ارتعاشات مجموعه تیرهای تیموشنکو با اتصالات میانی تحت عبور سیستم شش درجه آزادی دومحوره

سعید فروزنده و علیرضا آریایی*
گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۳/۰۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱۱/۲۱)
DOI: 10.18869/acadpub.jcme.35.2.24

چکیده – در این مقاله، ارتعاشات مجموعه‌ای از تیرهای تیموشنکوی موازی با اتصالات انعطاف‌پذیر میانی به تعداد دلخواه بررسی می‌شود. بار متحرک، یک خودرو است که توسط یک سیستم شش درجه آزادی دومحوره به‌صورت جرم- فنر- مستهلک کننده در حرکتی صفحه‌ای مدل می‌شود. جهت حل، روش جدیدی ارائه می‌شود که به‌کمک تغییر متغیری خاص، معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر جدا می‌شود؛ بدین منظور، باید ماتریس‌های سختی به‌دست آمده برای هر ستون از اتصالات میانی، بردارهای ویژه یکه شده یکسان داشته باشند. سپس به‌روش ماتریس انتقال، فرکانس‌ها و شکل مودهای تیرها و با به‌کارگیری تئوری آنالیز مودال، پاسخ اجباری سیستم تعیین می‌شود. جابه‌جایی خودرو، تیرها و ممان خمشی به‌ازای سختی‌ها و سرعت‌های مختلف به‌دست می‌آید و در نهایت اعتبار نتایج مورد سنجش قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: تیرهای تیموشنکوی موازی، اتصالات انعطاف‌پذیر میانی، سیستم شش درجه آزادی دومحوره، روش ماتریس انتقال.

Vibration of Elastically Connected Multiple Timoshenko Beams under a Moving Six Degrees of Freedom System

S. Foroozande and A.R. Ariaei*

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan

Abstract: ***In this article, the vibration analysis of a set of parallel Timoshenko beams connected by intermediate flexible connections, with arbitrary numbers, is studied. The moving load is a vehicle, which is modeled by a two-axle six degrees of freedom system, as a mass-spring-damper system, in a plane motion. For the solution, a new method is proposed which uses a change of variables strategy to decouple the system of differential equations. For this purpose, the stiffness matrix obtained***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ariaei@eng.ui.ac.ir

from each column of intermediate connections should have the same normalized eigenvectors. The displacements and the bending moments of the beams and the vehicle due to changes in the stiffness of connections and changes in speeds will be examined. Finally, the validity of the results are measured.

Keywords: *Parallel Timoshenko beams, Intermediate flexible connections, Two-axle six degrees of freedom system, Transfer matrix method.*

فهرست علائم

A	سطح مقطع تیر (m^2)	n	تعداد تیرهای موازی
E	مدول الاستیسیته یانگ (Pa)	V	سرعت بار متحرک (m/s)
G	مدول برشی (Pa)	W	پهنای تیر (m)
H	ارتفاع تیر (m)	X_j	موقعیت اتصال میانی jام (m)
I	ممان اینرسی سطح مقطع تیر (m^4)	Y_{ij}	جابجایی عرضی بخش jام از تیر iام (m)
J	ممان اینرسی جرمی بدنه خودرو ($kg.m^2$)	Z_s	جابجایی عمودی مرکز جرم خودرو (m)
L	طول تیر (m)	Φ_{ij} ، ϕ_{ij}	جابجایی پیچشی بخش jام م از تیر iام
L_j	طول بخش jام تیر (m)	Θ_s , θ_s	جابجایی پیچشی مرکز جرم خودرو
M_s	جرم بدنه خودرو (kg)	ρ	چگالی تیر (kg/m^3)
m_p	جرم سرنشین خودرو (kg)	κ	ضریب تصحیح برش
m_t	جرم تایر خودرو (kg)	ξ	موقعیت بار متحرک (m)
m	تعداد اتصالات انعطاف‌پذیر میانی	ν	ضریب پواسون

۱- مقدمه

بیش از یک قرن، سیستم‌های الاستیک تحت بارهای متحرک در علوم مختلفی مانند مهندسی عمران و هوا فضا مورد توجه بوده است و از نظر تاریخی برای اولین بار در طراحی پل‌های راه آهن و سپس در سایر زمینه‌های مهندسی حمل و نقل از جمله طراحی پل‌ها، بزرگراه‌ها، راه‌های کابلی، تونل‌ها و خطوط لوله‌ای مطرح شده است [۱].

تحلیل ارتعاشی عبور جرم از روی یک سیستم پیوسته به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای درهم‌گیر می‌انجامد که با ساده‌سازی آنها می‌توان به حالت نیروی متحرک رسید. ممندی و همکاران [۲] یک تیر تیموشنکوی شیبدار را تحت عبور جرمی با سرعت متغیر برای شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. شربتی و سیزگوسکی [۳] عبور چند جرم را از روی یک تیر با روش المان محدود بررسی کردند. اسماعیل‌زاده و قرشی [۴] از روش تفاضل محدود برای تخمین پاسخ ارتعاشی تیرهای اویلر برنولی تحت عبور جرم گسترده استفاده کردند؛ ایشان در مطالعه‌ای دیگر [۵] فرمول پیشنهادی خود را برای تیرهای تیموشنکو توسعه و نشان دادند عبور جرم گسترده منجربه جابه‌جایی‌های کمتری نسبت به عبور جرم نقطه‌ای می‌شود.

تحلیل رفتار ارتعاشی تیر تحت بارهای متحرک از نوع سیستم‌های جرم و فنر و سیستم‌های چند درجه آزادی دارای جایگاهی خاص در مقالات است. افتخار اعظم و همکاران [۶] ابتدا یک جرم را از روی یک تیر تیموشنکو عبور دادند و سپس نتایج را با حالتی که جرم و فنر یک درجه آزادی و یا یک نیرو از روی تیر عبور می‌کند، مقایسه کردند. لین و تریسوی [۷] یک سیستم جرم و فنر و مستهلک کننده عبوری از روی تیر را که در

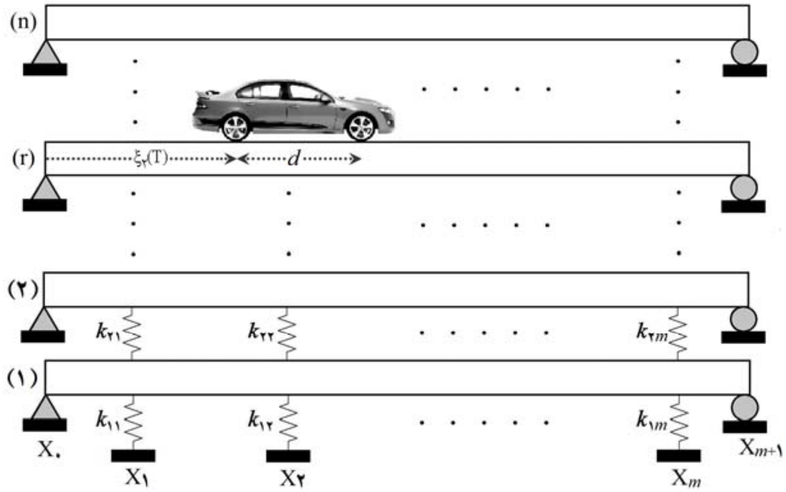
آن مستهلک کننده و فنر در جهت جابه‌جایی تیـر عمـل مـی‌کننـد، درنظر گرفتند. دان استانشـیو و همکـاران [۸] ارتعاشـات یـک تیـر اویلر برنولی را تحت عبور ساختار دو درجـه آزادی دومحـوره، بـا تکیه‌گاه‌های الاستیک، درنظـر گرفتنـد. همچنـین یـک سـاختار دو درجه آزادی دومحوره توسط وو [۹] انتخاب شد. او سیستم مذکور را با چهار جرم مؤثر جایگزین کرد و ارتعاشات آزاد آن را بـرروی تیرها مورد بررسی قرار داد. اسماعیل‌زاده و جلیلی [۱۰] عبور یـک وسیله نقلیه را از روی تیر اویلر برنولی تحلیل کردنـد. ایشـان ایـن ساختار را به‌صورت یک نیمه خـودروی صـفحه‌ای دو محـوره، بـا شش درجه آزادی دومحوره، مدل کردند. آنها ابتدا معادلات حرکت را با روش انرژی به‌دست آوردند و سپس نتیجه را به یـک سیسـتم دو درجه آزادی تک‌محوره تعمـیم دادنـد. لـوو و آیـو [۱۱] عبـور وسایل نقلیه چند درجه آزادی را از روی تیر اویلر برنـولی بررسـی کردند، مانند عبور قطار از روی راه آهن و پل‌هـای چنـد تکـه کـه به‌روش المان محدود تحلیل شد. یانگ و وو [۱۲] یک سیستم چند درجه آزادی با چند محور جابه‌جایی عمودی را با به‌کارگیری نوعی المان چندمنظوره[۱] مانند المان وی بی آی[۲]، با اسـتفاده از نیروهـای تماسی بین تیر و وسیله نقلیه بررسی کردند.

تحلیل ارتعاشی دو تیر متصل بـه هـم مـورد توجـه بعضـی از محققین قرار گرفته است [۱۳ و ۱۴]. وو و همکارانش [۱۳] روشی را جهت حل دقیق یک سیستم دو تیری تحت بار هارمونیک ارائـه کردند. در این مطالعه یک تیر به‌عنوان تیر اصلی تحـت بارگـذاری قرار می‌گیرد و تیر دیگر در نقش پشتیبان ظاهر می‌شود که بـا یـک بستر ویسکوالاستیک به تیر اصلی اتصـال مـی‌یابـد. ابـوهلال [۱۴] پاسخ دینامیکی سیستمی مشابه با مرجع [۱۳] را تحت عبور نیروی ثابتی از روی آن بررسی کرد. آنها در مطالعه خود فرض کردند کـه هر دو تیر در سیستم دو تیری مـورد بررسـی از نظـر ویژگـی‌هـای هندسی و شرایط مرزی مشابه هستند. آریایی و همکاران [۱۵] یک سیستم از تیرهای تیموشنکو را به تعداد دلخواه درنظر گرفتنـد کـه توسط اتصالاتی الاستیک بـه یکـدیگر متصـل شـده‌انـد و نیرویـی متحرک از روی آنها عبور می‌کند. آنها پاسخ سیستم را برای سختی متفاوت اتصالات و سرعت‌های مختلف بررسی کردند.

در کارهای گذشته، از دو تیر اویلر برنـولی تحـت عبـور نیـرو استفاده شده است که فنرها نه به‌صورت جدا از هم بلکه بـه شـکل بسـتری الاسـتیک بـین تیرهـا قـرار داشـتند [۱۳، ۱۴ و ۱۶] و یـا مجموعه‌ای از تیرهای موازی بررسی شده است که در آن با فـرض عبور نیرو، معادلات به‌راحتی از هم جـدا مـی‌شـوند [۱۵]. در ایـن مقاله ضمن درنظر گرفتن تئوری تیموشنکو، تعداد تیرها و اتصالات میانی دلخواه است و بار متحرک از نوع سیستم شش درجـه آزادی دومحوره درنظر گرفته می‌شود. درجات آزادی ایـن سیسـتم شـامل جابه‌جایی عمودی و دورانی مرکز جرم، جابه‌جایی مرکـز تایرهـای جلو و عقب و همچنین جابه‌جایی سرنشین‌هـای جلـو و عقـب خودرو است. این سیستم با دو نقطه روی تیر در تمـاس اسـت که نادیده گرفتن فاصله بین این دو نقطه تماس و مدل کردن بار به‌صورت متمرکز در یک نقطه مانند نیروی متحرک، در بسیاری از مسـائل منجربـه خطـای زیـادی در پاسـخ مسـأله مـی‌شـود؛ به‌خصوص مسائلی که در آنها طول تیر کوتاه یا فاصـله بـین دو نقطه تماس زیاد باشد. در این مسأله بـه‌دلیـل وجـود اتصـالات میانی و n تیر تیموشنکو، ۲n معادله دیفرانسیل پاره‌ای درهم‌گیـر وجود دارد که به‌همراه معادلات حرکـت سیسـتم شـش درجـه آزادی و معـادلات پیوسـتگی مجموعـه، دسـته‌ای از معـادلات دیفرانسیل درهم‌گیر مرتبه دوم را تشـکیل مـی‌دهنـد. در اینجـا، ابتدا از تغییر متغیر خاصی جهت جدا کردن هم‌زمـان معـادلات حرکت و پیوستگی استفاده می‌شود. با اعمال ایـن تغییـر متغیـر، معادلاتی به‌دست می‌آید که هر جفت از آنها مربوط به یک تیـر تیموشنکو است. سپس در تحلیل نیرویی، از فرم ماتریسی برای جدا کردن دوباره معادلات درهـم‌گیـر اسـتفاده مـی‌شـود. در حـل عددی، تأثیر عوامل گوناگونی مثل سختی اتصالات میانی، سـرعت بار متحرک و طول خودرو بررسی می‌شـود. از جملـه کاربردهـای سیستم‌های چند تیری، استفاده از آنها در جذب‌کننده‌های ارتعاشی و افزایش استحکام مجموعه است [۱۶ و ۱۷].

۲- معادلات حرکت

هر تیر در شکل (۱) به‌طول L و دارای m اتصال انعطـاف‌پـذیر



شکل ۱- مجموعه‌ای از تیرهای موازی با اتصالات میانی تحت عبور خودرو

میانی در موقعیت‌های $0 < X_1 < X_2 < \cdots < X_m < L$ است. جابه‌جایی عرضی و زاویه‌ای تیر i ام در بازه $X_{j-1} \le X \le X_j$ به‌ترتیب با $Y_{ij}(X,T)$ و $\Phi_{ij}(X,T)$ نشان داده می‌شود که در آن اندیس $j=1,2,\ldots,m+1$ به بخش j ام تیر اشاره دارد.

در شکل (۲)، خودروی عبوری از روی مجموعه تیرها با یک سیستم شش درجه آزادی دومحوره به‌صورت جرم- فنر- مستهلک‌کننده، در صفحه حرکت مجموعه مدل شده است. در این شکل، درجات آزادی خودرو عبارتند از: $Z_s(T)$ و $\Theta_s(T)$ به‌ترتیب جابه‌جایی عمودی و دورانی مرکز جرم خودرو، $Z_1(T)$ و $Z_2(T)$ به‌ترتیب جابه‌جایی عمودی مرکز تایرهای جلو و عقب و $Z_5(T)$ و $Z_6(T)$ به‌ترتیب جابه‌جایی عمودی سرنشین جلو (راننده) و سرنشین عقب (مسافر). همچنین به‌منظور ساده شدن شکل معادلات حرکت، پارامترهای $Z_3(T)$ و $Z_4(T)$ به‌ترتیب به‌عنوان جابه‌جایی عمودی جلو و جابه‌جایی عمودی عقب بدنه خودرو درنظر گرفته شده است. معادلات حرکت هر بخش از تیر تیموشنکوی i ام برای عبور خودرو از روی تیر r ام عبارتند از:

$$\rho A\frac{\partial^2 Y_{ij}}{\partial T^2}-\kappa AG\left(\frac{\partial^2 Y_{ij}}{\partial X^2}-\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial X}\right)= \left[P_1(T)\delta(X-\xi_1(T))\varepsilon_1+P_2(T)\delta(X-\xi_2(T))\varepsilon_2\right]\delta_{ir} \qquad (۱-\text{الف})$$

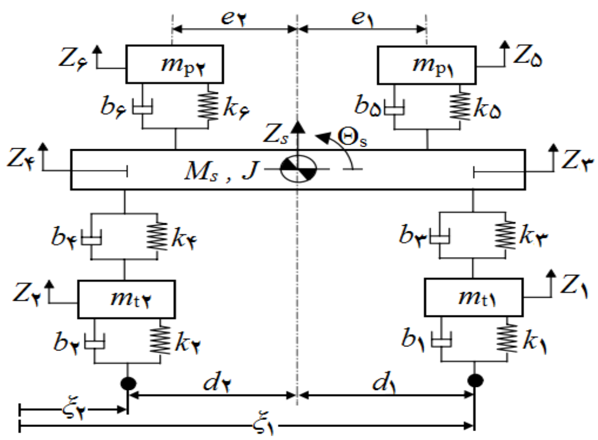
$$EI\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial X^2}+\kappa AG\left(\frac{\partial Y_{ij}}{\partial X}-\Phi_{ij}\right)-\rho I\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial T^2}=0 \quad , \quad X_{(j-1)} < X < X_j \qquad (۱-\text{ب})$$

در این معادلات ρ چگالی، I ممان اینرسی سطح مقطع حول محور عمود بر صفحه و عبور کننده از محل تار خنثی، A سطح مقطع، E مدول الاستیسیته یانگ، G مدول برشی و κ ضریب تصحیح برش در تئوری تیموشنکو است که به‌صورت تابعی از سطح مقطع و ضریب پواسون ν بیان می‌شود. همچنین δ_{ir} نماد دلتای کرونیکر، $\delta(X-\xi(T))$ تابع دلتای دیراک و $\xi_1(T)$ و $\xi_2(T)$ به‌ترتیب موقعیت‌های دو محور جابه‌جایی عمودی یا نقاط تماس تایرهای جلو و عقب خودرو روی تیر است که برحسب زمان T تغییر می‌کنند.

$$\xi_2(T)=\xi_1(T)-d \quad , \quad d=d_1+d_2 \qquad (۲)$$

در این معادله، d فاصله بین دو نقطه تماس سیستم با تیر و d_1 و d_2 به‌ترتیب فاصله نقاط تماس جلو و عقب تا مرکز جرم سیستم شش درجه آزادی است.

در معادلات (۱)، پارامتر ε_1 بیانگر حضور یا عدم حضور محور جابه‌جایی اول و ε_2 بیانگر حضور یا عدم حضور محور دوم روی تیر است که می‌توان آن را به‌کمک تابع هویساید[۳] نشان داد [۱۰]:



شکل ۲- مدل صفحه‌ای خودرو، سیستم شش درجه آزادی دومحوره جرم- فنر- مستهلک کننده

$$\begin{cases} 0 \le T < T_s & \varepsilon_1 = 1 \quad , \quad \varepsilon_2 = 0 \\ T_s \le T < T_m & \varepsilon_1 = 1 \quad , \quad \varepsilon_2 = 1 \\ T_m \le T < T_e & \varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = 1 \\ T_e \le T & \varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = 0 \end{cases} \tag{۳}$$

که T_s معرف لحظه ورود محور دوم به روی تیر، T_m لحظه خروج محور اول و T_e لحظه خروج محور دوم از روی تیر است.

نیروهای بین بار متحرک و تیر در معادله (۱- الف) به‌صورت پارامترهای $P_1(T)$ و $P_2(T)$ درنظر گرفته می‌شود که به مدل تحلیلی مسأله بستگی دارد و عبارت است از:

$$\begin{aligned} P_1(T) = -\Big\{ & k_1\left[Y_{rj}\left(\xi_1(T),T\right)\varepsilon_1 - Z_1(T)\right] \\ & + b_1\left[\dot{Y}_{rj}\left(\xi_1(T),T\right)\varepsilon_1 - \dot{Z}_1(T)\right] + m_1 g\Big\} \end{aligned} \tag{۴}$$

$$\begin{aligned} P_2(T) = -\Big\{ & k_2\left[Y_{rj}\left(\xi_2(T),T\right)\varepsilon_2 - Z_2(T)\right] \\ & + b_2\left[\dot{Y}_{rj}\left(\xi_2(T),T\right)\varepsilon_2 - \dot{Z}_2(T)\right] + m_2 g\Big\} \end{aligned} \tag{۵}$$

در معادلات (۴) و (۵)، پارامترهای m_1 و m_2 به‌صورت معادلات (۶ و ۷) تعریف می‌شوند:

$$m_1 = m_{t1} + \frac{(d_2 + e_1)}{d} m_{p1} + \frac{(d_2 - e_2)}{d} m_{p2} + \frac{d_2}{d} M_s \tag{۶}$$

$$m_2 = m_{t2} + \frac{(d_1 - e_1)}{d} m_{p1} + \frac{(d_1 + e_2)}{d} m_{p2} + \frac{d_1}{d} M_s \tag{۷}$$

در این معادلات، m_{t1} و m_{t2} به‌ترتیب جرم تایرهای جلو و عقب و m_{p1} و m_{p2} به‌ترتیب جرم سرنشین جلو (راننده) و سرنشین عقب (مسافر) است. جرم بدنه خودرو (بدون تایرها و سرنشین‌ها) با M_s و ممان اینرسی جرمی آن حول محور عمود بر صفحه در مرکز جرم خودرو با J نشان داده شده است. همچنین پارامترهای e_1 و e_2 نیز به‌ترتیب فاصله راننده و مسافر تا مرکز جرم خودرو است.

پس از بیان معادلات حرکت مجموعه تیرهای موازی، اینک معادلات حرکت سیستم شش درجه آزادی در حال عبور از روی تیر r ام به‌صورت معادلات (۸)، (۹) و (۱۰) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{M_s}{d}\left(d_2\ddot{Z}_3 + d_1\ddot{Z}_4\right) = {} & k_6\left(Z_6(T) - Z_4(T)\right) + b_6\left(\dot{Z}_6(T) - \dot{Z}_4(T)\right) + k_5\left(Z_5(T) - Z_3(T)\right) + b_5\left(\dot{Z}_5(T) - \dot{Z}_3(T)\right) \\ & - k_4\left(Z_4(T) - Z_2(T)\right) - b_4\left(\dot{Z}_4(T) - \dot{Z}_2(T)\right) - k_3\left(Z_3(T) - Z_1(T)\right) - b_3\left(\dot{Z}_3(T) - \dot{Z}_1(T)\right) \end{aligned} \tag{۸- الف}$$

$$\begin{aligned} \frac{J}{d}\left(\ddot{Z}_3 - \ddot{Z}_4\right) = {} & \left[k_5\left(Z_5(T) - Z_3(T)\right) + b_5\left(\dot{Z}_5(T) - \dot{Z}_3(T)\right)\right]e_1 - \left[k_6\left(Z_6(T) - Z_4(T)\right) + b_6\left(\dot{Z}_6(T) - \dot{Z}_4(T)\right)\right]e_2 \\ & - \left[k_3\left(Z_3(T) - Z_1(T)\right) + b_3\left(\dot{Z}_3(T) - \dot{Z}_1(T)\right)\right]d_1 + \left[k_4\left(Z_4(T) - Z_2(T)\right) + b_4\left(\dot{Z}_4(T) - \dot{Z}_2(T)\right)\right]d_2 \end{aligned} \tag{۸- ب}$$

و معادلات حرکت عمودی تایرهای جلو و عقب خودرو عبارتند از:

$$m_{t1}\ddot{Z}_1(T)=k_3\left(Z_3(T)-Z_1(T)\right)+b_3\left(\dot{Z}_3(T)-\dot{Z}_1(T)\right)-k_1\left[Z_1(T)-Y_{rj}\left(\xi_1(T),T\right)\varepsilon_1\right]$$
$$-b_1\left[\dot{Z}_1(T)-\dot{Y}_{rj}\left(\xi_1(T),T\right)\varepsilon_1\right] \qquad \text{(الف -۹)}$$

$$m_{t2}\ddot{Z}_2(T)=k_4\left(Z_4(T)-Z_2(T)\right)+b_4\left(\dot{Z}_4(T)-\dot{Z}_2(T)\right)-k_2\left[Z_2(T)-Y_{rj}\left(\xi_2(T),T\right)\varepsilon_2\right]$$
$$-b_2\left[\dot{Z}_2(T)-\dot{Y}_{rj}\left(\xi_2(T),T\right)\varepsilon_2\right] \qquad \text{(ب -۹)}$$

همچنین معادلات حرکت عمودی راننده و مسافر خودرو نیز عبارتند از:

$$m_{p1}\ddot{Z}_5(T)=-k_5\left(Z_5(T)-Z_3(T)\right)-b_5\left(\dot{Z}_5(T)-\dot{Z}_3(T)\right) \qquad \text{(الف -۱۰)}$$

$$m_{p2}\ddot{Z}_6(T)=-k_6\left(Z_6(T)-Z_4(T)\right)-b_6\left(\dot{Z}_6(T)-\dot{Z}_4(T)\right) \qquad \text{(ب -۱۰)}$$

می‌توان تبدیل (۱۱) را به‌منظور سادگی در ارائه معادلات بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix} Z_3(T) \\ Z_4(T) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & -d_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Z_s(T) \\ \Theta_s(T) \end{Bmatrix} \qquad (۱۱)$$

۳- مدل کردن اتصالات انعطاف‌پذیر میانی، بی‌بعدسازی متغیرها

در این بخش، به‌منظور بی‌بعدسازی مکانی متغیرها و مقایسه نتایج عددی با مرجع [۱۵]، متغیرهای جدیدی تعریف می‌شود:

$$t=\frac{T}{\sqrt{L}},\ v=\frac{V}{\sqrt{L}},\ y_{ij}=\frac{Y_{ij}}{L},$$
$$x_j=\frac{X_j}{L},\ x=\frac{X}{L},\ l_j=\frac{L_j}{L},\ z_s=\frac{Z_s}{L},$$
$$\zeta_R=\frac{\xi_R}{L}\quad R=1,2,\ z_k=\frac{Z_k}{L}\quad k=1,\dots,6 \qquad (۱۲)$$

وجود اتصالات میانی منجربه ناپیوستگی نیروی برشی در محل آنها می‌شود. شرایط پیوستگی پس از بی‌بعدسازی، با درنظر گرفتن $i=1,2,\dots,n$ و $j=1,2,\dots,m$ عبارت است از:

$$y_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)=y_{ij}\left(x_j^-,t\right) \qquad \text{(الف -۱۳)}$$

$$\phi_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)=\phi_{ij}\left(x_j^-,t\right) \qquad \text{(ب -۱۳)}$$

$$\phi'_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)=\phi'_{ij}\left(x_j^-,t\right) \qquad \text{(ج -۱۳)}$$

$$\left[y'_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)-\phi_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)\right]-\left[y'_{ij}\left(x_j^-,t\right)-\phi_{ij}\left(x_j^-,t\right)\right]$$
$$=\frac{L}{\kappa AG}\left(k_{ij}\left[y_{ij}\left(x_j^-,t\right)-y_{(i-1)j}\left(x_j^-,t\right)\right]+k_{(i+1)j}\left[y_{ij}\left(x_j^-,t\right)-y_{(i+1)j}\left(x_j^-,t\right)\right]\right) \qquad \text{(د -۱۳)}$$

در این معادلات، $\phi_{ij}(x,t)$ جابجایی پیچشی بخش jام از تیر iام را بر حسب متغیرهای جدید نشان می‌دهد. حال با استفاده از رابطه (۱۲)، می‌توان معادلات (۱) را برحسب متغیرهای جدید بیان کرد:

$$\rho A\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial t^2}-\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial x^2}-\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{1}{L}\left[P_1(t)\delta\left(x-\zeta_1(t)\right)\varepsilon_1+P_2(t)\delta\left(x-\zeta_2(t)\right)\varepsilon_2\right]\delta_{ir} \qquad \text{(الف -۱۴)}$$

$$\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial x^2}+\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial y_{ij}}{\partial x}-\phi_{ij}\right)-\frac{\rho I}{L^2}\frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial t^2}=0\quad,\quad x_{(j-1)}<x<x_j \qquad \text{(ب -۱۴)}$$

که در آن، معادلات (۴) و (۵) نیز برحسب متغیرهای جدید عبارتند از:

$$P_1(t)=-L\left\{k_1\left[y_{rj}\left(\zeta_1(t),t\right)\varepsilon_1-z_1(t)\right]+\frac{\sqrt{L}}{L}b_1\left[\dot{y}_{rj}\left(\zeta_1(t),t\right)\varepsilon_1-\dot{z}_1(t)\right]+\frac{m_1 g}{L}\right\} \qquad (۱۵)$$

$$P_2(t)=-L\left\{k_2\left[y_{rj}\left(\zeta_2(t),t\right)\varepsilon_2-z_2(t)\right]+\frac{\sqrt{L}}{L}b_2\left[\dot{y}_{rj}\left(\zeta_2(t),t\right)\varepsilon_2-\dot{z}_2(t)\right]+\frac{m_2 g}{L}\right\} \qquad (۱۶)$$

همچنین برای معادلات (۸)، (۹) و (۱۰) می‌توان نوشت:

$$\frac{M_s}{Ld}\left(d_2\ddot{z}_3(t)+d_1\ddot{z}_4(t)\right)=\left[k_6\left(z_6-z_4\right)+k_5\left(z_5-z_3\right)-k_4\left(z_4-z_2\right)-k_3\left(z_3-z_1\right)\right] + \frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_6\left(\dot{z}_6-\dot{z}_4\right)+b_5\left(\dot{z}_5-\dot{z}_3\right)-b_4\left(\dot{z}_4-\dot{z}_2\right)-b_3\left(\dot{z}_3-\dot{z}_1\right)\right]$$ (۱۷- الف)

$$\frac{J}{Ld}\left(\ddot{z}_3(t)-\ddot{z}_4(t)\right)=\left[k_5\left(z_5-z_3\right)e_1-k_6\left(z_6-z_4\right)e_2-k_3\left(z_3-z_1\right)d_1+k_4\left(z_4-z_2\right)d_2\right] + \frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_5\left(\dot{z}_5-\dot{z}_3\right)e_1-b_6\left(\dot{z}_6-\dot{z}_4\right)e_2-b_3\left(\dot{z}_3-\dot{z}_1\right)d_1+b_4\left(\dot{z}_4-\dot{z}_2\right)d_2\right]$$ (۱۷- ب)

$$\frac{m_{t1}}{L}\ddot{z}_1=\left[k_3\left(z_3-z_1\right)+k_1\left[y_{rj}\left(\zeta_1(t),t\right)\varepsilon_1-z_1\right]\right] + \frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_3\left(\dot{z}_3-\dot{z}_1\right)+b_1\left[\dot{y}_{rj}\left(\zeta_1(t),t\right)\varepsilon_1-\dot{z}_1\right]\right]$$ (۱۸- الف)

$$\frac{m_{t2}}{L}\ddot{z}_2=\left[k_4\left(z_4-z_2\right)+k_2\left[y_{rj}\left(\zeta_2(t),t\right)\varepsilon_2-z_2\right]\right] + \frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_4\left(\dot{z}_4-\dot{z}_2\right)+b_2\left[\dot{y}_{rj}\left(\zeta_2(t),t\right)\varepsilon_2-\dot{z}_2\right]\right]$$ (۱۸- ب)

$$\frac{m_{p1}}{L}\ddot{z}_5(t)=-k_5\left(z_5(t)-z_3(t)\right)-\frac{\sqrt{L}}{L}b_5\left(\dot{z}_5(t)-\dot{z}_3(t)\right)$$ (۱۹- الف)

$$\frac{m_{p2}}{L}\ddot{z}_6(t)=-k_6\left(z_6(t)-z_4(t)\right)-\frac{\sqrt{L}}{L}b_6\left(\dot{z}_6(t)-\dot{z}_4(t)\right)$$ (۱۹- ب)

و در نهایت برای رابطه (۱۱)، معادله (۲۰) به‌دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} z_s(t) \\ \theta_s(t) \end{Bmatrix}=\frac{1}{d}\begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ L & -L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \end{Bmatrix}$$ (۲۰)

که در این معادله، z_s و θ_s به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی عمودی و پیچشی مرکز جرم خودرو بر حسب متغیرهای جدید است.

۴- جداسازی معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر، تعیین مقادیر و توابع ویژه

به‌طور کلی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر به‌راحتی امکان‌پذیر نیست، اما با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان طرف چپ معادلات را از هم جدا و از تحلیل مودال برای بررسی ارتعاشات آزاد آن استفاده کرد. با درنظر گرفتن $p=1,2,...,n$، متغیرهای جدید تعریف می‌شود [۱۵]:

$$u_p\left(x,t\right)=\sum_{i=1}^{n}c_{pi}y_i\left(x,t\right),\ \theta_p\left(x,t\right)=\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\phi_i\left(x,t\right)$$ (۲۱)

معادلات (۲۱) به‌فرم ماتریسی (۲۲) بیان می‌شود:

$$\mathbf{U}=\mathbf{CY}\ \rightarrow\ \mathbf{Y}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U}=\bar{\mathbf{C}}\mathbf{U}\quad ,$$
$$\mathbf{\Theta}=\mathbf{C\Phi}\ \rightarrow\ \mathbf{\Phi}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Theta}=\bar{\mathbf{C}}\mathbf{\Theta}$$ (۲۲)

که در آن، ماتریس‌ها و بردارها عبارتند از:

$$\mathbf{U}=\left[u_1\quad u_2\quad \cdots\quad u_n\right]^T\quad,\quad \mathbf{Y}=\left[y_1\quad y_2\quad \cdots\quad y_n\right]^T\quad,$$
$$\mathbf{\Theta}=\left[\theta_1\quad \theta_2\quad \cdots\quad \theta_n\right]^T\quad,\quad \mathbf{\Phi}=\left[\varphi_1\quad \varphi_2\quad \cdots\quad \varphi_n\right]^T,$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\quad,\quad \bar{\mathbf{C}}=\mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \cdots & \bar{c}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_{n1} & \cdots & \bar{c}_{nn} \end{bmatrix}$$ (۲۳)

در متغیرهای جدید، ضرایب c_{pi} را باید طوری تعیین کرد که معادلات از هم جدا شوند. با جایگزینی معادلات (۲۱) در (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) می‌توان نوشت:

$$\rho A\frac{\partial^2 u_{pj}}{\partial t^2}-\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial^2 u_{pj}}{\partial x^2}-\frac{\partial \theta_{pj}}{\partial x}\right) =\frac{c_{pr}}{L}\left[P_1(t)\delta\left(x-\zeta_1(t)\right)\varepsilon_1+P_2(t)\delta\left(x-\zeta_2(t)\right)\varepsilon_2\right]$$ (۲۴- الف)

$$\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^2\theta_{pj}}{\partial x^2}+\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial u_{pj}}{\partial x}-\theta_{pj}\right)-\frac{\rho I}{L^2}\frac{\partial^2\theta_{pj}}{\partial t^2}=0\ ,\quad x_{(j-1)}<x<x_j$$ (۲۴- ب)

$$P_1(t)=-L\left\{k_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}u_{pj}\left(\zeta_1(t),t\right)-z_1(t)\right] +\frac{\sqrt{L}}{L}b_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}\dot{u}_{pj}\left(\zeta_1(t),t\right)-\dot{z}_1(t)\right]+\frac{m_1 g}{L}\right\}$$ (۲۵)

$$P_2(t) = -L\left\{k_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}u_{pj}\left(\zeta_2(t),t\right)-z_2(t)\right] + \frac{\sqrt{L}}{L}b_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}\dot{u}_{pj}\left(\zeta_2(t),t\right)-\dot{z}_2(t)\right]+\frac{m_2 g}{L}\right\} \tag{۲۶}$$

برحسب متغیرهای جدید، فرم معادلات (۱۷) و (۱۹) بدون تغییر باقی می‌مانند ولی برای معادلات (۱۸) می‌توان نوشت:

$$\frac{m_{t1}}{L}\ddot{z}_1(t) = \left[k_3\left(z_3-z_1\right)+k_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}u_{pj}\left(\zeta_1(t),t\right)-z_1\right]\right] + \frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_3\left(\dot{z}_3-\dot{z}_1\right)+b_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}\dot{u}_{pj}\left(\zeta_1(t),t\right)-\dot{z}_1\right]\right] \tag{۲۷- الف}$$

$$\frac{m_{t2}}{L}\ddot{z}_2(t) = \left[k_4\left(z_4-z_2\right)+k_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}u_{pj}\left(\zeta_2(t),t\right)-z_2\right]\right] + \frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_4\left(\dot{z}_4-\dot{z}_2\right)+b_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}\dot{u}_{pj}\left(\zeta_2(t),t\right)-\dot{z}_2\right]\right] \tag{۲۷- ب}$$

به‌طریق مشابه این ضرایب بر معادلات پیوستگی (۱۳) نیز اعمال می‌شوند و معادلات پیوستگی جدیدی به‌دست می‌آیند:

$$u_{p(j+1)}\left(x_j^+,t\right) = u_{pj}\left(x_j^-,t\right) \tag{۲۸- الف}$$

$$\theta_{p(j+1)}\left(x_j^+,t\right) = \theta_{pj}\left(x_j^-,t\right) \tag{۲۸-ب}$$

$$\theta'_{p(j+1)}\left(x_j^+,t\right) = \theta'_{pj}\left(x_j^-,t\right) \tag{۲۸-ج}$$

$$\left[u'_{p(j+1)}\left(x_j^+,t\right)-\theta_{p(j+1)}\left(x_j^+,t\right)\right]-\left[u'_{pj}\left(x_j^-,t\right)-\theta_{pj}\left(x_j^-,t\right)\right] = \frac{L}{\kappa AG}\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\left(\begin{array}{l}k_{ij}\left[y_{ij}\left(x_j^-,t\right)-y_{(i-1)j}\left(x_j^-,t\right)\right]\\+k_{(i+1)j}\left[y_{ij}\left(x_j^-,t\right)-y_{(i+1)j}\left(x_j^-,t\right)\right]\end{array}\right) = \beta_{pj}u_{pj}\left(x_j^-,t\right) \tag{۲۸- د}$$

طرف راست معادله (۲۸- د)، برای جدا شدن معادلات درهم‌گیر و به‌دست آمدن ضرایب، برحسب u_{pj} بیان شده است. اینک، فرم جدیدی از معادلات با متغیرهای جدید به‌دست آمده است. با مرتب کردن معادلات (۲۸)، یک مسأله مقدار ویژه به‌دست می‌آید که برای داشتن حل غیربدیهی لازم است:

$$\mathbf{K}_j\begin{Bmatrix}c_{p1}\\c_{p2}\\\vdots\\c_{pn}\end{Bmatrix} = \frac{\kappa AG}{L}\beta_{pj}\begin{Bmatrix}c_{p1}\\c_{p2}\\\vdots\\c_{pn}\end{Bmatrix} = \mu_{pj}\begin{Bmatrix}c_{p1}\\c_{p2}\\\vdots\\c_{pn}\end{Bmatrix} \rightarrow \det\left(\mathbf{K}_j - \mu_{pj}\mathbf{I}\right) = 0 \tag{۲۹}$$

در این رابطه، ماتریس سختی $\mathbf{K}_j$ برابر است با:

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} k_{1j}+k_{2j} & -k_{2j} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -k_{2j} & k_{2j}+k_{3j} & -k_{3j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_{3j} & k_{3j}+k_{4j} & -k_{4j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -k_{(n-1)j} & k_{(n-1)j}+k_{nj} & -k_{nj} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -k_{nj} & k_{nj} \end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

ماتریس $\mathbf{K}_j$ برای هر ستون فنر میانی در شکل (۱)، به‌طور جداگانه تعیین می‌شود و می‌تواند مقادیر ویژه متفاوتی برای هر ستون داشته باشد، اما سختی فنرها باید به‌گونه‌ای باشند که بردارهای ویژه یکه شده همه آنها یکسان باشد تا معادلات پیوستگی در هر x_j به‌طور هم‌زمان جدا شوند و این یکی از شرایط جداسازی معادلات و استفاده از تغییر متغیر به‌کارگیری شده در معادلات (۲۱) برای حل این مسأله است؛ این مفهوم باید قبل از شروع حل بررسی شود.

در ادامه برای تعیین مقادیر و توابع ویژه در تحلیل ارتعاشات

آزاد، پارامترهای $u_{pj}(x,t)=w_{pj}(x)e^{i\omega_p t}$ و $\theta_{pj}(x,t)=\varphi_{pj}(x)e^{i\omega_p t}$ در معادلات (۲۴) با درنظر گرفتن مقدار صفر برای قسمت نیرویی معادلات، جای‌گذاری می‌شوند. سپس با استفاده از روش ماتریس انتقال برای بخش jام از تیر pام در فرم جدید معادلات و برای $x_{j-1}<x<x_j$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} w_{pj} = \{ & A_{pj}\cosh\lambda_{1p}(x-x_{j-1})+B_{pj}\sinh\lambda_{1p}(x-x_{j-1}) \\ & +C_{pj}\cos\lambda_{2p}(x-x_{j-1})+D_{pj}\sin\lambda_{2p}(x-x_{j-1})\} \end{aligned}$$

(۳۱- الف)

$$\begin{aligned} \varphi_{pj} = \{ & B_{pj}q_{1p}\cosh\lambda_{1p}(x-x_{j-1})+A_{pj}q_{1p}\sinh\lambda_{1p}(x-x_{j-1}) \\ & -D_{pj}q_{2p}\cos\lambda_{2p}(x-x_{j-1})+C_{pj}q_{2p}\sin\lambda_{2p}(x-x_{j-1})\} \end{aligned}$$

(۳۱- ب)

که در آن کمیت‌ها عبارتند از:

$$\sigma_p=\frac{\rho L\omega_p^2}{E} \quad , \quad \tau_p=\frac{\rho L\omega_p^2}{\kappa G} \quad , \quad \alpha_p=\frac{A\rho L^3\omega_p^2}{EI} \quad ,$$

$$\lambda_{1p}=\left[\sqrt{\left(\frac{\sigma_p-\tau_p}{2}\right)^2+\alpha_p}-\frac{\sigma_p+\tau_p}{2}\right]^{1/2} \quad ,$$

$$\lambda_{2p}=\left[\sqrt{\left(\frac{\sigma_p-\tau_p}{2}\right)^2+\alpha_p}+\frac{\sigma_p+\tau_p}{2}\right]^{1/2} \quad , \quad \lambda_{3p}=\sqrt{\tau_p} \quad ,$$

$$q_{1p}=\frac{\left(\lambda_{3p}^2+\lambda_{1p}^2\right)}{\lambda_{1p}} \quad , \quad q_{2p}=\frac{\left(\lambda_{3p}^2-\lambda_{2p}^2\right)}{\lambda_{2p}} \qquad (۳۲)$$

ضرایب A_{pj}، B_{pj}، C_{pj} و D_{pj} ثابت‌هایی هستند که به بخش jام از تیر p ام مربوط می‌شوند. باید ثوابت آخرین بخش تیر یعنی $A_{p(m+1)}$، $B_{p(m+1)}$، $C_{p(m+1)}$ و $D_{p(m+1)}$ به اولین بخش آن یعنی A_{p1}، B_{p1}، C_{p1} و D_{p1} مربوط شوند. بنابراین با استفاده از معادلات (۲۸) روابط بین این ضرایب تعیین می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \\ C_{j+1} \\ D_{j+1} \end{Bmatrix}_p = \left(\mathbf{T}_{4\times4}\right)_{pj}\begin{Bmatrix} A_j \\ B_j \\ C_j \\ D_j \end{Bmatrix}_p \rightarrow \begin{Bmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \\ C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{Bmatrix}_p$$

$$=\mathbf{T}_{pm}\mathbf{T}_{p(m-1)}\cdots\mathbf{T}_{p1}\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}_p = \left(\mathbf{T}_{4\times4}\right)_p\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}_p$$

(۳۳)

که در آن، ماتریس $(\mathbf{T}_{4\times4})_{pj}$ به مقدار ویژه ω_p بستگی دارد و برابر است با:

$$\mathbf{T}_{pj}=\begin{bmatrix} \cosh(\lambda_1 l_j) & \sinh(\lambda_1 l_j) & 0 & 0 \\ \left(\beta_j\frac{q_2\cosh(\lambda_1 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}+\sinh(\lambda_1 l_j)\right) & \left(\beta_j\frac{q_2\sinh(\lambda_1 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}+\cosh(\lambda_1 l_j)\right) & \beta_j\frac{q_2\cos(\lambda_2 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1} & \beta_j\frac{q_2\sin(\lambda_2 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1} \\ 0 & 0 & \cos(\lambda_2 l_j) & \sin(\lambda_2 l_j) \\ \beta_j\frac{q_1\cosh(\lambda_1 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1} & \beta_j\frac{q_1\sinh(\lambda_1 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1} & \left(\beta_j\frac{q_1\cos(\lambda_2 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}-\sin(\lambda_2 l_j)\right) & \left(\beta_j\frac{q_1\sin(\lambda_2 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}+\cos(\lambda_2 l_j)\right) \end{bmatrix}_p \qquad (۳۴)$$

با مرتبط شدن ضرایب اولین بخش تیر به آخرین بخش آن، تعداد ثوابت مستقل به چهار ثابت کاهش می‌یابد که با ارضای شرایط مرزی مختلف تعیین می‌شوند. در این مقاله شرط مرزی دو سر مفصل به‌طور کامل بیان می‌شود و برای شرایط مرزی دیگر می‌توان به‌طور مشابه عمل کرد [۱۵]:

$$\begin{cases} Y_{i1}(0,T)=0 \rightarrow y_{i1}(0,t)=0 \rightarrow u_{p1}(0,t)=0 \\ \qquad \rightarrow w_{p1}(0)=0 \\ \Phi'_{i1}(0,T)=0 \rightarrow \phi'_{i1}(0,t)=0 \rightarrow \theta'_{p1}(0,t)=0 \\ \qquad \rightarrow \varphi'_{p1}(0)=0 \\ Y_{i(m+1)}(L,T)=0 \rightarrow y_{i(m+1)}(1,t)=0 \\ \qquad \rightarrow u_{p(m+1)}(1,t)=0 \rightarrow w_{p(m+1)}(1)=0 \\ \Phi'_{i(m+1)}(L,T)=0 \rightarrow \phi'_{i(m+1)}(1,t)=0 \\ \qquad \rightarrow \theta'_{p(m+1)}(1,t)=0 \rightarrow \varphi'_{p(m+1)}(1)=0 \end{cases} \tag{۳۵}$$

با ارضای معادلات در تکیه‌گاه سمت چپ تیر می‌توان نوشت:

$$A_{p1}=C_{p1}=0 \tag{۳۶}$$

همچنین با ارضای معادلات در تکیه‌گاه سمت راست تیر و با توجه به معادلات (۳۳)، می‌توان نوشت:

$$(\mathbf{S}_{2\times4})_p \begin{Bmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \\ C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{Bmatrix}_p = \mathbf{S}_p \mathbf{T}_p \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}_p = (\mathbf{R}_{2\times4})_p \begin{Bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \\ D_1 \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۳۷}$$

که در این معادله:

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} \cosh\lambda_1 l_{m+1} & \sinh\lambda_1 l_{m+1} & \cos\lambda_2 l_{m+1} & \sin\lambda_2 l_{m+1} \\ q_1\lambda_1\cosh\lambda_1 l_{m+1} & q_1\lambda_1\sinh\lambda_1 l_{m+1} & q_2\lambda_2\cos\lambda_2 l_{m+1} & q_2\lambda_2\sin\lambda_2 l_{m+1} \end{bmatrix}_p \tag{۳۸}$$

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{S}_p \mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix}_p \tag{۳۹}$$

جهت داشتن حل غیربدیهی برای این معادلات لازم است:

$$\det\begin{vmatrix} r_{12} & r_{14} \\ r_{22} & r_{24} \end{vmatrix}_p = 0 \tag{۴۰}$$

این معادله فرکانس‌های طبیعی تیر p ام را برای شرط مرزی مفصلی به‌دست می‌دهد.

۵- پاسخ اجباری به عبور سیستم شش درجه آزادی دومحوره

با کاربرد تئوری آنالیز مودال، می‌توان پاسخ اجباری را برای pامین دسته از معادلات جدید بسط داد:

$$u_p(x,t)=\sum_{k=1}^{N} w_{kp}(x)\,p_{kp}(t)\;, \qquad \theta_p(x,t)=\sum_{k=1}^{N} \varphi_{kp}(x)\,p_{kp}(t) \tag{۴۱}$$

در این معادلات، $p_{kp}(t)$ مختصات تعمیم یافته یا عمومی برای شیب و جابه‌جایی تیر p ام، با درنظر گرفتن تابع یکسان زمانی است. دادفرنیا و همکاران [۱۸] نشان دادند که استفاده از تابع یکسان زمانی برای جابه‌جایی و شیب، خطای بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی را وارد معادلات می‌کند.

توابع ویژه $w_{kp}(x)$ و $\varphi_{kp}(x)$ به‌ترتیب شکل مودهای جابه‌جایی و زاویه‌ای تیر p ام هستند، که خود به m+1 ضابطه تقسیم و در محل فنرهای میانی از هم جدا می‌شوند و عبارتند از:

$$\begin{aligned} w_{kp} = f_{kp(j)}(x) = \{ & A_{kp(j)}\cosh\lambda_{1kp}(x-x_{j-1}) \\ & + B_{kp(j)}\sinh\lambda_{1kp}(x-x_{j-1}) \\ & + C_{kp(j)}\cos\lambda_{2kp}(x-x_{j-1}) \\ & + D_{kp(j)}\sin\lambda_{2kp}(x-x_{j-1}) \} \end{aligned} \tag{۴۲-الف}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{kp} = g_{kp(j)}(x) = \{ & q_{1kp}\left(B_{kp(j)}\cosh\lambda_{1kp}(x-x_{j-1})\right. \\ & \left. + A_{kp(j)}\sinh\lambda_{1kp}(x-x_{j-1})\right) \\ & + q_{2kp}\left(-D_{kp(j)}\cos\lambda_{2kp}(x-x_{j-1})\right. \\ & \left. + C_{kp(j)}\sin\lambda_{2kp}(x-x_{j-1})\right) \} \end{aligned} \tag{۴۲-ب}$$

این معادلات برای کل تیر نوشته شده‌اند و در ادامه برای سادگی کار از اندیس j، که به بخش j ام تیر مربوط می‌شود، صرف‌نظر می‌شود. با جایگزینی معادلات (۴۱) در (۲۴) و همچنین با

درنظر گرفتن ارتعاشات آزاد، پس از ساده‌سازی روابط می‌توان نوشت:

$$\rho A\sum_{k=1}^{N} w_{kp}(x)\left[\ddot{p}_{kp}(t)+\omega_{kp}^{2}p_{kp}(t)\right] = \frac{c_{pr}}{L}\left[P_1(t)\delta\left(x-\zeta_1(t)\right)\varepsilon_1 + P_2(t)\delta\left(x-\zeta_2(t)\right)\varepsilon_2\right]$$
(۴۳- الف)

$$\rho I\sum_{k=1}^{N}\varphi_{kp}(x)\left[\ddot{p}_{kp}(t)+\omega_{kp}^{2}p_{kp}(t)\right]=0$$
(۴۳- ب)

ω_{kp} در این معادلات، kامین فرکانس طبیعی تیر pام است. شرط تعامد مودها برای $k,q=1,2,\dots,N$ عبارت است از:

$$\int_0^1\left[w_{kp}(x)w_{qp}(x)+\frac{I}{AL^2}\varphi_{kp}(x)\varphi_{qp}(x)\right]dx=\delta_{kq}$$
(۴۴)

پس از به‌کارگیری شرط تعامد مودها در معادلات (۴۳)، می‌توان نوشت:

$$\ddot{p}_{qp}(t)+\omega_{qp}^{2}p_{qp}(t)= \frac{c_{pr}}{\rho AL}\left[\varepsilon_1 P_1(t)w_{qp}\left(\zeta_1\right)+\varepsilon_2 P_2(t)w_{qp}\left(\zeta_2\right)\right]=Q_{qp}(t)$$
(۴۵)

در این معادله، نیروهای بین تیر و خودرو با جای‌گذاری معادلات (۴۱) در (۲۵) و (۲۶) به‌دست می‌آید:

$$P_1(t)=-L\left\{\frac{m_1 g}{L}+k_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}\left(\zeta_1(t)\right)p_{kp}(t)-z_1(t)\right] +\frac{\sqrt{L}}{L}b_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}\left(\zeta_1(t)\right)\dot{p}_{kp}(t)-\dot{z}_1(t)\right]\right\}$$
(۴۶)

$$P_2(t)=-L\left\{\frac{m_2 g}{L}+k_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}\left(\zeta_2(t)\right)p_{kp}(t)-z_2(t)\right] +\frac{\sqrt{L}}{L}b_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}\left(\zeta_2(t)\right)\dot{p}_{kp}(t)-\dot{z}_2(t)\right]\right\}$$
(۴۷)

برای معادلات (۲۷) می‌توان نوشت:

$$\frac{m_{t1}}{L}\ddot{z}_1=\left[k_3\left(z_3-z_1\right)+k_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}\left(\zeta_1\right)p_{kp}(t)-z_1\right]\right] +\frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_3\left(\dot{z}_3-\dot{z}_1\right)+b_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}\left(\zeta_1\right)\dot{p}_{kp}(t)-\dot{z}_1\right]\right]$$
(۴۸- الف)

$$\frac{m_{t2}}{L}\ddot{z}_2=\left[k_4\left(z_4-z_2\right)+k_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}\left(\zeta_2\right)p_{kp}(t)-z_2\right]\right] +\frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_4\left(\dot{z}_4-\dot{z}_2\right)+b_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}\left(\zeta_2\right)\dot{p}_{kp}(t)-\dot{z}_2\right]\right]$$
(۴۸- ب)

مشاهده می‌شود که طرف راست معادله (۴۵) به توابع $P_1(t)$ و $P_2(t)$ بستگی دارد، پس با توجه به معادلات (۴۶) و (۴۷) طرف راست معادله (۴۵) خود وابسته به پارامترهای $p_k(t)$ و $\dot{p}_k(t)$ است؛ همچنین این پارامترها در معادلات حرکت سیستم شش درجه آزادی یا خودرو، یعنی روابط (۴۸) نیز دیده می‌شوند. بنابراین واضح است که معادلات (۴۵) تا (۴۸) و همچنین معادلات (۱۷) و (۱۹) همگی به یکدیگر وابسته و درهم‌گیر هستند و در کل یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر مرتبه دوم را تشکیل می‌دهند. در ادامه هدف این است که پارامترهای $p_{kp}(t)$ و مشتقات آنها و همچنین جابه‌جایی‌های عمودی مربوط به خودرو از یکدیگر جدا و معادلات قابل حل شوند. به‌دلیل در هم‌پیچیدگی و درهم‌گیر شدن عبارات، معادلات (۴۸-۴۵) به‌طور مستقیم و به‌سادگی قابل جدا شدن نیستند. به‌همین دلیل معادله (۴۵) به فرم دستگاهی از معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر مرتبه دوم برای هر تیر به ازای $p=1,2,\dots,n$ و $q=1,2,\dots,N$، به‌صورت یک دستگاه معادلات ماتریسی بسط داده می‌شود:

$$\begin{cases}\ddot{\mathbf{P}}_1(t)+\mathbf{\Omega}_1^2\mathbf{P}_1(t)=\dfrac{c_{1r}}{\rho AL}\left[\varepsilon_1 P_1(t)\mathbf{W}_1\left(\zeta_1\right)+\varepsilon_2 P_2(t)\mathbf{W}_1\left(\zeta_2\right)\right]=\mathbf{Q}_1(t)\\ \ddot{\mathbf{P}}_2(t)+\mathbf{\Omega}_2^2\mathbf{P}_2(t)=\dfrac{c_{2r}}{\rho AL}\left[\varepsilon_1 P_1(t)\mathbf{W}_2\left(\zeta_1\right)+\varepsilon_2 P_2(t)\mathbf{W}_2\left(\zeta_2\right)\right]=\mathbf{Q}_2(t)\\ \quad\vdots \qquad \cdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \cdots \;\vdots\\ \ddot{\mathbf{P}}_n(t)+\mathbf{\Omega}_n^2\mathbf{P}_n(t)=\dfrac{c_{nr}}{\rho AL}\left[\varepsilon_1 P_1(t)\mathbf{W}_n\left(\zeta_1\right)+\varepsilon_2 P_2(t)\mathbf{W}_n\left(\zeta_2\right)\right]=\mathbf{Q}_n(t)\end{cases}$$
(۴۹)

که برای دسته pام از دستگاه معادلات، ماتریس‌ها و بردارها عبارتند از:

$$\mathbf{P}_p(t)=\begin{Bmatrix} p_1(t)\\ p_2(t)\\ \vdots\\ p_N(t)\end{Bmatrix}_p \quad,\quad \dot{\mathbf{P}}_p(t)=\begin{Bmatrix} \dot p_1(t)\\ \dot p_2(t)\\ \vdots\\ \dot p_N(t)\end{Bmatrix}_p \quad,$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_p(t)=\begin{Bmatrix} \ddot p_1(t)\\ \ddot p_2(t)\\ \vdots\\ \ddot p_N(t)\end{Bmatrix}_p \quad,\quad \mathbf{W}_p(\zeta)=\begin{Bmatrix} w_1(\zeta)\\ w_2(\zeta)\\ \vdots\\ w_N(\zeta)\end{Bmatrix}_p \quad,$$

$$\mathbf{Q}_p(t)=\begin{Bmatrix} Q_1(t)\\ Q_2(t)\\ \vdots\\ Q_N(t)\end{Bmatrix}_p \quad,\quad \mathbf{\Omega}_p^2=\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \cdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \omega_N^2\end{bmatrix}_p \tag{۵۰}$$

همچنین برای معادلات (۴۶ و ۴۷) می‌توان نوشت:

$$P_1(t)=-L\left\{\frac{m_1 g}{L}+k_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\bar c_{rp}\mathbf{W}_p^T(\zeta_1(t))\mathbf{P}_p(t)-z_1(t)\right]+\frac{\sqrt{L}}{L}b_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\bar c_{rp}\mathbf{W}_p^T(\zeta_1(t))\dot{\mathbf{P}}_p(t)-\dot z_1(t)\right]\right\} \tag{۵۱}$$

$$P_2(t)=-L\left\{\frac{m_2 g}{L}+k_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\bar c_{rp}\mathbf{W}_p^T(\zeta_2(t))\mathbf{P}_p(t)-z_2(t)\right]+\frac{\sqrt{L}}{L}b_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\bar c_{rp}\mathbf{W}_p^T(\zeta_2(t))\dot{\mathbf{P}}_p(t)-\dot z_2(t)\right]\right\} \tag{۵۲}$$

و برای معادلات (۴۸) نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{m_{t1}}{L}\ddot z_1=\left[k_3(z_3-z_1)+k_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\bar c_{rp}\mathbf{W}_p^T(\zeta_1)\mathbf{P}_p(t)-z_1\right]\right]+\frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_3(\dot z_3-\dot z_1)+b_1\left[\varepsilon_1\sum_{p=1}^{n}\bar c_{rp}\mathbf{W}_p^T(\zeta_1)\dot{\mathbf{P}}_p(t)-\dot z_1\right]\right]$$

(۵۳- الف)

$$\frac{m_{t2}}{L}\ddot z_2=\left[k_4(z_4-z_2)+k_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\bar c_{rp}\mathbf{W}_p^T(\zeta_2)\mathbf{P}_p(t)-z_2\right]\right]+\frac{\sqrt{L}}{L}\left[b_4(\dot z_4-\dot z_2)+b_2\left[\varepsilon_2\sum_{p=1}^{n}\bar c_{rp}\mathbf{W}_p^T(\zeta_2)\dot{\mathbf{P}}_p(t)-\dot z_2\right]\right]$$

(۵۳- ب)

با جای‌گذاری معادلات (۵۱) و (۵۲) در دستگاه معادلات (۴۹) و با جابه‌جایی و مرتب کردن کلیه جملات آن، یک مجموعه دستگاه معادلات پیچیده و طولانی به‌دست خواهد آمد که در اینجا به اختصار فقط دسته p ام از آن دستگاه معادلات طولانی بیان می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{P}}_p(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{D}_{pi}(t)\dot{\mathbf{P}}_i(t)+\mathbf{K}_{pi}(t)\mathbf{P}_i(t)\right]=\mathbf{q}_p(t) \tag{۵۴}$$

در این معادله، بردارها و ماتریس‌ها به‌ازای $p\ ,\ i=1,2,...,n$ عبارتند از:

$$\mathbf{D}_{pi}(t)=c_{pr}\bar c_{ri}\frac{\sqrt{L}}{\rho AL}\left[\varepsilon_1 b_1\mathbf{W}_p(\zeta_1)\mathbf{W}_i^T(\zeta_1)+\varepsilon_2 b_2\mathbf{W}_p(\zeta_2)\mathbf{W}_i^T(\zeta_2)\right]$$

(۵۵- الف)

$$\mathbf{K}_{pi}=\mathbf{\Omega}_p^2\delta_{pi}+c_{pr}\bar c_{ri}\frac{1}{\rho A}\left[\varepsilon_1 k_1\mathbf{W}_p(\zeta_1)\mathbf{W}_i^T(\zeta_1)+\varepsilon_2 k_2\mathbf{W}_p(\zeta_2)\mathbf{W}_i^T(\zeta_2)\right]$$

(۵۵- ب)

$$\mathbf{q}_p(t)=\frac{c_{pr}}{\rho A}\left\{\left[\varepsilon_1 k_1 z_1\mathbf{W}_p(\zeta_1)+\varepsilon_2 k_2 z_2\mathbf{W}_p(\zeta_2)\right]+\frac{\sqrt{L}}{L}\left[\varepsilon_1 b_1\dot z_1\mathbf{W}_p(\zeta_1)+\varepsilon_2 b_2\dot z_2\mathbf{W}_p(\zeta_2)\right]-\left[\varepsilon_1\frac{m_1 g}{L}\mathbf{W}_p(\zeta_1)+\varepsilon_2\frac{m_2 g}{L}\mathbf{W}_p(\zeta_2)\right]\right\}$$

(۵۵- ج)

سرانجام با مرتب کردن معادلات (۵۴) می‌توان نوشت:

$$\ddot{\mathbf{P}}(t)+\mathbf{D}(t)\dot{\mathbf{P}}(t)+\mathbf{K}(t)\mathbf{P}(t)=\mathbf{q}(t) \tag{۵۶}$$

ماتریس‌ها و بردارهای این رابطه این‌گونه تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{P}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_1(t)\\ \mathbf{P}_2(t)\\ \vdots\\ \mathbf{P}_n(t)\end{Bmatrix}\quad,\quad \dot{\mathbf{P}}(t)=\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{P}}_1(t)\\ \dot{\mathbf{P}}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{\mathbf{P}}_n(t)\end{Bmatrix}\quad,\quad \ddot{\mathbf{P}}(t)=\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{P}}_1(t)\\ \ddot{\mathbf{P}}_2(t)\\ \vdots\\ \ddot{\mathbf{P}}_n(t)\end{Bmatrix}\quad,$$

$$\mathbf{q}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{q}_1(t)\\ \mathbf{q}_2(t)\\ \vdots\\ \mathbf{q}_n(t)\end{Bmatrix}\quad,\quad \mathbf{D}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{11}(t) & \cdots & \mathbf{D}_{1n}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{D}_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{D}_{nn}(t)\end{bmatrix}\quad,$$

$$\mathbf{K}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}(t) & \cdots & \mathbf{K}_{1n}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{K}_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{K}_{nn}(t)\end{bmatrix} \quad (۵۷)$$

همچنین معادلات (۵۳) به فرم (۵۸) نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{H}_a^T(t)\dot{\mathbf{P}}(t)+\mathbf{G}_a^T(t)\mathbf{P}(t)= \left\{\left[\frac{m_{t1}}{L}\ddot{z}_1(t)+\frac{\sqrt{L}}{L}(b_1+b_3)\dot{z}_1(t)+(k_1+k_3)z_1(t)\right] -\left[\frac{\sqrt{L}}{L}b_3\dot{z}_3(t)+k_3z_3(t)\right]\right\} \quad (۵۸\text{- الف})$$

$$\mathbf{H}_b^T(t)\dot{\mathbf{P}}(t)+\mathbf{G}_b^T(t)\mathbf{P}(t)= \left\{\left[\frac{m_{t2}}{L}\ddot{z}_2(t)+\frac{\sqrt{L}}{L}(b_2+b_4)\dot{z}_2(t)+(k_2+k_4)z_2(t)\right] -\left[\frac{\sqrt{L}}{L}b_4\dot{z}_4(t)+k_4z_4(t)\right]\right\} \quad (۵۸\text{- ب})$$

که در این معادلات:

$$\mathbf{H}_a(t)=\frac{\sqrt{L}}{L}\varepsilon_1 b_1\begin{Bmatrix}\bar{c}_{r1}\mathbf{W}_1(\zeta_1)\\ \bar{c}_{r2}\mathbf{W}_2(\zeta_1)\\ \vdots\\ \bar{c}_{rn}\mathbf{W}_n(\zeta_1)\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_b(t)=\frac{\sqrt{L}}{L}\varepsilon_2 b_2\begin{Bmatrix}\bar{c}_{r1}\mathbf{W}_1(\zeta_2)\\ \bar{c}_{r2}\mathbf{W}_2(\zeta_2)\\ \vdots\\ \bar{c}_{rn}\mathbf{W}_n(\zeta_2)\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_a(t)=\sqrt{L}\frac{k_1}{b_1}\mathbf{H}_a(t) \quad , \quad \mathbf{G}_b(t)=\sqrt{L}\frac{k_2}{b_2}\mathbf{H}_b(t) \quad (۵۹)$$

معادلات نهایی (۵۶)، (۵۸)، (۱۷) و (۱۹)، معادلاتی قابل حل هستند که برای تحلیل هم‌زمان آنها، در اختیار داشتن شرایط اولیه مجموعه تیرها و خودرو ضروری است. می‌توان بردار شرایط اولیه خودرو را این‌گونه بیان کرد:

$$\mathbf{Z}(0)=\left[z_1(0) \quad z_2(0) \quad \cdots \quad z_6(0)\right]^T \quad (۶۰\text{- الف})$$

$$\dot{\mathbf{Z}}(0)=\left[\dot{z}_1(0) \quad \dot{z}_2(0) \quad \cdots \quad \dot{z}_6(0)\right]^T \quad (۶۰\text{- ب})$$

پس از اعمال شرط تعامد مودها در معادلات (۴۱)، بردار شرایط اولیه تیرها برای دسته p ام از معادلات (۵۴) تعیین می‌شود:

$$\mathbf{P}_p(0)=\int_0^1\left[u_{0p}(x)\mathbf{W}_p(x)+\frac{I}{AL^2}\theta_{0p}(x)\mathbf{\Phi}_p(x)\right]dx \quad (۶۱\text{- الف})$$

$$\dot{\mathbf{P}}_p(0)=\int_0^1\left[\dot{u}_{0p}(x)\mathbf{W}_p(x)+\frac{I}{AL^2}\dot{\theta}_{0p}(x)\mathbf{\Phi}_p(x)\right]dx \quad (۶۱\text{- ب})$$

که در این معادلات:

$$\mathbf{\Phi}_p(x)=\left[\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \cdots \quad \varphi_N(x)\right]_p^T \quad (۶۲)$$

حال باید با جای‌گذاری معادلات (۶۱) در (۵۷)، بردار شرایط اولیه نهایی را برای استفاده در معادله (۵۶) به‌دست آورد:

$$\mathbf{P}(0)=[\mathbf{P}_1^T(0) \quad \mathbf{P}_2^T(0) \quad \cdots \quad \mathbf{P}_n^T(0)]^T \quad (۶۳\text{- الف})$$

$$\dot{\mathbf{P}}(0)=[\dot{\mathbf{P}}_1^T(0) \quad \dot{\mathbf{P}}_2^T(0) \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{P}}_n^T(0)]^T \quad (۶۳\text{- ب})$$

پس از حل معادلات نهایی، پاسخ اجباری مجموعه جدید تعیین می‌شود:

$$u_p(x,t)=\mathbf{W}_p^T(x)\mathbf{P}_p(t) \quad , \quad \theta_p(x,t)=\mathbf{\Phi}_p^T(x)\mathbf{P}_p(t) \quad (۶۴)$$

در نهایت با کاربرد معادلات (۲۲) پاسخ مجموعه اصلی محاسبه می‌شود.

اینک، برای تیر iام از مجموعه اصلی به‌ازای $i=1,2,...,n$، ممان خمشی $M_i(x,t)$ و نیروی برشی $Q_i(x,t)$ را می‌توان محاسبه کرد:

$$M_i(x,t)=\frac{EI}{L}\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{ip}\mathbf{\Phi}_{p,1}^T(x)\mathbf{P}_p(t) \quad (۶۵)$$

$$Q_i(x,t)=\kappa AG\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{ip}\left(\mathbf{W}_{p,1}^T(x)-\mathbf{\Phi}_p^T(x)\right)\mathbf{P}_p(t) \ , \ i=1,2,...,n \quad (۶۶)$$

که در این معادلات، مشتق مرتبه اول نسبت به x، این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\mathbf{W}_{p,1}(x)=\left[w_1'(x) \quad w_2'(x) \quad \cdots \quad w_N'(x)\right]_p^T \quad (۶۷\text{- الف})$$

$$\mathbf{\Phi}_{p,1}(x)=\left[\varphi_1'(x) \quad \varphi_2'(x) \quad \cdots \quad \varphi_N'(x)\right]_p^T \quad (۶۷\text{- ب})$$

۶- فرم فضای حالت معادلات

فرم فضای حالت معادلات نهایی (۱۷)، (۱۹)، (۵۶) و (۵۷) عبارت است از:

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{F}(t) \tag{۶۸}$$

که در این معادله، بردار حالت را می‌توان این‌گونه تعریف کرد:

$$\mathbf{X}(t)=\left[\mathbf{P}^{T}(t)\quad \mathbf{Z}^{T}(t)\quad \dot{\mathbf{P}}^{T}(t)\quad \dot{\mathbf{Z}}^{T}(t)\right]^{T} \tag{۶۹}$$

برای بردار سرعت و جابه‌جایی عمودی خودرو نیز می‌توان نوشت:

$$\mathbf{Z}(t)=\left[z_1(t)\quad z_2(t)\quad \cdots \quad z_6(t)\right]^{T} \tag{۷۰- الف}$$

$$\dot{\mathbf{Z}}(t)=\left[\dot{z}_1(t)\quad \dot{z}_2(t)\quad \cdots \quad \dot{z}_6(t)\right]^{T} \tag{۷۰- ب}$$

در معادله (۶۸)، ماتریس حالت عبارت است از:

$$\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n\times N)*(n\times N)} & \mathbf{0}_{(n\times N)*6} & \mathbf{I}_{(n\times N)*(n\times N)} & \mathbf{0}_{(n\times N)*6} \\ \mathbf{0}_{6*(n\times N)} & \mathbf{0}_{6*6} & \mathbf{0}_{6*(n\times N)} & \mathbf{I}_{6*6} \\ -\mathbf{K}(t) & \left[\mathbf{A}_{32}(t)\right]_{(n\times N)*6} & -\mathbf{D}(t) & \left[\mathbf{A}_{34}(t)\right]_{(n\times N)*6} \\ \left[\mathbf{A}_{41}(t)\right]_{6*(n\times N)} & \left[\mathbf{A}_{42}\right]_{6*6} & \left[\mathbf{A}_{43}(t)\right]_{6*(n\times N)} & \left[\mathbf{A}_{44}\right]_{6*6} \end{bmatrix} \tag{۷۱}$$

که ماتریس‌های بلوکی درون ماتریس حالت، عبارتند از:

$$\mathbf{A}_{32}(t)=\frac{1}{\rho A}\begin{bmatrix} c_{1r}\varepsilon_1 k_1 \mathbf{W}_1(\zeta_1) & c_{1r}\varepsilon_2 k_2 \mathbf{W}_1(\zeta_2) & \mathbf{0}_{N*4} \\ c_{2r}\varepsilon_1 k_1 \mathbf{W}_2(\zeta_1) & c_{2r}\varepsilon_2 k_2 \mathbf{W}_2(\zeta_2) & \mathbf{0}_{N*4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{nr}\varepsilon_1 k_1 \mathbf{W}_n(\zeta_1) & c_{nr}\varepsilon_2 k_2 \mathbf{W}_n(\zeta_2) & \mathbf{0}_{N*4} \end{bmatrix} \tag{۷۲- الف}$$

$$\mathbf{A}_{34}(t)=\frac{\sqrt{L}}{\rho AL}\begin{bmatrix} c_{1r}\varepsilon_1 b_1 \mathbf{W}_1(\zeta_1) & c_{1r}\varepsilon_2 b_2 \mathbf{W}_1(\zeta_2) & \mathbf{0}_{N*4} \\ c_{2r}\varepsilon_1 b_1 \mathbf{W}_2(\zeta_1) & c_{2r}\varepsilon_2 b_2 \mathbf{W}_2(\zeta_2) & \mathbf{0}_{N*4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{nr}\varepsilon_1 b_1 \mathbf{W}_n(\zeta_1) & c_{nr}\varepsilon_2 b_2 \mathbf{W}_n(\zeta_2) & \mathbf{0}_{N*4} \end{bmatrix} \tag{۷۲- ب}$$

$$\mathbf{A}_{41}(t)=\left[\frac{L}{m_{t1}}\mathbf{G}_a(t)\quad \frac{L}{m_{t2}}\mathbf{G}_b(t)\quad \mathbf{0}_{(n\times N)*4}\right]^{T} \tag{۷۲- ج}$$

$$\mathbf{A}_{43}(t)=\left[\frac{L}{m_{t1}}\mathbf{H}_a(t)\quad \frac{L}{m_{t2}}\mathbf{H}_b(t)\quad \mathbf{0}_{(n\times N)*4}\right]^{T} \tag{۷۲- د}$$

$$\mathbf{A}_{42}=L\begin{bmatrix} \frac{-(k_1+k_3)}{m_{t1}} & 0 & \frac{k_3}{m_{t1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(k_2+k_4)}{m_{t2}} & 0 & \frac{k_4}{m_{t2}} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & \frac{k_5}{m_{p1}} & 0 & \frac{-k_5}{m_{p1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_6}{m_{p2}} & 0 & \frac{-k_6}{m_{p2}} \end{bmatrix} \tag{۷۲- ه}$$

$$\mathbf{A}_{44}=\sqrt{L}\begin{bmatrix} \frac{-(b_1+b_3)}{m_{t1}} & 0 & \frac{b_3}{m_{t1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(b_2+b_4)}{m_{t2}} & 0 & \frac{b_4}{m_{t2}} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} & \bar{a}_{35} & \bar{a}_{36} \\ \bar{a}_{41} & \bar{a}_{42} & \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} & \bar{a}_{45} & \bar{a}_{46} \\ 0 & 0 & \frac{b_5}{m_{p1}} & 0 & \frac{-b_5}{m_{p1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_6}{m_{p2}} & 0 & \frac{-b_6}{m_{p2}} \end{bmatrix} \tag{۷۲- و}$$

سایر درایه‌های ماتریس‌های بلوکی $\mathbf{A}_{42}$ و $\mathbf{A}_{44}$ عبارتند از:

$$a_{31}=\left[\frac{k_3}{M_s}+\frac{k_3 d_1^2}{J}\right]\quad,\quad a_{32}=\left[\frac{k_4}{M_s}-\frac{k_4 d_1 d_2}{J}\right]\quad,$$

$$a_{33}=-\left[\frac{k_3+k_5}{M_s}+\frac{k_3 d_1^2+k_5 d_1 e_1}{J}\right]\quad,$$

$$a_{34}=-\left[\frac{k_4+k_6}{M_s}-\frac{k_4 d_1 d_2+k_6 d_1 e_2}{J}\right]\quad,$$

$$a_{35}=\left[\frac{k_5}{M_s}+\frac{k_5 d_1 e_1}{J}\right]\quad,\quad a_{36}=\left[\frac{k_6}{M_s}-\frac{k_6 d_1 e_2}{J}\right],$$

$$a_{41}=\left[\frac{k_3}{M_s}-\frac{k_3 d_1 d_2}{J}\right]\quad,\quad a_{42}=\left[\frac{k_4}{M_s}+\frac{k_4 d_2^2}{J}\right]\quad,$$

$$a_{43}=-\left[\frac{k_3+k_5}{M_s}-\frac{k_3 d_1 d_2+k_5 d_2 e_1}{J}\right]\quad,$$

$$a_{44}=-\left[\frac{k_4+k_6}{M_s}+\frac{k_4 d_2^2+k_6 d_2 e_2}{J}\right]\quad,$$

$$a_{۴۵}=\left[\frac{k_۵}{M_s}-\frac{k_۵ d_۲ e_۱}{J}\right] \quad , \quad a_{۴۶}=\left[\frac{k_۶}{M_s}+\frac{k_۶ d_۲ e_۲}{J}\right]$$
(۷۳- الف)

$$\bar{a}_{۳۱}=\left[\frac{b_۳}{M_s}+\frac{b_۳ d_۱^۲}{J}\right] \quad , \quad \bar{a}_{۳۲}=\left[\frac{b_۴}{M_s}-\frac{b_۴ d_۱ d_۲}{J}\right] \quad ,$$
$$\bar{a}_{۳۳}=-\left[\frac{b_۳+b_۵}{M_s}+\frac{b_۳ d_۱^۲+b_۵ d_۱ e_۱}{J}\right],$$
$$\bar{a}_{۳۴}=-\left[\frac{b_۴+b_۶}{M_s}-\frac{b_۴ d_۱ d_۲+b_۶ d_۱ e_۲}{J}\right] \quad ,$$
$$\bar{a}_{۳۵}=\left[\frac{b_۵}{M_s}+\frac{b_۵ d_۱ e_۱}{J}\right] \quad , \quad \bar{a}_{۳۶}=\left[\frac{b_۶}{M_s}-\frac{b_۶ d_۱ e_۲}{J}\right] \quad ,$$
$$\bar{a}_{۴۱}=\left[\frac{b_۳}{M_s}-\frac{b_۳ d_۱ d_۲}{J}\right] \quad , \quad \bar{a}_{۴۲}=\left[\frac{b_۴}{M_s}+\frac{b_۴ d_۲^۲}{J}\right] \quad ,$$
$$\bar{a}_{۴۳}=-\left[\frac{b_۳+b_۵}{M_s}-\frac{b_۳ d_۱ d_۲+b_۵ d_۲ e_۱}{J}\right] \quad ,$$
$$\bar{a}_{۴۴}=-\left[\frac{b_۴+b_۶}{M_s}+\frac{b_۴ d_۲^۲+b_۶ d_۲ e_۲}{J}\right] \quad ,$$
$$\bar{a}_{۴۵}=\left[\frac{b_۵}{M_s}-\frac{b_۵ d_۲ e_۱}{J}\right] \quad , \quad \bar{a}_{۴۶}=\left[\frac{b_۶}{M_s}+\frac{b_۶ d_۲ e_۲}{J}\right]$$
(۷۳- ب)

همچنین برای بردار $\mathbf{F}(t)$ در معادله فضای حالت (۶۸) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{F}(t)=\frac{-g}{\rho AL}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n\times N+۶)*۱} \\ c_{۱r}\left[\varepsilon_۱ m_۱ \mathbf{W}_۱(\zeta_۱(t))+\varepsilon_۲ m_۲ \mathbf{W}_۱(\zeta_۲(t))\right] \\ c_{۲r}\left[\varepsilon_۱ m_۱ \mathbf{W}_۲(\zeta_۱(t))+\varepsilon_۲ m_۲ \mathbf{W}_۲(\zeta_۲(t))\right] \\ \vdots \\ c_{nr}\left[\varepsilon_۱ m_۱ \mathbf{W}_n(\zeta_۱(t))+\varepsilon_۲ m_۲ \mathbf{W}_n(\zeta_۲(t))\right] \\ \mathbf{0}_{۶*۱} \end{bmatrix} \quad (۷۴)$$

۷- نتایج عددی

مجموعه‌ای از سه تیر تیموشنکو بـا ارتفـاع H و پهنـای W، بـا مقاطع مستطیلی، دو ستون اتصالات میانی و شرایط مرزی دو سر مفصل، تحت عبور خودرو درنظر گرفته می‌شود. داده‌های عـددی در این مثال به‌منظور اعتبارسنجی، از دو مرجع [۱۰ و ۱۵] گرفتـه شده‌اند و کلیه نتایج عددی در این بخش برمبنـای ایـن داده‌هـا به‌دست آمده‌اند مگر آنکه داده‌های عددی جدیدی ذکر گردد:

سیستم شش درجه آزادی:

$M_s=۱۷۹۴/۴\,,\ m_{t۱}=۸۷/۱۵\,,\ m_{t۲}=۱۴۰/۴\ ,$
$m_{p۱}=m_{p۲}=۷۵\ \text{kg}\ ,$
$J=۳۴۴۳/۰۵\ \text{kg m}^۲\,,\ d_۱=۱/۲۷۱\,,\ d_۲=۱/۷۱۶\,,\ e_۱=۰/۴۸۱\ ,$
$e_۲=۱/۳۱۳\ \text{m}\ ,$
$k_۱=k_۲=۱۰۱۱۱۵\,,\ k_۳=۶۶۸۲۴/۴\,,\ k_۴=۱۸۶۱۵\ ,$
$k_۵=k_۶=۱۴۰۰۰\,\frac{N}{m}\,,$
$b_۱=b_۲=۱۴/۶\,,\ b_۳=۱۱۹۰\,,\ b_۴=۱۰۰۰\,,\ b_۵=۵۰/۲\ ,$
$b_۶=۶۲/۱\,\frac{Ns}{m}$

مجموعه تیرهای موازی و اتصالات میانی:

$L=۵۰\ \text{m}\,,\ H=۰/۰۲L\,,\ W=۰/۵H\,,\ L_۱=۰/۳L\ ,$
$L_۲=۰/۴L\ ,$
$E=۲/۱\times۱۰^{۱۱}\,\frac{N}{m^۲}\,,\ \nu=۰/۳\,,\ \rho=۷۸۶۰\frac{kg}{m^۳}\ ,$
$M=M_s+m_{t۱}+m_{t۲}+m_{p۱}+m_{p۲}\ ,$
$k_{۱۱}=k\,,\ k_{۲۱}=۲k\,,\ k_{۳۱}=۳k\,,\ k_{۱۲}=۲k\ ,$
$k_{۲۲}=۴k\,,\ k_{۳۲}=۶k$

همچنین برای سادگی نمایش نتایج، پارامترهای جدیدی تعریف می‌شود:

$$\left(k_{c۱}=۰,k_{c۲}=۲/۵\times۱۰^۶\,,k_{c۳}=۵\times۱۰^۶\,,k_{c۴}=۱۰\times۱۰^۶\ \frac{N}{m}\right)$$

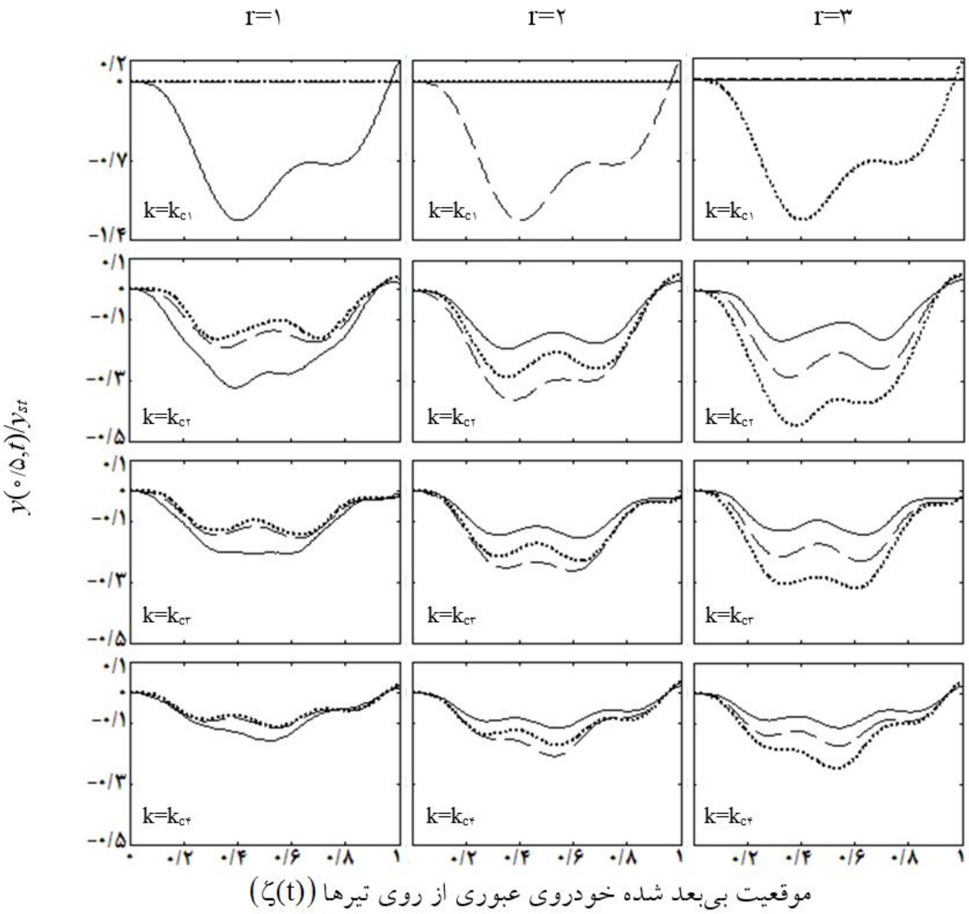
برای حل، در ابتدا باید یکسان بـودن بردارهـای ویـژه نرمـالیزه شده $\mathbf{K}_۱$ و $\mathbf{K}_۲$، برای دو ستون اتصالات میانی بررسی گـردد. از معادله (۳۰) رابطه بین ایـن دو مـاتریس بـه‌صـورت $\mathbf{K}_۲=۲\mathbf{K}_۱$ است، بنابراین بردارهای ویژه یکه شده این دو ماتریس برابرنـد و روش ارائه شده برای این مثال مناسب است.

۷-۱- بررسی پاسخ مجموعه تیرهای موازی

در این قسمت، جابه‌جایی نقاط میانی تیرها نسبت به جابه‌جایی ماکزیمم استاتیکی تیـر اویلـر برنـولی دو سـر مفصـل، بـی‌بعـد می‌شود:

$$Y_{st}=\frac{MgL^۳}{۴۸EI} \quad \rightarrow \quad y_{st}=\frac{MgL^۲}{۴۸EI} \qquad (۷۵)$$

سرعت بـار متحـرک نسـبت بـه سـرعت بحرانـی V_{cr} بـی‌بعـد می‌شود [۱۹]:



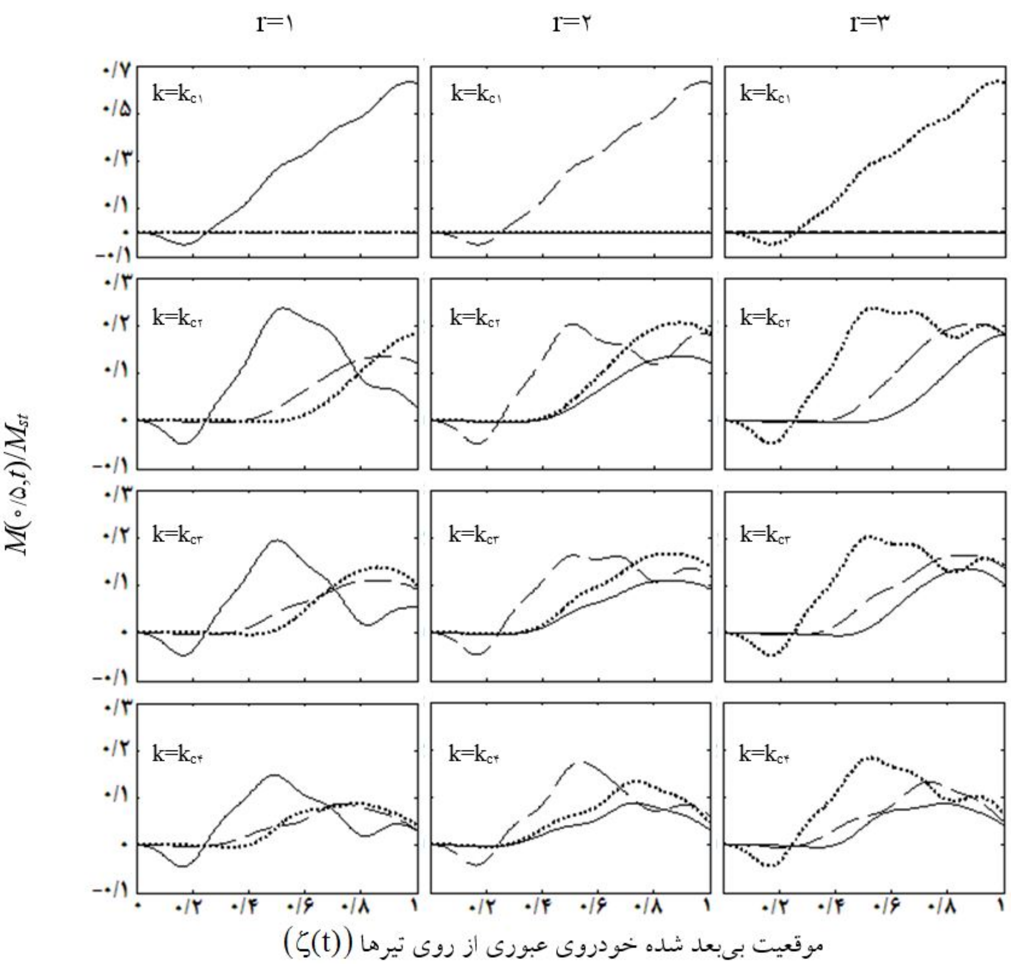
شکل ۳- تأثیر سختی اتصالات میانی بر جابه‌جایی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها برحسب موقعیت بی‌بعد شده خودرو، $V=0/25\,V_{cr}$، تیر۱ (——)، تیر۲ (– – –)، تیر۳ (.........)

$$V_{cr} = \frac{\omega_1 L}{\pi} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{m}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \tag{۷۶}$$

همچنین ممان خمشی تیرها نسبت به ماکزیمم ممان خمشی استاتیکی تیر اویلر برنولی دو سر مفصل که با رابطه (۷۷) بیان می‌شود، بی‌بعد می‌شود:

$$M_{st} = \frac{MgL}{2} \tag{۷۷}$$

شکل (۳)، جابه‌جایی تیرها را به‌ازای سرعت $V=0/25V_{cr}$ و مقادیر مختلف سختی اتصالات میانی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود در حالتی‌که $k = k_{c1} = 0$ و سختی اتصالات برابر صفر است، جابه‌جایی نقاط میانی تیرهایی که بار متحرک از روی آنها عبور می‌کند با یکدیگر برابر هستند. این نتیجه منطقی است، زیرا در این حالت مسأله به حل یک مجموعه تک تیری تبدیل می‌شود که تمام تیرها با یکدیگر مشابه هستند و اتصالی بین آنها وجود ندارد و سایر تیرهایی که بار از روی آنها عبور نمی‌کند ساکن باقی می‌مانند. با افزایش سختی اتصالات، جابه‌جایی نقطه میانی تیری که بار از روی آن عبور می‌کند کاهش می‌یابد. درحالی‌که در سایر تیرها برای مقادیر پایین سختی، افزایش سختی باعث افزایش جابه‌جایی و در مقادیر بالای سختی، به‌دلیل اتصال قوی مجموعه با زمین، باعث کاهش جابه‌جایی می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش در پارامتر r یعنی عبور بار از روی تیر بالاتر، ماکزیمم جابه‌جایی نقاط میانی مجموعه زیاد می‌شود.



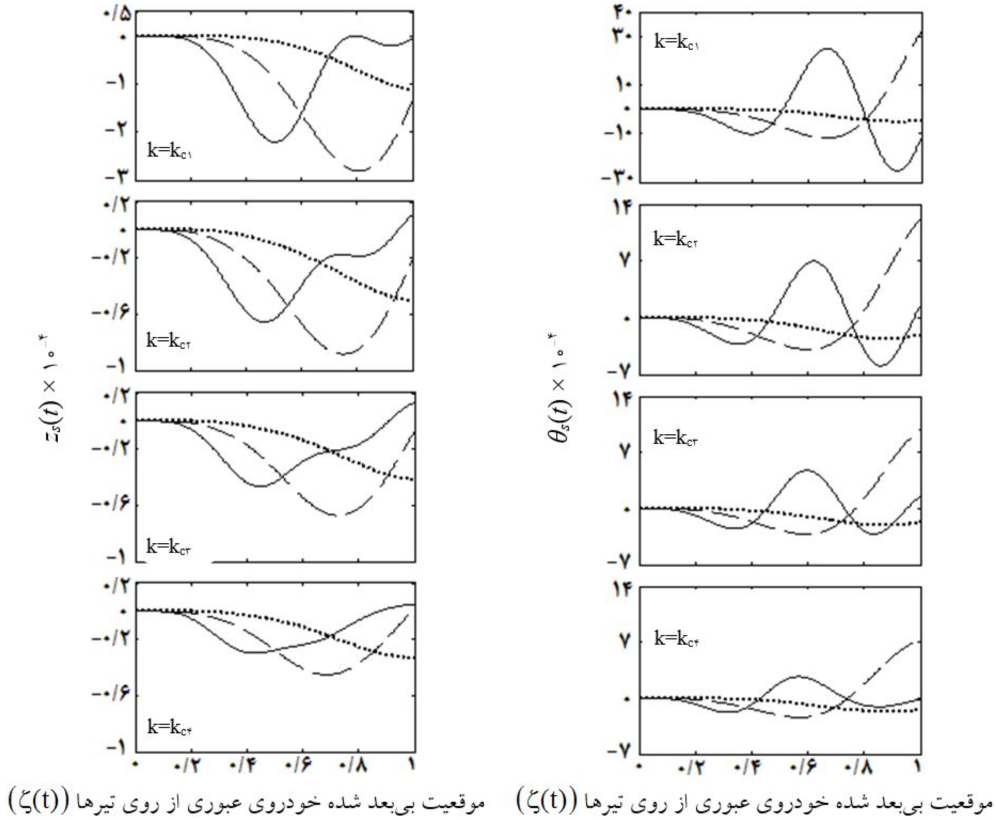
شکل ۴- تأثیر سختی اتصالات میانی بر ممان خمشی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها برحسب موقعیت بی‌بعد شده خودرو، $V=V_{cr}$، تیر۱ (——)، تیر۲ (– – –)، تیر۳ (.........)

به‌عبارت دیگر جابه‌جایی ماکزیمم مجموعه با عبور بار از روی تیر نزدیکتر به زمین کاهش می‌یابد.

در شکل (۴)، ممان خمشی مجموعه به‌ازای تغییر در سختی اتصالات میانی نمایش داده شده است. ماکزیمم ممان خمشی مجموعه مربوط به تیری است که بار از روی آن عبور می‌کند و با افزایش سختی، کاهش می‌یابد. در سایر تیرها با افزایش سختی، برای مقادیر بسیار پایین سختی، ماکزیمم ممان خمشی افزایش و برای مقادیر بالای آن، کاهش می‌یابد. در مجموعه تک تیری و سختی‌های بسیار پایین، ماکزیمم ممان خمشی نقاط میانی در انتهای تیر اتفاق می‌افتد و با افزایش سختی اتصالات، این نقاط به سمت چپ جابه‌جا می‌شوند. همچنین در شکل‌های (۳) و (۴) مشاهده می‌شود که مقادیر جابه‌جایی و ممان خمشی نقاط میانی در یک مجموعه چندتیری با اتصالات میانی، کمتر از یک تیر به تنهایی است. این امر می‌تواند به‌عنوان یک کاربرد در جاذب‌های ارتعاشی چندتیری و همچنین افزایش استحکام و مقاومت مجموعه مورد توجه قرار گیرد.

۷-۲- بررسی پاسخ سیستم شش درجه آزادی

در شکل (۵)، جابه‌جایی عمودی و دورانی مرکز جرم خودرو

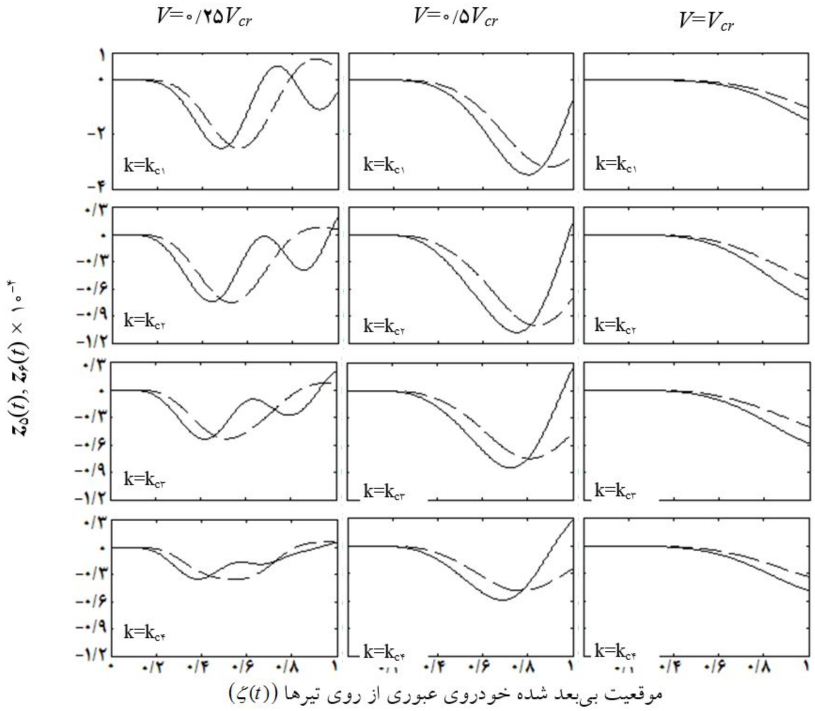


شکل ۵- تأثیر سرعت خودرو و سختی اتصالات میانی بر جابه‌جایی بی‌بعد شده عمودی (z_S) و دورانی (θ_s)، برحسب موقعیت بی‌بعد شده خودرو روی تیر دوم (r=۲)، به‌ازای سرعت‌های (——) $V=0/25V_{cr}$، (– – –) $V=0/5V_{cr}$ و (........) $V=V_{cr}$

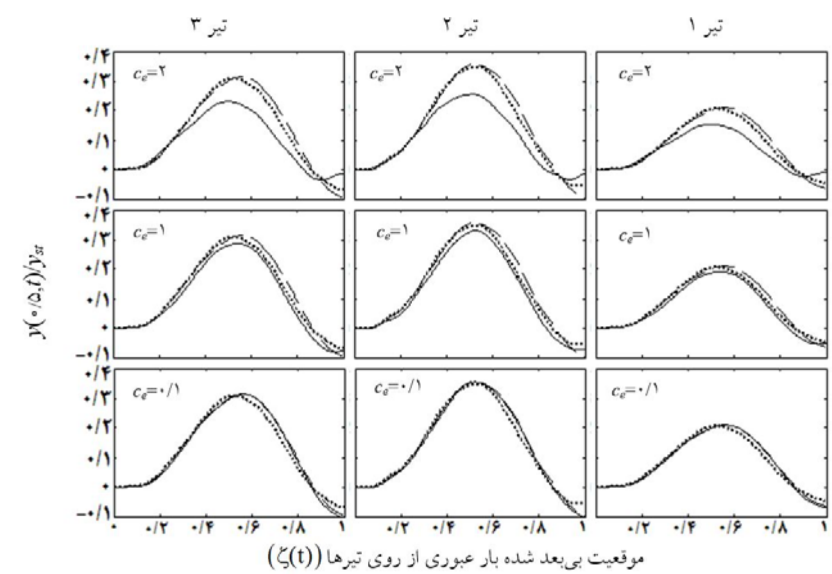
به ازای سرعت‌های مختلف بار متحرک و همچنین سختی‌های مختلف اتصالات میانی، نشان داده شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که جابه‌جایی‌های خودرو به‌ازای افزایش سختی اتصالات، کاهش می‌یابد؛ زیرا با افزایش سختی، جابه‌جایی تیری که بار از روی آن عبور می‌کند کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت، ماکزیمم جابه‌جایی به‌سمت راست و با افزایش سختی مقداری به سمت چپ مجموعه کشیده می‌شود. در یک مجموعه تک‌تیری، جابه‌جایی‌ها هم برای تیر و هم برای خودرو نسبت به یک مجموعه چندتیری با اتصالات میانی، بیشتر است. شکل (۶) جابه‌جایی‌های عمودی راننده و مسافر را به‌ازای افزایش سختی اتصالات و سرعت خودرو نشان می‌دهد. در این شکل نیز مشاهده می‌شود که برای یک تیر، جابه‌جایی‌ها بیشتر از چند تیر با اتصالات میانی است و با افزایش سختی اتصالات، جابه‌جایی راننده و مسافر کاهش می‌یابد. ماکزیمم جابه‌جایی راننده زودتر از مسافر رخ می‌دهد، زیرا راننده زودتر به روی تیرها وارد می‌شود. با افزایش سرعت بار، جابه‌جایی‌های ماکزیمم به‌سمت راست و با افزایش سختی، کمی به چپ کشیده می‌شوند.

۷-۳- اعتبارسنجی پاسخ مجموعه تحت عبور خودرو، جرم و نیرو

در این قسمت به‌منظور اعتبارسنجی، نتایج عددی با دو مقاله علمی مقایسه می‌شود. شکل (۷)، جابه‌جایی مجموعه را در سه حالت بار متحرک به‌ازای کاهش طول خودرو نشان می‌دهد، در حالی‌که سختی فنرها و استهلاک مستهلک کننده‌ها در

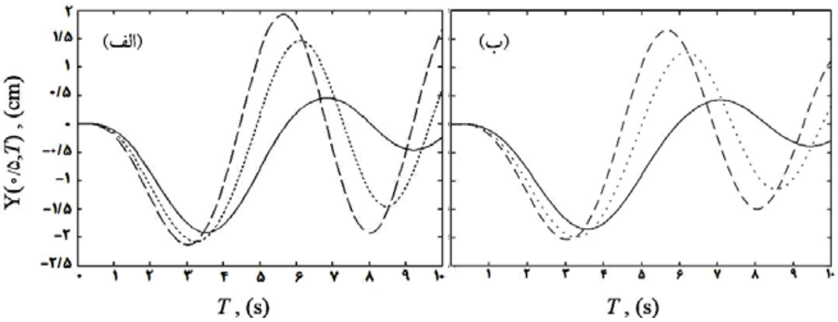


شکل ۶- تأثیر سرعت خودرو و سختی اتصالات بر جابه‌جایی عمودی بی‌بعد شده راننده و مسافر برحسب موقعیت بی‌بعد شده خودرو روی تیر دوم (r=2)، (—— , z_5) و (– – – , z_6)



شکل ۷- تأثیر کاهش طول خودرو بر جابه‌جایی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها برحسب موقعیت بی‌بعد شده بار عبوری از روی تیر دوم (r=2) با سرعت $V=0/5\ V_{cr}$، سختی اتصالات میانی $k=۲/۵\times۱۰^{۶}\ \frac{N}{m}$، مقدار سختی فنرها و استهلاک مستهلک کننده‌های خودرو بسیار زیاد (خودروی صلب) – عبور خودرو (——)، عبور جرم (– – –)، عبور نیرو [۱۵] (.........)،

$(d_{۱}=۱/۲۷۱\times c_e, d_{۲}=۱/۷۱۶\times c_e, e_{۱}=۰/۴۸۱\times c_e, e_{۲}=۱/۳۱۳\times c_e, L=۲۰, H=۰/۴, W=۰/۲m)$



شکل ۸- (الف) جابه‌جایی عمودی نقطه وسط مجموعه تک تیر تیموشنکو (k=۰) - (ب) جابه‌جایی عمودی نقطه وسط یک تیر اویلر برنولی [۱۰]، به‌ازای سرعت‌های (———) $V=۵۶\,\frac{km}{h}$، (.......) $V=۷۲\,\frac{km}{h}$ و (– – –) $V=۸۸\,\frac{km}{h}$،

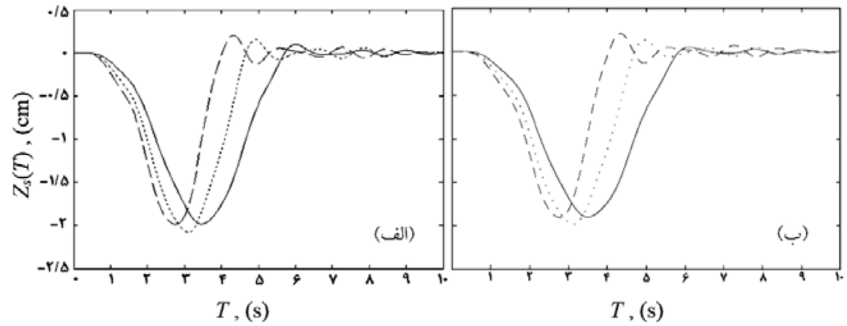
$$\left(L = ۱۰۰\,m\,,\ E = ۲۰۷\,Gpa\,,\ I = ۰/۱۷۴\,m^{۴}\,,\ H = ۱/۲۷۸\,m\,,\ W = ۱\,m\,,\ \rho = ۱۵۶۴۹/۴۵۳\,\frac{kg}{m^{۳}}\right)$$

خودرو مقدار بسیار زیادی درنظر گرفته شده است تا به‌صورت صلب عمل کند. در حالتی که طول خودرو زیاد است، اختلاف پاسخ بین دو حالت بار متمرکز و خودرو زیاد است و با کاهش طول خودرو، کاهش می‌یابد تا جایی‌که برای دو حالت عبور خودرو با طول بسیار کم و عبور جرم متمرکز جابه‌جاییتقریباً یکسان می‌شود؛ زیرا برای خودرویی با طول زیاد، ابعاد آن در برابر ابعاد تیر قابل توجه است، بنابراین نمی‌توان عبور خودرو را از روی تیرها به‌صورت بار متمرکز مدل کرد. ولی برای خودرویی با طول کم که ابعاد آن در برابر تیر قابل چشم‌پوشی است، می‌توان خودرو را مانند یک ذره فرض کرد و با توجه به اینکه خودرو به‌صورت صلب درنظر گرفته شده و جرم آن قابل توجه است، برای سادگی در حل معادلات پیچیده می‌توان عبور آن را به‌صورت جرم متحرک مدل کرد. در این شکل برای آنکه اختلاف پاسخ بین سه حالت بار متحرک بیشتر دیده شود طول تیر کوتاه و وزن خودرو ثابت درنظر گرفته شده است، در صورتی‌که اگر طول تیر زیاد و جرم خودرو کم باشد اختلاف پاسخ بین سه حالت بار متحرک بسیار جزئی است.

شکل‌های (۸) تا (۱۰) نمودارهای (الف)، حل مسأله حاضر را برای یک مجموعه تک تیری با تئوری تیموشنکو، به‌ازای سرعت‌های مختلف و زمان T=۱۰ ثانیه نشان می‌دهد. نمودارهای (ب)، استخراج شده از مرجع [۱۰] هستند که عبور خودرو را از روی یک تیر اویلر برنولی نشان می‌دهند.

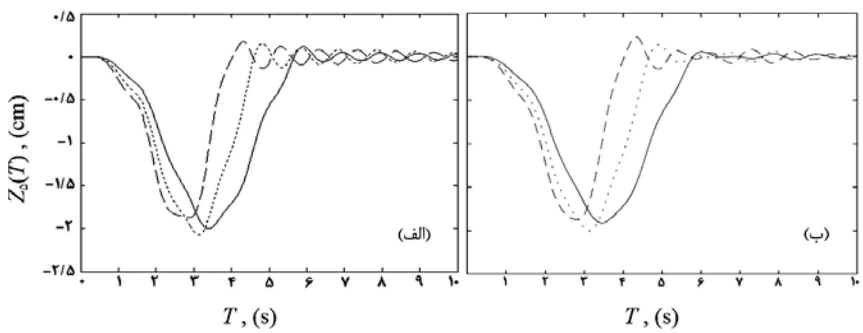
شکل (۸)، جابه‌جایی یک تیر را با دو تئوری مختلف، برحسب زمان نشان می‌دهد. با مقایسه نمودارهای (الف) و (ب)، یک اختلاف پاسخ کم در نقاط اکسترمم آنها دیده می‌شود. وجود این اختلاف پاسخ منطقی است، زیرا درنظر گرفتن تئوری اویلر برنولی در مرجع مذکور، تیر را سخت‌تر و جابه‌جایی را کمتر از تیر تیموشنکو نشان می‌دهد؛ اما ناچیز بودن این اختلاف پاسخ، به‌دلیل کوچک بودن ابعاد سطح مقطع تیر نسبت به طول آن است.

در شکل‌های (۹) و (۱۰) به‌ترتیب جابه‌جایی عمودی مرکز جرم خودرو و جابه‌جایی راننده برحسب زمان نشان داده شده است، که اختلاف پاسخ چندانی دیده نمی‌شود. مشاهده می‌شود که ماکزیمم جابه‌جایی‌های مربوط به خودروی عبوری از روی تیر اویلر برنولی کمتر از تیر تیموشنکو است، هر چند این اختلاف پاسخ ناچیز است. همچنین دیده می‌شود که به‌علت وجود مستهلک کننده‌ها پس از خروج کامل خودرو از روی تیر در حین حرکت، نمودارها به‌سمت نقطه تعادل خود میرا می‌شوند.



شکل ۹- (الف) جابه‌جایی عمودی مرکز جرم خـودرو، مجموعه تک تیر تیموشنکو (k=۰) - (ب) جابه‌جایی عمودی مرکز جرم خودرو، یک تیر اویلر برنولی [۱۰]، به‌ازای سرعت‌های (———) V=۵۶ $\frac{km}{h}$، (.......) V=۷۲ $\frac{km}{h}$ و (— — —) V=۸۸ $\frac{km}{h}$،

$$\left(L=۱۰۰\,m\,,\,E=۲۰۷\,Gpa\,,\,I=۰/۱۷۴\,m^۴\,,\,H=۱/۲۷۸\,m\,,\,W=۱\,m\,,\,\rho=۱۵۶۴۹/۴۵۳\,\frac{kg}{m^۳}\right)$$



شکل ۱۰- (الف) جابه‌جایی عمودی راننده، مجموعه تک تیر تیموشنکو (k=۰)- (ب) جابه‌جایی عمودی راننده، یک تیـر اویلر برنولی [۱۰]، به‌ازای سـرعت‌های (———) V=۵۶ $\frac{km}{h}$، (.......) V=۷۲ $\frac{km}{h}$ و (— — —) V=۸۸ $\frac{km}{h}$،

$$\left(L=۱۰۰\,m\,,\,E=۲۰۷\,Gpa\,,\,I=۰/۱۷۴\,m^۴\,,\,H=۱/۲۷۸\,m\,,\,W=۱\,m\,,\,\rho=۱۵۶۴۹/۴۵۳\,\frac{kg}{m^۳}\right)$$

۸- نتیجه‌گیری

ارتعاشات مجموعه‌ای از تیرهای تیموشنکوی موازی با اتصالات انعطاف‌پذیر میانی تحت عبور یک سیستم شش درجه آزادی دومحوره به‌عنوان مدلی برای یک خودرو مورد بررسی قرار گرفت. در تحلیل مسأله تعدادی معادلات دیفرانسیل حرکت و پیوستگی درهم‌گیر به‌دست آمد که برای جداسازی هم‌زمان آنها از یک تغییر متغیر خاص استفاده شد؛ بدین منظور، مقادیر سختی اتصالات میانی باید به‌گونه‌ای باشد که بردارهای ویژه یکه شده ماتریس‌های سختی به‌دست آمده برای هر ستون از اتصالات میانی یکسان گردد. این محدودیت باید قبل از شروع حل بررسی شود. مشاهده شد که جابه‌جایی‌ها در یک مجموعه چندتیری با اتصالات میانی کمتر از یک تیر به تنهایی است. همچنین جابه‌جایی و ممان خمشی ماکزیمم مربوط به تیری است که بار از روی آن عبور می‌کند که مقدار آن با افزایش سختی اتصالات میانی کاهش می‌یابد؛ اما در سایر تیرها با افزایش سختی اتصالات میانی، برای مقادیر بسیار پایین این سختی، مقدار بیشینه جابه‌جایی و ممان خمشی افزایش و برای مقادیر بالای سختی، کاهش می‌یابد.

همچنین مشاهده شد که جابه‌جایی‌های سیستم شش درجه آزادی نیز به‌ازای افزایش سختی اتصالات میانی، کاهش می‌یابد. بین دو حالت بار متمرکز یعنی نیرو و جرم متحرک و حالتی‌که خودرو دارای طول زیادی نسبت به تیر باشد، اختلاف پاسخ

زیادی وجود دارد و با کاهش طول خودرو، این اختلاف پاسخ نیز کاهش می‌یابد. اگر ابعاد خودرو در برابر ابعاد تیر قابل چشم‌پوشی نباشد آنگاه مدل کردن بار به‌صورت جرم یا نیروی متمرکز به‌جای خودرو مناسب نیست، ولی در صورتی‌که ابعاد خودرو کوچک و در برابر ابعاد تیر قابل چشم‌پوشی باشد، برای سادگی در حل معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر و پیچیده در حالت عبور خودرو، می‌توان بار را به‌صورت متمرکز در یک نقطه درنظر گرفت و آن را به‌صورت جرم متحرک مدل کرد. همچنین اگر طول تیر زیاد و جرم بار نسبت به تیر کم باشد، دو حالت نیرو و جرم متحرک تقریباً یکسان می‌شوند.

واژه‌نامه

1. versatile element
2. VBI element
3. heaviside

مراجع

1. Willis, R., "Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures", London, Stationary Office, 1949.
2. Mamandi, A., Kargarnovin, M. H., and Farsi, S., "An Investigation on Effects of Traveling Mass with Variable Velocity on Nonlinear Dynamic Response of an Inclined Timoshenko Beam with Different Boundary Conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, pp. 1694-1708, 2010.
3. Sharbati, E., and Szyszkowski, W., "A New FEM Approach for Analysis of Beams with Relative Movements of Masses", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 47, pp. 1047-1057, 2011.
4. Esmailzadeh, E., and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Beams Traversed by Uniform Partially Distributed Moving Masses", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 184, pp. 9-17, 1995.
5. Esmailzadeh, E., and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Timoshenko Beam Subjected to a Traveling Mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 199, pp. 615-628, 1997.
6. Eftekhar Azam, S., Mofid, M., and Afghani-Khoraskani, R., "Dynamic Response of Timoshenko Beam under Moving Mass", *Scientia Iranica Transactions A: Civil Engineering*, Vol. 20, pp. 50-56, 2013.
7. Lin, Y. H., and Tretheway, M. W., "Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, pp. 323-342, 1990.
8. Stancioiu, D., Ouyang, H., and Mottershead, J. E., "Vibration of a Continuous Beam with Multiple Elastic Supports Excited by a Moving Two-axle System with Separation", *Meccanica*, Vol. 44, pp. 293-303, 2009.
9. Wu, J. J., "Free Vibration Analysis of Beams Carrying a Number of Two-Degree-of-Freedom Spring-Damper-Mass Systems", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, pp. 363-381, 2004.
10. Esmailzadeh, E., and Jalili, N., "Vehicle-Passenger-Structure Interaction of Uniform Bridges Traversed by Moving Vehicles", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, pp. 611-635, 2003.
11. Lou, P., and Au, F. T. K., "Finite Element Formulae for Internal Forces of Bernoulli–Euler Beams under Moving Vehicles", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, pp. 1533-1552, 2013.
12. Yang, Y. B., and Wu, Y. S., "A Versatile Element for Analyzing Vehicle-Bridge Interaction Response", *Engineering Structures*, Vol. 23, pp. 452-469, 2001.
13. Vu, H. V., Ordonez, A. M., and Karnopp, B. H., "Vibration of a Double-beam System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, pp. 807-822, 2000.
14. Abu-Hilal, M., "Dynamic Response of a Double Euler-Bernoulli Beam due to a Moving Constant Load", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, pp. 477-491, 2006.
15. Ariaei, A., Ziaei-Rad, S., and Ghayour, M., "Transverse Vibration of a Multiple-Timoshenko Beam System with Intermediate Elastic Connections Due to a Moving Load", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, pp. 263-281, 2010.
16. Oniszczuk, Z., "Forced Transverse Vibrations of an Elastically Connected Complex Simply Supported Double-beam System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 264, pp. 273-286, 2003.
17. Stojanovic, V., Kozic, P., Pavlovic, R., and Janevski, G., "Effect of Rotary Inertia and Shear on Vibration and Buckling of a Double Beam System under

Compressive Axial Loading", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, pp. 1993-2005, 2011.

18. Dadfarnia, M., Jalili, N., and Esmailzadeh, E., "A Comparative Study of the Galerkin Approximation Utilized in the Timoshenko Beam Theory", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 280, pp. 1132-1142, 2005.

19. Fryba, L., "A Rough Assessment of Railway Bridges for High Speed Trains", *Journal of Engineering Structures*, Vol. 23, pp. 548-556, 2001.