

آنالیز پایداری تیر تحت اثر جرم‌های متحرک با استفاده از روش اختلالی هموتوپی

مهران قمشی بزرگ* و مهدی کشمیری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۹/۰۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۰۸/۱۸)

چکیده - در این مقاله با استفاده از روش اختلالی هموتوپی^۱ رفتار دینامیکی یک تیر انعطاف پذیر همراه با جرم‌های متحرک دارای حرکت متناوب مطالعه شده است. ضابطه مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و مکان هندسی شرایط بروز رزونانس در صفحه جرم-سرعت جرم متحرک به صورت نیمه تحلیلی تعیین شده است. نتیجه آنالیز پایداری با استفاده از تئوری فلاکه^۲ تأیید شده است. ملاحظه می‌شود که با لحاظ اثر اصطکاک بین تیر و جسم متحرک، سیستم تیر-جرم متحرک به یک سیستم غیرخطی متغیر با زمان تبدیل می‌شود. رفتار دینامیکی این سیستم مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج مشابهی برای شرایط ناپایداری و رزونانس ارائه شده است. مجموعه این نتایج توسط شبیه‌سازی عددی رفتار دینامیکی سیستم مورد تأیید قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: تیر - جرم متحرک، روش اختلالی هموتوپی، پایداری دینامیکی، شرایط رزونانس.

Stability Analysis of a Beam under the Effect of Moving Masses using Homotopy Perturbation Method

M. Ghomeshi Bozorg* and M. Keshmiri

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

Abstract: In this paper, considering all the linear and nonlinear inertia terms of moving masses on a flexible beam, the dynamic response and dynamic stability of the beam are studied. Homotopy perturbation method is used to perform the analysis and results are provided in a stability map for the different values of mass and velocity of the moving masses. It is concluded that there is a borderline in the diagram that separates the stable and unstable regions. For the first time, this borderline is determined semi-analytically. Results of the stability analysis are validated using the Floquet theory. In addition to this borderline, it is also concluded that the Homotopy perturbation method is capable of evaluating the new critical values for mass and velocity which cause vibration resonance in the beam. The locus of these resonant points, which is totally a new finding in dynamic analysis of beam-moving mass problem, is determined semi-analytically. Finally, the effect of the friction between the beam and the moving mass is studied on the stability of the system and resonant conditions. Accuracy of the results for this case is also evaluated with a numerical simulation.

Keywords: Beam-moving mass, homotopy perturbation method, dynamic stability, resonant conditions.

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ghomeshiboazorg@gmail.com

فهرست علائم

| | | | |
|--------------------------------|----------------|-------------------------------|-----------|
| دوره تناوب حرکت جسم متحرک | T_p | حل معادله رتبه i ام هموتوپی | A_i |
| سرعت جسم متحرک | v | سختی خمشی تیر | EI |
| محور مختصات | x | نیروی اصطکاک | F_f |
| ماتریس میرایی | Y | بردار نیرو در معادله حرکت | $F(t)$ |
| ارتعاشات عرضی تیر | z | شتاب جاذبه زمین | g |
| علائم یونانی | | طول تیر | l |
| تابع دلتای دیراک | δ | جرم جسم متحرک | M |
| i امین شکل مود تیر | $\varphi_i(x)$ | جرم واحد طول تیر | \bar{m} |
| ماتریس سختی | Λ | عکس العمل بین تیر و جرم متحرک | N |
| پارامتر بدون بعد جرم | α | عکس العمل محوری تکیه گاه | p_1 |
| پارامتر بدون بعد سرعت | γ | عکس العمل محوری تکیه گاه | p_2 |
| اولین فرکانس ارتعاشات آزاد تیر | ω_1 | نیروی محوری داخلی تیر | P |
| فرکانس ارتعاشات تیر | ω | پارامتر مصنوعی | p |
| i امین ضریب بسط سری | λ_i | i امین مختص مودال | $q_i(t)$ |
| فرکانس رزونانس | ω_{res} | بردار مختصات مودال | q |
| فرکانس بحرانی | ω_{cr} | اپراتور دیفرانسیل معمولی | S |
| ضریب ماتریسی | Ω | زمان | t |
| ضریب اصطکاک | μ | ماتریس اینرسی | T |

۱- مقدمه

موضوع بررسی رفتار دینامیکی تیر تحت اثر جسم متحرک از زمان تشکیل گیری راه آهن در قرن نوزدهم میلادی تاکنون توجه محققان و مهندسان بوده و سعی شده است از جنبه های مختلف، این موضوع مورد مطالعه قرار گیرد. امروزه با توجه به ملاحظات اقتصادی سعی می شود در حدامکان وزن سازه های حمل کننده اجسام متحرک کم در نظر گرفته شود و همین امر سبب شده است تا امکان ایجاد ارتعاشات بزرگ در این سیستم ها افزایش یافته و شناخت و کنترل آنها بیش از پیش اهمیت یابد. یکی از جنبه های مهم این موضوع، تعیین شرایطی است که سبب بروز ناپایداری و یا رزونانس در سازه حمل کننده اجسام متحرک می گردد؛ در صورت عدم پیشگیری از ایجاد این

شرایط، امکان بروز خسارات غیرقابل جبران وجود دارد. در این زمینه کارهای مختلفی تاکنون انجام شده است. برخی از مؤلفان [۸-۱] با صرف نظر از اینرسی جسم متحرک و مدل سازی آن به صورت نیروی متحرک، شرایطی که سبب می شود فرکانس تکرار بار با فرکانس طبیعی تیر برابر شود را شرایط بروز رزونانس معرفی کرده اند. برخی دیگر از محققان [۹-۱۱] با لحاظ مؤلفه شتاب خطی جسم متحرک و برخی دیگر [۱۲-۱۴] با لحاظ تمام مؤلفه های شتاب جسم متحرک و با اتخاذ روش های گوناگون، این مسئله را مورد مطالعه قرار داده اند.

روش هموتوپی از جمله روش هایی است که در سال های اخیر در تحلیل سیستم های ارتعاشی مورد توجه قرار گرفته است. قسمت اعظم مطالعات انجام شده در زمینه روش

\bar{m} و طول l در نظر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است، $x_M(t)$ موقعیت جرم متحرک بر روی تیر و $z(x, t)$ ارتعاش عرضی نقطه‌ای از تیر به مختص X را نشان می‌دهد. فرض می‌شود که جرم متحرک همیشه تماس خود را با تیر حفظ می‌کند و بنابراین جابه‌جایی عرضی آن با $z(x_M(t), t)$ نمایش داده می‌شود.

در شرایطی که جرم متحرک با سرعت ثابت $\dot{x}_M = v$ از روی تیر عبور کند، با لحاظ عبارات اینرسی خطی و غیرخطی جرم متحرک، می‌توان نشان داد که معادله حرکت تیر به صورت زیر مشخص می‌شود [۲۵]:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = M(g - v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}) \delta(x - vt) \quad (1)$$

که در آن g شتاب جاذبه زمین و δ نماد تابع دلتای دیراک^۳ است. با فرض عبارت زیر برای $z(x, t)$:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i(x) \quad (2)$$

که در آن $q_i(t)$ و $\phi_i(x)$ به ترتیب i امین مختص مودال و i امین شکل مود تیر هستند، مبتنی بر روش گالرکین^۴ معادله پاره‌ای (۱) به معادله دیفرانسیل معمولی زیر انتقال داده می‌شود:

$$\mathbf{T}(t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}(t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda}(t)\mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \quad (3)$$

که در آن $\mathbf{q} = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ بردار مختصات مودال است و درایه‌های ضرایب ماتریسی \mathbf{T} ، \mathbf{Y} ، $\mathbf{\Lambda}$ و بردار \mathbf{F} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

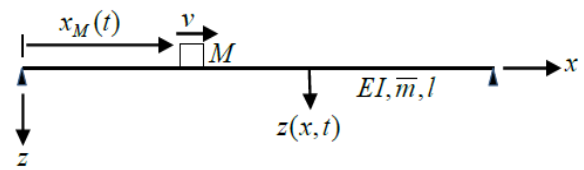
$$T_{ij} = \bar{m} \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx + M \phi_i(vt) \phi_j(vt)$$

$$Y_{ij} = 2Mv \phi_i(vt) \phi_j'(vt) \quad (4)$$

$$\Lambda_{ij} = EI \int_0^l \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx + Mv^2 \phi_i(vt) \phi_j''(vt)$$

$$F_i = Mg \phi_i(vt)$$

در معادلات فوق پریم نشان دهنده مشتق نسبت به X است. با تعریف تابع شکل نرمال به صورت $\int_0^l \phi_i(x) \phi_i(x) dx = 1$ و در نظر گرفتن اولین تابع ویژه نرمال تیر با تکیه‌گاه ساده



شکل ۱- تیر تحت اثر جسم متحرک

هموتوپی به دو بخش قابل دسته‌بندی است، بخش اول مطالعاتی هستند که در آنها سعی شده با اتخاذ تکنیک‌هایی دقت روش بهبود داده شود که اشاره به این موارد خارج از حوصله این مقاله است. بخش دوم مطالعاتی هستند که در آنها سعی شده است تا توانایی روش هموتوپی در حل معادلات مختلف نشان داده شود. مقالات [۲۴-۱۵] از جمله مواردی هستند که جهت حل معادلات حاکم بر سیستم‌های دینامیکی از روش هموتوپی استفاده کرده‌اند.

بر اساس بهترین دانش نویسندگان، تاکنون مسئله آنالیز پایداری دینامیکی مسئله تیر-جرم متحرک با استفاده از روش اختلالی هموتوپی مورد مطالعه قرار نگرفته است. همچنین مسئله اثر اصطکاک بین جسم متحرک و تیر بر روی رفتار دینامیکی سیستم تیر-جرم متحرک که یک سیستم متغیر با زمان غیرخطی است و همچنین استفاده از روش هموتوپی در تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی متغیر با زمان تاکنون مورد توجه قرار نگرفته‌اند. این دو موضوع در این مقاله بررسی شده و نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که روش اختلالی هموتوپی قادر است شرایط ناپایداری و رزونانس را در این مسائل پیش‌بینی کند و نتایج را به صورت نیمه تحلیلی ارائه نماید. نتایج به دست آمده با استفاده از شبیه‌سازی عددی معادلات مورد تأیید قرار گرفته‌اند.

۲- مدل‌سازی دینامیکی سیستم

سیستم مورد مطالعه در شکل (۱) نشان داده شده است. این سیستم شامل یک تیر با تکیه‌گاه ساده است که تحت اثر جرم متحرکی به جرم M قرار دارد. تیر به صورت یک تیر اوپلر-برنولی با سختی انعطاف‌پذیری ثابت EI و جرم بر واحد طول

به صورت:

$$\phi_1(x) = \sqrt{2/l} \sin(\pi x / l) \quad (5)$$

و تعریف پارامترهای:

$$\alpha = \frac{M}{\bar{m}l}, \quad \gamma = \frac{\pi v}{l\omega_1} \quad (6)$$

که در آن ω_1 اولین فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد تیر است، معادله حاکم بر مختص مودال به صورت زیر می تواند نوشته شود:

$$(1 + f_1(t))\ddot{q} + f_2(t)\dot{q} + (\omega_1^2 + f_3(t))q = f_4(t) \quad (7)$$

$$f_1(t) = 2\alpha \sin^2 \bar{\omega}_1 t, \quad f_2(t) = 2\alpha \bar{\omega}_1 \sin 2\bar{\omega}_1 t$$

$$f_3(t) = -2\alpha \bar{\omega}_1^2 \sin^2 \bar{\omega}_1 t, \quad f_4(t) = \sqrt{2}l g \alpha \sin \bar{\omega}_1 t$$

که در آن $\bar{\omega}_1 = \gamma \omega_1$ است و نماد q نشان دهنده تابع برداری تک مؤلفه‌ای $q = [q_1(t)]$ است. اگر فرض شود که تیر قبل از ورود جرم‌های متحرک در حالت سکون است، بنابراین شرایط اولیه برای معادله (۷) به صورت $q(0) = 0$ و $\dot{q}(0) = 0$ نوشته می شود.

معادله (۷) یک معادله متغیر با زمان خطی است که حل آن برای مقادیر مشخص جرم و سرعت جرم متحرک (M, v) ، تغییرات مختص مودال را در مقابل زمان نشان می دهد. در استخراج معادله (۷) فرض شده است که در هر لحظه تیر تحت اثر فقط یک جرم متحرک است و معادله فقط برای مدت زمانی که جرم بر روی تیر است اعتبار دارد؛ بنابراین هنگامی که جرم تیر را ترک می کند بخش‌های متغیر با زمان معادله از بین می روند.

برای انجام آنالیز، فرض می شود که تیر تحت اثر حرکت تکراری از جرم‌های متحرک با دوره‌ی تناوب $T_p = l/v$ است. به عبارت دیگر به محض اینکه یک جرم متحرک تیر را ترک می کند، جرم دیگری با همان جرم و سرعت جرم قبلی بر روی تیر وارد می شود. بنابراین ضرایب در معادله (۷) توابعی متناوب با دوره تناوب T_p هستند. به عبارت دیگر:

$$f_i(t + T_p) = f_i(t), \quad 0 \leq t < T_p \quad (8)$$

$$f_1(t) = 2\alpha \sin^2 \bar{\omega}_1 t, \quad f_2(t) = 2\alpha \bar{\omega}_1 \sin 2\bar{\omega}_1 t$$

$$f_3(t) = -2\alpha \bar{\omega}_1^2 \sin^2 \bar{\omega}_1 t, \quad f_4(t) = \sqrt{2}l g \alpha \sin \bar{\omega}_1 t$$

۳- آنالیز شرایط پایداری و شرایط بروز رزونانس

با استفاده از روش اختلالی هموتوبی توضیح داده شده توسط اوزیس و یلدریم [۲۴]، در این بخش آنالیز پایداری معادله (۷) با توابع $f_1(t)$ تا $f_4(t)$ تعریف شده در معادله (۸) انجام شده است. برای معرفی این روش، معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه به صورت (۹) در نظر گرفته می شود:

$$\ddot{q} + S(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0 \quad (9)$$

که در آن S یک اپراتور دیفرانسیل معمولی، t زمان و q متغیر مستقل است. معادله (۹) می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\ddot{q} + 1 \cdot q = q - S(q, \dot{q}, \ddot{q}, t), \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0 \quad (10)$$

با معرفی پارامتر مصنوعی p ، این معادله می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\ddot{q} + 1 \cdot q = p \cdot (q - S(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)), \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0 \quad (11)$$

هنگامی که $p = 1$ است، معادله (۱۱) با معادله (۹) یکسان است، در حالی که در $p = 0$ ، معادله (۱۱) یک معادله خطی ساده می شود که می تواند به صورت تحلیلی حل شود.

در یک سیستم ارتعاشی، علاوه بر عبارت q ، معمول است که فرکانس ارتعاشات سیستم ω به صورت یک سری از p به صورت زیر بیان شود:

$$q = \sum_{i=0}^n p^i A_i \quad (12)$$

$$1 = \omega^2 - \sum_{i=1}^n p^i \lambda_i \quad (13)$$

که A_i نشان دهنده i امین ضریب بسط (۱۲) و λ_i نشان دهنده i امین ضریب بسط (۱۳) است. با جایگذاری سری‌های (۱۲) و (۱۳) در معادله (۱۱) و تساوی ضرایب توان‌های یکسان p ، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی که باید هر یک حل شوند، حاصل می شود. به منظور تعیین حل یک معادله جدید، عبارات سکولار محاسبه ضرایب λ_i حذف می شوند. با جایگذاری تمام حل‌های A_i و λ_i در (۱۲) و (۱۳) و جایگذاری 1 برای p ، حل معادله (۹) حاصل می شود.

به منظور حل معادله (۷) با ضرایب متناوب (۸)، یک روش مشابه استفاده می شود. با جایگذاری عبارات فوریه توابع $f_1(t)$

به منظور انجام عملیات جبری، A_1 به شکل فشرده زیر بازنویسی می شود:

$$A_1(t) = a_0 + c_0 \cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\bar{\omega}_1 t \quad (18)$$

که در آن a_0 ، c_0 و a_n همگی توابعی از ω^2 هستند و به سهولت از معادله (17) تعریف می شوند. پس از جایگذاری A_0 و A_1 در معادله رتبه p^2 (16)، معادله زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_2 + \omega^2 A_2 = & (\lambda_1 + 1 - \omega_1^2 + \alpha \bar{\omega}_1^2) a_0 + \\ & c_0 (\lambda_1 + 1 - \omega_1^2 + \alpha \bar{\omega}_1^2 + \alpha \omega^2) \cos \omega t + \\ & 2c_0 \alpha \bar{\omega}_1 \omega \sin 2\bar{\omega}_1 t \sin \omega t - \\ & c_0 \alpha (\omega^2 + \bar{\omega}_1^2) \cos 2\bar{\omega}_1 t \cos \omega t + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\lambda_1 + 1 - \omega_1^2 + \alpha \bar{\omega}_1^2 (4n^2 + 1)(1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t)] \cos 2n\bar{\omega}_1 t + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n \alpha \bar{\omega}_1^2 \sin 2\bar{\omega}_1 t \sin 2n\bar{\omega}_1 t - \alpha a_0 \bar{\omega}_1^2 \cos 2\bar{\omega}_1 t \end{aligned} \quad (19)$$

که برای به دست آوردن یک حل معتبر برای A_2 ، عبارات سکولار باید حذف شوند. این حل به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} A_2 = & \left(K_1 + K_2 + K_3 + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{5n} + K_{6n} + K_{7n}) \right) \cos \omega t - \\ & K_1 - K_2 \cos 2\bar{\omega}_1 t - K_3 \cos(2\bar{\omega}_1 - \omega)t - \\ & K_4 \cos(2\bar{\omega}_1 + \omega)t - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (K_{5n} \cos 2n\bar{\omega}_1 t + K_{6n} \cos 2(n-1)\bar{\omega}_1 t + \\ & K_{7n} \cos 2(n+1)\bar{\omega}_1 t) \end{aligned} \quad (20)$$

ضرایب این حل در پیوست آورده شده اند. حذف عبارات سکولار به عبارت زیر منجر می شود:

$$\lambda_1 + 1 - \omega_1^2 + \alpha \bar{\omega}_1^2 + \alpha \omega^2 = 0 \quad (21)$$

با حل برای λ_1 و جانشینی نتیجه در (13) و قرار دادن $p=1$ ، معادله شماره (22) حاصل می شود:

$$\omega = \omega_1 \sqrt{\frac{1 - \alpha \gamma^2}{1 + \alpha}} \quad (22)$$

تا $f_4(t)$ معرفی شده در (8) در معادله (7)، این معادله می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$(1 + \alpha(1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t)) \ddot{q} + (2\alpha \bar{\omega}_1 \sin 2\bar{\omega}_1 t) \dot{q} + (\omega_1^2 - \alpha \bar{\omega}_1^2 (1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t)) q = \quad (14)$$

$$g\alpha\sqrt{2l} \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2n\bar{\omega}_1 t \right)$$

با انتقال این معادله به شکل معادله (11) و جانشینی q و 1 از (12) و (13)، معادله زیر شکل داده شود:

$$\begin{aligned} (\ddot{A}_0 + p\ddot{A}_1 + \dots) + (\omega^2 - (p\lambda_1 + p^2\lambda_2 + \dots))(A_0 + pA_1 + \dots) = \\ p[(A_0 + pA_1 + \dots) - \alpha(1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t)(\ddot{A}_0 + p\ddot{A}_1 + \dots) - \\ 2\alpha \bar{\omega}_1 \sin 2\bar{\omega}_1 t (\dot{A}_0 + p\dot{A}_1 + \dots) - \\ (\omega_1^2 - \alpha \bar{\omega}_1^2 (1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t))(A_0 + pA_1 + \dots) + \\ g\alpha\sqrt{2l} \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2n\bar{\omega}_1 t \right)] \end{aligned} \quad (15)$$

بنابراین مجموعه معادلات زیر برای تعیین q باید حل شوند:

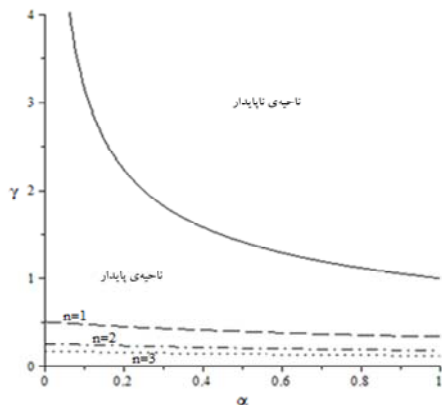
$$\begin{aligned} p^0: \ddot{A}_0 + \omega^2 A_0 = 0 \\ p^1: \ddot{A}_1 + \omega^2 A_1 = \lambda_1 A_0 + A_0 - \alpha(1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t) \ddot{A}_0 - \\ (2\alpha \bar{\omega}_1 \sin 2\bar{\omega}_1 t) \dot{A}_0 - (\omega_1^2 - \alpha \bar{\omega}_1^2 (1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t)) A_0 + \\ g\alpha\sqrt{2l} \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2n\bar{\omega}_1 t \right) \\ p^2: \ddot{A}_2 + \omega^2 A_2 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_0 + A_1 - \\ \alpha(1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t) \ddot{A}_1 - (2\alpha \bar{\omega}_1 \sin 2\bar{\omega}_1 t) \dot{A}_1 - \\ (\omega_1^2 - \alpha \bar{\omega}_1^2 (1 - \cos 2\bar{\omega}_1 t)) A_1 \\ \dots \end{aligned} \quad (16)$$

با اعمال شرایط اولیه صفر، تمام معادلات دیفرانسیل در (16) باید برای $A_k(0) = 0, \dot{A}_k(0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$ حل شوند. برای این شرایط اولیه، دو معادله اول از این مجموعه به سادگی حل شده و به صورت زیر حاصل می شوند:

$$A_0(t) = 0$$

$$A_1(t) =$$

$$\begin{aligned} g\alpha\sqrt{2l} \left[- \left(\frac{2}{\pi\omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\bar{\omega}_1)^2)} \right) \cos \omega t + \right. \\ \left. \left(\frac{2}{\pi\omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos 2n\bar{\omega}_1 t}{\pi(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\bar{\omega}_1)^2)} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$



شکل ۳- مرز پایداری و نقاط رزونانسی حاصل از روش اختلافی هموتوبی

روی این منحنی‌ها واقع باشد در تیر رزونانس ایجاد شده و در نتیجه ارتعاش واگرا در تیر ایجاد می‌شود.

معادلات (۲۳) و (۲۵) را می‌توان در یک معادله نشان

داد:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1+4n^2)+4n^2}} \quad n=0,1,2,\dots \quad (26)$$

که در آن $n=0$ منحنی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار را نشان می‌دهد. این منحنی‌ها در شکل (۳) نشان داده شده‌اند. با جانشینی γ از (۲۶) در (۲۴)، فرکانس‌های بحرانی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند:

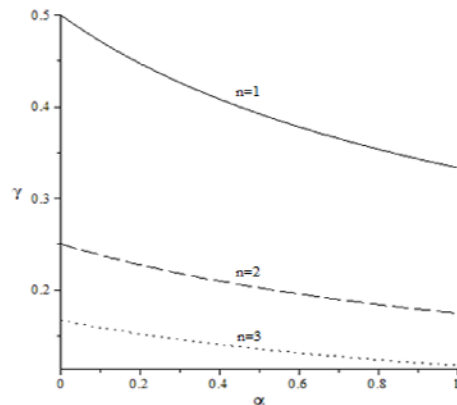
$$\omega_{cr} = \frac{2n}{\sqrt{\alpha(1+4n^2)+4n^2}} \omega_1 \quad n=0,1,2,\dots \quad (27)$$

که در آن $n=0$ نشان دهنده فرکانس در مرز پایداری و مقادیر دیگر متناظر با فرکانس‌های شرایط رزونانس سیستم هستند.

در نهایت، اگر سیستم پیوسته بوسیله k امین تابع ویژه سیستم (متناظر با $\omega_k = k^2 \omega_1$) مجزاسازی شود، نتیجه فوق به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\omega_{cr} = \frac{2nk^2}{\sqrt{\alpha(1+4n^2)+4n^2}} \omega_1 \quad (28)$$

$$n=0,1,2,\dots, \quad k=1,2,3,\dots$$



شکل ۲- مکان هندسی نقاطی از صفحه $\alpha-\gamma$ که مبتنی بر معادله (۲۵) به ازای $n=1,2,3$ در آنها انتظار بروز رزونانس وجود دارد.

مقدار منفی $1-\alpha\gamma^2$ سبب ایجاد عبارات $\cosh \omega t$ و $\sinh \omega t$ در حل A_2 و در نتیجه واگرایی در حل q می‌شود. بنابراین شرایط ناپایداری در سیستم به صورت $\gamma > 1/\sqrt{\alpha}$ می‌تواند معرفی شود. ضابطه خط مرزی بین نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه $\alpha-\gamma$ به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (23)$$

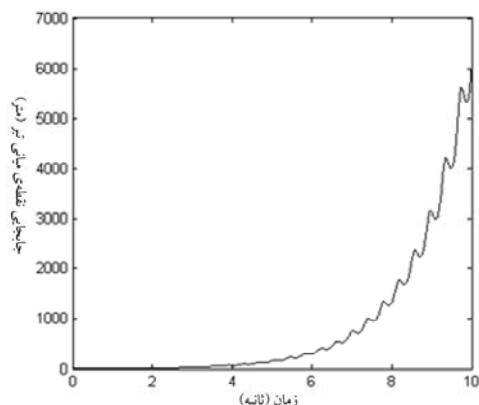
علاوه بر نقاط ناحیه ناپایدار در نمودار $\alpha-\gamma$ ، نقاط دیگری در ناحیه پایدار وجود دارند که دامنه ارتعاش سیستم در آن نقاط فزاینده است. این نقاط به نام نقاط رزونانسی نام گذاری شده و به وسیله آنالیز شرایط رزونانس ناشی از حضور توابع تحریک هارمونیک در سمت راست معادلات (۱۶)، قابل ارزیابی هستند. این چنین آنالیزی به شرایط زیر برای فرکانس‌های رزونانس هدایت می‌کند:

$$\omega_{res} = 2n\bar{\omega}_1 \quad n=1,2,3,\dots \quad (24)$$

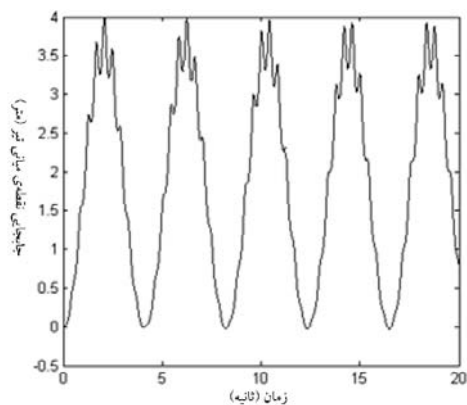
با جانشینی ω از (۲۲) به جای ω_{res} در (۲۴)، این شرایط به صورت زیر می‌توانند نوشته شوند:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1+4n^2)+4n^2}} \quad n=1,2,3,\dots \quad (25)$$

این معادله یک مجموعه از منحنی‌ها را در صفحه $\alpha-\gamma$ معرفی می‌کند. برای $n=1,2,3$ ، این منحنی‌ها در شکل (۲) نمایش داده شده‌اند. بنابراین اگر مقدار جرم و سرعت جسم متحرک بر



شکل ۵- پاسخ تیر به جسم متحرک با مشخصات
 $\alpha = 0.5, \gamma = 1.4642$ (واقع در ناحیه ناپایدار)



شکل ۴- پاسخ تیر به جسم متحرک با مشخصات
 $\alpha = 0.5, \gamma = 1.3642$ (واقع در ناحیه پایدار)

۴- ارزیابی نتایج

نتایج به دست آمده از روش اختلالی هموتوبی به چهار طریق ارزیابی می‌شوند:

- (۱) شبیه‌سازی عددی پاسخ دینامیکی تیر در شرایط به دست آمده برای بروز ناپایداری و رزونانس
- (۲) مقایسه منحنی‌های رزونانس با نتایج به دست آمده در مقالات برای نیروی متحرک
- (۳) مقایسه منحنی مرز با نتایج تئوری فلاکه
- (۴) مقایسه پاسخ دینامیکی تیر از روش اختلالی هموتوبی با نتایج شبیه‌سازی عددی.

۴-۱- شبیه‌سازی عددی پاسخ دینامیکی تیر در شرایط به دست آمده برای بروز ناپایداری و رزونانس

به منظور تأیید نتایج به دست آمده برای شرایط پایداری سیستم در رابطه (۲۳)، برای دو مجموعه از مقادیر α و γ ، $(\alpha = 0.5, \gamma = 1.3642)$ و $(\alpha = 0.5, \gamma = 1.4642)$ ، شبیه‌سازی عددی معادله (۷) با ضرایب متناوب (۸) انجام شده است. نقطه اول در ناحیه پایدار و نقطه دوم در ناحیه ناپایدار واقع شده است. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده‌اند. مقادیر پارامترهای تیر به صورت:

$$EI = 5 \times 10^5 \text{ N m}^2, \quad \bar{m} = 10 \text{ kg/m}, \quad l = 20 \text{ m} \quad (29)$$

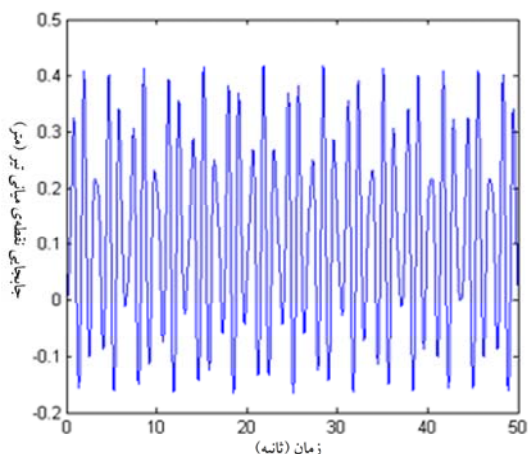
انتخاب شده‌اند. به دلیل نزدیک بودن این دو نقطه به مرز، حتی

در ناحیه پایدار دامنه ارتعاش بزرگ است. این شبیه‌سازی‌های عددی رفتار پایدار و ناپایدار سیستم را در مقادیر انتخاب شده α و γ تأیید می‌کنند.

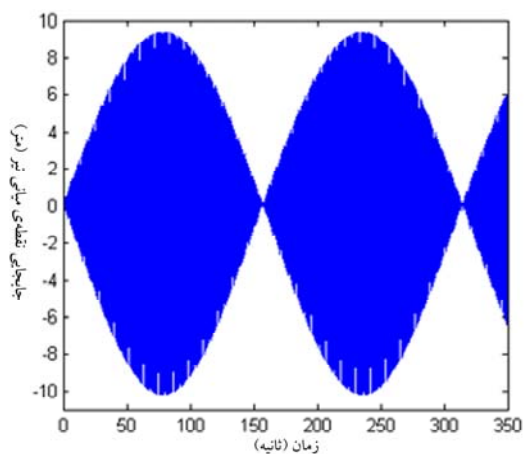
این واقعیت که منحنی‌های شرایط بروز رزونانس با ضابطه (۲۵) از ملاحظه‌ی معادلات تارتیه‌ی p^2 حاصل شده‌اند به این معنی است که این نتایج تقریبی هستند و نقاط واقعی رزونانس در نزدیکی این منحنی‌ها واقع شده‌اند. این نتایج از طریق شبیه‌سازی معادله (۷) با ضرایب متناوب (۸) برای دو مجموعه پارامترهای جرم متحرک $(\alpha = 0.25, \gamma = 0.4364)$ و $(\alpha = 0.25, \gamma = 0.6)$ تأیید می‌شوند. اولین نقطه بر روی منحنی تقریبی $n=1$ واقع شده است؛ در حالی که دومین نقطه در مجاورت آن قرار دارد. به دلیل طبیعت تقریبی منحنی، انتظار یک ضربان در اولین مجموعه از مقادیر جرم متحرک وجود دارد. شکل (۶) این رویداد را تأیید می‌کند و شکل (۷) یک ارتعاش محدود و پایدار را در دومین مجموعه از پارامترهای جسم متحرک نشان می‌دهد.

۴-۲- مقایسه شرایط رزونانس با نتایج به دست آمده در مقالات برای نیروی متحرک

مطالعات متعددی وجود دارند که سرعت رزونانسی حرکت متناوب نیروهای متحرک بر روی تیر با تکیه‌گاه ساده را تعیین می‌کنند. هنگامی که k امین مود در مرحله مجزاسازی استفاده



شکل ۷- پاسخ تیر به جسم متحرک با مشخصات
 $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.6$ (نزدیک به منحنی $n=1$)



شکل ۶- پاسخ تیر به جسم متحرک با مشخصات
 $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.4364$ (واقع شده بر روی منحنی $n=1$)

شکل زیر:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\omega_1^2 + f_3(t)}{1+f_1(t)} & -\frac{f_2(t)}{1+f_1(t)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}(t)} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f_4(t)}{1+f_1(t)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}(t)} \quad \text{or} \quad \dot{\xi} = \mathbf{R}(t)\xi + \mathbf{P}(t) \quad (31)$$

در نظر گرفتن این حقیقت که پایداری داخلی یک سیستم متغیر با زمان خطی نشان‌دهنده پایداری ورودی محدود- خروجی محدود سیستم است، تنها لازم است که بخش همگن معادله (۳۱) در آنالیز پایداری سیستم در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر:

$$\dot{\xi} = \mathbf{R}(t)\xi \quad (32)$$

که در آن $\mathbf{R}(t+T_p) = \mathbf{R}(t)$ است. حل معادله (۳۲) با شرایط اولیه $\xi_0(0) = \xi_0$ به صورت:

$$\xi(t) = \left[\exp\left(\int_0^t \mathbf{R}(\eta) d\eta\right) \right] \xi_0 \quad (33)$$

داده می‌شود. به این ترتیب حل k امین تناوب به صورت زیر داده می‌شود:

$$\xi(kT_p) = C^k \xi_0, \quad C = \exp\left(\int_0^{T_p} \mathbf{R}(\eta) d\eta\right) \quad (34)$$

تئوری فلاکه نشان می‌دهد که اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس C

می‌شود، نتایج به اختصار به صورت:

$$\gamma = \frac{k^2}{2n}, \quad n=1,2,3,\dots, \quad k=1,2,3,\dots \quad (30)$$

ارائه می‌شوند. هنگامی که اولین شکل مود در فرآیند مجزاسازی در نظر گرفته می‌شود ($k=1$) و جرم متحرک به صورت نیروی متحرک مدل می‌شود ($\alpha=0$)، در $n > 0$ نتایج معادله (۳۰) بر معادله (۲۶) منطبق می‌شود. منحنی $n=0$ در معادله (۲۶) در این مقایسه نمی‌تواند در نظر گرفته شود زیرا در این مطالعات فقط شرایط رزونانس نتیجه گرفته شده است. به عبارت دیگر معادله (۲۶) ضمن بازسازی نتایج گذشته، نتایج را برای اثر عبارات اینرسی جرم متحرک اصلاح می‌کند. از این نتایج جدید این مطلب را می‌توان بیان نمود که لحاظ کردن اینرسی جسم متحرک در دینامیک سیستم، علاوه بر معرفی یک ناحیه ناپایدار، یک مجموعه از سرعت‌های رزونانسی جدید که کمتر از سرعت‌های نظیر حاصل شده به وسیله مدل‌سازی جرم متحرک به صورت نیروی متحرک است را معرفی می‌کند.

۳-۴- مقایسه منحنی مرز با نتایج تئوری فلاکه

معادله (۷) با ضرایب (۸) یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متناوب متغیر با زمان با دوره تناوب T_p را نشان می‌دهد. پایداری این معادله می‌تواند از طریق تئوری فلاکه [۲۶] مطالعه شود. با انتقال این معادله به مدل فضا- حالت به

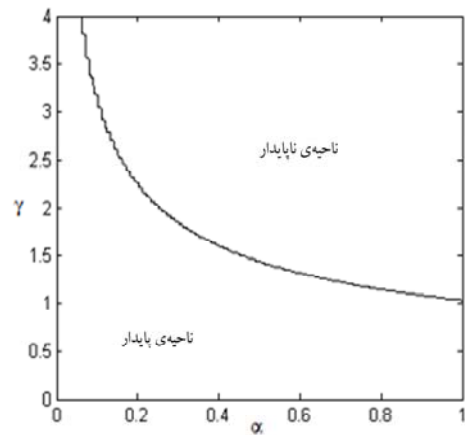
در داخل دایره واحد در صفحه مختلط قرار داشته باشند، آنگاه سیستم دارای پایداری مجانبی^۵ است. اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه در خارج از دایره واحد باشد، سیستم ناپایدار خواهد بود. اگر مقادیر ویژه بر روی دایره واحد قرار داشته باشند، سیستم می‌تواند ناپایدار و یا پایدار حاشیه‌ای^۶ باشد.

با به‌کارگیری مقادیر (۲۹) به عنوان پارامترهای تیر، اثر سرعت و جرم جسم متحرک بر روی پایداری سیستم از طریق تغییر α و γ بررسی شده است. درحالی‌که تمام مؤلفه‌های اینرسی جسم متحرک در آنالیز لحاظ می‌شوند، نتایج به‌دست آمده در صفحه $\alpha-\gamma$ در شکل (۸) نشان داده شده‌اند. این نتایج بر نتایج به‌دست آمده به‌وسیله ماکرتیچ [۲۷] منطبق هستند. شکل (۹) منحنی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه $\alpha-\gamma$ که از تئوری فلاکه و روش اختلالی هموتوبی حاصل شده‌اند را با هم مقایسه می‌کند. این مقایسه نشان می‌دهد که روش اختلالی هموتوبی، حتی تا رتبه p^2 ، نتایج دقیقی را معرفی می‌کند.

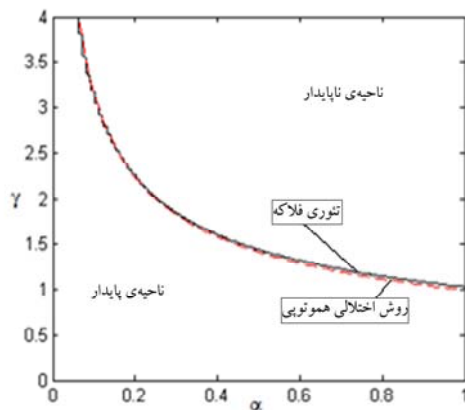
نکته قابل توجه اینکه با نادیده گرفتن عبارات اینرسی غیرخطی جسم متحرک، به عبارت دیگر در شرایط $f_2(t) = f_3(t) = 0$ ، نتایج کاملاً متفاوت و نادرستی حاصل می‌شوند. در این حالت نتیجه به‌دست آمده از تئوری فلاکه در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

۴-۴- مقایسه پاسخ دینامیکی تیر از روش اختلالی هموتوبی با نتایج شبیه‌سازی عددی

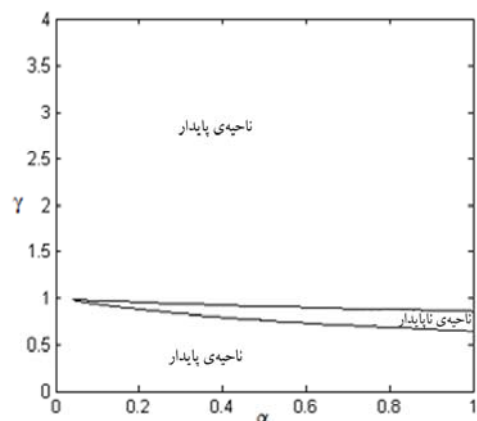
در آخرین گام ارزیابی نتایج، حل نیمه تحلیلی حاصل شده برای جابه‌جایی در نقطه میانی تیر از روش اختلالی هموتوبی تا رتبه p^1 ، $z_1(t) = \phi_1(l/2)(A_0(t) + A_1(t))$ و رتبه p^2 ، $z_2(t) = \phi_1(l/2)(A_0(t) + A_1(t) + A_2(t))$ با حل عددی نتیجه شده از شبیه‌سازی عددی معادله (۷) با ضرایب متناوب (۸) مقایسه شده‌اند. در روند انجام مقایسه، مقادیر مشخص شده در معادله (۲۹) به‌عنوان مشخصات تیر و مشخصات $M = 20\text{kg}$, $v = 10\text{m/s}$ برای جرم متحرک در نظر گرفته شده



شکل ۸- مرز پایداری حاصل از تئوری فلاکه با لحاظ تمام مؤلفه‌های اینرسی جسم متحرک



شکل ۹- مقایسه مرز پایداری به‌دست آمده از تئوری فلاکه (خط پر) و روش اختلالی هموتوبی (خط چین)



شکل ۱۰- مرز پایداری حاصل از تئوری فلاکه با لحاظ فقط مؤلفه اینرسی خطی جرم متحرک

۵-۱- مدل سازی دینامیکی سیستم

شکل (۱۲) سیستم تیر-جرم متحرکی را نشان می دهد که حرکت جرم متحرک بر روی تیر دارای اصطکاک است. ضریب اصطکاک بین جسم متحرک و تیر با μ نشان داده شده است. سایر پارامترها نظیر پارامترهای شکل (۱) تعریف می شوند. فرض می شود که جسم متحرک بر روی تیر در حال لغزش است و در نتیجه اعمال نیروی جلوبرنده ای مساوی و مخالف جهت نیروی اصطکاک به جسم متحرک، جسم متحرک دارای سرعت ثابت است و نیز فرض می شود که جسم متحرک در تمام مدت زمان حرکت از روی تیر، با آن در تماس است. مقدار نیروی اصطکاک در هر لحظه بین جسم متحرک و تیر به صورت $F_f = \mu N$ مدل شده است که در آن N عکس العمل عمودی سطح در محل تماس با جسم متحرک است. نیروی N با در نظر گرفتن مؤلفه های شتاب خطی و غیرخطی جرم متحرک به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$N = M(g - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} - v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) \delta(x - vt) \quad (35)$$

اصطکاک بین جسم متحرک و تیر سبب ایجاد یک نیروی محوری متحرک می شود که جهت آن همراه با جهت نیروهای عکس العمل محوری تکیه گاهی p_1 و p_2 در شکل (۱۳) نشان داده شده است.

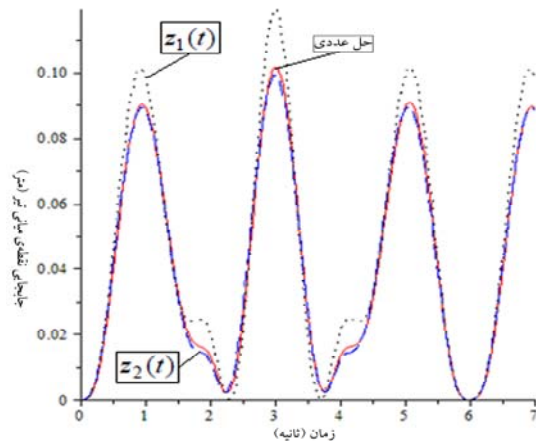
مبتنی بر روش ارزیابی عکس العمل ها در میله های نامعین استاتیکی، مقدار عکس العمل های محوری تکیه گاهی p_1 و p_2 به صورت زیر قابل ارزیابی هستند:

$$p_1 = (1 - \frac{vt}{l}) F_f \quad (36)$$

$$p_2 = \frac{vt}{l} F_f \quad (37)$$

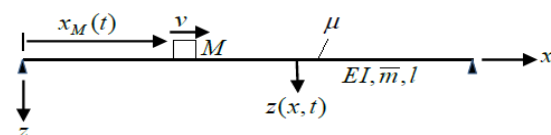
با استفاده از اصل هامیلتون، معادله پاره ای حاکم بر ارتعاشات تیر تحت اثر جرم متحرک شکل (۱۲) به صورت زیر به دست می آید:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) - \frac{\partial}{\partial x} (P \frac{\partial z}{\partial x}) = M(g - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} - v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) \delta(x - vt) \quad (38)$$

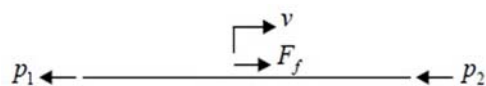


شکل ۱۱- مقایسه حل به دست آمده از روش اختلالی هموتوپ

تا رتبه p^1 $z_1(t)$ (نقطه چین) و رتبه p^2 $z_2(t)$ (خط چین) با شبیه سازی عددی (خط پر)



شکل ۱۲- تیر تحت اثر جسم متحرک دارای اصطکاک با تیر



شکل ۱۳- نمایش مجموعه نیروهای محوری وارد به

تیر شکل (۱۲)

است. شکل (۱۱) این مقایسه را نشان می دهد. ملاحظه می شود که بسط تا رتبه p^2 نتایج بسیار دقیقی به دست می دهد. بنابراین آنالیز تا رتبه p^2 در به دست آوردن یک حل نیمه تحلیلی کفایت می کند.

۵- آنالیز پایداری سیستم تیر-جرم متحرک با لحاظ

اصطکاک بین تیر و جرم متحرک

در تکمیل مطالعه مسئله تیر تحت اثر جرم متحرک، در این بخش به بررسی اثر اصطکاک بین تیر و جرم متحرک بر روی رفتار دینامیکی این سیستم پرداخته می شود.

$$\Omega_i = 0.5\mu Mv^2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left[\int_0^{vt} \phi'_k(x) \phi'_m(x) dx - \frac{vt}{l} \int_0^1 \phi'_k(x) \phi'_m(x) dx \right] q_k(t) q_m(t) \phi_i''(vt) + \mu Mv \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left[\left(\frac{v}{l} \right) \int_0^1 \phi'_k(x) \phi'_m(x) dx - v \phi'_k(vt) \phi'_m(vt) \right] q_k(t) q_m(t) - \left\{ \int_0^{vt} \phi'_k(x) \phi'_m(x) dx - \frac{vt}{l} \int_0^1 \phi'_k(x) \phi'_m(x) dx \right\} \times (\dot{q}_k q_m + q_k \dot{q}_m) \phi_i'(vt)$$

$$F_i = Mg \phi_i(vt) \quad (41)$$

با انتخاب یک شکل مود تابع ویژه نرمال (۵)، معادله حاکم بر مختص مودال تیر شکل (۱۲) برحسب پارامترهای معرفی شده در (۶) به صورت زیر به دست می آید:

$$(1 + \alpha(1 - \cos(2\bar{\omega}_1 t))) \ddot{q} + (2\alpha\bar{\omega}_1 \sin(2\bar{\omega}_1 t)) \dot{q} + \left(\omega_1^2 - \alpha\bar{\omega}_1^2(1 - \cos(2\bar{\omega}_1 t)) + \frac{\pi\mu\alpha g}{2l} \sin(2\bar{\omega}_1 t) \right) q - \frac{\pi\mu\alpha}{(2l)^{1.5}} (\cos(\bar{\omega}_1 t) - \cos(3\bar{\omega}_1 t)) q \ddot{q} + \frac{\pi\mu\alpha\bar{\omega}_1^2}{(2l)^{1.5}} (3\cos(\bar{\omega}_1 t) + \cos(3\bar{\omega}_1 t) - \frac{\pi}{(2l)^{1.5}} (1 - \cos(4\bar{\omega}_1 t))) q^2 = \sqrt{2l}\alpha g \sin(\bar{\omega}_1 t) \quad (42)$$

همان گونه که ملاحظه می شود، معادله (۴۲) یک معادله متغیر با زمان غیرخطی است که حل آن با شرایط اولیه مشخص، سبب تعیین مختص مودال نظیر شکل مود اول تیر می شود و سپس پاسخ تیر در نقطه مورد نظر از رابطه (۲) قابل ارزیابی است. از معادله (۴۲) ملاحظه می شود که خصوصیت غیرخطی این معادله به دلیل در نظر گرفتن اصطکاک بین تیر و جرم متحرک در معادلات دینامیک سیستم است و در صورت لحاظ کردن $\mu = 0$ در آن، معادله (۴۲) به معادله (۷) ساده می شود.

تیر تحت اثر یک دسته از جرم های متحرک در نظر گرفته می شود؛ به این صورت که بلافاصله پس از خروج یک جسم از روی تیر، جسم دیگری با همان جرم و سرعت بر روی تیر وارد می شود. بنابراین، در این شرایط، تیر تحت اثر تحریکی با دوره

که در این رابطه P نیروی داخلی محوری تیر است که در نتیجه وجود نیروی اصطکاک بین جسم متحرک و تیر ایجاد شده است. با توجه به مقادیر عکس العمل های تکیه گاهی (۳۶) و (۳۷) و نمایش نیروی کششی با علامت مثبت و نیروی فشاری با علامت منفی، نیروی داخلی محوری P به صورت زیر تعیین می شود:

$$P = \begin{cases} (1 - \frac{vt}{l}) F_f & 0 < x < vt \\ -\frac{vt}{l} F_f & vt < x < l \end{cases} \quad (39)$$

مجدداً مبتنی بر روش گالرکین، معادله پاره ای (۳۸) به یک معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر مختصات مودال مسئله مورد مطالعه قابل تبدیل است. این معادله به صورت زیر قابل ارائه است:

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}(t, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda}(t, \mathbf{q}) \mathbf{q} + \mathbf{\Omega}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}(t) \quad (40)$$

که در آن \mathbf{q} بردار مختص مودال است و درایه های ضرایب ماتریسی $\mathbf{T}(t)$ ، $\mathbf{Y}(t)$ ، $\mathbf{\Lambda}(t, \mathbf{q})$ و $\mathbf{\Omega}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ و بردار $\mathbf{F}(t)$ به صورت زیر مشخص می شوند:

$$T_{ij} = \bar{m} \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx + M \phi_j(vt) \left[\phi_i(vt) - \mu \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{vt} \phi'_i(x) \phi'_k(x) dx - \frac{vt}{l} \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_k(x) dx \right\} q_k(t) \right]$$

$$Y_{ij} = 2Mv \phi'_j(vt) \left[\phi_i(vt) - \mu \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{vt} \phi'_i(x) \phi'_k(x) dx - \frac{vt}{l} \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_k(x) dx \right\} q_k(t) \right]$$

$$\Lambda_{ij} = EI \int_0^1 \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx + \mu Mg \left\{ \int_0^{vt} \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx - \frac{vt}{l} \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx \right\} + Mv^2 \phi_j''(vt) \left[\phi_i(vt) - \mu \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{vt} \phi'_i(x) \phi'_k(x) dx - \frac{vt}{l} \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_k(x) dx \right\} q_k(t) \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{7n}}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1(1-n))^2} \cos 2\gamma\omega_1(1-n)t + K_8 \left(\frac{\sin(2\gamma\omega_1 + \omega)t}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1 + \omega)^2} + \frac{\sin(2\gamma\omega_1 - \omega)t}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1 - \omega)^2} \right) + \frac{K_9}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1)^2} \sin(2\gamma\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} K_{10n} \left(\frac{\sin 2\gamma\omega_1(1+n)t}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1(1+n))^2} + \frac{\sin 2\gamma\omega_1(1-n)t}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1(1-n))^2} \right) \quad (46)$$

که مجموعه ضرایب معادله A_2 در پیوست معرفی شده‌اند. در ادامه آنالیز پایداری، تا بسط معادلات تا رتبه p^3 فرکانس ارتعاشات ω به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\omega = \omega_1 \sqrt{\frac{1 - \alpha\gamma^2 + \frac{1}{8}\alpha^2\gamma^2 + 0.8488 \frac{\mu\alpha^2 g}{l\omega_1^2}}{1 + \alpha - \frac{3}{8}\alpha^2}} \quad (47)$$

در بازه مورد توجه $0 < \alpha < 1$ و $0 < \gamma < 4$ ، مبتنی بر شرایطی که سبب منفی شدن مقدار زیر رادیکال عبارت (47) می‌شود شرایط ناپایداری تعیین شده و ضابطه مرز بین ناحیه پایدار و ناپایدار به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + 0.8488 \frac{\mu\alpha^2 g}{l\omega_1^2}}{\alpha - \frac{\alpha^2}{8}}} \quad (48)$$

که در این رابطه اثر مقدار ضریب اصطکاک از طریق عبارت $0.8488\mu\alpha^2 g / l\omega_1^2$ بر روی ضابطه مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار مشهود است. با در نظر گرفتن مشخصات (29) در تیر مورد مطالعه، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از تحلیل پایداری تا رتبه p^2 (معادله (23)) و حاصل از تحلیل پایداری تا رتبه p^3 (معادله (48)) به ازای مقادیر $\mu = 0$ و $\mu = 0.5$ در شکل (14) نمایش داده شده‌اند. علاوه بر این نمودارها، در شکل (14) منحنی مرزی به دست آمده توسط روش تئوری فلاکه در شکل (8) مجدداً رسم شده است. مقایسه این نمودارها نشان دهنده نزدیکی نتایج به دست آمده در تحلیل پایداری تا رتبه p^2 و رتبه p^3 به ازای مقدار $\mu = 0$ با نتیجه حاصل از تئوری فلاکه است؛ که این امر مبین دقت خوب

تناوب $T_p = 1/v$ قرار گرفته و ضرایب معادله (42) توابعی متناوب با دوره تکرار حرکت جرم از روی تیر خواهند بود. بر این اساس، با استفاده از بسط فوریه ضرایب معادله (42)، معادله حاکم بر مختصات مودال در مسئله مورد مطالعه به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha(1 - \cos(2\bar{\omega}_1 t)))\ddot{q} + (2\alpha\bar{\omega}_1 \sin(2\bar{\omega}_1 t))\dot{q} + \\ & \left(\omega_1^2 - \alpha\bar{\omega}_1^2(1 - \cos(2\bar{\omega}_1 t)) + \frac{\pi\mu\alpha g}{2l} \sin(2\bar{\omega}_1 t) \right) q - \\ & \frac{\pi\mu\alpha}{(2l)^{1.5}} \left(\frac{8}{3\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(n\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{-1+4n^2} + \frac{3}{-9+4n^2} \right) \cos(2n\bar{\omega}_1 t) \right) q\ddot{q} + \\ & \frac{\pi\mu\alpha\bar{\omega}_1^2}{(2l)^{1.5}} \left(\frac{16}{3\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\cos(n\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{-1+4n^2} - \frac{1}{-9+4n^2} \right) \cos(2n\bar{\omega}_1 t) - \right. \\ & \left. \frac{\pi}{(2l)^{1.5}} (1 - \cos(4\bar{\omega}_1 t)) \right) q^2 = \sqrt{2l}\alpha g \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2n\bar{\omega}_1 t) \right) \quad (43) \end{aligned}$$

5-2- آنالیز شرایط پایداری و شرایط بروز رزونانس

در روندی مشابه با آنالیز پایداری سیستم تیر-جرم متحرک بدون اصطکاک، با در نظر گرفتن حل معادله (43) به صورت (12) و اعمال روش اختلالی هموتوپی به این معادله، فرکانس ارتعاشات تیر تحت اثر جرم متحرک ω و ضابطه مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار حاصل شده تا رتبه p^2 به ترتیب همانند روابط (22) و (23) حاصل می‌شوند و حل‌های A_0 ، A_1 و A_2 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A_0 = 0 \quad (44)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{8l}\alpha g}{\pi\omega^2} (1 - \cos\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega^2 (\cos 2n\gamma\omega_1 t - \cos\omega t)}{(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2)}) \quad (45)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & K_{11} \cos\omega t + K_{12} \sin\omega t + \frac{K_1}{\omega^2} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{2n}}{\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2} \cos 2n\gamma\omega_1 t - \frac{K_3}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1 + \omega)^2} \times \\ & \cos(2\gamma\omega_1 + \omega)t - \frac{K_4}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1 - \omega)^2} \cos(2\gamma\omega_1 - \omega)t - \\ & \frac{K_5}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1)^2} \cos 2\gamma\omega_1 t - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{6n}}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1(n+1))^2} \cos 2\gamma\omega_1(n+1)t - \end{aligned}$$

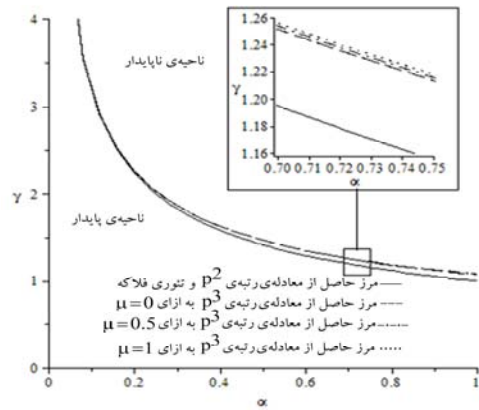
نتایج به دست آمده در این مطالعه است. همچنین مقایسه منحنی‌های مربوط به ضرایب اصطکاک $\mu = 0$ ، $\mu = 0.5$ و $\mu = 1$ در شکل (۱۴) نشان می‌دهد که مقدار ضریب اصطکاک بین جرم متحرک و تیر اثر اندکی بر روی منحنی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار سیستم مورد مطالعه دارد. در ادامه آنالیز، مکان هندسی نقاطی از صفحه $\alpha - \gamma$ که مبتنی بر معادله رتبه p^3 ، در آنها انتظار بروز رزونانس وجود دارد، به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + 0.8488 \frac{\mu \alpha^2 g}{I \omega_1^2}}{4n^2(1 + \alpha - \frac{3}{8}\alpha^2) + (\alpha - \frac{\alpha^2}{8})}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

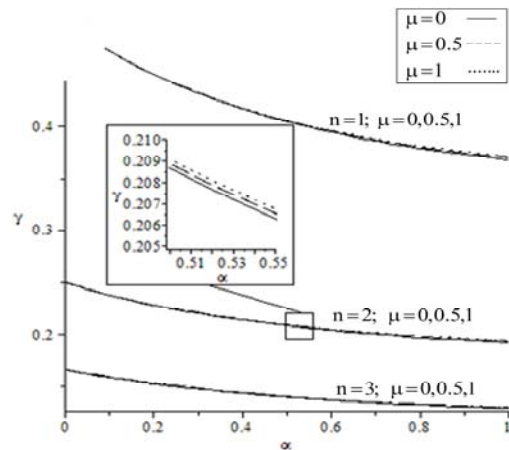
مکان هندسی نقاطی از صفحه $\alpha - \gamma$ که توسط (۴۹) به ازای $n = 1, 2, 3$ و $\mu = 0, 0.5, 1$ مشخص می‌شود در شکل (۱۵) نشان داده شده است. همانند منحنی مرز پایداری، از رابطه (۴۹) ملاحظه می‌گردد که میزان اثر اصطکاک بر روی مکان هندسی شرایط بروز رزونانس به مقدار $0.8488 \mu \alpha^2 g / I \omega_1^2$ بستگی دارد. مقایسه منحنی‌های مربوط به ضرایب اصطکاک $\mu = 0$ ، $\mu = 0.5$ و $\mu = 1$ در شکل (۱۵) نشان می‌دهد که مقدار ضریب اصطکاک بین جرم متحرک و تیر اثر اندکی بر روی منحنی‌های مکان هندسی شرایط بروز رزونانس سیستم مورد مطالعه دارد. مجموع شرایط ناپایداری و بروز رزونانس برای ضریب اصطکاک $\mu = 0.5$ در شکل ۱۶ نشان داده شده است.

۳-۵- شبیه‌سازی عددی پاسخ دینامیکی تیر در شرایط به دست آمده در بروز ناپایداری و رزونانس

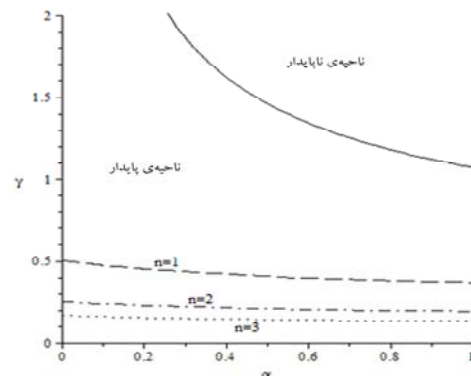
در این بخش با ارائه نتایج شبیه‌سازی رفتار دینامیکی سیستم تیر-جسم متحرک با لحاظ کردن اصطکاک بین تیر و جسم متحرک، به بررسی نتایج به دست آمده در بخش ۵ پرداخته شده است. به منظور ارزیابی و تأیید نتیجه به دست آمده در آنالیز پایداری که در شکل (۱۴) ارائه شده است، با در نظر گرفتن ضریب اصطکاک $\mu = 0.5$ ، برای جرم متحرک با دو مشخصه



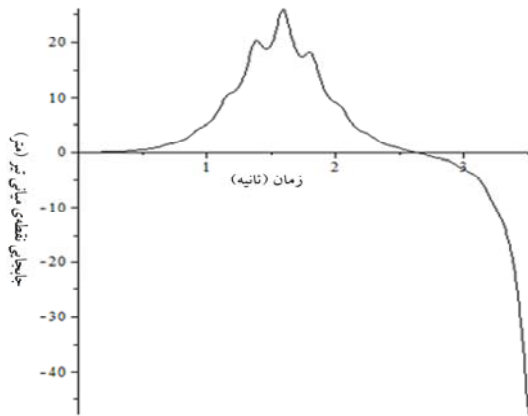
شکل ۱۴- اثر ضریب اصطکاک بین جسم متحرک و تیر بر روی مرز بین ناحیه پایدار و ناپایدار حاصل از معادله هموتوبی رتبه p^3 و مقایسه آنها با مرز حاصل از معادله هموتوبی رتبه p^2 و مرز حاصل شده از روش تئوری فلاکه.



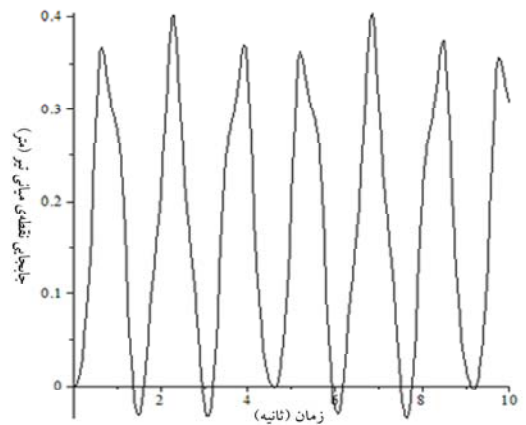
شکل ۱۵- مکان هندسی نقاطی از صفحه $\alpha - \gamma$ که مبتنی بر معادله (۴۹) در آنها انتظار بروز رزونانس وجود دارد.



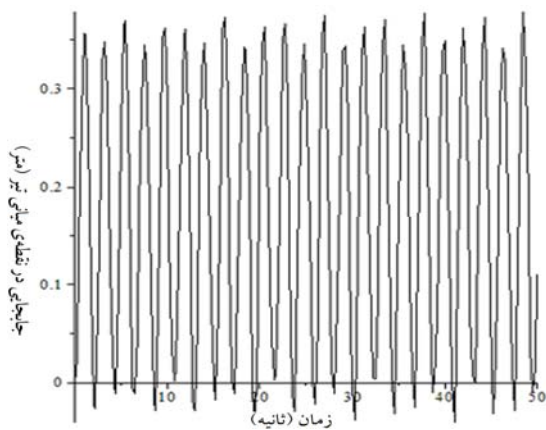
شکل ۱۶- مجموع شرایط ناپایداری و بروز رزونانس حاصل از معادله هموتوبی رتبه p^3 با لحاظ ضریب اصطکاک $\mu = 0.5$ بین جسم متحرک و تیر



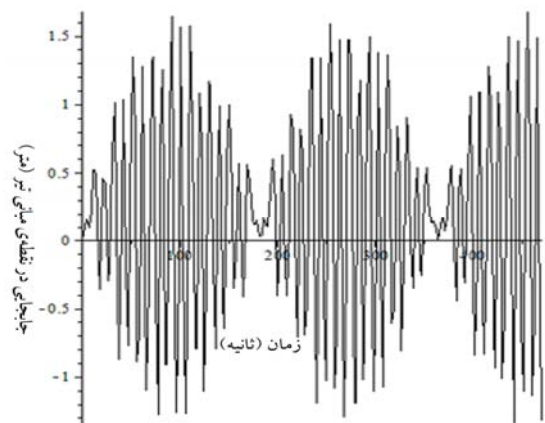
شکل ۱۸- پاسخ تیر به جسم متحرک با مشخصات $\alpha = 0.3$ و $\mu = 0.5$ و $\gamma = 2.5$ (واقع در ناحیه ناپایدار)



شکل ۱۷- پاسخ تیر به جسم متحرک با مشخصات $\alpha = 0.3$ و $\mu = 0.5$ و $\gamma = 1$ (واقع در ناحیه پایدار)



شکل ۲۰- پاسخ تیر به جسم متحرک با مشخصات $\alpha = 0.4$ و $\mu = 0.5$ و $\gamma = 0.21419$ (در مجاورت نقطه انتخابی در شکل (۱۹))



شکل ۱۹- پاسخ تیر به جسم متحرک با مشخصات $\alpha = 0.4$ و $\mu = 0.5$ و $\gamma = 0.21419$ (واقع بر روی منحنی $n = 2$ از شکل (۱۵))

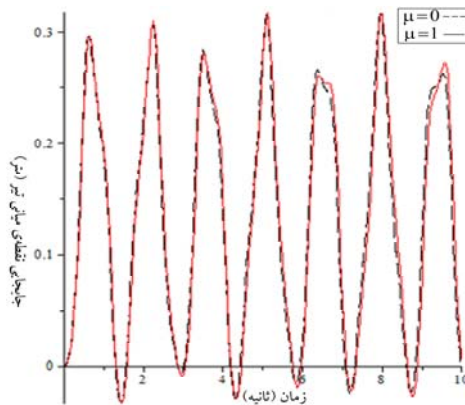
(۲۰) نشان داده شده است. انتظار به دلیل تقریبی بودن نتایج تا رتبه p^3 ، رفتار سیستم در نقطه واقع بر روی منحنی رزونانس در شکل (۱۹) ضربان را نشان می‌دهد که این امر بیانگر نزدیک بودن نقطه انتخابی به شرایط واقعی بروز رزونانس است.

۴-۵- بررسی اثر اصطکاک جرم متحرک با تیر بر روی پاسخ دینامیکی تیر

به منظور بررسی اثر اصطکاک بین تیر و جسم متحرک بر روی پاسخ دینامیکی تیر، در دو حالت $\mu = 0$ و $\mu = 1$ در شکل (۲۱) پاسخ نقطه میانی تیر مورد مطالعه تحت اثر جرم‌های

متفاوت $\alpha = 0.3$ و $\gamma = 1$ (واقع در ناحیه پایدار) و $\alpha = 0.3$ و $\gamma = 2.5$ (واقع در ناحیه ناپایدار) پاسخ نقطه میانی تیر به ترتیب در شکل‌های (۱۷) و (۱۸) نشان داده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود نتایج حاصل شده مؤید نتایج به‌دست آمده در تحلیل پایداری هستند.

به منظور ارزیابی نتیجه به‌دست آمده در شرایط بروز رزونانس که در شکل (۱۵) ارائه شده است، پاسخ نقطه میانی تیر مورد مطالعه در نقطه $\alpha = 0.4$ و $\gamma = 0.21419$ واقع بر روی منحنی $n = 2$ مربوط به $\mu = 0.5$ و در نقطه $\alpha = 0.4$ و $\gamma = 0.26419$ در مجاور آن به ترتیب در شکل‌های (۱۹) و



شکل ۲۱- مقایسه پاسخ تیر به جسم متحرک به مشخصات $\alpha=0.25$ و $\gamma=1$ در دو حالت $\mu=0$ و $\mu=1$

تیر و نیروی متحرک که در آن اثر اینرسی جرم متحرک نادیده گرفته شده است نشان داده شد. دقت حل تا رتبه p^2 ، منحنی‌های رزونانسی و مرز پایداری، با شبیه‌سازی‌های عددی رفتار سیستم مقایسه شدند.

در حالت لحاظ کردن اصطکاک و تمام مؤلفه‌های شتاب جرم متحرک، نتایج نشان دادند که معادله مجزا شده سیستم تیر-جرم متحرک یک معادله متغیر با زمان غیرخطی است و روش اختلالی هموتوپیی قادر است از طریق تعیین ضابطه منحنی مرز بین ناحیه پایدار و ناپایدار و ضابطه مکان هندسی نقاط نزدیک به شرایط بروز رزونانس در صفحه جرم-سرعت جسم متحرک، رفتار دینامیکی این سیستم را مشخص کند. علاوه بر این، نتایج به دست آمده نشان دادند که اثر اصطکاک بین جرم و تیر بر روی نتایج آنالیز پایداری و شرایط بروز رزونانس به مقدار $0.8488\mu\alpha^2g/l\omega_1^2$ بستگی دارد.

متحرک با مشخصات $\alpha=0.25$ و $\gamma=1$ نشان داده شده است. نتیجه نشان می‌دهد که اثر اصطکاک بر روی پاسخ دینامیکی کوچک است.

۶- نتیجه گیری

پایداری دینامیکی یک تیر اویلر-برنولی با تکیه‌گاه ساده تحت اثر حرکت جرم‌های متحرک در دو حالت لحاظ و عدم لحاظ نیروی اصطکاک بین تیر و جرم متحرک با استفاده از روش اختلالی هموتوپیی مورد مطالعه قرار گرفت. در هر دو حالت نشان داده شد که در صفحه جرم-سرعت جرم متحرک، یک منحنی وجود دارد که نواحی پایدار و ناپایدار را از هم جدا می‌کند. یک عبارت نیمه تحلیلی به عنوان ضابطه این منحنی به دست آورده شد. علاوه بر این، آنالیز اختلالی هموتوپیی به یک مجموعه جدید از منحنی‌ها در صفحه جرم-سرعت جرم متحرک که نشان‌دهنده مکان هندسی شرایط بروز رزونانس بودند هدایت نمود.

در حالت عدم لحاظ اصطکاک، نتیجه آنالیز پایداری از طریق مقایسه با نتایج تئوری فلاکه تأیید شد. علاوه بر این نشان داده شد که اثر عبارات اینرسی غیرخطی جرم متحرک بسیار مهم است و نادیده گرفتن آن سبب نتایج کاملاً اشتباه می‌شود. با لحاظ کردن تنها یک مود و صرف نظر نمودن از اینرسی جرم متحرک، هم پوشانی نتایج به دست آمده با نتایج مطالعات گذشته

ضرایب عبارت (۲۰) به صورت زیر به دست می آیند:

$$K_8 = \frac{\mu(\alpha g)^2}{\sqrt{2l}} \left(\frac{1}{\omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2)} \right)$$

$$K_9 = -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\mu(\alpha g)^2}{\omega^2}$$

$$K_{10n} = -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\mu(\alpha g)^2}{(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2)}$$

$$K_{11} = -\frac{K_1}{\omega^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{2n}}{\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2} + \frac{K_3}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1 + \omega)^2} + \frac{K_4}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1 - \omega)^2} + \frac{K_5}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1)^2} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{6n}}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1(1+n))^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{7n}}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1(1-n))^2}$$

$$K_{12} = -\frac{1}{\omega^2} \left(K_8 \left(\frac{(2\gamma\omega_1 + \omega)}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1 + \omega)^2} + \frac{(2\gamma\omega_1 - \omega)}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1 - \omega)^2} \right) + \frac{2\gamma\omega_1 K_9}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\gamma\omega_1 K_{10n} \left(\frac{1+n}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1(1+n))^2} + \frac{1-n}{\omega^2 - (2\gamma\omega_1(1-n))^2} \right) \right)$$

(پ-۲)

$$K_1 = \alpha a_0, \quad K_2 = \frac{\alpha a_0 \bar{\omega}_1^2}{\omega^2 - (2\bar{\omega})^2}$$

$$K_3 = \frac{0.5\alpha c_0(\omega - \bar{\omega})^2}{\omega^2 - (2\bar{\omega}_1 - \omega)^2}, \quad K_4 = \frac{0.5\alpha c_0(\omega + \bar{\omega})^2}{\omega^2 - (2\bar{\omega}_1 + \omega)^2}$$

$$K_{5n} = \alpha a_n, \quad K_{6n} = \frac{2\alpha a_n (\bar{\omega}_1(n-0.5))^2}{\omega^2 - (2\bar{\omega}_1(n-1))^2}$$

$$K_{7n} = \frac{2\alpha a_n (\bar{\omega}_1(n+0.5))^2}{\omega^2 - (2\bar{\omega}_1(n+1))^2}$$

(پ-۱)

و ضرایب عبارت (۴۶) نیز به صورت زیر به دست می آیند:

$$K_1 = -\frac{2\sqrt{2l}\alpha^2 g}{\pi}, \quad K_{2n} = -\frac{4\sqrt{2l}\alpha^2 g}{\pi(1-4n^2)}$$

$$K_3 = -\frac{\sqrt{2l}\alpha^2 g}{\pi} (\gamma\omega_1 + \omega)^2 \left(\frac{1}{\omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2)} \right)$$

$$K_4 = -\frac{\sqrt{2l}\alpha^2 g}{\pi} (\gamma\omega_1 - \omega)^2 \left(\frac{1}{\omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2)} \right)$$

$$K_5 = \frac{2\sqrt{2l}g(\alpha\gamma\omega_1)^2}{\pi\omega^2}$$

$$K_{6n} = \frac{2\sqrt{2l}g((2n+1)\alpha\gamma\omega_1)^2}{\pi(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2)}$$

$$K_{7n} = \frac{2\sqrt{2l}g((2n-1)\alpha\gamma\omega_1)^2}{\pi(1-4n^2)(\omega^2 - (2n\gamma\omega_1)^2)}$$

واژه نامه

5. asymptotically stable
6. marginally stable

3. dirac delta function
4. Galerkin method

1. homotopy perturbation method
2. Floquet theory

مراجع

2. Yau, J. D., "Dynamic Response Analysis of Suspended Beams Subjected to Moving Vehicles and Multiple Support Excitations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 325, pp. 907-922, 2009.

1. Yau, J. D., and Fryba, L., "Responses of Suspended Beam Due to Moving Loads and Vertical Seismic Ground Excitation", *Engineering Structures*, Vol. 29, pp. 3255-3262, 2007.

16. Pirbodaghi, T., Ahmadian, M. T., and Fesanghary, M., "On the Homotopy Analysis Method for Non-Linear Vibration of Beams", *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, pp. 143-148, 2009.
17. Ganji, S. S., Ganji, D. D., Sfahani, M. G., and Karimpour, S., "Application of AFF and HPM to the Systems of Strongly Nonlinear Oscillation", *Current Applied Physics*, Vol. 10, pp. 1317-1325, 2010.
18. Cveticanin, L., "Application of Homotopy-Perturbation to Non-Linear Partial Differential Equations", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 40, pp. 221-228, 2009.
19. Temimi, H., Ansari, A. R., and Siddiqui, A. M., "An Approximate Solution for the Static Beam Problem and Nonlinear Integro-Differential Equations", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 62, pp. 3132-3139, 2011.
20. Wang, J., Chen, J. K., and Liao, S., "An Explicit Solution of the Large Deformation of a Cantilever Beam under Point Load at the Free Tip", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 212, pp. 320-330, 2008.
21. Hoseini, S. H., Pirbodaghi, T., Ahmadian, M. T., and Farrahi, G. H., "On the Large Amplitude Free Vibrations of Tapered Beams: An Analytical Approach", *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, pp. 892-897, 2009.
22. Rafiq, A., Malik, M. Y., and Abbasi, T., "Solution of Nonlinear Pull-In Behavior in Electrostatic Micro-Actuators by Using He's Homotopy Perturbation Method", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 59, pp. 2723-2733, 2010.
23. Pirbodaghi, T., Fesanghary, M., and Ahmadian, M. T., "Non-Linear Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Resting on Nonlinear Elastic Foundations", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 348, pp. 353-368, 2011.
24. Ozis, T., and Yildirim, A., "A Comparative Study of He's Homotopy Perturbation Method for Determining Frequency-Amplitude Relation of a Nonlinear Oscillator with Discontinuities", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 8, pp. 243-248, 2007.
25. Dehestani, M., Mofid, M. and Vafai, A., "Investigation of Critical Influential Speed for Moving Mass Problems on Beams", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 33, pp. 3885-3895, 2009.
26. D'Angelo, H., *Linear Time-Varying System: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
27. Mackertich, S., "Dynamic Stability of a Beam Excited by a Sequence of Moving Mass Particles", *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 115, pp. 1416-1419, 2004.
3. Garinei, A., and Risitano, G., "Vibration of Railway Bridges for High Speed Trains under Moving Loads Varying in Time", *Engineering Structures*, Vol. 30, pp. 724-732, 2008.
4. Ju, S. H., Lin, H. T., and Huang, J. Y., "Dominant Frequencies of Train-Induced Vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 247-259, 2009.
5. Yang, Y. B., Wu, C. M., and Yau, J. D., "Dynamic Responses of a Horizontally Curved Beam Subjected to Vertical and Horizontal Moving Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, pp. 519-537, 2001.
6. Yang, Y. B., Lin, C. L., Yau, J. D., and Chang, D. W., "Mechanism of Resonance and Cancellation for Train-Induced Vibrations on Bridges with Elastic Bearings", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 269, pp. 345-360, 2004.
7. Yau, J. D., and Yang, Y. B., "Vertical Accelerations of Simple Beams Due to Successive Loads Traveling at Resonant Speeds", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, pp. 210-228, 2006.
8. Ruzzene, M., and Baz, A., "Dynamic Stability of Periodic Shells with Moving Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, pp. 830-844, 2006.
9. Verichev, S. N., and Metrikine, A. V., "Instability of a Bogie Moving on Flexibly Supported Timoshenko Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 253, pp. 635-668, 2002.
10. Verichev, S. N., and Metrikine, A. V., "Instability of Vibrations of Mass That Moves Uniformly Along a Beam on a Periodically Inhomogeneous Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, pp. 901-925, 2003.
11. Wang, J. F., Lin, C. C., and Chen, B. L., "Vibration Suppression for High-Speed Railway Bridges Using Tuned Mass Dampers", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 465-491, 2003.
12. Visweswara Rao, G., "Linear Dynamics of an Elastic Beam under Moving Loads", *Journal of Vibration and Acoustic*, Vol. 122, pp. 281-289, 2000.
13. Wang, Y. M., "The Dynamic Analysis of a Beam-Mass System Due to the Occurrence of Two-Component Parametric Response", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258, pp. 951-967, 2002.
14. Zheng, D. Y., and Fan, S. C., "Instability of Vibration of a Moving-Train-and-Rail Coupling System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, pp. 243-259, 2002.
15. Ahmadian, M. T., Mojahedi, M., and Moenfarid, H., "Free Vibration Analysis of a Nonlinear Beam using Homotopy and Modified Lindstedt-Poincare Methods", *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 1, pp. 29-36, 2009.