

کاربرد و مقایسه روش‌های بولتزمن با شبکه‌بندی غیریکنواخت

در شبیه‌سازی جریان در داخل میکرو حفره و میکرو کانال

احمد رضا رحمتی* و سینا نیازی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۹/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۰۸/۱۸)

چکیده - در این تحقیق برای اولین بار مقایسه‌ی روش‌های بولتزمن شبکه‌ای با ضریب تخفیف منفرد، چندتایی و انتروپی بر روی شبکه‌بندی غیریکنواخت انجام شده و کاربرد این روش‌ها در شبیه‌سازی میکروجرایان‌های همدمای دو بعدی در یک حفره، یک کانال و یک کانال با انبساط ناگهانی در محدوده‌ی رژیم لغزشی و تا حدودی رژیم گذار مورد مطالعه قرار گرفته است. در این کار به منظور استفاده از شبکه‌بندی غیریکنواخت از روش بولتزمن شبکه‌ای مبتنی بر حداقل مربعات و بسط سری تیلور استفاده شده است. همچنین برای در نظر گرفتن لغزش روی دیواره‌ها، از شرایط مرزی پخش مولکولی و روش ترکیبی کمانه کردن و آینه‌ای و برای محاسبه‌ی ضرایب تخفیف روش‌های بولتزمن شبکه‌ای، از مرتبط کردن آن به عدد نادسن استفاده گردیده است. سپس با تحلیل و بررسی نتایج شبیه‌سازی‌ها، به مقایسه‌ی روش‌های بولتزمن شبکه‌ای مختلف در شبیه‌سازی میکروجرایان‌ها پرداخته شده است. با مقایسه‌ی نتایج شبیه‌سازی‌های عددی به دست آمده در این کار با نتایج ارائه شده توسط سایر محققین، اعتبار و صحت برنامه‌های کامپیوتری و دقت جواب‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که روش‌های بولتزمن شبکه‌ای با ضریب تخفیف چندتایی نسبت به سایر روش‌ها قابلیت شبیه‌سازی میکروجرایان‌ها با عدد نادسن بالاتر را دارد.

واژگان کلیدی: روش بولتزمن شبکه‌ای مبتنی بر حداقل مربعات و بسط سری تیلور، عدد نادسن، میکرو حفره، میکرو کانال، انبساط ناگهانی.

Application and Comparison of Different Lattice Boltzmann Methods on Non-Uniform Meshes for Simulation of Micro Cavity and Micro Channel Flow

A. R. Rahmati* and S. Niazi

Department of Mechanical Engineering, University of Kashan

Abstract: *In this study, for the first time, a comparison of single-relaxation-time, multi-relaxation-time and entropic lattice Boltzmann methods on non-uniform meshes is performed and application of these methods for simulation of two-dimensional cavity flows, channel flows and channel flows with sudden expansion is studied in the slip and near transition regimes. In this work, Taylor series expansion and least squares based lattice Boltzmann method is utilized in order to apply the lattice Boltzmann models on non-uniform meshes. A diffuse scattering boundary condition and a combination of bounce-back and specular boundary conditions are employed to obtain the slip at the walls. Besides, the relaxation times of lattice Boltzmann methods are computed in terms of Knudsen number. Different lattice Boltzmann methods are used to simulate lid-driven micro cavity flows and their results are compared with each other and with those obtained in the literature. Then, the best model in accuracy and stability, i.e. multi-relaxation-time lattice Boltzmann method, is applied to simulate the micro channel flow in different*

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ar_rahmati@kashanu.ac.ir

Knudsen numbers. Results show that the proposed method on non-uniform meshes is capable of simulating micro flows problems in the slip and the transition regimes.

Keywords: Taylor series expansion and least squares based lattice Boltzmann method, Knudsen number, microcavity, microchannel sudden expansion.

فهرست علائم

S	ماتریس ضرایب تخفیف	c_i	سرعت میکروسکوپی ذره در جهت i
s_i	نرخ تخفیف در جهت i	c_s	سرعت صوت
Δx	گام مکانی شبکه	e	انرژی جنبشی
\mathbf{u}	بردار سرعت	f_i	تابع توزیع چگالی در جهت i
u, v	مؤلفه‌های بردار سرعت \mathbf{u}	f_i^{eq}	تابع توزیع تعادلی در جهت i
\mathbf{u}_w	سرعت دیواره	H	ارتفاع
$\langle v \rangle$	سرعت گرمایی میانگین	j	بردار چگالی مومنتوم
w_i	ضریب وزنی جهت i در تابع توزیع تعادلی	Kn	عدد نادسن
Δt	گام زمانی شبکه	L	طول
علائم یونانی		m	بردار ممند
ε	مربع انرژی جنبشی	m	ممنتوم مماسی مولکول
λ	پویش آزاد متوسط مولکولی	M	ماتریس تبدیل
ν	ویسکوزیته سینماتیکی	\mathbf{n}	برداری که در جهت عمود بر دیواره
ρ	چگالی	p	فشار ترمودینامیکی
σ	ضریب تطابق ممنتوم مماسی	\mathbf{q}	بردار شار گرما
τ	ضریب تخفیف	Re	عدد رینولدز
		R_f	هسته پنخس

۱- مقدمه

با توسعه سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، میکروجریان به یکی از موضوعات مورد توجه محققان تبدیل شده است. جریان سیال در وسایل کوچک رفتار متفاوتی با رفتار سیال در هندسه‌های ماکرو دارد و نتایج حاصل از کارهای تجربی در وسایل میکرونی با نتایج تئوری حاصل از روش‌های مرسوم حل جریان سیال، اختلاف قابل ملاحظه‌ای دارد.

با توجه به سخت بودن و هزینه‌بر بودن فراهم آوردن امکانات آزمایشگاهی، دستیابی به روش‌هایی جهت تحلیل جریان در هندسه‌های با ابعاد میکرو ضروری به نظر می‌رسد. علی‌رغم این که حل‌های تحلیلی در درک کیفی

فرآیند ساخت ماشین‌های با ابعاد کوچک، در سالهای اخیر به شدت گسترش پیدا کرده است. این وسایل کوچک اغلب به‌عنوان حسگرهایی برای فشار، دما، دبی جرمی، سرعت، صدا و به‌عنوان شتاب سنج‌هایی برای حرکت عمودی و افقی و همچنین یک عضو ساده از موتور گرمایی میکرونی و پمپ گرمایی میکرونی به کار می‌روند. سیستم‌های میکروالکترومکانیک^۱، به وسایلی که طول مشخصه‌ای کمتر از ۱ mm و بیشتر از ۱ μm دارند اطلاق می‌شود که شامل اجزای مکانیکی و الکترونیکی هستند [۱].

میکروجریان‌ها و همچنین در اعتبارسنجی روش‌های عددی مهم هستند، اما آنها قطعاً تمام نیازهای دینامیک سیالات محاسباتی کاربردی را پوشش نمی‌دهند. در میان روش‌های مختلف عددی، روش بولتزمن شبکه‌ای^۲ که در اواخر دهه ۱۹۸۰ ارائه شده است، به دلیل رویکرد مبتنی بر ذره آن در شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده توجهات فراوانی را به خود معطوف کرده است [۲، ۳ و ۴].

دی هومیرس [۵] روش بولتزمن شبکه‌ای با ضریب تخفیف چندتایی^۳ را که دقت و پایداری بیشتری نسبت به روش بولتزمن شبکه‌ای استاندارد یا روش بولتزمن شبکه‌ای با ضریب تخفیف منفرد^۴ دارد، ارائه کرد.

آنسومالی و کارلین [۶] روش بولتزمن شبکه‌ای را مبتنی بر توابع انتروپی و تئوری H، موسوم به روش بولتزمن شبکه‌ای انتروپی^۵ ارائه کردند. همچنین آنها [۷] نشان دادند که روش بولتزمن شبکه‌ای انتروپی در شبیه‌سازی جریان‌های همدمای دوبعدی، افزایش قابل توجهی را در پایداری نسبت به مدل‌های بولتزمن شبکه‌ای معمولی ارائه می‌دهد.

در چند سال اخیر استفاده از روش‌های بولتزمن شبکه‌ای در شبیه‌سازی جریان در هندسه‌های با ابعاد میکرو مورد توجه محققین قرار گرفته است [۸ و ۹]. دلیل عمده برای استفاده از این روش‌ها جهت شبیه‌سازی جریان در هندسه‌های با ابعاد میکرو، منظور نکردن هیچ شرطی برای پیوستار بودن جریان در به‌دست آوردن معادلات حاکم در این روش‌ها است. در ادامه به بررسی برخی از کارهای انجام شده در شبیه‌سازی جریان هندسه‌های میکرو با استفاده از روش‌های بولتزمن شبکه‌ای می‌پردازیم.

نی و همکاران [۱۰] جهت شبیه‌سازی جریان در هندسه‌های با ابعاد میکرو، ضریب تخفیف در روش بولتزمن شبکه‌ای را با وارد کردن چگالی محلی در آن اصلاح کردند. در محاسبه ضریب تخفیف از پارامتری استفاده شد که با مقایسه نتایج تجربی به‌دست آمده است. آنها روش خود را در مطالعه سرعت لغزشی روی دیواره و افت فشار غیرخطی در

طول میکروکانال به کار بردند. لیم و همکاران [۱۱] روش بولتزمن شبکه‌ای را ارائه کردند که جریان در یک میکروکانال با اختلاف فشار را مدل می‌کند. آنها با استفاده از تئوری سینتیک، عدد نادسن را در محاسبه ضریب تخفیف وارد کردند. نتایج جریان‌های کانال دوبعدی خود را با داده‌های تجربی و همچنین حل تحلیلی آرکیلیک و همکاران [۱۲]

مقایسه کردند. نیو و همکاران [۱۳] روش بولتزمن شبکه‌ای انتروپی را در شبیه‌سازی جریان در یک میکروکانال و جریان میکرو کوئت به کار بردند. همچنین جهت در نظر گرفتن اثرات لغزشی روی دیواره‌ها شرط مرزی پخش مولکولی^۶ را معرفی کردند. تانگ و همکاران [۱۴] جریان گاز در یک میکروکانال را بررسی کردند. آنها روش نی و همکاران [۱۰] را که به‌منظور شبیه‌سازی جریان در میکروکانال وابسته به داده‌های تجربی بود، اصلاح کردند. جهت در نظر گرفتن لغزش روی دیواره‌ها، شرط مرزی را ارائه کردند که ترکیبی از شرایط مرزی کمانه کردن^۷ و آینه‌ای^۸ بود. آنها نتایج کار خود مثل توزیع سرعت و فشار در طول میکروکانال را با کارهای عددی دیگران مقایسه کردند. ژانگ و همکاران [۱۵]

روش بولتزمن شبکه‌ای را ارائه کردند که در آن برای در نظر گرفتن اندرکنش دیواره جامد و گاز، ضریب تطابق ممتوم مماسی^۹ را به کار بردند. شرایط مرزی آنها در حالتی مشابه ترکیب روش کمانه کردن و آینه‌ای عمل می‌کند. آنسومالی و همکاران [۱۶] مدل بولتزمن شبکه‌ای انتروپی را در شبیه‌سازی رفتار میکروجریان‌ها معرفی کردند. آنها به‌منظور ارزیابی روش خود جریان پوازی را در محدوده وسیعی از اعداد نادسن شبیه‌سازی کردند. شیرانی و جعفری [۱۷] روش بولتزمن شبکه‌ای را در شبیه‌سازی جریان‌های با ابعاد میکرو استفاده کردند؛ آنها همچنین ترکیبی از شرایط مرزی کمانه کردن و آینه‌ای را اعمال کردند که نتایج به‌دست آمده در توافق خوبی با سایر نتایج تحلیلی و تجربی بود. پرومال و همکاران [۱۸] روش بولتزمن شبکه‌ای با ضریب تخفیف منفرد را بر روی شبکه یکنواخت در شبیه‌سازی جریان

میکروکانال و میکروحفرة به کار بردند و جریان را در اعداد نادسن مختلف شبیه‌سازی کردند. پرازیاناکیس و آنسومالی [۱۹] شبیه‌سازی میکروجریان‌ها را با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای انجام دادند. آنها جریان کوئت صفحه‌ای را در اعداد نادسن مختلف شبیه‌سازی و با نتایج تحلیلی مقایسه کردند.

در سال‌های اخیر توسعه روش بولتزمن شبکه‌ای به‌عنوان یک ابزار محاسباتی مورد توجه فراوان قرار گرفته است. با این وجود به واسطه محدودیت اساسی معادله بولتزمن شبکه‌ای در شبکه یکنواخت، کاربرد وسیع این روش در مسائل مهندسی مختل شده است. در بسیاری از کاربردهای عملی، استفاده از یک شبکه غیریکنواخت به واسطه این حقیقت که مرزهای انحنادار می‌توانند به‌صورت دقیق‌تر تشریح شوند و طرح‌های عددی با استفاده از آن دارای کارایی بهتری باشند، نسبت به شبکه‌های یکنواخت همواره ترجیح داده می‌شوند. بنابراین باید طرحی را مورد نظر قرار داد که بتوان با استفاده از آن روش بولتزمن شبکه‌ای را بر روی شبکه غیریکنواخت حل نمود. عیب و نقیصه روش بولتزمن شبکه‌ای استاندارد (محدود به یکنواخت بودن شبکه) از نیاکان آن یعنی ماشین سلولی شبکه گاز ناشی می‌شود. در ماشین سلولی شبکه گاز، تقارن شبکه که ایزوتروپی تانسور مرتبه چهار مربوط به سرعت‌های گسسته‌سازی شده را تضمین می‌کند، یک شرط اساسی در استخراج معادلات ناویر استوکز است. با استفاده از این شرط، در هر گام زمانی یک ذره در یک گره باید به گره مجاورش منتقل شود بنابراین شبکه محاسباتی باید یکنواخت باشد. هرچند معادله بولتزمن شبکه‌ای با استفاده از مدل بی‌جی‌کی بهبودهای زیادی را نسبت به ماشین سلولی شبکه گاز ایجاد کرده است، لکن خصوصیت یکنواخت بودن شبکه را به ارث برده است. روش بولتزمن شبکه‌ای با این خصوصیت به لحاظ ماکروسکوپیکی مشابه با یک حل‌کننده شبکه یکنواخت کارترین است.

به لحاظ تئوری، ویژگی یکنواخت بودن شبکه ضروری

نیست؛ زیرا تابع توزیع چگالی در فضای فیزیکی پیوسته است. اخیراً راهکارهایی برای اصلاح و بهبود روش بولتزمن شبکه‌ای استاندارد ایجاد شده است به‌گونه‌ای که می‌توان آن را در مسایل پیچیده به‌کار برد. برخی از این راهکارها عبارتند از: روش بولتزمن شبکه‌ای تکمیل شده با میان‌بایی [۲۰]، روش بولتزمن شبکه‌ای دیفرانسیلی [۲۱]، تکنیک ریز کردن تطبیقی شبکه^۱ [۲۲] و [۲۳]، روش بولتزمن شبکه‌ای مبتنی بر حداقل مربعات و بسط سری تیلور [۲۴ و ۲۵] و غیره. در این تحقیق از روش آخر استفاده شده است.

در کار حاضر برای اولین بار روش‌های بولتزمن شبکه‌ای مختلف با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای مبتنی بر حداقل مربعات و بسط سری تیلور بر روی شبکه‌بندی غیریکنواخت، در شبیه‌سازی جریان‌های همدمای دوبعدی در یک میکروحفرة، یک میکروکانال و یک میکروکانال با انبساط ناگهانی در اعداد نادسن مختلف استفاده شده و نتایج با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۲- مقدمه‌ای بر روش‌های بولتزمن شبکه‌ای مختلف

۲-۱- روش بولتزمن شبکه‌ای استاندارد

مدل‌های بولتزمن شبکه‌ای که اخیراً به کار گرفته شده‌اند با استفاده از یک مدل تقریبی که توسط بهاتنگار و همکاران [۲۶] ارائه شده است و اختصاراً تقریب بی‌جی‌کی نامیده می‌شود، ساده شده‌اند. با استفاده از این تقریب، معادله بولتزمن شبکه‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

که در آن f_i تابع توزیع چگالی در جهت \mathbf{i} ، f_i^{eq} تابع توزیع تعادلی محلی متناظر با آن، τ ضریب تخفیف منفرد، \mathbf{i} تعداد جهات شبکه و \mathbf{c}_i سرعت ذرات در جهات مختلف شبکه هستند. با اعمال بسط چند زمانه چارمن-انزکوگ^{۱۱} روی معادله (۱)، ضریب تخفیف به‌گونه‌ای بیان می‌شود که معادلات ناویر-استوکز قابل بازیابی باشند [۹]. τ به وسیله رابطه زیر با

توابع توزیع تعادلی به شکل زیر تعریف می‌شوند [۲، ۸ و ۹]:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[1 + 3 \frac{c_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9 (c_i \cdot \mathbf{u})^2}{2 c^4} - \frac{3 \mathbf{u}^2}{2 c^2} \right] \quad (5)$$

که در آن ضریب وزنی w_i در $i=0$ برابر $\frac{4}{9}$ ، در $i=1,2,3,4$ برابر $\frac{1}{9}$ و در $i=5,6,7,8$ برابر $\frac{1}{36}$ است.

معادله (۱) به معادله بولتزمن شبکه‌ای استاندارد یا روش بولتزمن شبکه‌ای با ضریب تخفیف منفرد مشهور است. این معادله را می‌توان به دو گام برخورد و گام انتشار در حل عددی تقسیم بندی کرد:

$$f_i^*(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (6)$$

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

۲-۲- روش بولتزمن شبکه‌ای با ضریب تخفیف چندتایی

معادله بولتزمن شبکه‌ای با ضریب تخفیف چندتایی به صورت زیر نشان داده می‌شود [۵، ۹ و ۲۷]:

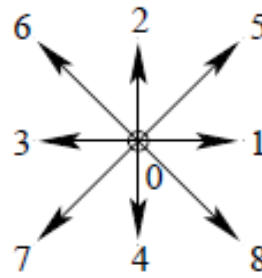
$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} [\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (8)$$

که در آن گام برخورد توسط بردارهای \mathbf{m} و گام جریان توسط بردارهای \mathbf{f} پوشش داده می‌شوند. \mathbf{M} یک ماتریس تبدیل یک به یک و خطی است، به گونه‌ای که داریم:

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} \quad (9)$$

ماتریس \mathbf{M} در مدل شبکه D_2Q_9 به این صورت است:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



شکل ۱- شبکه D_2Q_9

ویسکوزیته ارتباط دارد [۲ و ۹]:

$$\nu = c_s^2 \Delta t (\tau - 0.5) \quad (2)$$

که ν ویسکوزیته سینماتیکی و c_s سرعت صوت است. در کار حاضر مسئله دوبعدی است و از یک شبکه مربعی چند سرعتی با عنوان D_2Q_9 استفاده شده است (شکل (۱)).

سرعت صوت در مدل شبکه D_2Q_9 برابر با $c \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ است.

$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت میکروسکوپی ذرات است، که در آن Δx و Δt به ترتیب فاصله بندی شبکه و گام زمانی هستند.

سرعت ذرات در جهات مختلف شبکه به شکل زیر بیان

می‌شوند [۲، ۳، ۸ و ۹]:

$$\mathbf{c}_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} c & i=0 \\ \begin{pmatrix} \cos[(i-1)\pi/2] \\ \sin[(i-1)\pi/2] \end{pmatrix} c & i=1,2,3,4 \\ \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos[(i-5)\pi/2 + \pi/4] \\ \sin[(i-5)\pi/2 + \pi/4] \end{pmatrix} c & i=5,6,7,8 \end{cases} \quad (3)$$

سرعت شبکه $\mathbf{c}_i = (c_{ix}, c_{iy})$ دارای اندازه یک در جهات

$i=1,2,3,4$ است و مقدار آن برابر $\sqrt{2}$ در جهات

$i=5,6,7,8$ است. c برابر یک است.

هنگامی که توابع توزیع مشخص شدند، خواص ماکروسکوپی

از قبیل چگالی (ρ)، بردار سرعت (\mathbf{u}) و فشار (p)، به سادگی از

روابط زیر حاصل می‌شوند [۲، ۳، ۸ و ۹]:

$$\rho = \sum_{i=0}^k f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^k \mathbf{c}_i f_i, \quad p = \frac{1}{3} \rho c^2 \quad (4)$$

پارامتر β با استفاده از تابع H ، از حل معادله غیرخطی زیر به دست آمده است [۲۸]:

$$H(\mathbf{f}) = H(\mathbf{f} + \beta(\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})) \quad (14)$$

که برای مسائل همدمای دوبعدی، شکل گسسته تابع H می‌تواند به این صورت نوشته شود [۲۸ و ۲۹]:

$$H = \sum_{i=0}^k f_i \ln \left(\frac{f_i}{w_i} \right) \quad (15)$$

که در آن w_i ضرایب وزنی مرتبط با سرعت گسسته \mathbf{c}_i است و k تعداد جهات شبکه را مشخص می‌کند.

معادله (۱۴) در هر محل از شبکه، باید برای β حل شود و ضریب تخفیف به صورت محلی تنظیم شود. به منظور کاهش محاسبات، می‌توان در بیشتر محدوده شبیه‌سازی، β را نزدیک به مقدار تعادلی محلی آن یعنی $\beta^{eq} = 2$ در نظر گرفت.

همچنین تابع تعادلی f_i^{eq} را به این صورت داریم [۹ و ۲۸]:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \prod_{j=1}^2 \left(2 - \sqrt{1 + 3u_j^2} \right) \left(\frac{2u_j + \sqrt{1 + 3u_j^2}}{1 - u_j} \right)^{\frac{c_{ij}}{c}} \quad (16)$$

که در آن z اندیس جهت‌های فضای است. لازم به ذکر است که توان در معادله (۱۶) یعنی $\frac{c_{ij}}{c}$ فقط مقادیر ± 1 و صفر را اختیار می‌کند.

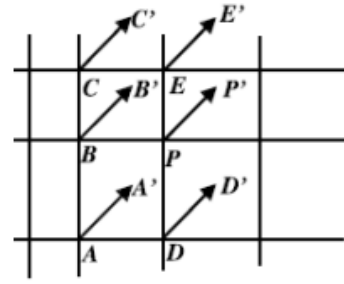
۲-۴- روش بولتزمن شبکه‌ای مبتنی بر بسط سری تیلور و

حداقل مربعات

این روش بر اساس این واقعیت است که تابع توزیع یک تابع پیوسته در فضای فیزیکی است و می‌تواند به خوبی برای هر سیستم شبکه‌بندی تعریف شود.

شکل (۲) حرکت ذرات در امتداد جهت \mathbf{i} در یک شبکه غیریکنواخت را نشان می‌دهد. در شبیه‌سازی عددی، ما تنها به تابع توزیع در نقطه شبکه برای تمام مراحل زمانی علاقه‌مند هستیم. اکنون تعریف می‌کنیم [۲۴]:

$$g_\alpha = f_i(x_\alpha, y_\alpha, t) + \frac{[f_i^{eq}(x_\alpha, y_\alpha, t) - f_i(x_\alpha, y_\alpha, t)]}{\tau} \quad (17)$$



شکل ۲- حرکت ذرات در جهت \mathbf{i} در یک شبکه غیریکنواخت

در معادله (۸)، $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$ و $\mathbf{m}^{eq}(\mathbf{x}, t)$ بردارهای مممت و مممت تعادلی هستند به طوری که $\mathbf{m} = (m_0, m_1, m_2, \dots, m_n)^T$ است. بردار مممت \mathbf{m} در مدل D_2Q_9 به صورت زیر است:

$$\mathbf{m} = (\rho, e, \varepsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T \quad (10)$$

که در آن ρ چگالی، e انرژی، ε مربع انرژی، بردار چگالی مممتوم، $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ بردار شار گرما و p_{xx} و p_{xy} مؤلفه‌های تانسور تنش لزج هستند. مؤلفه‌های بردار مممت \mathbf{m}^{eq} به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} m_0^{eq} &= \rho, & m_1^{eq} &= -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2) \\ m_2^{eq} &= \rho - 3(j_x^2 + j_y^2), & m_3^{eq} &= j_x \\ m_4^{eq} &= -j_x, & m_5^{eq} &= j_y, & m_6^{eq} &= -j_y \\ m_7^{eq} &= (j_x^2 - j_y^2), & m_8^{eq} &= j_x j_y \end{aligned} \quad (11)$$

در معادله (۸)، \mathbf{S} ماتریس تخفیف در فضای مممت است

که در مدل D_2Q_9 ، به صورت زیر است:

$$\mathbf{S} = \text{diag}(1, 0, 1, 4, 1, 4, s_3, 1, 2, s_5, 1, 2, s_7, s_8) \quad (12)$$

که در آن s_i نرخ تخفیف برای مممت m_i است به گونه‌ای که $s_3 = s_7 = s_8 = 2/(1 + 6\nu)$ و s_5 دلخواه هستند و می‌توان مقدار آن‌ها را یک قرار داد.

۲-۳- روش بولتزمن شبکه‌ای انتروپی

معادله بولتزمن شبکه‌ای انتروپی دوبعدی به همراه تقریب بی‌جی کی را می‌توان به این صورت نوشت [۶، ۷، ۱۶ و ۲۸]:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\beta \Delta t}{2\tau + \Delta t} (f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)) \quad (13)$$

میکروجریان‌ها، ضریب تخفیف است. از تئوری سینتیک، ضریب تخفیف در تقریب بی‌جی‌کی را در میدان هیدرودینامیکی می‌توان به صورت نسبت پویش آزاد متوسط مولکولی (λ) به سرعت گرمایی میانگین ($\langle v \rangle$) بیان کرد [۲]، ۱۰، ۱۱ و ۱۹]:

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle v \rangle} = \frac{\lambda}{\sqrt{8RT/\pi}} \quad (22)$$

در روش بولتزمن شبکه‌ای $c_s = \sqrt{RT}$ و برای مدل D_2Q_9 برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است، لذا داریم [۲]، ۱۰، ۱۱ و ۱۹]:

$$\tau = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \lambda \cong Kn N_y \Delta x \quad (23)$$

که در آن N_y تعداد گره‌های شبکه در جهت y و Δx برابر با Δt ($c=1$) و عدد نادسن به صورت $Kn = \lambda / N_y \Delta x$ است.

۲-۳- شرایط مرزی برای میکروجریان‌ها

۱-۲-۳- شرط مرزی پخش مولکولی

شرط مرزی پخش مولکولی برای روش بولتزمن شبکه‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود [۹ و ۱۳]:

$$\left| (\mathbf{c}_i - \mathbf{u}_w) \cdot \mathbf{n} \right| f_i = \sum_{(\mathbf{c}_{i'} - \mathbf{u}_w) \cdot \mathbf{n} < 0} \left| (\mathbf{c}_{i'} - \mathbf{u}_w) \cdot \mathbf{n} \right| \mathfrak{R}_f(\mathbf{c}_{i'} \rightarrow \mathbf{c}_i) f_{i'} \quad (24)$$

در این معادله داریم:

$$\mathfrak{R}_f(\mathbf{c}_{i'} \rightarrow \mathbf{c}_i) = \frac{A_N}{\rho_w} \left((\mathbf{c}_i - \mathbf{u}_w) \cdot \mathbf{n} \right) f_i^{eq} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_w} \quad (25)$$

در دو رابطه بالا \mathbf{n} بردار یکه عمود بر سطح دیواره است و w به دیواره اشاره دارد. همچنین \mathbf{i} و \mathbf{i}' به ترتیب جهت‌های برخورد و انعکاس ذرات هستند و A_N ضریبی است که تضمین می‌کند در جهت عمود بر دیواره، دبی جرمی وجود ندارد. در واقع در این شرط مرزی این‌گونه عمل می‌شود که ذراتی که به دیواره برخورد می‌کنند، جهت برخورد خود با دیواره را فراموش می‌کنند و در جهتی دیواره را ترک می‌کنند که هماهنگ با شرایط تعادلی دیواره باشند.

$$\mathbf{s}^T = \left\{ 1 \quad \Delta x_\alpha \quad \Delta y_\alpha \quad (\Delta x_\alpha)^2/2 \quad (\Delta y_\alpha)^2/2 \quad \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \right\} \quad (18)$$

$$\mathbf{V} = \left\{ f_i \quad \partial f_i / \partial x \quad \partial f_i / \partial y \quad \partial^2 f_i / \partial x^2 \quad \partial^2 f_i / \partial y^2 \quad \partial^2 f_i / \partial x \partial y \right\} \quad (19)$$

که در آن \mathbf{g}_α حالت پس از برخورد تابع توزیع در نقطه α است؛ \mathbf{s}^T یک بردار با شش مؤلفه است که توسط مختصات نقاط شبکه شکل گرفته است و در آن $\Delta x_\alpha = x_\alpha + c_{ix} \Delta t - x_0$ و $\Delta y_\alpha = y_\alpha + c_{iy} \Delta t - y_0$ است. بردار مجهولات در نقطه P است که شش مؤلفه دارد. هدف ما به دست آوردن مؤلفه اول آن $V_1 = f_i(P, t + \Delta t)$ است. نقطه P را با اندیس $\alpha = 0$ و نقاط مجاور آن را با اندیس $\alpha = 1, 2, \dots, M$ بیان می‌کنیم که M تعداد نقاط مجاور P است. هنگامی که مختصات نقاط شبکه داده شده و سرعت ذره و گام زمانی مشخص شده باشند، ماتریس \mathbf{S} مشخص است. سپس معادله زیر را داریم [۲۴]:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{g} = \mathbf{A} \mathbf{g} \quad (20)$$

که در آن \mathbf{A} یک ماتریس $6 \times (M+1)$ بعدی است. از معادله (۲۰) داریم:

$$f_i(x_0, y_0, t + \Delta t) = V_1 = \sum_{k=1}^{M+1} a_{1,k} g_{k-1} \quad (21)$$

که در آن $a_{1,k}$ مؤلفه‌های ردیف اول ماتریس \mathbf{A} هستند که قبل از اینکه روش بولتزمن شبکه‌ای اعمال شود، محاسبه می‌شوند و در روند محاسبات تغییری نمی‌کنند. بنابراین محاسبات کمتری در مقایسه با روش بولتزمن شبکه‌ای استاندارد انجام می‌شود. از آنجا که معادله (۲۱) تنها به اطلاعات مختصات نقاط شبکه نیاز دارد، بنابراین می‌توان گفت که برای هر ساختاری از شبکه قابل استفاده است.

۳- روش حل میکروجریان‌ها

۱-۳- محاسبه ضریب تخفیف بر حسب عدد نادسن

پارامتر کلیدی در استفاده از روش‌های بولتزمن شبکه‌ای در

که در آن σ برای در نظر گرفتن اثر شرط مرزی کمانه کردن و $(1-\sigma)$ برای در نظر گرفتن اثر شرط مرزی آینه‌ای است. لذا $\sigma=0$ بیانگر شرط مرزی آینه‌ای خالص است که لغزش خالص را بیان می‌کند. همچنین $\sigma=1$ بیانگر شرط مرزی کمانه کردن خالص است که عدم لغزش را بیان می‌کند. ضریب تطابق ممتوم مماسی به دماهای سطح و گاز، فشار محلی، سرعت و جهت متوسط جریان محلی و زبری سطح بستگی دارد. در کار حاضر، هر کجا که از ترکیب شرایط مرزی کمانه کردن و آینه‌ای استفاده شده است، مطابق معمول اکثر مقالات موجود در این زمینه، $\sigma=0.7$ قرار داده شده است [۹، ۱۴، ۱۸ و ۳۰].

۴- نتایج شبیه‌سازی‌ها

۴-۱- نتایج جریان میکروحفرة با دیواره متحرک

در این قسمت جریان در یک میکروحفرة برای اعداد نادسن مختلف شبیه‌سازی شده است. در این هندسه، دیواره بالایی حفرة از سمت چپ به راست با سرعت U_0 حرکت می‌کند و باعث حرکت سیال در حفرة مربعی به ضلع L می‌شود. دیواره‌های کناری و دیواره پایین ثابت هستند. در این سه دیواره ثابت، از ترکیبی از شرایط مرزی کمانه کردن و آینه‌ای استفاده می‌شود. شرط مرزی پخش مولکولی برای دیواره متحرک بالایی شرط مرزی اعمال شده است. در کلیه اعداد نادسن، عدد رینولدز (که به صورت $Re = U_0 L / \nu$ تعریف شده و در آن ν ویسکوزیته سینماتیکی است) ثابت و برابر با 0.3 در نظر گرفته شده است.

در ابتدا، یک چگالی ثابت $\rho=1$ در تمام حوزه حل قرار داده شده است و سرعت‌ها در داخل حفرة صفر گذاشته شده‌اند. در دیواره بالایی مؤلفه x سرعت U_0 است که در اعداد نادسن 0.001 ، 0.01 ، 0.05 و غیره به ترتیب 0.0001382 ، 0.001382 ، 0.00691 و غیره گذاشته شده است و مؤلفه y سرعت صفر است. در این قسمت، از شبکه‌بندی غیریکنواخت 101×101 استفاده شده است.

به‌عنوان مثال، برای اعمال شرط مرزی پخش مولکولی در دیواره پایینی که با سرعت u_w حرکت می‌کند، از مدل D_2Q_9 استفاده می‌کنیم (شکل (۱)). جهت‌های $i=1,3,4,7,8$ نمایانگر توابع توزیعی هستند که پس از مرحله انتشار، از دامنه حل سیال به مرزها وارد می‌شوند و معین هستند. اما جهت‌های $i=2,5,6$ جهت‌هایی هستند که مقدار تابع توزیع آن‌ها نامشخص است و با استفاده از شرط مرزی پخش مولکولی و معادلات (۲۴) و (۲۵) به دست می‌آیند. این توابع به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۸ و ۱۳]:

$$f_2 = \frac{A_N}{\rho_w} f_2^{eq}(\rho_w, \mathbf{u}_w)(f_7 + f_4 + f_8)$$

$$f_5 = \frac{A_N}{\rho_w} f_5^{eq}(\rho_w, \mathbf{u}_w)(f_7 + f_4 + f_8) \quad (26)$$

$$f_6 = \frac{A_N}{\rho_w} f_6^{eq}(\rho_w, \mathbf{u}_w)(f_7 + f_4 + f_8)$$

که در آن $A_N = 6$ است.

۳-۲-۲- ترکیبی از شرایط مرزی کمانه کردن و آینه‌ای

انتقال ممتوم بین مولکول‌های گاز و سطح، نیازمند تعیین اندرکنش بین مولکول‌های برخوردی گاز و سطح است که تحلیل دقیق آن بسیار پیچیده است. از دیدگاه ماکروسکوپی، تعیین بعضی پارامترهای متوسط از قبیل ضریب تطابق ممتوم مماسی برای توصیف اندرکنش‌های سطح-گاز کافی است. برای جریان گازی در هندسه‌های با ابعاد میکرو، ضریب تطابق ممتوم مماسی که با σ نشان داده می‌شود، به صورت زیر بیان می‌شود [۹، ۱۵، ۱۷ و ۱۸]:

$$\sigma = \frac{m_i - m_r}{m_i - m_w} \quad (27)$$

که در آن m ممتوم مماسی مولکول‌ها است و زیرنویس‌های i ، r و w به ترتیب به مولکول‌های برخوردی، منعکس شده و دیواره اشاره دارند. شرایط مرزی با استفاده از σ ، به صورت رابطه زیر هستند [۹ و ۱۸]:

$$f_2 = f_4$$

$$f_5 = \sigma \times f_7 + (1 - \sigma) \times f_8 \quad (28)$$

$$f_6 = (1 - \sigma) \times f_7 + \sigma \times f_8$$

شکل های (۳) و (۴) یک شبکه غیریکنواخت نمونه در یک حفره مربعی با اندازه شبکه 101×101 با نسبت کشیدگی 3^{12} ، که به صورت نسبت بیشترین فاصله بندی شبکه به کمترین فاصله بندی شبکه تعریف شده است، را نمایش می دهند.

۴-۱-۱- بررسی همگرایی روش های بولتزمن شبکه ای مختلف به منظور تعیین معیار همگرایی، رابطه زیر استفاده شده است [۳]:

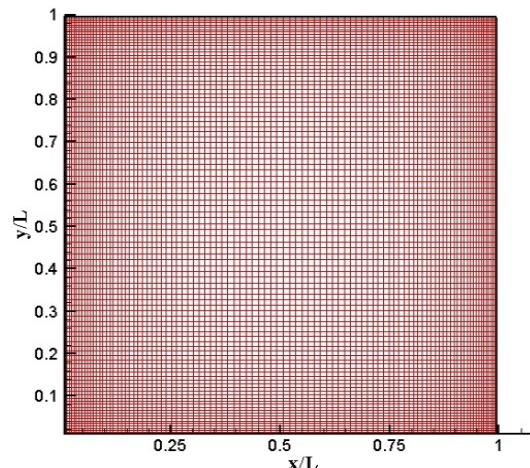
$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u^{n+1} - u^n)^2 + (v^{n+1} - v^n)^2} \leq 10^{-7} \quad (29)$$

که در آن N تعداد کل گره ها در دامنه حل، n گام زمانی قبلی، $(u^{n+1} - u^n)$ و $(v^{n+1} - v^n)$ مؤلفه های سرعت برای گام های زمانی قبلی و بعدی هستند.

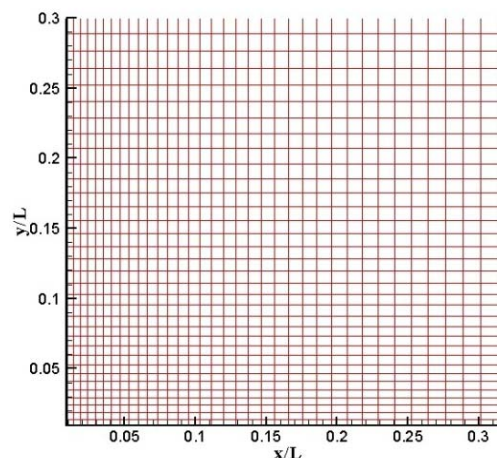
شکل (۵) خطای نسبی توزیع سرعت را در یک میکرو حفره در شبکه غیریکنواخت با استفاده از روش های بولتزمن شبکه ای مختلف در $Kn=0.01$ نشان می دهد. معیار همگرایی در نظر گرفته شده در این قسمت، 10^{-7} است. همان گونه که دیده می شود، شکل (۵) همگرایی هر سه روش را نشان می دهد.

۴-۱-۲- انتخاب شبکه غیریکنواخت بهینه

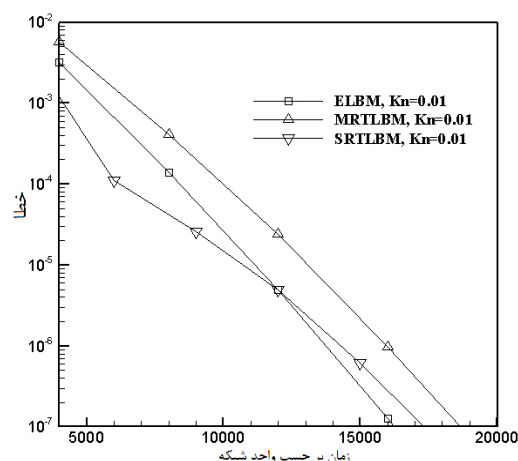
اندازه شبکه های غیریکنواخت مورد استفاده 51×51 ، 101×101 و 201×201 هستند. مستقل از شبکه بودن نتایج شبیه سازی های هر سه روش بولتزمن شبکه ای استفاده شده، در این شبکه های مختلف و در اعداد نادسن مختلف بررسی شدند که در تمام آنها شبکه های 101×101 و 201×201 تطابق خوبی با یکدیگر داشتند. در اینجا برای نمونه بررسی مستقل از شبکه بودن روش MRTLBM با عدد نادسن 0.1 آورده شده است. شکل های (۶) و (۷) مؤلفه y سرعت در امتداد خط مرکزی افقی جریان میکرو حفره را برای $Kn=0.1$ در این شبکه های مختلف، با استفاده از روش MRTLBM نشان می دهند. با توجه به شکل (۷)، مقدار بیشینه سرعت در شبکه های 51×51 ، 101×101 و 201×201 به ترتیب



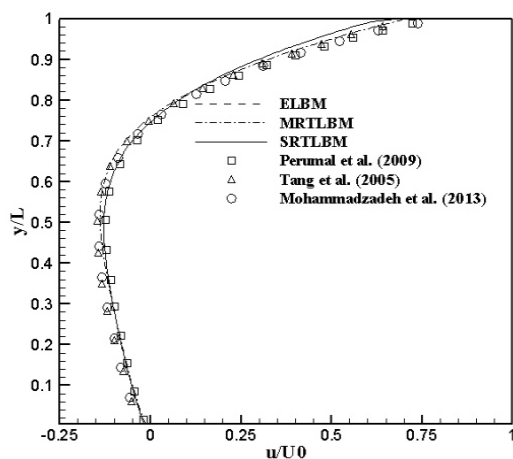
شکل ۳- یک شبکه غیر یکنواخت نمونه در یک حفره مربعی (اندازه شبکه 101×101 با نسبت کشیدگی برابر با ۳)



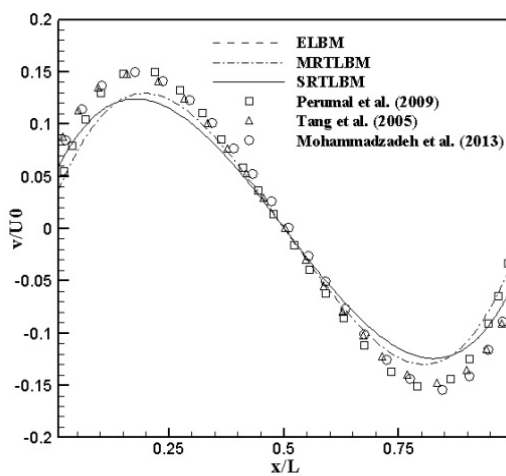
شکل ۴- ناحیه ای بزرگ شده از شکل (۳)



شکل ۵- خطای نسبی توزیع سرعت در یک میکرو حفره در $Kn=0.01$



الف) u



ب) v

شکل ۸- مؤلفه x و y سرعت در امتداد خط مرکزی عمودی و

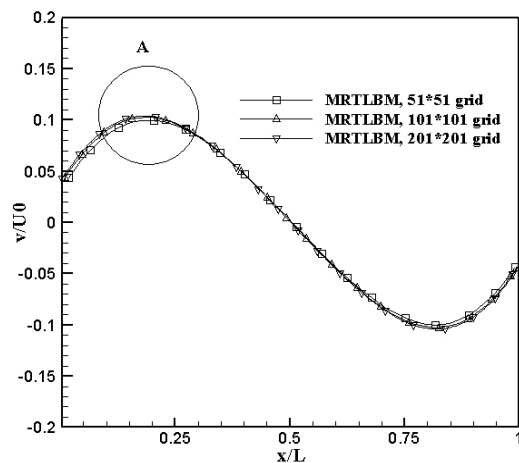
افقی میکروحفره برای $Kn=0.1$

شبیه‌سازی میکروجریان‌ها در یک حفره مربعی، نتایج به دست آمده در این قسمت با نتایج روش‌های بولتزن شبکه‌ای توسط پرومال و همکاران [۱۸] و تانگ و همکاران [۱۴] و نتایج روش شبیه‌سازی مستقیم مونت کارلو توسط محمدزاده و همکاران [۳۱] مقایسه شده است.

شکل (۸) مقایسه مؤلفه‌های سرعت در امتداد خطوط مرکزی جریان میکروحفره را با نتایج دیگران، برای عدد نادسن $0/1$ با استفاده از روش‌های بولتزن شبکه‌ای مختلف نشان می‌دهد.

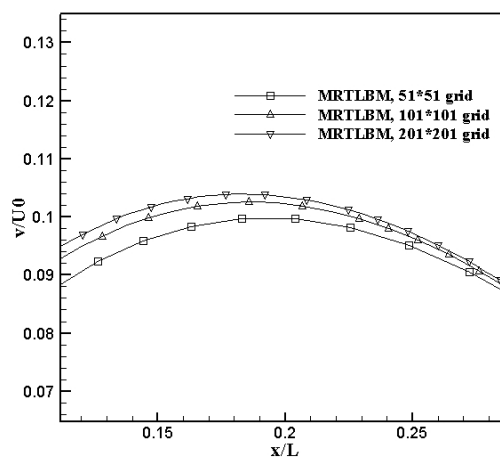
همان‌گونه‌که از شکل قابل مشاهده است، نتایج روش MRTLBM تطابق بهتری با نتایج دیگران دارد. جدول ۱

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۴، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۴



شکل ۶- مؤلفه y سرعت در امتداد خط مرکزی افقی

میکروحفره برای $Kn=0.1$



شکل ۷- بزرگ شده ناحیه A از شکل (۶)

$0/1022$ ، $0/1041$ و $0/1045$ هستند. همان‌گونه‌که دیده می‌شود، نتایج به دست آمده برای شبکه‌های 101×101 و 201×201 تقریباً معادل هستند و تطابق خوبی با یکدیگر دارند. از این رو به منظور کاهش هزینه‌های محاسباتی، نتایج شبیه‌سازی‌های جریان در میکروحفره، تماماً با استفاده از شبکه‌بندی غیریکنواخت درشت‌تر یعنی 101×101 به دست آمده‌اند.

۳-۱-۴- اعتبارسنجی نتایج شبیه‌سازی‌های جریان میکروحفره
به منظور اعتبارسنجی برنامه‌های کامپیوتری موجود در

جدول ۱- مقایسه موقعیت مرکز گردابه اصلی

عدد ناسن	موقعیت مرکز گردابه		اختلاف (%)
	MRTLBM	تانگ و همکاران کار	
۰/۰۱	(۰/۵۰۱۶ , ۰/۷۶۳۴)	(۰/۵ , ۰/۷۶۳۳)	(۰/۳۲ , ۰/۰۱۸)
۰/۰۵	(۰/۵۰۱۸ , ۰/۷۴۶۵)	(۰/۵ , ۰/۷۴۶۷)	(۰/۳۶ , ۰/۰۲۸)
۰/۱	(۰/۵۰۱۹ , ۰/۷۰۸۸)	(۰/۵ , ۰/۷۲)	(۰/۳۷ , ۱/۵۶۲)

خطوط جریان در اطراف دیواره‌های میکرو حفره، شکل دیواره را به خود می‌گیرند.

شکل (۱۰) مؤلفه‌های سرعت در امتداد خطوط مرکزی جریان میکرو حفره را، برای اعداد ناسن مختلف با استفاده از روش MRTLBM نشان می‌دهند. همان‌گونه که در این شکل‌ها نمایش داده شده است، با افزایش عدد ناسن، سرعت لغزشی بر روی دیواره‌ها افزایش می‌یابد. در شکل (۱۰-الف) سیال مجاور دیواره بالایی در صورتی لغزش کمتری دارد که به دیواره بیشتر بچسبد یعنی نسبت u/U_0 به یک نزدیکتر باشد که با کاهش عدد ناسن این عدد به یک نزدیکتر و لذا لغزش کمتر می‌شود.

شکل‌های (۱۱) و (۱۲) مؤلفه x سرعت در امتداد خط مرکزی عمودی جریان میکرو حفره را با استفاده از روش‌های بولتزمن شبکه‌ای مختلف برای عدد ناسن ۰/۱ نشان می‌دهند. همان‌گونه که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، روش MRTLBM لغزش کمتری را نسبت به دو روش دیگر نشان می‌دهد. سیال مجاور دیواره متحرک بالایی در صورتی لغزش کمتری دارد که به دیواره بیشتر بچسبد و سرعت آن به سرعت دیواره نزدیکتر باشد؛ یعنی نسبت u/U_0 به یک نزدیکتر باشد که در مورد روش MRTLBM این عدد به یک نزدیکتر است و لذا لغزش کمتر می‌شود.

۴-۱-۵- بررسی تأثیر افزایش عدد ناسن در خارج از محدوده

رژیم لغزشی

در این قسمت، به منظور ارزیابی توانایی برنامه‌های کامپیوتری

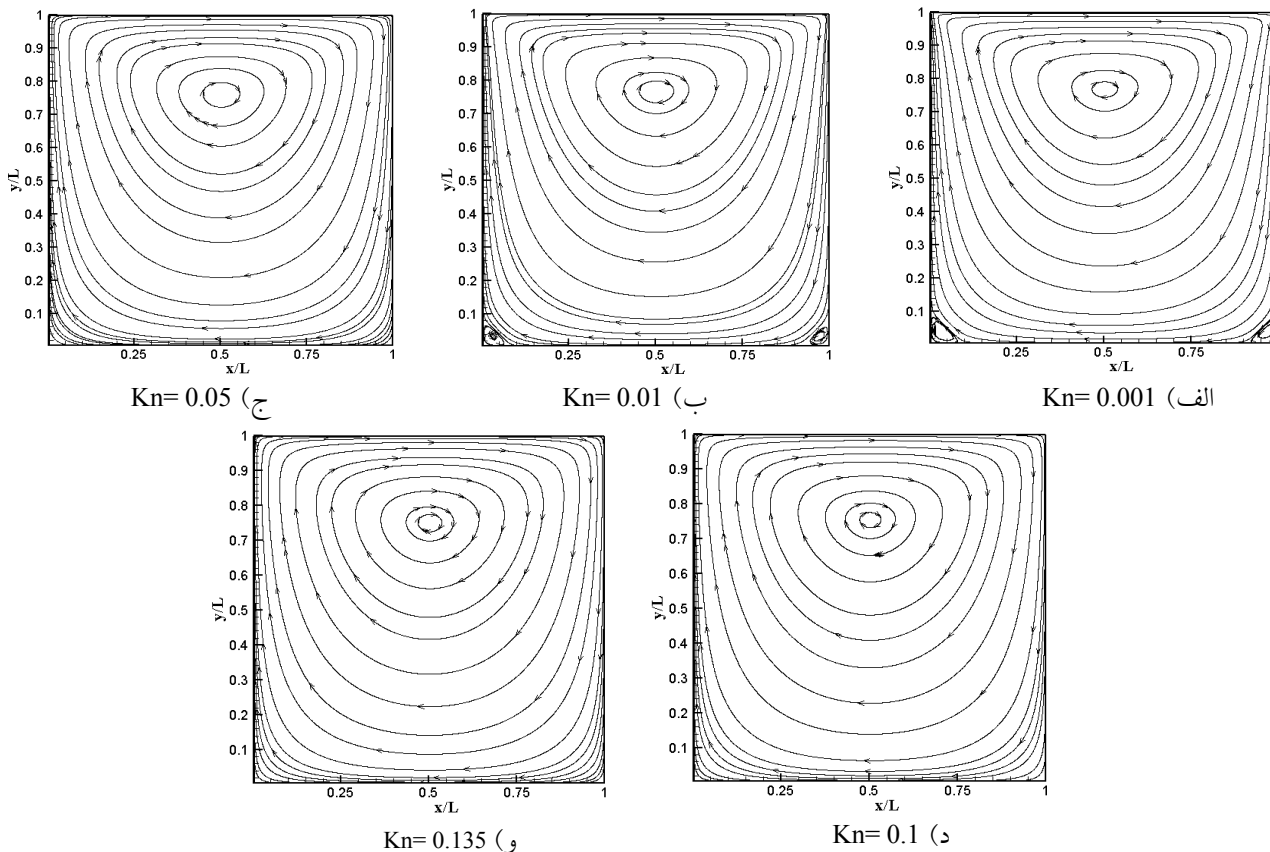
مقایسه‌ای بین موقعیت‌های مرکز گردابه اصلی به دست آمده در روش‌های بولتزمن شبکه‌ای حاضر و در کار تانگ و همکاران [۱۴] در اعداد ناسن مختلف ارائه می‌دهد. همان‌گونه که دیده می‌شود، با افزایش عدد ناسن، یک حرکت جزئی رو به پایین در مرکز گردابه اصلی وجود دارد، در حالی که هیچ جابجایی افقی محسوسی در مرکز گردابه دیده نمی‌شود.

۴-۱-۴- بررسی تأثیر افزایش عدد ناسن در محدوده رژیم

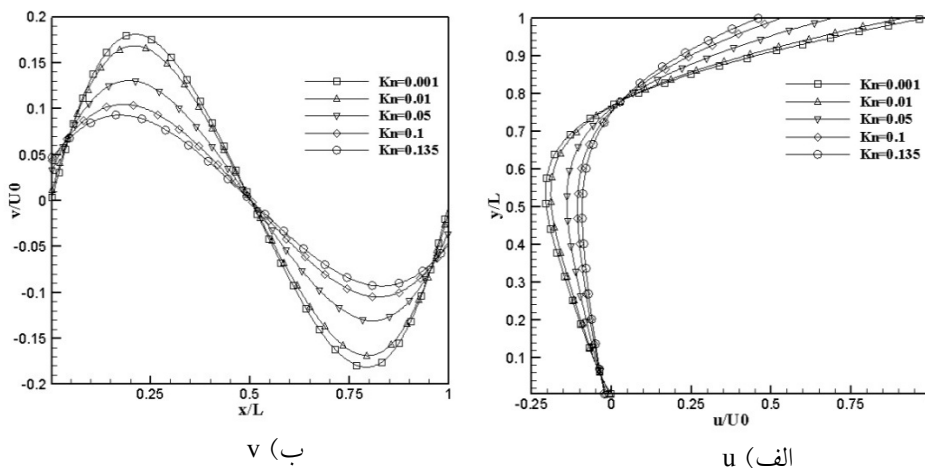
جریان لغزشی

در این قسمت تأثیر افزایش عدد ناسن در محدوده رژیم جریان لغزشی و تا حدودی رژیم گذار را بر روی جریان میکرو حفره بررسی می‌کنیم. همچنین به مقایسه روش‌های بولتزمن شبکه‌ای مختلف در آن محدوده برای جریان میکرو حفره می‌پردازیم.

شکل (۹) خطوط جریان را در یک میکرو حفره برای اعداد ناسن ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۱، ۰/۰۵، ۰/۱ و ۰/۱۳۵ با استفاده از روش MRTLBM نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل نشان داده شده است، علاوه بر گردابه‌های اصلی ساعتگرد در مرکز میکرو حفره، در اعداد ناسن کوچکتر دو گردابه کوچک پاد ساعتگرد در سمت راست و چپ دیواره پایینی تشکیل شده‌اند. با افزایش عدد ناسن، این گردابه‌ها به تدریج کوچکتر شده و در نهایت حذف شده‌اند. علت این پدیده این است که با افزایش عدد ناسن، لغزش بر روی دیواره‌ها افزایش می‌یابد و



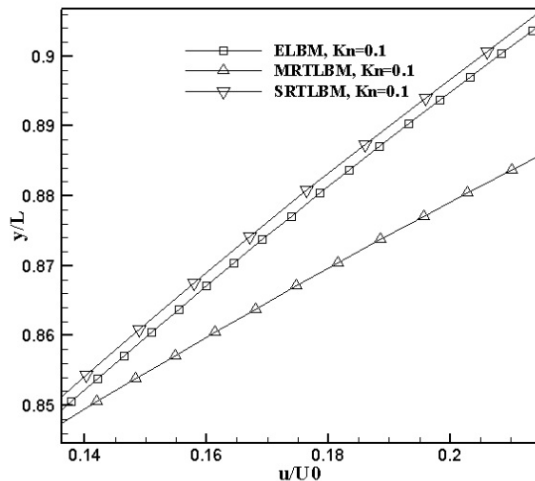
شکل ۹- خطوط جریان در میکروحفرة با استفاده از روش MRTLBM



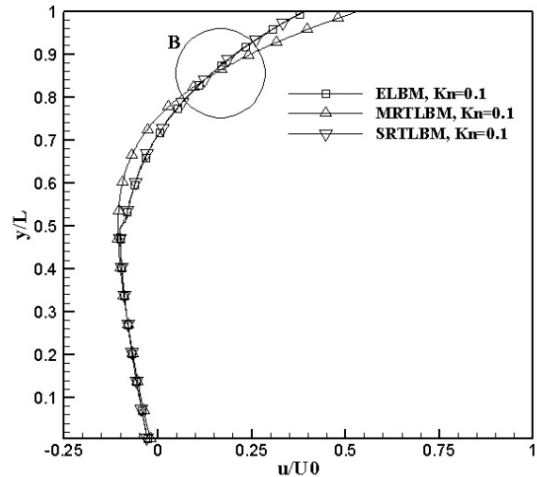
شکل ۱۰- مؤلفه x و y سرعت در امتداد خط مرکزی عمودی و افقی میکروحفرة با استفاده از روش MRTLBM

نادسن ۲، با استفاده از روش‌های بولتزمان شبکه‌ای مختلف را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل دیده می‌شود، نتایج روش MRTLBM به‌واسطه استفاده از ضرایب تخفیف مختلف، نتایج معقول‌تری را نسبت به روش‌های SRTLBM و ELBM

موجود در شبیه‌سازی جریان میکروحفرة در اعداد نادسن بیشتر، به بررسی و مقایسه روش‌های بولتزمان شبکه‌ای حاضر در محدوده رژیم گذار پرداخته می‌شود. شکل (۱۳) خطوط جریان در یک میکروحفرة برای عدد

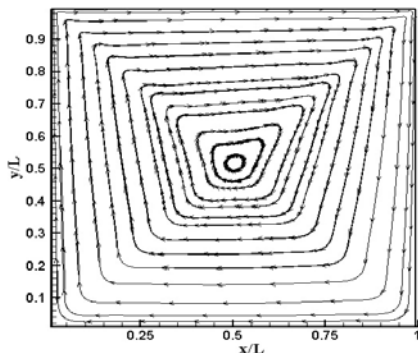


شکل ۱۲- بزرگ شده ناحیه B از شکل (۱۱)

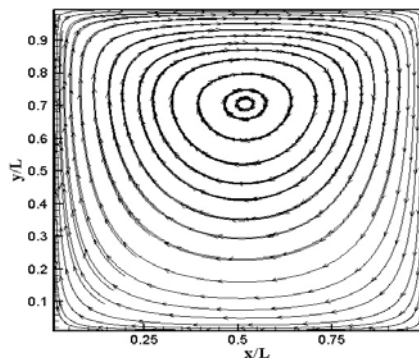


شکل ۱۱- مؤلفه x سرعت در امتداد خط مرکزی عمودی

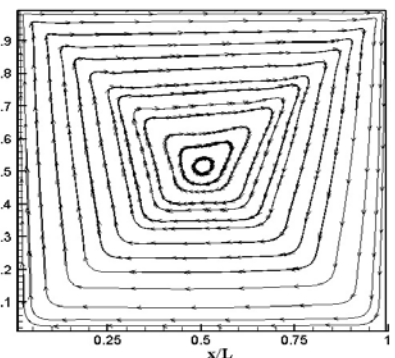
میکرو حفره در $Kn=0.1$



ج) ELBM



ب) MRTLBM

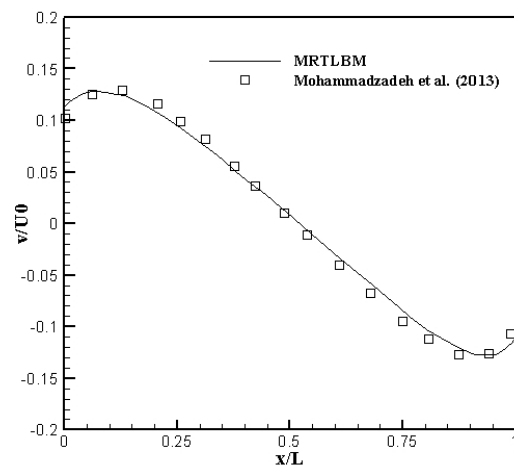


الف) SRTLBM

شکل ۱۳- خطوط جریان در میکرو حفره برای $Kn=2$

ارائه می‌دهد. بدین ترتیب نتیجه می‌شود که علی‌رغم اینکه هر سه روش در شبیه‌سازی جریان‌های در مقیاس میکرو در محدوده جریان لغزشی، قابلیت کاربرد دارند و نتایج خوبی را به دست می‌دهند، لیکن تنها روش MRTLBM، توانایی شبیه‌سازی جریان در رژیم گذار را دارد.

شکل (۱۴) مقایسه مؤلفه y سرعت در امتداد خط مرکزی افقی میکرو حفره که با روش MRTLBM به دست آمده است را با نتایج روش شبیه‌سازی مستقیم مونت کارلو توسط محمدزاده و همکاران [۳۱]، برای عدد نادسن ۱ نشان می‌دهد. همان گونه که از شکل قابل مشاهده است، نتایج روش MRTLBM تطابق خوبی با سایر داده‌های عددی دارد.



شکل ۱۴- مؤلفه y سرعت در امتداد خط مرکزی افقی

میکرو حفره در $Kn=1$

جدول ۲- زمان مورد نیاز برای انجام ۱۰۰ تکرار در جریان

میکرو حفره در $Kn=0.1$

زمان بر حسب ثانیه	روش های بولتزمن شبکه‌ای
۸۴/۹۴	SRTLBM
۸۱/۵۴	MRTLBM
۱۲۳/۸۳	ELBM

۴-۱-۶- مقایسه روش های بولتزمن شبکه‌ای مختلف از نظر

مدت زمان اجرا

جدول ۲ زمان مورد نیاز برای انجام ۱۰۰ تکرار را بر روی یک کامپیوتر با مشخصات پردازنده و حافظه مشخص (Intel(R) Core(TM) i7 CPU, 6.00 GB RAM) در روش های بولتزمن شبکه‌ای مختلف، برای $Kn=0.1$ نشان می‌دهد. همان گونه که دیده می‌شود، زمان‌های اجرای مربوط به روش SRTLBM کمتر از دو روش دیگر است. با توجه به پیچیدگی بیشتر روش MRTLBM و محاسبات بیشتری که در مرحله برخورد انجام می‌شود، زمان مورد نیاز آن بیشتر است ولی نسبت به دو روش دیگر دقت و پایداری بهتری را فراهم می‌آورد.

۴-۲- نتایج جریان میکروکانال

با توجه به کاربردهای مهندسی دستگاه‌های در ابعاد میکرو، جریان گاز درون میکروکانال، به یکی از موضوعات مهم روش‌های عددی تبدیل شده است. در این قسمت یک جریان همدمای دو بعدی محصور بین دو صفحه تخت موازی با طول L و ارتفاع H ، در اعداد نادسن مختلف و نسبت فشارهای^{۱۳} مختلف در نظر گرفته شده است. جریان با اختلاف فشار بین ورودی کانال با فشار P_{in} و خروجی کانال با فشار P_{out} به حرکت در می‌آید. در این قسمت، نسبت لاغری^{۱۴} L/H برابر با ۵۰ در نظر گرفته شده است. عدد رینولدز به صورت $Re = U_{in}H/\nu$ تعریف شده است که در آن U_{in} سرعت ورودی، H ارتفاع کانال و ν ویسکوزیته سینماتیکی است. در اینجا عدد رینولدز برابر با ۰/۳ در

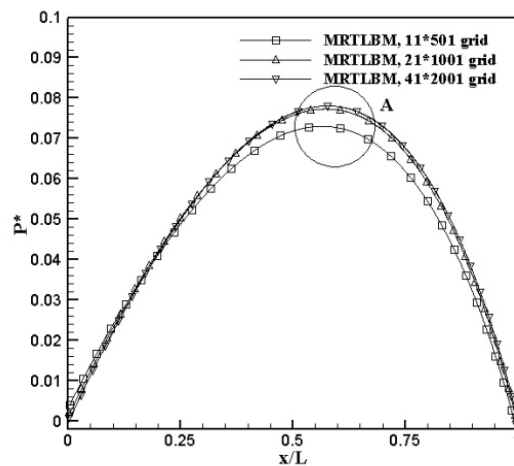
نظر گرفته شده است. در این قسمت از شبکه‌بندی غیریکنواخت 1001×21 با نسبت کشیدگی ۳ استفاده شده است.

در کار حاضر، ترکیبی از شرایط مرزی کمانه کردن و آینه‌ای در دیواره‌های بالایی و پایینی در شبیه‌سازی شرط مرزی لغزشی استفاده شده است. برای شرایط مرزی در ورودی و خروجی، شرط مرزی ارائه شده توسط لیم و همکاران [۱۱] را اعمال می‌کنیم. در این روش توابع توزیع نامعلوم با استفاده از توابع توزیع تعادلی جایگزین می‌شوند. در ورودی و خروجی کانال، شرط مرزی فشار اعمال شده و سایر متغیرها با استفاده از کمیات نقاط داخل میدان جریان محاسبه شده است. مؤلفه‌های سرعت در ورودی کانال با استفاده از پایین دست جریان و مؤلفه‌های سرعت در خروجی کانال با استفاده از بالادست جریان برون‌یابی شده‌اند. با توجه به نتایج شبیه‌سازی‌های به دست آمده در قسمت قبل، در این بخش جریان داخل میکروکانال فقط با استفاده از روش MRTLBM شبیه‌سازی می‌شود.

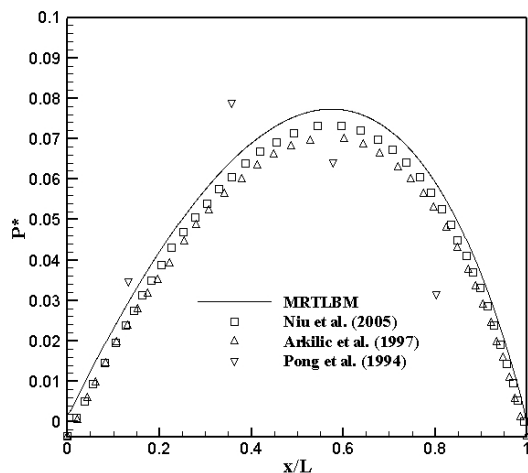
۴-۲-۱- انتخاب شبکه غیریکنواخت بهینه

مستقل از شبکه بودن نتایج در عدد نادسن ۰/۵۳ و نسبت فشار ۲/۰۲ بررسی شده است. اندازه شبکه‌های غیریکنواخت مورد استفاده 11×501 ، 21×1001 و 41×2001 است.

شکل‌های (۱۵) و (۱۶) بی بعد شده انحراف فشار از توزیع فشار خطی در امتداد میکروکانال، یعنی $P^* = (P - P_{in})/P_{out}$ (در اینجا P_{in} فشاری است که به طور خطی بین فشار ورودی و خروجی درونیابی شده است و P_{out} فشار در خروجی کانال است.)، را در عدد نادسن ۰/۵۳ و نسبت فشار ۲/۰۲ در این شبکه‌های مختلف، با استفاده از روش MRTLBM نشان می‌دهند. همان گونه که دیده می‌شود، نتایج به دست آمده در شبکه‌های 21×1001 و 41×2001 تطابق خوبی با یکدیگر دارند، لذا برای کلیه شبیه‌سازی‌های این قسمت، از شبکه 21×1001 استفاده شده است.

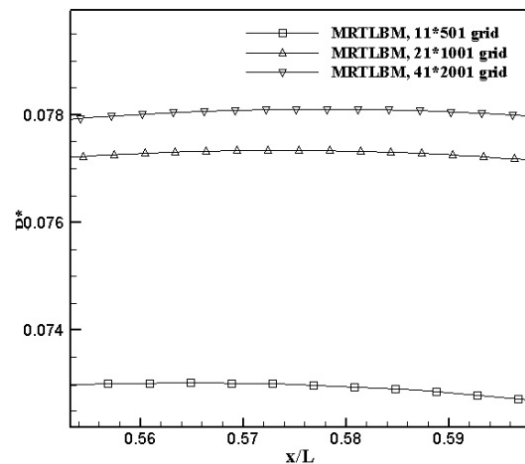


شکل ۱۵- بی بعد شده انحراف فشار از توزیع فشار خطی برای عدد نادسن 0.53 و نسبت فشار $2/0.2$



شکل ۱۷- بی بعد شده انحراف فشار از توزیع فشار خطی

برای عدد نادسن 0.53 و نسبت فشار $2/0.2$



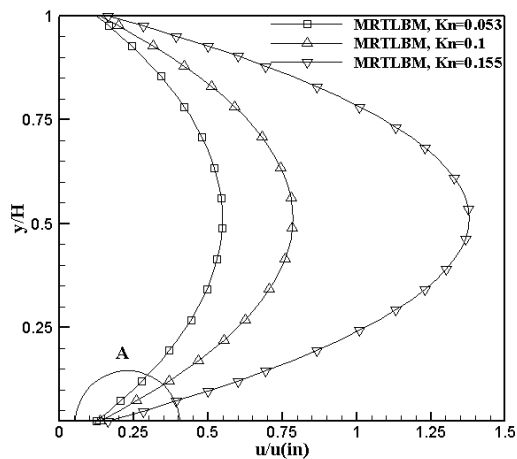
شکل ۱۶- بزرگ شده ناحیه A از شکل ۱۵

روش MRTLBM با نتایج دیگران نشان می‌دهد. مقادیر بیشینه بی‌بعد شده انحراف فشار در روش بولتزمن شبکه‌ای استفاده شده، نتایج نیو و همکاران، نتایج آرکیلیک و همکاران و نتایج پونگ و همکاران به ترتیب 0.076 ، 0.074 ، 0.071 و 0.065 است. اختلاف نتایج روش بولتزمن شبکه‌ای استفاده شده با نتایج عددی و تحلیلی کمتر از 7% و با نتایج آزمایشگاهی در حدود 15% است. لذا همان‌گونه که از شکل پیداست، نتایج توزیع فشار با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای استفاده شده با سایر داده‌های تجربی، تحلیلی و عددی تطابق بسیار خوبی دارد.

۲-۲-۴- اعتبارسنجی نتایج شبیه‌سازی‌های جریان

میکروکانال

به‌منظور اعتبارسنجی برنامه‌های کامپیوتری موجود در شبیه‌سازی میکروجرایان‌ها در یک کانال، نتایج به‌دست آمده در این قسمت با نتایج تحلیلی آرکیلیک و همکاران [۱۲]، نتایج عددی نیو و همکاران [۳۰] و نتایج آزمایشگاهی پونگ و همکاران [۳۲] مقایسه شده‌اند. شکل (۱۷) مقایسه بی‌بعد شده انحراف فشار از توزیع فشار خطی را در امتداد میکروکانال در عدد نادسن 0.53 و نسبت فشار $2/0.2$ با استفاده از



شکل ۱۹- توزیع سرعت بی بعد شده در مقطع وسط میکروکانال
برای اعداد نادسن مختلف و نسبت فشار ۲/۰۲

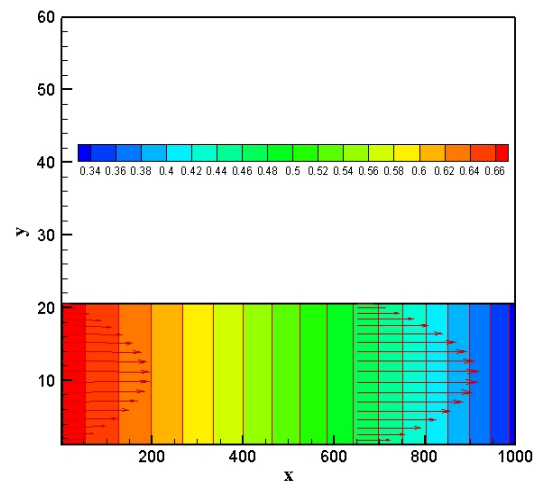
۴-۲-۳- بررسی تأثیر افزایش عدد نادسن در محدوده رژیم جریان لغزشی

در این قسمت تأثیر افزایش عدد نادسن در محدوده رژیم
جریان لغزشی و تا حدودی رژیم گذار را بر روی جریان
میکروکانال با استفاده از روش MRTLBM بررسی می‌کنیم.

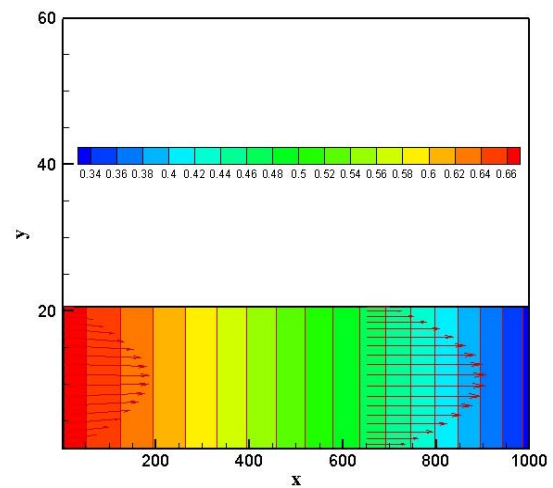
شکل (۱۸) کانتورهای فشار و بردارهای سرعت در امتداد
کانال را در اعداد نادسن مختلف $Kn=0.1$, $Kn=0.053$ و
 $Kn=0.155$ و نسبت فشار $PR=2.02$ نشان می‌دهد.
همان‌گونه‌که در این شکل نشان داده شده است، با افزایش عدد
نادسن، سرعت لغزشی در مرز دیواره افزایش می‌یابد.

شکل‌های (۱۹) و (۲۰) توزیع سرعت بی‌بعد شده را در
مقطع وسط میکروکانال در اعداد نادسن مختلف نشان می‌دهند.
همان‌گونه‌که در این شکل‌ها نشان داده شده است، با افزایش
عدد نادسن، سرعت لغزشی در مرز دیواره افزایش می‌یابد.
همچنین سرعت بیشینه با افزایش عدد نادسن افزایش
می‌یابد. این پدیده ناشی از این است که، عدد نادسن محلی در
راستای طولی کانال تغییر می‌کند و نحوه تغییرات آن با فشار
نسبت عکس دارد.

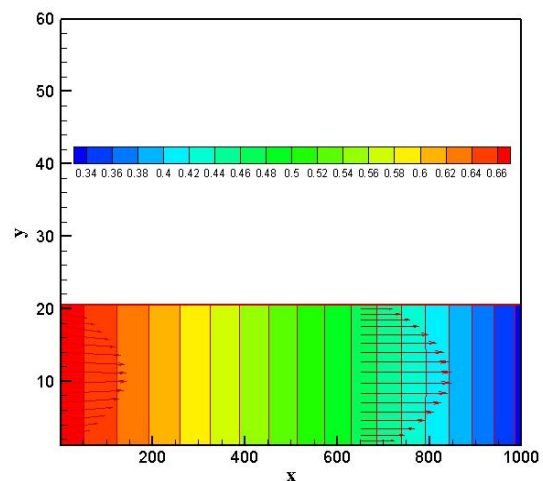
شکل (۲۱) بی‌بعد شده انحراف فشار از توزیع فشار خطی
در امتداد میکروکانال را، در اعداد نادسن مختلف و برای نسبت



الف) $Kn=0.053$



ب) $Kn=0.1$



ج) $Kn=0.155$

شکل ۱۸- کانتورهای فشار و بردارهای سرعت در امتداد
میکروکانال برای اعداد نادسن مختلف و نسبت فشار ۲/۰۲

فشار $2/0.2$ با استفاده از روش MRTLBم نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود، با افزایش عدد ناسن، انحراف فشار از توزیع فشار خطی کاهش می‌یابد لذا توزیع فشار در امتداد میکروکانال به حالت خطی نزدیکتر می‌شود. غیرخطی بودن توزیع فشار را می‌توان به این واقعیت نسبت داد که اثرات تراکم پذیری و رقت باعث می‌شوند که تغییرات فشار روند متفاوتی را در مقایسه با آنچه که برای رژیم پیوستار داریم، اختیار کند.

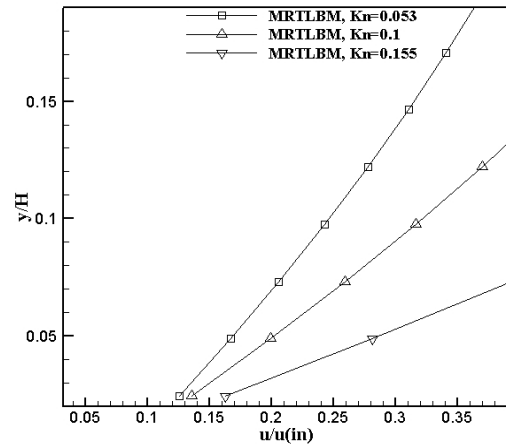
۴-۲-۴- بررسی تأثیر افزایش عدد ناسن در خارج از

محدوده رژیم لغزشی

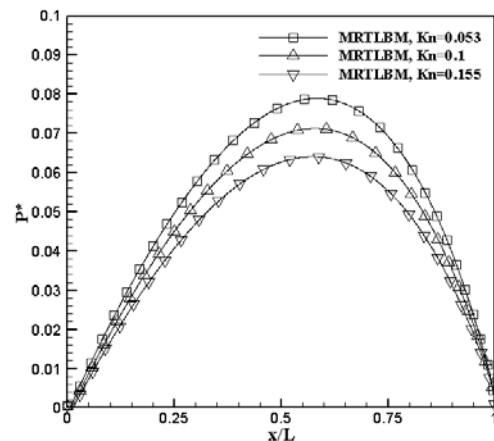
در این قسمت، به ارزیابی توانایی برنامه‌های کامپیوتری موجود در شبیه‌سازی جریان میکروکانال در اعداد ناسن بیشتر، در محدوده رژیم گذار، با استفاده از روش MRTLBم می‌پردازیم. شکل (۲۲) نسبت دبی جرمی جریان در میکروکانال به دبی جرمی جریان در کانال معمولی کاملاً توسعه یافته را بر حسب عدد ناسن نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل دیده می‌شود، با افزایش عدد ناسن، نسبت دبی جرمی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. اکنون این پدیده، که ابتدا توسط ناسن معرفی شد، به پدیده ناسن مینیمم معروف است [۳۳]. وقوع این پدیده به واسطه این حقیقت است که در اعداد ناسن پایین‌تر، اثر تراکم پذیری غالب است. بنابراین با افزایش عدد ناسن، افت فشار افزایش می‌یابد و در مقابل جریان داخل کانال مقاومت ایجاد می‌شود. اما در اعداد ناسن بالاتر، اثر رقت غالب است که باعث افزایش دبی جرمی با افزایش عدد ناسن می‌شود.

۴-۲-۵- بررسی تأثیر کاهش نسبت فشار

شکل (۲۳) بی‌بعد شده انحراف فشار از توزیع فشار خطی در امتداد میکروکانال را، برای عدد ناسن 0.53 و در دو نسبت فشار مختلف با استفاده از روش MRTLBم نشان می‌دهد. همان‌گونه که از شکل پیداست، با افزایش نسبت فشار ورودی به



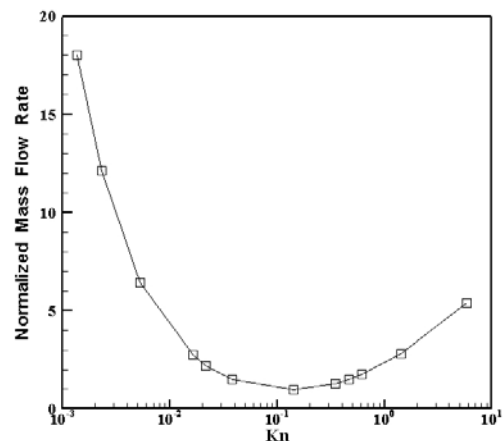
شکل ۲۰- بزرگ شده ناحیه A از شکل (۱۹)



شکل ۲۱- بی‌بعد شده انحراف فشار از توزیع فشار خطی در

امتداد میکروکانال برای اعداد ناسن مختلف و

نسبت فشار $2/0.2$



شکل ۲۲- بی‌بعد شده دبی جرمی بر حسب عدد ناسن

برای نسبت فشار $1/43$

متماثل تر می شود.

۳-۴- نتایج جریان میکروکانال با یک انبساط ناگهانی

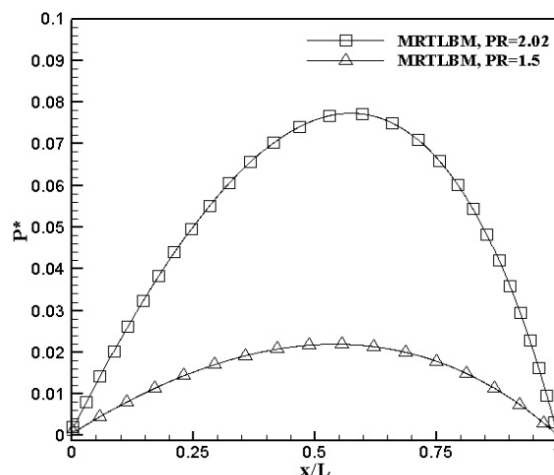
مطالعه و تحلیل میکرو جریان‌ها با هندسه‌های پیچیده‌تر به یکی از موضوعات مورد علاقه محققان تبدیل شده است. در این قسمت، همان‌گونه که در شکل (۲۴) دیده می‌شود، یک جریان همدمای دو بعدی در یک میکروکانال با انبساط ناگهانی در اعداد نادسن مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا طول دو قسمت کانال برابر گرفته شده است. نسبت لاغری در مقطع باریک 50° و در مقطع عریض 25° در نظر گرفته شده است. در اینجا عدد رینولدز در منبای عرض قسمت باریک‌تر و سرعت ورودی کانال و برابر $0/3$ در نظر گرفته شده است.

در کار حاضر، ترکیبی از شرایط مرزی کمانه کردن و آینه‌ای در دیواره‌های بالایی و پایینی در شبیه‌سازی شرط مرزی لغزشی استفاده شده است. در ورودی و خروجی کانال، شرط مرزی فشار اعمال شده و سایر متغیرها با استفاده از کمیات نقاط داخل میدان جریان محاسبه شده است. با توجه به نتایج به دست آمده در قسمت‌های قبل، در این بخش جریان داخل میکروکانال با انبساط ناگهانی با استفاده از روش MRTLBم و با شبکه‌بندی غیریکنواخت شبیه‌سازی می‌شود.

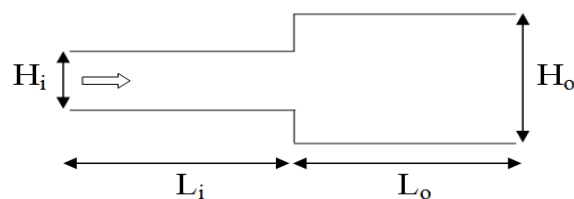
۳-۴-۱- اعتبار سنجی نتایج شبیه‌سازی‌های جریان

میکروکانال با انبساط ناگهانی

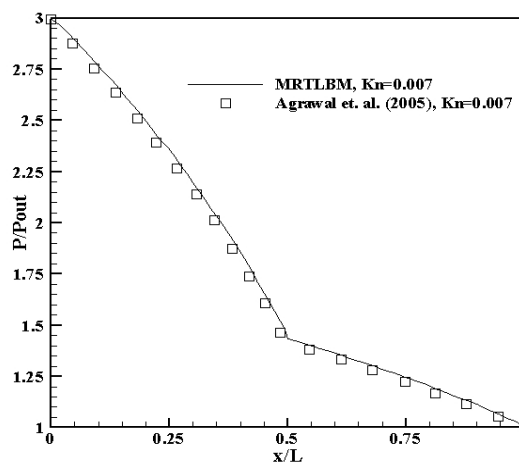
به منظور اعتبارسنجی برنامه‌های کامپیوتری موجود در شبیه‌سازی میکروکانال با انبساط ناگهانی، نتایج به دست آمده در این قسمت با نتایج عددی آگراوال و همکاران [۳۴] مقایسه شده‌اند. شکل (۲۵) مقایسه توزیع فشار را در امتداد میکروکانال با انبساط ناگهانی در عدد نادسن $0/07$ و نسبت فشار ۳ با استفاده از روش MRTLBم با نتایج دیگران نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل مشخص است، نتایج توزیع فشار با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای استفاده شده با سایر داده‌های تحلیلی و عددی تقریباً به صورت کامل تطابق دارد.



شکل ۲۳- بی‌بعد شده انحراف فشار از توزیع فشار خطی در امتداد میکروکانال برای عدد نادسن $0/053$ و نسبت فشارهای $1/5$ و $2/02$



شکل ۲۴- یک میکروکانال با انبساط ناگهانی



شکل ۲۵- توزیع فشار برای عدد نادسن $0/007$ و نسبت فشار ۳

خروجی کانال، انحراف از توزیع فشار خطی افزایش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که با زیاد شدن نسبت فشار، موقعیت افقی بیشینه انحراف از توزیع خطی به سمت خروجی

۴-۳-۲- بررسی تأثیر افزایش عدد نادسن بر توزیع فشار در

امتداد جریان میکروکانال با انبساط ناگهانی

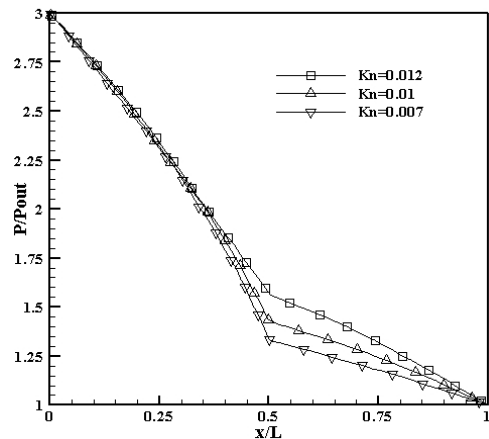
در این قسمت تأثیر افزایش عدد نادسن در محدوده رژیم جریان لغزشی را بر روی توزیع فشار جریان میکروکانال دارای انبساط ناگهانی با استفاده از روش MRTLBM بررسی می‌کنیم. شکل (۲۶) توزیع فشار در امتداد میکروکانال با انبساط ناگهانی را در عدد نادسن مختلف نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل مشخص است، با افزایش عدد نادسن، انحراف فشار از توزیع فشار خطی کاهش می‌یابد لذا توزیع فشار در امتداد میکروکانال به حالت خطی نزدیکتر می‌شود. به علاوه همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود، در محل اتصال دو مقطع کانال، یک ناپیوستگی در شیب وجود دارد. این ناپیوستگی به دلیل اثر تراکم‌پذیری مرتبط با تغییر ناگهانی سطح مقطع است. به این معنا که در جریان کانال مذکور، اطلاعات جریان به بالا دست و پایین دست جریان انتقال نمی‌یابد.

۴-۳-۳- بررسی تأثیر افزایش عدد نادسن بر توزیع سرعت

در امتداد جریان میکروکانال با انبساط ناگهانی

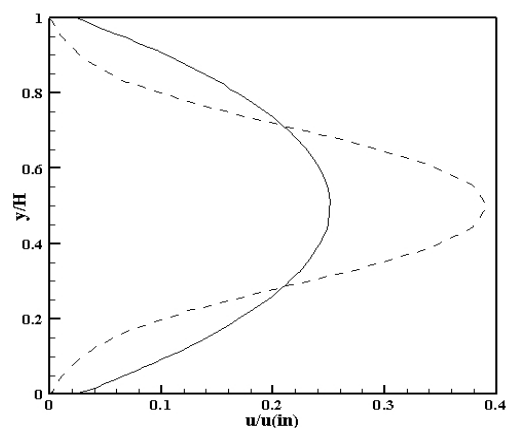
در این قسمت توزیع سرعت جریان میکروکانال دارای انبساط ناگهانی و تأثیر افزایش عدد نادسن بر روی آن را با استفاده از روش MRTLBM بررسی می‌کنیم. تمام سرعت‌های ارائه شده در این قسمت با سرعت در ورودی کانال بی‌بعد شده است. همچنین مختصه طول x با طول کلی و مختصه عرض y با عرض مقطع عریض‌تر میکروکانال بی‌بعد شده است.

در شکل (۲۷) توزیع سرعت بی‌بعد در وسط مقطع عریض‌تر میکروکانال (با خط توپر) و نزدیک محل اتصال دو مقطع میکروکانال (با خط چین) در عدد نادسن ۰/۰۰۷ و نسبت فشار ۳ ارائه شده است. سرعت طولی در میکروکانال با افزایش x به دلیل انبساط گاز افزایش می‌یابد. به علاوه، سرعت در دیواره‌ها به دلیل لغزش، غیر صفر است و سرعت لغزشی نیز با افزایش x افزایش می‌یابد. با این وجود، همان‌گونه که در شکل (۲۷) دیده می‌شود، پروفیل سرعت در مقاطع دور از محل



شکل ۲۶- توزیع فشار برای اعداد نادسن مختلف و

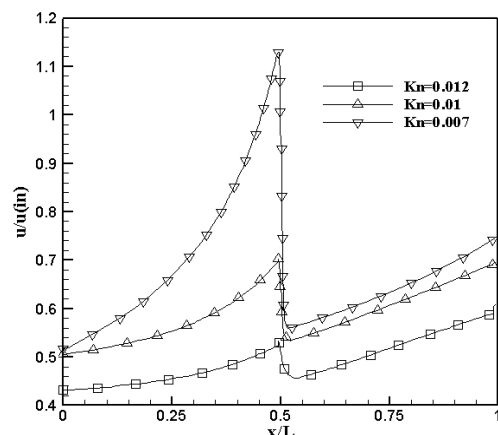
نسبت فشار ۳



شکل ۲۷- توزیع سرعت در وسط مقطع عریض‌تر (خط توپر) و

نزدیک محل اتصال دو مقطع (خط چین) میکروکانال برای عدد

نادسن ۰/۰۰۷ و نسبت فشار ۳



شکل ۲۸- توزیع سرعت در امتداد خط مرکزی برای اعداد

نادسن مختلف و نسبت فشار ۳

اتصال همچنان سهمی باقی می‌ماند، ولی جریان نزدیک محل اتصال دو مقطع این رفتار را از خود نشان نمی‌دهد. شکل (۲۸) توزیع سرعت در امتداد خط مرکزی میکروکانال با انبساط ناگهانی را برای اعداد نادسن مختلف و نسبت فشار ۳ نشان می‌دهد. این شکل یک پرش در محل اتصال دو مقطع میکروکانال نشان می‌دهد. این تغییر ناگهانی در سرعت را می‌توان از معادله پیوستگی نیز استنباط کرد، زیرا براساس آن سرعت باید خود را با تغییر مساحت تنظیم کند. این پرش در سرعت این مطلب را می‌رساند که به دلیل اثر تراکم پذیری، قسمت‌های مختلف جریان ارتباط بسیار کمی با هم دارند. همان‌گونه که در شکل (۲۸) دیده می‌شود، این پرش در سرعت با افزایش عدد نادسن، به دلیل اثر متضاد تراکم‌پذیری و رقت، کاهش می‌یابد.

۵- نتیجه‌گیری

در کار حاضر به منظور شبیه‌سازی میکروجرایان‌های همدمای دوبعدی، برای اولین بار مدل‌های مختلف بولتزمن شبکه‌ای بر روی شبکه‌بندی غیریکنواخت استفاده شد و جریان در داخل میکروحفره و میکروکانال در محدوده رژیم لغزشی و تا حدودی رژیم گذار شبیه‌سازی گردید. در ابتدا به شبیه‌سازی جریان میکرو حفره با دیواره متحرک با استفاده از روش‌های مختلف شبکه بولتزمن، سپس مقایسه این روش‌ها با هم و با نتایج محققین دیگر پرداخته شد و مشاهده شد که نتایج روش MRTLBM تطابق بهتری با نتایج دیگران دارد. در ادامه، به

واژه‌نامه

1. micro-electro-mechanical systems (MEMS)
2. lattice Boltzmann method (LBM)
3. multi-relaxation-time lattice Boltzmann method (MRTLBM)
4. single-relaxation-time lattice Boltzmann method (SRTLBM)

5. entropic lattice Boltzmann method (ELBM)
6. diffuse scattering boundary condition (DSBC)
7. bounce-back
8. specular
9. tangential momentum accommodation coefficient (TMAC)

10. adaptive grid refinement technique
11. chapman-enskog expansion
12. stretch ratio
13. pressure ratio (PR)
14. aspect ratio

شبیه‌سازی جریان میکرو کانال با استفاده از این روش پرداخته شد. از بررسی این شبیه‌سازی‌ها، نتیجه‌گیری‌های زیر به‌دست آمد:

۱- در شبیه‌سازی جریان در میکروحفره، با افزایش عدد نادسن، سرعت لغزشی روی دیواره‌ها افزایش می‌یابد. در نتیجه گردابه‌های تشکیل شده در گوشه‌های پایینی حفره از بین رفته و خطوط جریان در نزدیکی دیواره، شکل دیواره را به خود می‌گیرند.

۲- در شبیه‌سازی جریان در میکروکانال، با افزایش عدد نادسن، سرعت لغزشی در مرز دیواره افزایش و میزان انحراف از توزیع خطی فشار کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت فشار ورودی به خروجی کانال، انحراف فشار از توزیع فشار خطی بیشتر می‌شود.

۳- در شبیه‌سازی جریان در میکروکانال با انبساط ناگهانی، در محل اتصال دو مقطع کانال، یک ناپیوستگی در شیب نمودار توزیع فشار و یک پرش در نمودار توزیع سرعت به دلیل اثرات تراکم پذیری مرتبط با تغییر ناگهانی سطح مقطع وجود دارد. این پرش در سرعت با افزایش عدد نادسن، به دلیل اثر متضاد تراکم‌پذیری و رقت، کاهش می‌یابد.

۴- در محدوده رژیم جریان لغزشی، هر سه روش بولتزمن شبکه‌ای استفاده شده نتایج خوبی را به‌دست می‌دهند و قابلیت کاربرد دارند، لیکن تنها روش MRT، توانایی شبیه‌سازی جریان در رژیم گذار را دارد.

1. Ho, C. M., and Tai, Y. C., "Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS) and Fluid Flows", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp. 579-612, 1998.
2. Wolf-Gladrow, D. A., *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction*, Springer Verlag, 2005.
۳. رحمتی، ا.ر.، "بهبود پایداری روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی جریان‌های گرمایی مغشوش در اعداد رایلی بزرگ"، رساله‌ی دکتری مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۸.
4. He, X., Chen, S., and Doolen, D. G., "A Novel Thermal Model for the Lattice Boltzmann Method in Incompressible Limit", *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, pp. 282-300, 1998.
5. d'Humières, D., "Generalized Lattice Boltzmann Equations", *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations (Progress in Astronautics and Aeronautics)*, Vol. 159, pp. 450-458, 1994.
6. Ansumali, S., and Karlin, I. V., "Stabilization of the Lattice Boltzmann Method by the H Theorem: A Numerical Test", *Physical Review E*, Vol. 62, No. 6, pp. 7999-8003, 2000.
7. Ansumali, S., and Karlin, I. V., "Single Relaxation Time Model for Entropic Lattice Boltzmann Methods", *Physical Review E*, Vol. 65, No. 5, pp. 056312(1)-056312(9), 2002.
8. Rahmati, A. R., and Niazi, S., "Simulation of Microflows using the Lattice Boltzmann Method on Nonuniform Meshes", *International Journal of Nanomechanics Science and Technology*, Vol. 3, No. 1, pp. 77-97, 2012.
۹. نیازی، س.، "کاربرد روش‌های مختلف شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی جریان‌های در ابعاد میکرو"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، ۱۳۹۱.
10. Nie, X., Doolen, G. D., and Chen, S. Y., "Lattice-Boltzmann Simulations of Fluid Flows in MEMS", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 107, No. 1, pp. 279-289, 2002.
11. Lim, C. Y., Shu, C., Niu, X. D., and Chew, Y. T., "Application of Lattice Boltzmann Method to Simulate Microchannel Flows", *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 7, pp. 2299-2308, 2002.
12. Arkilic, E. B., Schmidt, M. A., and Breuer, K. S., "Gaseous Slip Flow in Long Microchannels", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 167-178, 1997.
13. Niu, X. D., Shu, C., and Chew, Y. T., "A Lattice Boltzmann BGK Model for Simulation of Micro Flows", *Europhysics Letters*, Vol. 67, No. 4, pp. 600-606, 2004.
14. Tang, G. H., Tao, W. Q., and He, Y. L., "Lattice Boltzmann Method for Gaseous Microflows using Kinetic Theory Boundary Conditions", *Physics of Fluids*, Vol. 17, No. 5, pp. 058101(1)-058101(4), 2005.
15. Zhang, Y. H., Qin, R. S., Sun, Y. H., Barber, R. W., and Emerson, D. R., "Gas Flow in Microchannel- A Lattice Boltzmann Method Approach", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 121, No. 1, pp. 257-267, 2005.
16. Ansumali, S., Karlin, I. V., Frouzakis, C. E., and Boulouchos, K. B., "Entropic Lattice Boltzmann Method for Microflows", *Physica A*, Vol. 359, pp. 289-305, 2006.
17. Shirani, E., and Jafari, S., "Application of LBM in Simulation of Flow in Simple Micro-Geometries and Micro Porous Media", *African Physical Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 34-42, 2007.
18. Perumal, D. A., Krishna, V., Sarvesh, G., and Dass, A.K., "Numerical Simulation of Gaseous Microflows by Lattice Boltzmann Method", *International Journal of Recent Trends in Engineering*, Vol. 1, No. 5, pp. 15-20, 2009.
19. Prasianakis, N., and Ansumali, S., "Microflow Simulations via the Lattice Boltzmann Method", *Communications in Computational Physics*, Vol. 9, No. 5, pp. 1128-1136, 2011.
20. He, X., Luo, L. S., and Dembo, M., "Some Progress in Lattice Boltzmann Method, Part I. Non-Uniform Mesh Grids", *Journal of Computational Physics*, Vol. 129, pp. 357-363, 1996.
21. Chew, Y. T., Shu, C., and Niu, X. D., "A New Differential Lattice Boltzmann Equation and Its Application to Simulate Incompressible Flows on Non-Uniform Grids", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 107, Nos. 1/2, pp. 329-342, 2002.
22. Fillipova, O., and Hänel, D., "Grid Refinement for Lattice-BGK Models", *Journal of Computational Physics*, Vol. 147, pp. 219-228, 1998.
23. Fillipova O., and Hänel D., "Acceleration of Lattice-BGK Schemes with Grid Refinement", *Journal of Computational Physics*, Vol. 165, pp. 407-427, 2000.
24. Shu C., Chew Y.T., and Niu X. D., "Least-Squares-Based Lattice Boltzmann Method: A Meshless Approach for Simulation of Flows with Complex Geometry", *Physical Review E*, Vol. 64, No. 4, pp. 045701(1)-045701(4), 2001.
25. Niu, X. D., Chew, Y. T., and Shu, C., "Simulation of Flows Around an Impulsively Started Circular

- Cylinder by Taylor Series Expansion and Least Squares-Based Lattice Boltzmann Method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 188, pp. 176-193, 2003.
26. Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., and Krook, M., “A Model for Collision Process in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component System”, *Physical Review*, Vol. 94, No. 3, pp. 511-525, 1954.
 27. Mohamad, A. A., *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*, Springer, 2011.
 28. Ansumali, S., and Karlin, I. V., “Kinetic Boundary Condition for the Lattice Boltzmann Method”, *Physical Review E*, Vol. 66, No. 2, pp. 026311(1)-026311(6), 2002.
 29. Chikatamarla, S. S., Ansumali, S., and Karlin, I. V., “Entropic Lattice Boltzmann Models for Hydrodynamics in Three Dimensions”, *Physical Review Letters*, Vol. 97, No. 1, pp. 010201(1)-010201(4), 2006.
 30. Niu, X. D., Shu, C., and Chew Y. T., “Numerical Simulation of Isothermal Micro Flows by Lattice Boltzmann Method and Theoretical Analysis of the Diffuse Scattering Boundary Condition”, *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 16, No. 12, pp. 1927-1941, 2005.
 31. Mohammadzadeh, A., Roohi, E., and Niazmand, H., “A Parallel DSMC Investigation of Monatomic/Diatomic Gas Flows in a Micro/Nano Cavity”, *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 63, pp. 305-325, 2013.
 32. Pong, K. C., Ho, C. M., Liu, J., and Tai, Y., “Non-Linear Pressure Distribution in Uniform Micro Channels”, *In Application of Microfabrication to Fluid Mechanics, ASME Winter Annual Meeting*, Vol. 197, pp. 51-56, 1994.
 33. Knudsen, M., “Die Gesetze der Molecular Stromung und Die inneren Reibungstromung der Gase Durch Rohren”, *Annals of Physics*, Vol. 28, pp. 75-130, 1909
 34. Agrawal, A., Djenidi, L., and Antonia, R. A., “Simulation of Gas Flow in Microchannels with a Sudden Expansion or Contraction”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 530, pp. 135-144, 2005.