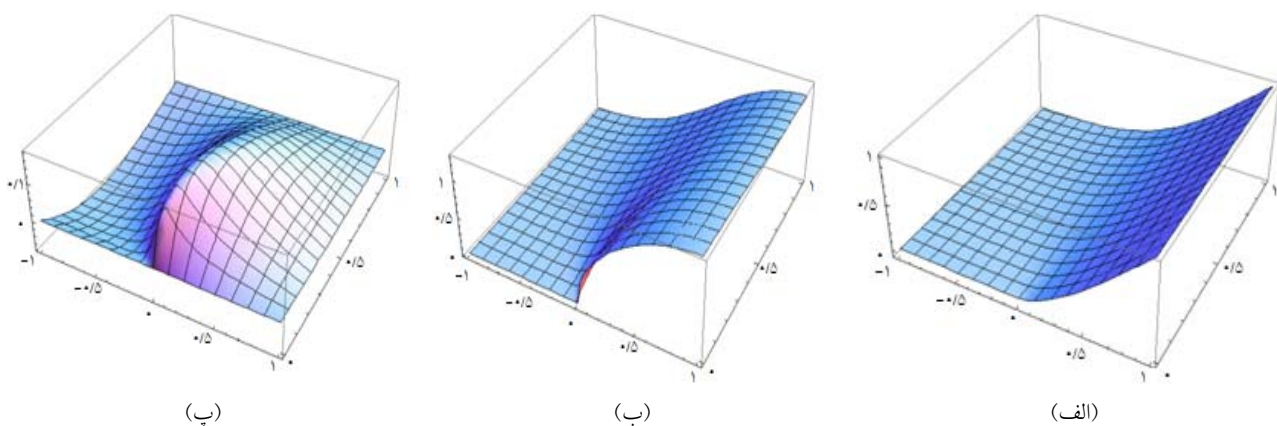
شکل ۱۰- شیب همگرایی روش مورد استفاده با حل مدل اول ورق با تکیه گاه میانی، (الف) u، (ب) u_x و (پ) u_y

نشان داد ضریب پواسون در نظر گرفته شده تأثیری بر پاسخ معادله دیفرانسیل ندارد. نتایج به دست آمده در این قسمت با فرض $\nu = 0.3$ ارائه شده است (شکل ۹). نرم خطای به دست آمده از حل این مسئله برابر ۱۳٪ محاسبه شده است. در شکل (۱۰)

گره ای برابر ۸۶۱ در نظر گرفته شده است (شکل ۸). مصالح مورد استفاده خطی، الاستیک و ایزوتروپ است و مدول الاستیسیته برابر ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. به دلیل همگن بودن معادله دیفرانسیل بای هارمونیک و شرایط مرزی خاص این مسئله، می توان



شکل ۱۱- نمایش مدل دوم ورق با تکیه‌گاه میانی



شکل ۱۲- حل دقیق مدل دوم مسئله ورق، (الف) u، (ب) ux، (پ) uy

اول است، با این تفاوت که ضلع AB در مدل دوم به صورت تکیه‌گاه مفصلی در نظر گرفته شده، در حالی که این ضلع در مدل اول به صورت تکیه‌گاه گیردار مدل‌سازی شده است. بنابراین شرایط مرزی بر روی این لبه در مدل دوم به صورت رابطه زیر است:

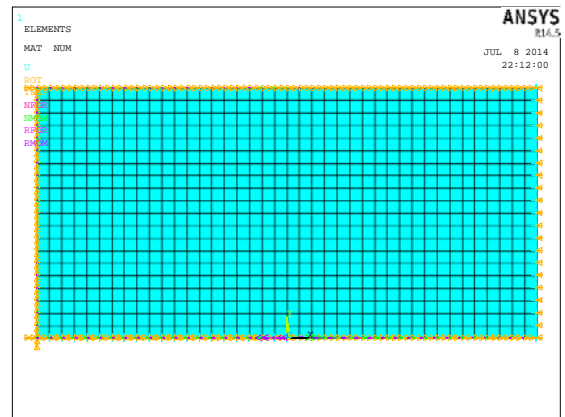
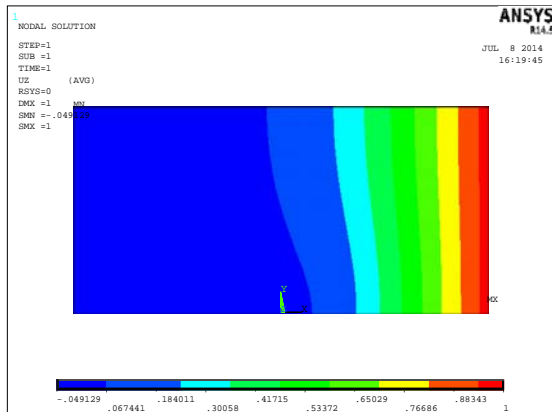
$$u = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \quad (33)$$

در شکل (۱۲) حل دقیق بردار جابه‌جایی آورده شده است. نرم خطای به دست آمده برای هر یک از مقادیر u، ux و uy به ترتیب برابر مقادیر $3/14 \times 10^{-4}$ ، $7/81 \times 10^{-4}$ و $7/39 \times 10^{-3}$ است.

شیب هم‌گرایی روش مورد استفاده، با اضافه کردن پایه‌های تکین و بدون اضافه کردن این پایه‌ها مشاهده می‌شود. این شکل به روشنی نشان می‌دهد افزودن تنها چند تابع پایه شبه‌نمایی شیب همگرایی را از $0/99$ به $3/81$ رسانده است. این در حالی است که شیب همگرایی روش اجزاء محدود در این مساله برابر $0/228$ است. مشابه همین روند در شیب همگرایی مشتقات u قابل مشاهده است.

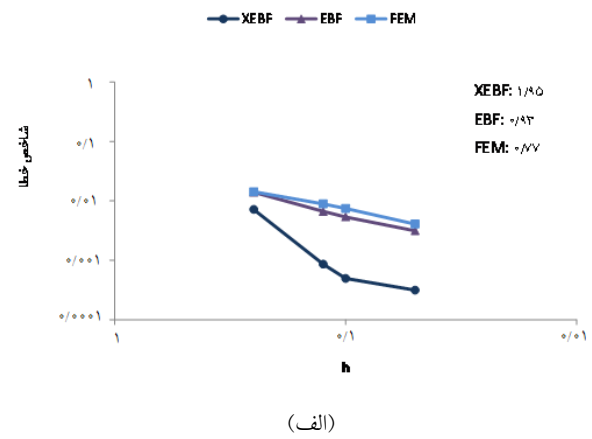
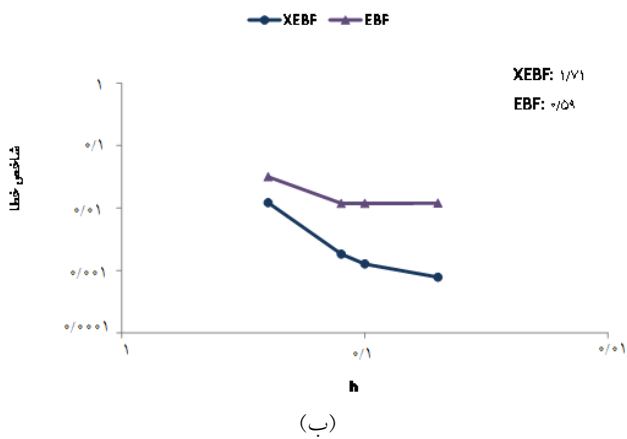
۹- مدل دوم ورق با تکیه‌گاه میانی

شکل هندسی و شرایط مرزی در این مدل مطابق شکل (۱۱) است. روابط حاکم بر دامنه و مرز در مدل دوم مشابه مدل



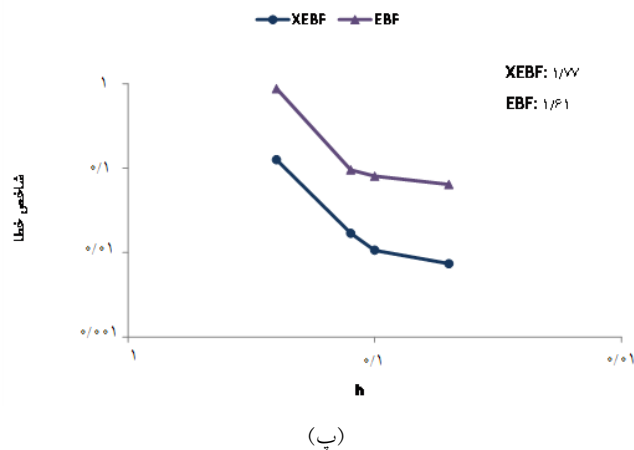
شکل ۱۴- نتیجه حاصل از حل مدل دوم ورق تکین با استفاده از نرم افزار انسیس

شکل ۱۳- نمایش مدل دوم ورق تکین در نرم افزار انسیس



(ب)

(الف)

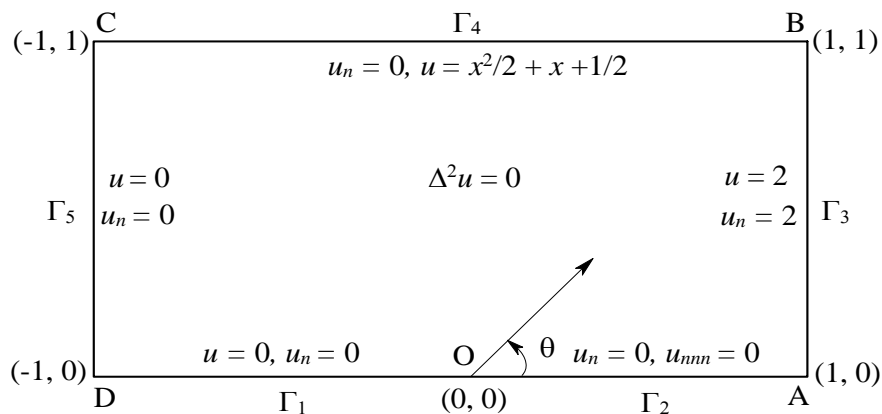


(پ)

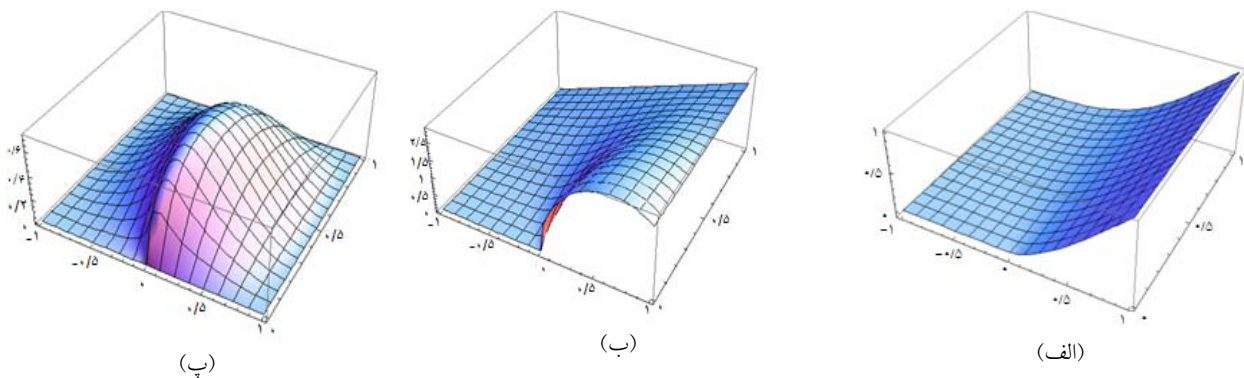
شکل ۱۵- شیب همگرایی روش مورد استفاده با حل مدل دوم ورق با تکیه گاه میانی الف) u ب) u_x و u_y

۸۶۱ و نرم خطای به دست آمده برابر ۰/۰۰۴ است. در شکل (۱۵) شیب همگرایی روش پیشنهادی، با اضافه کردن پایه های تکین و

نتایج حاصل از حل این مسئله با استفاده از نرم افزار انسیس در شکل های (۱۳) و (۱۴) مشاهده می شود. تعداد نقاط گره ای برابر



شکل ۱۶- نمایش مدل سوم ورق با تکیه‌گاه میانی



شکل ۱۷- حل دقیق مدل سوم مسئله ورق، (الف) u، (ب) u_x، (پ) u_y

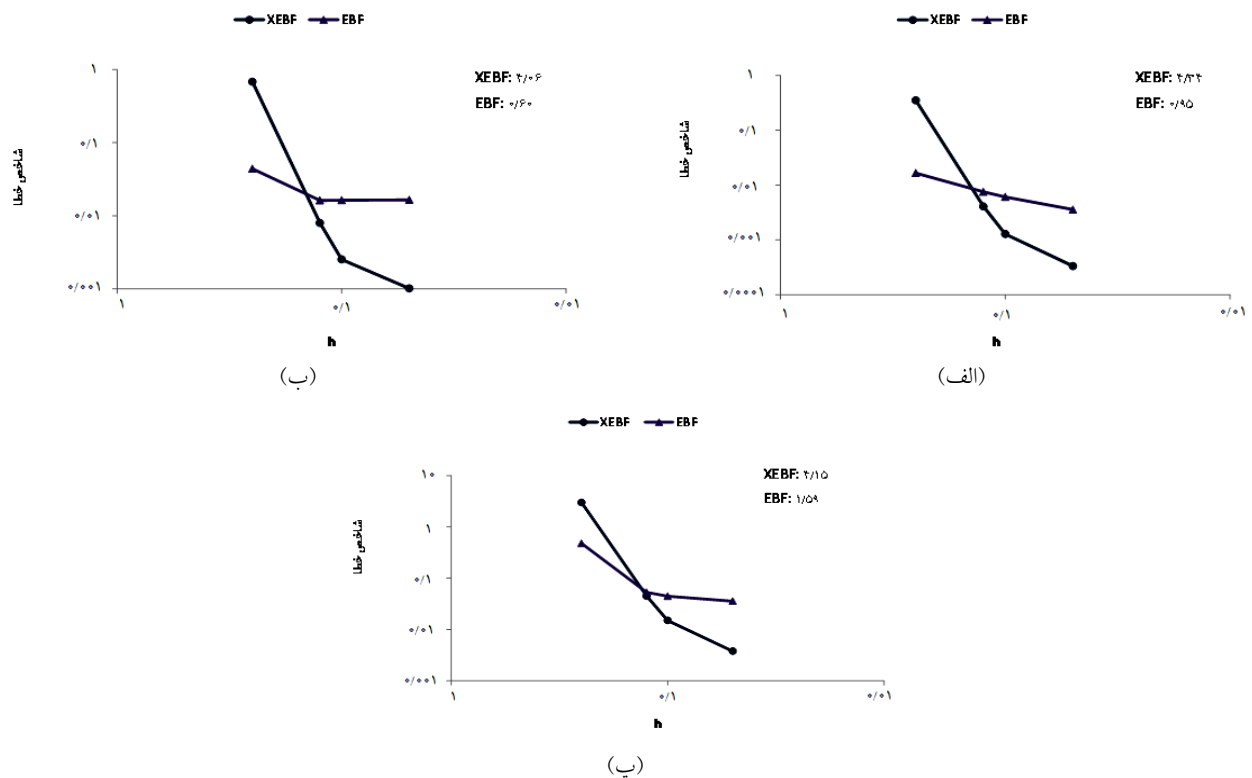
$$\begin{cases} \Delta^2 u = \nabla^4 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{on } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 & \text{on } \Gamma_2 \\ u = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2 & \text{on } \Gamma_3 \\ u = \frac{1}{2}(x+1)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{on } \Gamma_4 \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{on } \Gamma_5 \end{cases}, \quad \cup \Gamma_i = \partial\Omega \quad (34)$$

در شکل (۱۷) حل دقیق بردار جابه‌جایی آورده شده است. نرم خطای به‌دست آمده برای هر یک از مقادیر u ، u_x و u_y به‌ترتیب برابر مقادیر $3/33 \times 10^{-4}$ ، $1/01 \times 10^{-3}$ و $3/79 \times 10^{-3}$ است. شیب همگرایی روش مورد استفاده با

بدون اضافه کردن این پایه‌ها مشاهده می‌شود. همانند مثال قبل در اینجا نیز افزودن توابع شبه‌نمایی اثر قابل توجهی بر شیب همگرایی برجا گذاشته است، بدون آن که حجم محاسبات را به‌صورت محسوسی افزایش دهد.

۱۰- مدل سوم ورق با تکیه‌گاه میانی

شکل هندسی و شرایط مرزی در این مدل مطابق شکل ۱۶ است. دستگاه معادله دیفرانسیل مسئله فوق را می‌توان به‌صورت شکل هندسی و شرایط مرزی در این مدل مطابق شکل (۱۶) است. دستگاه معادله دیفرانسیل مسئله فوق را می‌توان به‌صورت رابطه زیر بازنویسی نمود:

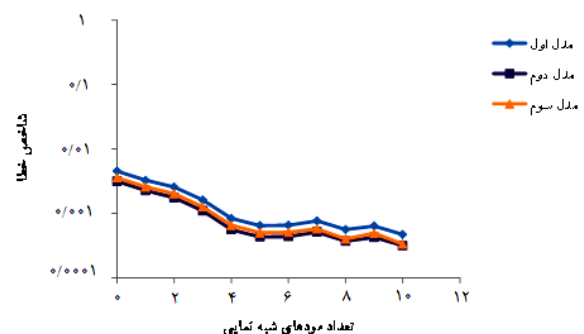


شکل ۱۸- شیب همگرایی روش مورد استفاده با حل مدل سوم ورق با تکیه‌گاه میانی (الف) u ، (ب) u_x ، (پ) u_y

تکین دارد. شبیه همین روند در هم‌گرایی مشتقات u نیز قابل مشاهده است.

۱۱- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این تحقیق فرمول‌بندی روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی برای حل مسائل تکین بای‌هارمونیک گسترش داده شد. توابع مجهول در روش پیشنهادی به صورت ترکیبی خطی از توابع نمایی و توابع تکین به دست آمده در نظر گرفته می‌شوند. ضرایب ثابت موجود به شیوه‌ای مشابه روش اصلی محاسبه می‌شود. دقت حل و شیب همگرایی مطلوب در این روش، تنها با افزودن تعداد محدودی از توابع پایه تکین به دست می‌آید. در این مقاله مسائل تکین ورق مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده از حل این گونه مسائل، نشان دهنده کارآمدی و توانایی مناسب روش پیشنهادی در حل مسائل تکین بدون افزایش محسوس حجم محاسبات است.



شکل ۱۹- تأثیر افزایش تعداد پایه‌های تکین بر دقت حل در

مدل‌های اول تا سوم ورق تکین

اضافه کردن پایه‌های تکین و بدون اضافه کردن این پایه‌ها در شکل (۱۸) مشاهده می‌شود. شکل (۱۹) تأثیر قابل توجه پایه‌های تکین را در افزایش دقت حل نشان می‌دهد. شیب همگرایی با اضافه شدن توابع شبه‌نمایی بیش از ۴ برابر حالت قبل است که نشان از کارایی بالای این روش در حل مسائل

- | | | |
|------------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. finite element method | 5. exponential basis functions | 10. method of fundamental solutions |
| 2. smoothed particle hydrodynamics | 6. singular points | 11. Trefftz method |
| 3. element free Galerkin method | 7. boundary integral equation method | 12. singular function boundary integral method |
| 4. meshless local Petrov-Galerkin method | 8. relaxation method | |
| | 9. radial basis functions method | |

مراجع

- Lucy, L. B., "A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis", *The Astronomical Journal*, Vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.
- Gingold, R. A., and Monaghan, J. J., "Smoothed Particle Hydrodynamics-Theory and Application to Non-Spherical Stars", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L., "Element Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- Atluri, S., and Zhu, T., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", *Computational Mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 117-127, 1998.
- Boroomand, B., Soghrati, S., and Movahedian, B., "Exponential Basis Functions in Solution of Static and Time Harmonic Elastic Problems in a Meshless Style", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, No.8, pp. 971-1018, 2010.
- Shamsaei, B., and Boroomand, B., "Exponential Basis Functions in Solution of Laminated Structures", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, pp. 2010-2019, 2011.
- Zandi, S., Boroomand, B., and Soghrati, S., "Exponential Basis Functions in Solution of Problems with Fully Incompressible Materials: A Mesh-Free Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, No. 21, pp. 7255-7273, 2012.
- Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "A Mesh-Free Method Using Exponential Basis Functions for Laminates Modeled by CLPT, FSDT and TSDT-Part I: Formulation", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 12, pp. 3112-3119, 2011.
- Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "A Mesh-Free Method Using Exponential Basis Functions for Laminates Modeled by CLPT, FSDT and TSDT-Part II: Implementation and Results", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 1, pp. 84-91, 2011.
- Zandi, S., Boroomand, B., and Soghrati, S., "Exponential Basis Functions in Solution of Incompressible Fluid Problems with Moving Free Surfaces", *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, No. 2, pp. 505-527, 2012.
- Hashemi, S., Boroomand, B., and Movahedian, B., "Exponential Basis Functions in Space and Time: a Meshless Method for 2D Time Dependent Problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 241, pp. 526-545, 2013.
- Azhari, F., Boroomand, B., and Shahbazi, M., "Exponential Basis Functions in the Solution of Laminated Plates Using a Higher-order Zig-Zag Theory", *Composite Structures*, Vol. 105, pp. 398-407, 2013.
- Boroomand, B., Azhari, F., and Shahbazi, M., "On Definition of Clamped Conditions in TSDT and FSDT; the Use of Exponential Basis Functions in Solution of Laminated Composites", *Composite Structures*, Vol. 97, pp. 129-135, 2013.
- Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "On Using Exponential Basis Functions for Laminates Modeled by CLPT, FSDT and TSDT: Further Tests and Results", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 7, pp. 2263-2268, 2012.
- Movahedian, B., and Boroomand, B., "The Solution of Direct and Inverse Transient Heat Conduction Problems with Layered Materials Using Exponential Basis Functions", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 77, pp. 186-198, 2014.
- Movahedian, B., Boroomand, B., and Soghrati, S., "A Trefftz Method in Space and Time Using Exponential Basis Functions: Application to Direct and Inverse Heat Conduction Problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, No. 5, pp. 868-883, 2013.
- شهبازی، م. و برومند، ب.، "بررسی خمش ورق‌های ضخیم کامپوزیت با استفاده از روش توابع پایه نمایی هموار (EBFs)"، ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، سمنان، دانشگاه سمنان، ۱۳۹۰.
- مسیبی، ف. و بندرپاچ، م.، "حل معادلات جریان آب در خاک با استفاده از روش بدون شبکه توابع پایه نمایی"

هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ۱۳۹۲.

۱۹. مسیعی، ف. و بذر پاچ، م.، "حل معادلات لاپلاس و هلمهولتز سه بعدی با استفاده از روش بدون شبکه توابع پایه نمایی"، هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ۱۳۹۲.

۲۰. نورمحمدی، ن. و برومند، ب.، "حل معادله هلمهولتز با استفاده از توابع پایه تعمیم یافته"، نهمین کنگره بین المللی مهندسی عمران، اصفهان، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۹۱.

۲۱. تقدیریان، م. ر. و برومند، ب.، "استفاده از توابع پایه نمایی در حل معادلات دیفرانسیل دو بعدی محیط‌های متخلخل اشباع"، ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، سمنان، دانشگاه سمنان، ۱۳۹۰.

22. Li, Z. C., Huang, J., and Huang, H. T., "Stability Analysis of Method of Fundamental Solutions for Mixed Boundary Value Problems of Laplace's Equation", *Computing*, Vol. 88, No. 1-2, pp. 1-29, 2010.

23. Whiteman, J., "Finite-Difference Techniques for a Harmonic Mixed Boundary Problem Having a Reentrant Boundary", *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 323, No. 1553, pp. 271-276, 1971.

24. Ingham, D. B., and Kelmanson, M. A., *Boundary Integral Equation Analyses of Singular, Potential, and Biharmonic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

25. Rao, B., and Rahman, S., "An Efficient Meshless Method for Fracture Analysis of Cracks", *Computational Mechanics*, Vol. 26, No. 4, pp. 398-408, 2000.

26. Motz, H., "The Treatment of Singularities of Partial

Differential Equations by Relaxation Methods", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 4, pp. 371-377, 1946.

27. Igarashi, H., and Honma, T., "A boundary Element Method for Potential Fields with Corner Singularities", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 20, No. 11, pp. 847-852, 1996.

28. Hu, H. Y., Li, Z. C. and Cheng, A. H. D., "Radial Basis Collocation Methods for Elliptic Boundary Value Problems", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 50, No. 1, pp. 289-320, 2005.

29. Karageorghis, A., "Modified Methods of Fundamental Solutions for Harmonic and Biharmonic Problems with Boundary Singularities", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-19, 1992.

30. Mossaiby, F., Bazrpach, M., and Shojaei, A., "Extending the Method of Exponential Basis Functions to Problems with Singularities", *Engineering Computations*, Vol. 32, No. 2, pp. 406-423, 2015.

31. Li, Z. C., Lu, T. T., and Hu, H. Y., "The Collocation Trefftz Method for Biharmonic Equations with Crack Singularities", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 28, No. 1, pp. 79-96, 2004.

32. Elliotis, M., Georgiou, G., and Xenophonos, C., "The Singular Function Boundary Integral Method for Biharmonic Problems with Crack Singularities", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 31, No. 3, pp. 209-215, 2007.

۳۳. سقراطی، س.، "استفاده از توابع پایه هموار در حل برخی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل مکانیک جامدات"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ۱۳۸۶.

۳۴. نصر اصفهانی، م.، "حل مسائل تکین به روش بدون شبکه محلی براساس توابع پایه نمایی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ۱۳۹۳.