

# ارتعاشات مجموعه تیرهای تیموشنکو با اتصالات میانی تحت عبور سیستم شش درجه آزادی دومحوره

سعید فروزنده و علیرضا آریایی\*  
گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۳/۰۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱۱/۲۱)

DOI: 10.18869/acadpub.jeme.35.2.24

**چکیده** - در این مقاله، ارتعاشات مجموعه‌ای از تیرهای تیموشنکوی موازی با اتصالات انعطاف‌پذیر میانی به تعداد دلخواه بررسی می‌شود. بار متحرک، یک خودرو است که توسط یک سیستم شش درجه آزادی دومحوره به صورت جرم-فنر-مستهلک کننده در حرکتی صفحه‌ای مدل می‌شود. جهت حل، روش جدیدی ارائه می‌شود که به کمک تغییر متغیری خاص، معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر جدا می‌شود؛ بدین منظور، باید ماتریس‌های سختی به دست آمده برای هر ستون از اتصالات میانی، بردارهای ویژه یکه شده یکسان داشته باشند. سپس به روش ماتریس انتقال، فرکانس‌ها و شکل مودهای تیرها و با به کارگیری تئوری آنالیز مودال، پاسخ اجباری سیستم تعیین می‌شود. جابه‌جایی خودرو، تیرها و ممان خمشی به‌ازای سختی‌ها و سرعت‌های مختلف به دست می‌آید و در نهایت اعتبار نتایج مورد سنجش قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: تیرهای تیموشنکوی موازی، اتصالات انعطاف‌پذیر میانی، سیستم شش درجه آزادی دومحوره، روش ماتریس انتقال.

## Vibration of Elastically Connected Multiple Timoshenko Beams under a Moving Six Degrees of Freedom System

S. Foroozande and A.R. Ariaei\*

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan

**Abstract:** *In this article, the vibration analysis of a set of parallel Timoshenko beams connected by intermediate flexible connections, with arbitrary numbers, is studied. The moving load is a vehicle, which is modeled by a two-axle six degrees of freedom system, as a mass-spring-damper system, in a plane motion. For the solution, a new method is proposed which uses a change of variables strategy to decouple the system of differential equations. For this purpose, the stiffness matrix obtained*

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: [ariaei@eng.ui.ac.ir](mailto:ariaei@eng.ui.ac.ir)

from each column of intermediate connections should have the same normalized eigenvectors. The displacements and the bending moments of the beams and the vehicle due to changes in the stiffness of connections and changes in speeds will be examined. Finally, the validity of the results are measured.

**Keywords:** Parallel Timoshenko beams, Intermediate flexible connections, Two-axle six degrees of freedom system, Transfer matrix method.

## فهرست علائم

تعداد تیرهای موازی	n	سطح مقطع تیر ( $m^2$ )	A
سرعت بار متحرک (m/s)	V	مدول الاستیسیته یانگ (Pa)	E
پهنای تیر (m)	W	مدول برشی (Pa)	G
موقعیت اتصال میانی زام (m)	$X_j$	ارتفاع تیر (m)	H
جابجایی عرضی بخش زام از تیر i ام (m)	$Y_{ij}$	ممان اینرسی سطح مقطع تیر ( $m^4$ )	I
جابجایی عمودی مرکز جرم خودرو (m)	$Z_s$	ممان اینرسی جرمی بدنه خودرو ( $kg.m^2$ )	J
جابجایی پیچشی بخش زام م از تیر i ام	$\Phi_{ij}, \phi_{ij}$	طول تیر (m)	L
جابجایی پیچشی مرکز جرم خودرو	$\Theta_s, \theta_s$	طول بخش زام تیر (m)	$L_j$
چگالی تیر ( $kg/m^3$ )	$\rho$	جرم بدنه خودرو (kg)	$M_s$
ضریب تصحیح برش	$\kappa$	جرم سرنشین خودرو (kg)	$m_p$
موقعیت بار متحرک (m)	$\xi$	جرم تایر خودرو (kg)	$m_t$
ضریب پواسون	$\nu$	تعداد اتصالات انعطاف‌پذیر میانی	m

### ۱- مقدمه

المان محدود بررسی کردند. اسماعیل‌زاده و قرشی [۴] از روش تفاضل محدود برای تخمین پاسخ ارتعاشی تیرهای اوایل برنولی تحت عبور جرم گسترده استفاده کردند؛ ایشان در مطالعه‌ای دیگر [۵] فرمول پیشنهادی خود را برای تیرهای تیموشنکو توسعه و نشان دادند عبور جرم گسترده منجر به جابه‌جایی‌های کمتری نسبت به عبور جرم نقطه‌ای می‌شود.

تحلیل رفتار ارتعاشی تیر تحت بارهای متحرک از نوع سیستم‌های جرم و فنر و سیستم‌های چند درجه آزادی دارای جایگاهی خاص در مقالات است. افتخار اعظم و همکاران [۶] ابتدا یک جرم را از روی یک تیر تیموشنکو عبور دادند و سپس نتایج را با حالتی که جرم و فنر یک درجه آزادی و یا یک نیرو از روی تیر عبور می‌کند، مقایسه کردند. لین و تریسوی [۷] یک سیستم جرم و فنر و مستهلک کننده عبوری از روی تیر را که در

بیش از یک قرن، سیستم‌های الاستیک تحت بارهای متحرک در علوم مختلفی مانند مهندسی عمران و هوا فضا مورد توجه بوده است و از نظر تاریخی برای اولین بار در طراحی پل‌های راه آهن و سپس در سایر زمینه‌های مهندسی حمل و نقل از جمله طراحی پل‌ها، بزرگراه‌ها، راه‌های کابلی، تونل‌ها و خطوط لوله‌ای مطرح شده است [۱].

تحلیل ارتعاشی عبور جرم از روی یک سیستم پیوسته به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای درهم‌گیر می‌انجامد که با ساده‌سازی آنها می‌توان به حالت نیروی متحرک رسید. ممندی و همکاران [۲] یک تیر تیموشنکو شیب‌دار را تحت عبور جرمی با سرعت متغیر برای شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. شربتی و سیزگوسکی [۳] عبور چند جرم را از روی یک تیر با روش

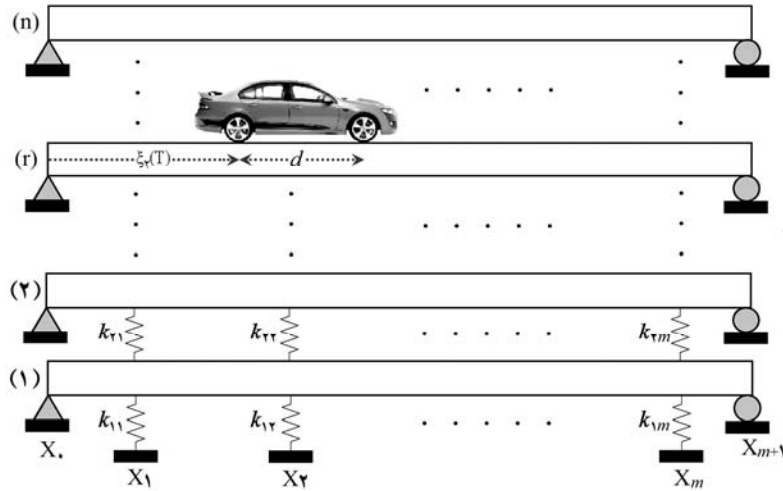
آن مستهلک کننده و فنر در جهت جابه‌جایی تیر عمل می‌کنند، در نظر گرفتند. دان استانشیو و همکاران [۸] ارتعاشات یک تیر اویلر برنولی را تحت عبور ساختار دو درجه آزادی دومی، با تکیه‌گاه‌های الاستیک، در نظر گرفتند. همچنین یک ساختار دو درجه آزادی دومی توسط وو [۹] انتخاب شد. او سیستم مذکور را با چهار جرم مؤثر جایگزین کرد و ارتعاشات آزاد آن را بر روی تیرها مورد بررسی قرار داد. اسماعیل‌زاده و جلیلی [۱۰] عبور یک وسیله نقلیه را از روی تیر اویلر برنولی تحلیل کردند. ایشان این ساختار را به صورت یک نیمه خودروی صفحه‌ای دو محوره، با شش درجه آزادی دومی، مدل کردند. آنها ابتدا معادلات حرکت را با روش انرژی به دست آوردند و سپس نتیجه را به یک سیستم دو درجه آزادی تک‌محوره تعمیم دادند. لوی و آیو [۱۱] عبور وسایل نقلیه چند درجه آزادی را از روی تیر اویلر برنولی بررسی کردند، مانند عبور قطار از روی راه آهن و پل‌های چند تکه که به روش المان محدود تحلیل شد. یانگ و وو [۱۲] یک سیستم چند درجه آزادی با چند محور جابه‌جایی عمودی را با به‌کارگیری نوعی المان چندمنظوره<sup>۱</sup> مانند المان وی بی آی<sup>۲</sup>، با استفاده از نیروهای تماسی بین تیر و وسیله نقلیه بررسی کردند.

تحلیل ارتعاشی دو تیر متصل به هم مورد توجه بعضی از محققین قرار گرفته است [۱۳ و ۱۴]. وو و همکارانش [۱۳] روشی را جهت حل دقیق یک سیستم دو تیری تحت بار هارمونیک ارائه کردند. در این مطالعه یک تیر به‌عنوان تیر اصلی تحت بارگذاری قرار می‌گیرد و تیر دیگر در نقش پشتیبان ظاهر می‌شود که با یک بستر ویسکوالاستیک به تیر اصلی اتصال می‌یابد. ابوهلال [۱۴] پاسخ دینامیکی سیستمی مشابه با مرجع [۱۳] را تحت عبور نیروی ثابتی از روی آن بررسی کرد. آنها در مطالعه خود فرض کردند که هر دو تیر در سیستم دو تیری مورد بررسی از نظر ویژگی‌های هندسی و شرایط مرزی مشابه هستند. آریایی و همکاران [۱۵] یک سیستم از تیرهای تیموشنکو را به تعداد دلخواه در نظر گرفتند که توسط اتصالاتی الاستیک به یکدیگر متصل شده‌اند و نیرویی متحرک از روی آنها عبور می‌کند. آنها پاسخ سیستم را برای سختی متفاوت اتصالات و سرعت‌های مختلف بررسی کردند.

در کارهای گذشته، از دو تیر اویلر برنولی تحت عبور نیرو استفاده شده است که فنرها نه به صورت جدا از هم بلکه به شکل بستری الاستیک بین تیرها قرار داشتند [۱۳، ۱۴ و ۱۶] و یا مجموعه‌ای از تیرهای موازی بررسی شده است که در آن با فرض عبور نیرو، معادلات به‌راحتی از هم جدا می‌شوند [۱۵]. در این مقاله ضمن در نظر گرفتن تئوری تیموشنکو، تعداد تیرها و اتصالات میانی دلخواه است و بار متحرک از نوع سیستم شش درجه آزادی دومی در نظر گرفته می‌شود. درجات آزادی این سیستم شامل جابه‌جایی عمودی و دورانی مرکز جرم، جابه‌جایی مرکز تاپرهای جلو و عقب و همچنین جابه‌جایی سرنشین‌های جلو و عقب خودرو است. این سیستم با دو نقطه روی تیر در تماس است که نادیده گرفتن فاصله بین این دو نقطه تماس و مدل کردن بار به صورت متمرکز در یک نقطه مانند نیروی متحرک، در بسیاری از مسائل منجر به خطای زیادی در پاسخ مسئله می‌شود؛ به خصوص مسائلی که در آنها طول تیر کوتاه یا فاصله بین دو نقطه تماس زیاد باشد. در این مسئله به دلیل وجود اتصالات میانی و  $n$  تیر تیموشنکو،  $2n$  معادله دیفرانسیل پاره‌ای در هم گیر وجود دارد که به همراه معادلات حرکت سیستم شش درجه آزادی و معادلات پیوستگی مجموعه، دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل در هم گیر مرتبه دوم را تشکیل می‌دهند. در اینجا، ابتدا از تغییر متغیر خاصی جهت جدا کردن هم‌زمان معادلات حرکت و پیوستگی استفاده می‌شود. با اعمال این تغییر متغیر، معادلاتی به دست می‌آید که هر جفت از آنها مربوط به یک تیر تیموشنکو است. سپس در تحلیل نیرویی، از فرم ماتریسی برای جدا کردن دوباره معادلات در هم گیر استفاده می‌شود. در حل عددی، تأثیر عوامل گوناگونی مثل سختی اتصالات میانی، سرعت بار متحرک و طول خودرو بررسی می‌شود. از جمله کاربردهای سیستم‌های چند تیری، استفاده از آنها در جذب‌کننده‌های ارتعاشی و افزایش استحکام مجموعه است [۱۶ و ۱۷].

## ۲- معادلات حرکت

هر تیر در شکل (۱) به طول  $L$  و دارای  $m$  اتصال انعطاف‌پذیر



شکل ۱- مجموعه‌ای از تیرهای موازی با اتصالات میانی تحت عبور خودرو

$$EI \frac{\partial^4 \Phi_{ij}}{\partial X^4} + \kappa AG \left( \frac{\partial Y_{ij}}{\partial X} - \Phi_{ij} \right) - \rho I \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial T^2} = 0 \quad (1-b)$$

$X_{(j-1)} < X < X_j$

در این معادلات  $\rho$  چگالی،  $I$  ممان اینرسی سطح مقطع حول محور عمود بر صفحه و عبور کننده از محل تار خنثی،  $A$  سطح مقطع،  $E$  مدول الاستیسیته یانگ،  $G$  مدول برشی و  $\kappa$  ضریب تصحیح برش در تئوری تیموشنکو است که به صورت تابعی از سطح مقطع و ضریب پواسون  $\nu$  بیان می‌شود. همچنین  $\delta_{ij}$  نماد دلتای کرونیکر،  $\delta(X - \xi_r(T))$  تابع دلتای دیراک و  $\xi_r(T)$  و  $\xi_l(T)$  به ترتیب موقعیت‌های دو محور جابه‌جایی عمودی یا نقاط تماس تایرهای جلو و عقب خودرو روی تیر است که برحسب زمان  $T$  تغییر می‌کنند.

$$\xi_r(T) = \xi_l(T) - d \quad , \quad d = d_1 + d_2 \quad (2)$$

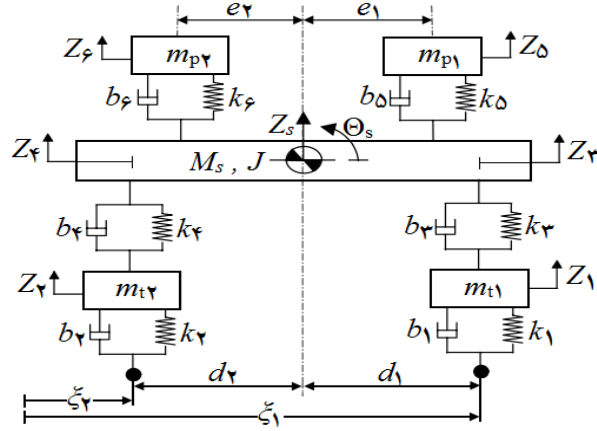
در این معادله،  $d$  فاصله بین دو نقطه تماس سیستم با تیر و  $d_1$  و  $d_2$  به ترتیب فاصله نقاط تماس جلو و عقب تا مرکز جرم سیستم شش درجه آزادی است.

در معادلات (۱)، پارامتر  $\varepsilon_1$  بیانگر حضور یا عدم حضور محور جابه‌جایی اول و  $\varepsilon_2$  بیانگر حضور یا عدم حضور محور دوم روی تیر است که می‌توان آن را به کمک تابع هویساید<sup>۳</sup> نشان داد [۱۰]:

میانی در موقعیت‌های  $0 < X_1 < X_2 < \dots < X_m < L$  است. جابه‌جایی عرضی و زاویه‌ای تیر  $i$  ام در بازه  $X_{j-1} \leq X \leq X_j$  به ترتیب با  $Y_{ij}(X, T)$  و  $\Phi_{ij}(X, T)$  نشان داده می‌شود که در آن اندیس  $j = 1, 2, \dots, m+1$  به بخش  $j$  ام تیر اشاره دارد.

در شکل (۲)، خودروی عبوری از روی مجموعه تیرها با یک سیستم شش درجه آزادی دوماحوره به صورت جرم-فنر-مستهلک‌کننده، در صفحه حرکت مجموعه مدل شده است. در این شکل، درجات آزادی خودرو عبارتند از:  $Z_5(T)$  و  $\Theta_5(T)$  به ترتیب جابه‌جایی عمودی و دورانی مرکز جرم خودرو،  $Z_4(T)$  و  $Z_1(T)$  به ترتیب جابه‌جایی عمودی مرکز تایرهای جلو و عقب و  $Z_6(T)$  و  $Z_3(T)$  به ترتیب جابه‌جایی عمودی سرنشین جلو (راننده) و سرنشین عقب (مسافر). همچنین به منظور ساده شدن شکل معادلات حرکت، پارامترهای  $Z_4(T)$  و  $Z_3(T)$  به ترتیب به عنوان جابه‌جایی عمودی جلو و جابه‌جایی عمودی عقب بدنه خودرو در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت هر بخش از تیر تیموشنکوی  $i$  ام برای عبور خودرو از روی تیر  $i$  ام عبارتند از:

$$\rho A \frac{\partial^4 Y_{ij}}{\partial T^4} - \kappa AG \left( \frac{\partial Y_{ij}}{\partial X} - \Phi_{ij} \right) = [P_1(T)\delta(X - \xi_l(T))\varepsilon_1 + P_2(T)\delta(X - \xi_r(T))\varepsilon_2] \delta_{ij} \quad (1-f)$$



شکل ۲- مدل صفحه‌ای خودرو، سیستم شش درجه آزادی دوماحوره جرم- فنر- مستهلک کننده

معادلات (۶ و ۷) تعریف می‌شوند:

$$m_1 = m_{t1} + \frac{(d_r + e_1)}{d} m_{p1} + \frac{(d_r - e_r)}{d} m_{p2} + \frac{d_r}{d} M_s \quad (6)$$

$$m_r = m_{t2} + \frac{(d_l - e_l)}{d} m_{p1} + \frac{(d_l + e_r)}{d} m_{p2} + \frac{d_l}{d} M_s \quad (7)$$

در این معادلات،  $m_{t1}$  و  $m_{t2}$  به ترتیب جرم تایرهای جلو و عقب و  $m_{p1}$  و  $m_{p2}$  به ترتیب جرم سرشین جلو (راننده) و سرشین عقب (مسافر) است. جرم بدنه خودرو (بدون تایرها و سرشین‌ها) با  $M_s$  و ممان اینرسی جرمی آن حول محور عمود بر صفحه در مرکز جرم خودرو با  $J$  نشان داده شده است. همچنین پارامترهای  $e_1$  و  $e_2$  نیز به ترتیب فاصله راننده و مسافر تا مرکز جرم خودرو است.

پس از بیان معادلات حرکت مجموعه تیرهای موازی، اینک معادلات حرکت سیستم شش درجه آزادی در حال عبور از روی تیر  $r$  ام به صورت معادلات (۸)، (۹) و (۱۰) بیان می‌شود:

$$\begin{cases} 0 \leq T < T_s & \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_r = 0 \\ T_s \leq T < T_m & \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_r = 1 \\ T_m \leq T < T_e & \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_r = 1 \\ T_e \leq T & \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_r = 0 \end{cases} \quad (3)$$

که  $T_s$  معرف لحظه ورود محور دوم به روی تیر،  $T_m$  لحظه خروج

محور اول و  $T_e$  لحظه خروج محور دوم از روی تیر است.

نیروهای بین بار متحرک و تیر در معادله (۱- الف) به صورت پارامترهای  $P_r(T)$  و  $P_l(T)$  در نظر گرفته می‌شود که به مدل تحلیلی مسأله بستگی دارد و عبارت است از:

$$P_l(T) = -\left\{ k_1 [Y_{rj}(\xi_1(T), T) \varepsilon_1 - Z_1(T)] + b_1 [\dot{Y}_{rj}(\xi_1(T), T) \varepsilon_1 - \dot{Z}_1(T)] + m_1 g \right\} \quad (4)$$

$$P_r(T) = -\left\{ k_r [Y_{rj}(\xi_r(T), T) \varepsilon_r - Z_r(T)] + b_r [\dot{Y}_{rj}(\xi_r(T), T) \varepsilon_r - \dot{Z}_r(T)] + m_r g \right\} \quad (5)$$

در معادلات (۴) و (۵)، پارامترهای  $m_1$  و  $m_2$  به صورت

$$\frac{M_s}{d} (d_r \ddot{Z}_r + d_l \ddot{Z}_l) = k_\phi (Z_\phi(T) - Z_r(T)) + b_\phi (\dot{Z}_\phi(T) - \dot{Z}_r(T)) + k_\delta (Z_\delta(T) - Z_r(T)) + b_\delta (\dot{Z}_\delta(T) - \dot{Z}_r(T)) - k_\phi (Z_\phi(T) - Z_r(T)) - b_\phi (\dot{Z}_\phi(T) - \dot{Z}_r(T)) - k_r (Z_r(T) - Z_l(T)) - b_r (\dot{Z}_r(T) - \dot{Z}_l(T)) \quad (8-الف)$$

$$\frac{J}{d} (\ddot{Z}_r - \ddot{Z}_l) = [k_\delta (Z_\delta(T) - Z_r(T)) + b_\delta (\dot{Z}_\delta(T) - \dot{Z}_r(T))] e_1 - [k_\phi (Z_\phi(T) - Z_r(T)) + b_\phi (\dot{Z}_\phi(T) - \dot{Z}_r(T))] e_r - [k_r (Z_r(T) - Z_l(T)) + b_r (\dot{Z}_r(T) - \dot{Z}_l(T))] d_1 + [k_\phi (Z_\phi(T) - Z_r(T)) + b_\phi (\dot{Z}_\phi(T) - \dot{Z}_r(T))] d_r \quad (8-ب)$$

و معادلات حرکت عمودی تایرهای جلو و عقب خودرو عبارتند از:

$$m_{i1}\ddot{Z}_1(T) = k_r (Z_r(T) - Z_1(T)) + b_r (\dot{Z}_r(T) - \dot{Z}_1(T)) - k_1 [Z_1(T) - Y_{ij}(\xi_1(T), T)\varepsilon_1] - b_1 [\dot{Z}_1(T) - \dot{Y}_{ij}(\xi_1(T), T)\varepsilon_1] \quad (9-الف)$$

$$m_{i2}\ddot{Z}_r(T) = k_r (Z_r(T) - Z_r(T)) + b_r (\dot{Z}_r(T) - \dot{Z}_r(T)) - k_r [Z_r(T) - Y_{ij}(\xi_r(T), T)\varepsilon_r] - b_r [\dot{Z}_r(T) - \dot{Y}_{ij}(\xi_r(T), T)\varepsilon_r] \quad (9-ب)$$

$$\begin{aligned} & [y'_{i(j+1)}(x_j^+, t) - \phi_{i(j+1)}(x_j^+, t)] - [y'_{ij}(x_j^-, t) - \phi_{ij}(x_j^-, t)] \\ &= \frac{L}{\kappa AG} \left\{ k_{ij} [y_{ij}(x_j^-, t) - y_{(i-1)j}(x_j^-, t)] \right. \\ & \left. + k_{(i+1)j} [y_{ij}(x_j^-, t) - y_{(i+1)j}(x_j^-, t)] \right\} \quad (13-د) \end{aligned}$$

در این معادلات،  $\phi_{ij}(x, t)$  جابجایی پیچشی بخش  $j$ ام از تیر  $i$ ام را بر حسب متغیرهای جدید نشان می‌دهد. حال با استفاده از رابطه (۱۲)، می‌توان معادلات (۱) را بر حسب متغیرهای جدید بیان کرد:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial t^2} - \frac{\kappa AG}{L} \left( \frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x} \right) \\ = \frac{1}{L} [P_i(t)\delta(x - \zeta_1(t))\varepsilon_1 + P_r(t)\delta(x - \zeta_r(t))\varepsilon_r] \delta_{ir} \quad (14-الف) \end{aligned}$$

$$\frac{EI}{L^3} \frac{\partial^3 \phi_{ij}}{\partial x^3} + \frac{\kappa AG}{L} \left( \frac{\partial y_{ij}}{\partial x} - \phi_{ij} \right) - \frac{\rho I}{L^3} \frac{\partial^3 \phi_{ij}}{\partial t^3} = 0, \quad x_{(j-1)} < x < x_j \quad (14-ب)$$

که در آن، معادلات (۴) و (۵) نیز بر حسب متغیرهای جدید عبارتند از:

$$\begin{aligned} P_i(t) = -L \left\{ k_1 [y_{ij}(\zeta_1(t), t)\varepsilon_1 - z_1(t)] \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{L}}{L} b_1 [\dot{y}_{ij}(\zeta_1(t), t)\varepsilon_1 - \dot{z}_1(t)] + \frac{m_i g}{L} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_r(t) = -L \left\{ k_r [y_{ij}(\zeta_r(t), t)\varepsilon_r - z_r(t)] \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{L}}{L} b_r [\dot{y}_{ij}(\zeta_r(t), t)\varepsilon_r - \dot{z}_r(t)] + \frac{m_r g}{L} \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

همچنین برای معادلات (۸)، (۹) و (۱۰) می‌توان نوشت:

همچنین معادلات حرکت عمودی راننده و مسافر خودرو نیز عبارتند از:

$$m_{p1}\ddot{Z}_\delta(T) = -k_\delta (Z_\delta(T) - Z_r(T)) - b_\delta (\dot{Z}_\delta(T) - \dot{Z}_r(T)) \quad (10-الف)$$

$$m_{p2}\ddot{Z}_\varepsilon(T) = -k_\varepsilon (Z_\varepsilon(T) - Z_r(T)) - b_\varepsilon (\dot{Z}_\varepsilon(T) - \dot{Z}_r(T)) \quad (10-ب)$$

می‌توان تبدیل (۱۱) را به منظور سادگی در ارائه معادلات بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix} Z_r(T) \\ Z_\varepsilon(T) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & -d_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_s(T) \\ \Theta_s(T) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

### ۳- مدل کردن اتصالات انعطاف پذیر میانی، بی‌بعدسازی

#### متغیرها

در این بخش، به منظور بی‌بعدسازی مکانی متغیرها و مقایسه نتایج عددی با مرجع [۱۵]، متغیرهای جدیدی تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} t &= \frac{T}{\sqrt{L}}, \quad v = \frac{V}{\sqrt{L}}, \quad y_{ij} = \frac{Y_{ij}}{L}, \\ x_j &= \frac{X_j}{L}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad l_j = \frac{L_j}{L}, \quad z_s = \frac{Z_s}{L}, \\ \zeta_R &= \frac{\xi_R}{L} \quad R=1,2, \quad z_k = \frac{Z_k}{L} \quad k=1,\dots,6 \quad (12) \end{aligned}$$

وجود اتصالات میانی منجر به ناپیوستگی نیروی برشی در محل آنها می‌شود. شرایط پیوستگی پس از بی‌بعدسازی، با در نظر

گرفتن  $j=1,2,\dots,m$  و  $i=1,2,\dots,n$  عبارت است از:

$$y_{i(j+1)}(x_j^+, t) = y_{ij}(x_j^-, t) \quad (13-الف)$$

$$\phi_{i(j+1)}(x_j^+, t) = \phi_{ij}(x_j^-, t) \quad (13-ب)$$

$$\phi'_{i(j+1)}(x_j^+, t) = \phi'_{ij}(x_j^-, t) \quad (13-ج)$$

$$\frac{M_s}{Ld} (d_r \ddot{z}_r(t) + d_r \dot{z}_r(t)) = [k_\varphi (z_\varphi - z_r) + k_\delta (z_\delta - z_r) - k_\varphi (z_r - z_r) - k_\varphi (z_r - z_1)]$$

$$+ \frac{\sqrt{L}}{L} [b_\varphi (\dot{z}_\varphi - \dot{z}_r) + b_\delta (\dot{z}_\delta - \dot{z}_r) - b_\varphi (\dot{z}_r - \dot{z}_r) - b_\varphi (\dot{z}_r - \dot{z}_1)] \quad (17-الف)$$

$$\frac{J}{Ld} (\ddot{z}_r(t) - \ddot{z}_\varphi(t)) = [k_\delta (z_\delta - z_r) e_1 - k_\varphi (z_\varphi - z_r) e_r - k_\varphi (z_r - z_1) d_1 + k_\varphi (z_r - z_r) d_r]$$

$$+ \frac{\sqrt{L}}{L} [b_\delta (\dot{z}_\delta - \dot{z}_r) e_1 - b_\varphi (\dot{z}_\varphi - \dot{z}_r) e_r - b_\varphi (\dot{z}_r - \dot{z}_1) d_1 + b_\varphi (\dot{z}_\varphi - \dot{z}_r) d_r] \quad (17-ب)$$

ارتعاشات آزاد آن استفاده کرد. با در نظر گرفتن  $p=1, 2, \dots, n$ ، متغیرهای جدید تعریف می شود [15]:

$$u_p(x, t) = \sum_{i=1}^n c_{pi} y_i(x, t), \theta_p(x, t) = \sum_{i=1}^n c_{pi} \phi_i(x, t) \quad (21)$$

معادلات (21) به فرم ماتریسی (22) بیان می شود:

$$U = CY \rightarrow Y = C^{-1}U = \bar{C}U, \quad \Theta = C\Phi \rightarrow \Phi = C^{-1}\Theta = \bar{C}\Phi \quad (22)$$

که در آن، ماتریس‌ها و بردارها عبارتند از:

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T, \quad Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T,$$

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T, \quad \Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = C^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \dots & \bar{c}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_{n1} & \dots & \bar{c}_{nn} \end{bmatrix} \quad (23)$$

در متغیرهای جدید، ضرایب  $c_{pi}$  را باید طوری تعیین کرد که معادلات از هم جدا شوند. با جایگزینی معادلات (21) در (14)، (15) و (16) می توان نوشت:

$$\rho A \frac{\partial^2 u_{pj}}{\partial t^2} - \frac{\kappa AG}{L} \left( \frac{\partial^2 u_{pj}}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_{pj}}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{c_{pr}}{L} [P_r(t) \delta(x - \zeta_r(t)) \varepsilon_1 + P_r(t) \delta(x - \zeta_r(t)) \varepsilon_r]$$

(24-الف)

$$\frac{EI}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_{pj}}{\partial x^2} + \frac{\kappa AG}{L} \left( \frac{\partial u_{pj}}{\partial x} - \theta_{pj} \right) - \frac{\rho I}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_{pj}}{\partial t^2} = 0, \quad x_{(j-1)} < x < x_j$$

(24-ب)

$$P_r(t) = -L \left\{ k_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} u_{pj}(\zeta_r(t), t) - z_r(t) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{L}}{L} b_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \dot{u}_{pj}(\zeta_r(t), t) - \dot{z}_r(t) \right] + \frac{m_r g}{L} \right\} \quad (25)$$

$$\frac{m_{t1}}{L} \ddot{z}_1 = [k_r (z_r - z_1) + k_1 [y_{rj}(\zeta_1(t), t) \varepsilon_1 - z_1]]$$

$$+ \frac{\sqrt{L}}{L} [b_r (\dot{z}_r - \dot{z}_1) + b_1 [\dot{y}_{rj}(\zeta_1(t), t) \varepsilon_1 - \dot{z}_1]] \quad (18-الف)$$

$$\frac{m_{tr}}{L} \ddot{z}_r = [k_\varphi (z_\varphi - z_r) + k_r [y_{rj}(\zeta_r(t), t) \varepsilon_r - z_r]]$$

$$+ \frac{\sqrt{L}}{L} [b_\varphi (\dot{z}_\varphi - \dot{z}_r) + b_r [\dot{y}_{rj}(\zeta_r(t), t) \varepsilon_r - \dot{z}_r]] \quad (18-ب)$$

$$\frac{m_{p1}}{L} \ddot{z}_\delta(t) = -k_\delta (z_\delta(t) - z_r(t)) - \frac{\sqrt{L}}{L} b_\delta (\dot{z}_\delta(t) - \dot{z}_r(t)) \quad (19-الف)$$

$$\frac{m_{pr}}{L} \ddot{z}_\varphi(t) = -k_\varphi (z_\varphi(t) - z_r(t)) - \frac{\sqrt{L}}{L} b_\varphi (\dot{z}_\varphi(t) - \dot{z}_r(t)) \quad (19-ب)$$

و در نهایت برای رابطه (11)، معادله (20) به دست می آید:

$$\begin{Bmatrix} z_s(t) \\ \theta_s(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} d_r & d_1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_r(t) \\ z_\varphi(t) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

که در این معادله،  $Z_s$  و  $\theta_s$  به ترتیب نشان دهنده جابجایی عمودی و پیچشی مرکز جرم خودرو بر حسب متغیرهای جدید است.

#### 4- جداسازی معادلات دیفرانسیل درهم گیر، تعیین

##### مقادیر و توابع ویژه

به طور کلی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل درهم گیر به راحتی امکان پذیر نیست، اما با یک تغییر متغیر مناسب می توان طرف چپ معادلات را از هم جدا و از تحلیل مودال برای بررسی

$$\theta_{p(j+1)}(x_j^+, t) = \theta_{pj}(x_j^-, t) \quad (ب-۲۸)$$

$$\theta'_{p(j+1)}(x_j^+, t) = \theta'_{pj}(x_j^-, t) \quad (ج-۲۸)$$

$$\begin{aligned} & \left[ u'_{p(j+1)}(x_j^+, t) - \theta_{p(j+1)}(x_j^+, t) \right] - \left[ u'_{pj}(x_j^-, t) - \theta_{pj}(x_j^-, t) \right] = \\ & \frac{L}{\kappa AG} \sum_{i=1}^n c_{pi} \left( \begin{array}{l} k_{ij} [y_{ij}(x_j^-, t) - y_{(i-1)j}(x_j^-, t)] \\ + k_{(i+1)j} [y_{ij}(x_j^-, t) - y_{(i+1)j}(x_j^-, t)] \end{array} \right) \\ & = \beta_{pj} u_{pj}(x_j^-, t) \quad (د-۲۸) \end{aligned}$$

طرف راست معادله (۲۸-د)، برای جدا شدن معادلات در هم گیر و به دست آمدن ضرایب، بر حسب بیان شده است. اینک، فرم جدیدی از معادلات با متغیرهای جدید به دست آمده است. با مرتب کردن معادلات (۲۸)، یک مسأله مقدار ویژه به دست می آید که برای داشتن حل غیربدیهی لازم است:

$$\mathbf{K}_j \begin{Bmatrix} c_{p1} \\ c_{p2} \\ \vdots \\ c_{pn} \end{Bmatrix} = \frac{\kappa AG}{L} \beta_{pj} \begin{Bmatrix} c_{p1} \\ c_{p2} \\ \vdots \\ c_{pn} \end{Bmatrix} = \mu_{pj} \begin{Bmatrix} c_{p1} \\ c_{p2} \\ \vdots \\ c_{pn} \end{Bmatrix} \rightarrow \det(\mathbf{K}_j - \mu_{pj} \mathbf{I}) = 0 \quad (۲۹)$$

در این رابطه، ماتریس سختی  $\mathbf{K}_j$  برابر است با:

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} k_{1j} + k_{\gamma j} & -k_{\gamma j} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -k_{\gamma j} & k_{\gamma j} + k_{\gamma j} & -k_{\gamma j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_{\gamma j} & k_{\gamma j} + k_{\gamma j} & -k_{\gamma j} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -k_{(n-1)j} & k_{(n-1)j} + k_{nj} & -k_{nj} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -k_{nj} & k_{nj} \end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

شوند و این یکی از شرایط جداسازی معادلات و استفاده از تغییر متغیر به کارگیری شده در معادلات (۲۱) برای حل این مسأله است؛ این مفهوم باید قبل از شروع حل بررسی شود.

در ادامه برای تعیین مقادیر و توابع ویژه در تحلیل ارتعاشات

$$\begin{aligned} P_r(t) = -L \left\{ k_{\gamma} \left[ \varepsilon_{\gamma} \sum_{p=1}^n \bar{c}_{\gamma p} u_{pj}(\zeta_{\gamma}(t), t) - z_{\gamma}(t) \right] \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{L}}{L} b_{\gamma} \left[ \varepsilon_{\gamma} \sum_{p=1}^n \bar{c}_{\gamma p} \dot{u}_{pj}(\zeta_{\gamma}(t), t) - \dot{z}_{\gamma}(t) \right] + \frac{m_{\gamma} g}{L} \right\} \quad (۲۶) \end{aligned}$$

بر حسب متغیرهای جدید، فرم معادلات (۱۷) و (۱۹) بدون تغییر باقی می ماند ولی برای معادلات (۱۸) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{m_{\gamma}}{L} \ddot{z}_{\gamma}(t) = & \left[ k_{\gamma} (z_{\gamma} - z_{\gamma_1}) + k_{\gamma} \left[ \varepsilon_{\gamma} \sum_{p=1}^n \bar{c}_{\gamma p} u_{pj}(\zeta_{\gamma}(t), t) - z_{\gamma_1} \right] \right] \\ & + \frac{\sqrt{L}}{L} \left[ b_{\gamma} (\dot{z}_{\gamma} - \dot{z}_{\gamma_1}) + b_{\gamma} \left[ \varepsilon_{\gamma} \sum_{p=1}^n \bar{c}_{\gamma p} \dot{u}_{pj}(\zeta_{\gamma}(t), t) - \dot{z}_{\gamma_1} \right] \right] \quad (۲۷-الف) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m_{\gamma}}{L} \ddot{z}_{\gamma}(t) = & \left[ k_{\gamma} (z_{\gamma} - z_{\gamma}) + k_{\gamma} \left[ \varepsilon_{\gamma} \sum_{p=1}^n \bar{c}_{\gamma p} u_{pj}(\zeta_{\gamma}(t), t) - z_{\gamma} \right] \right] \\ & + \frac{\sqrt{L}}{L} \left[ b_{\gamma} (\dot{z}_{\gamma} - \dot{z}_{\gamma}) + b_{\gamma} \left[ \varepsilon_{\gamma} \sum_{p=1}^n \bar{c}_{\gamma p} \dot{u}_{pj}(\zeta_{\gamma}(t), t) - \dot{z}_{\gamma} \right] \right] \quad (۲۷-ب) \end{aligned}$$

به طریق مشابه این ضرایب بر معادلات پیوستگی (۱۳) نیز اعمال می شوند و معادلات پیوستگی جدیدی به دست می آیند:

$$u_{p(j+1)}(x_j^+, t) = u_{pj}(x_j^-, t) \quad (۲۸-الف)$$

ماتریس  $\mathbf{K}_j$  برای هر ستون فنی میانی در شکل (۱)، به طور جداگانه تعیین می شود و می تواند مقادیر ویژه متفاوتی برای هر ستون داشته باشد، اما سختی فنرها باید به گونه ای باشند که بردارهای ویژه یکه شده همه آنها یکسان باشد تا معادلات پیوستگی در هر  $x_j$  به طور هم زمان جدا



$$\lambda_{\nu p} = \left[ \sqrt{\left( \frac{\sigma_p - \tau_p}{\gamma} \right)^2} + \alpha_p + \frac{\sigma_p + \tau_p}{\gamma} \right]^{1/2}, \quad \lambda_{\tau p} = \sqrt{\tau_p},$$

$$q_{\nu p} = \frac{(\lambda_{\nu p} + \lambda_{\tau p})}{\lambda_{\nu p}}, \quad q_{\tau p} = \frac{(\lambda_{\nu p} - \lambda_{\tau p})}{\lambda_{\nu p}} \quad (32)$$

ضرایب  $A_{pj}, B_{pj}, C_{pj}$  و  $D_{pj}$  ثابت‌هایی هستند که به بخش زام از تیر  $p$  مربوط می‌شوند. باید ثوابت آخرین بخش تیر یعنی  $A_{p(m+1)}, B_{p(m+1)}, C_{p(m+1)}$  و  $D_{p(m+1)}$  به اولین بخش آن یعنی  $A_{p1}, B_{p1}, C_{p1}$  و  $D_{p1}$  مربوط شوند. بنابراین با استفاده از معادلات (28) روابط بین این ضرایب تعیین می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \\ C_{j+1} \\ D_{j+1} \end{Bmatrix}_p = (\mathbf{T}_{4 \times 4})_{pj} \begin{Bmatrix} A_j \\ B_j \\ C_j \\ D_j \end{Bmatrix}_p \rightarrow \begin{Bmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \\ C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{Bmatrix}_p$$

$$= \mathbf{T}_{pm} \mathbf{T}_{p(m-1)} \cdots \mathbf{T}_{p1} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}_p = (\mathbf{T}_{4 \times 4})_p \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}_p \quad (33)$$

که در آن، ماتریس  $(\mathbf{T}_{4 \times 4})_{pj}$  به مقدار ویژه  $\omega_p$  بستگی دارد و برابر است با:

$$\mathbf{T}_{pj} = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda_{\nu} l_j) & \sinh(\lambda_{\nu} l_j) & \cdot & \cdot \\ \left( \frac{\beta_j q_{\nu} \cosh(\lambda_{\nu} l_j)}{\lambda_{\nu} q_{\nu} + \lambda_{\tau} q_{\nu}} + \sinh(\lambda_{\nu} l_j) \right) & \left( \frac{\beta_j q_{\nu} \sinh(\lambda_{\nu} l_j)}{\lambda_{\nu} q_{\nu} + \lambda_{\tau} q_{\nu}} + \cosh(\lambda_{\nu} l_j) \right) & \beta_j \frac{q_{\tau} \cos(\lambda_{\tau} l_j)}{\lambda_{\nu} q_{\tau} + \lambda_{\tau} q_{\nu}} & \beta_j \frac{q_{\tau} \sin(\lambda_{\tau} l_j)}{\lambda_{\nu} q_{\tau} + \lambda_{\tau} q_{\nu}} \\ \cdot & \cdot & \cos(\lambda_{\tau} l_j) & \sin(\lambda_{\tau} l_j) \\ \frac{q_{\nu} \cosh(\lambda_{\nu} l_j)}{\beta_j \lambda_{\nu} q_{\nu} + \lambda_{\tau} q_{\nu}} & \frac{q_{\nu} \sinh(\lambda_{\nu} l_j)}{\beta_j \lambda_{\nu} q_{\nu} + \lambda_{\tau} q_{\nu}} & \left( \frac{q_1 \cos(\lambda_{\tau} l_j)}{\lambda_{\nu} q_{\nu} + \lambda_{\tau} q_{\nu}} \right) & \left( \frac{q_1 \sin(\lambda_{\tau} l_j)}{\lambda_{\nu} q_{\nu} + \lambda_{\tau} q_{\nu}} \right) \\ & & -\sin(\lambda_{\tau} l_j) & +\cos(\lambda_{\tau} l_j) \end{bmatrix}_p \quad (34)$$

مقاله شرط مرزی دو سر مفصل به‌طور کامل بیان می‌شود و برای شرایط مرزی دیگر می‌توان به‌طور مشابه عمل کرد [15]:

آزاد، پارامترهای  $\theta_{pj}(x, t) = \varphi_{pj}(x) e^{i\omega_p t}$  و  $u_{pj}(x, t) = w_{pj}(x) e^{i\omega_p t}$  در معادلات (24) با در نظر گرفتن مقدار صفر برای قسمت نیرویی معادلات، جای‌گذاری می‌شوند. سپس با استفاده از روش ماتریس انتقال برای بخش زام از تیر  $p$  در فرم جدید معادلات و برای  $x_{j-1} < x < x_j$  می‌توان نوشت:

$$w_{pj} = \{ A_{pj} \cosh \lambda_{\nu p} (x - x_{j-1}) + B_{pj} \sinh \lambda_{\nu p} (x - x_{j-1}) + C_{pj} \cos \lambda_{\tau p} (x - x_{j-1}) + D_{pj} \sin \lambda_{\tau p} (x - x_{j-1}) \} \quad (31\text{-الف})$$

$$\varphi_{pj} = \{ B_{pj} q_{\nu p} \cosh \lambda_{\nu p} (x - x_{j-1}) + A_{pj} q_{\nu p} \sinh \lambda_{\nu p} (x - x_{j-1}) - D_{pj} q_{\tau p} \cos \lambda_{\tau p} (x - x_{j-1}) + C_{pj} q_{\tau p} \sin \lambda_{\tau p} (x - x_{j-1}) \} \quad (31\text{-ب})$$

که در آن کمیت‌ها عبارتند از:

$$\sigma_p = \frac{\rho L \omega_p^2}{E}, \quad \tau_p = \frac{\rho L \omega_p^2}{\kappa G}, \quad \alpha_p = \frac{\rho L \omega_p^2}{EI}$$

$$\lambda_{\nu p} = \left[ \sqrt{\left( \frac{\sigma_p - \tau_p}{\gamma} \right)^2} + \alpha_p - \frac{\sigma_p + \tau_p}{\gamma} \right]^{1/2},$$

با مرتبط شدن ضرایب اولین بخش تیر به آخرین بخش آن، تعداد ثوابت مستقل به چهار ثابت کاهش می‌یابد که با ارضای شرایط مرزی مختلف تعیین می‌شوند. در این

$$A_{p1} = C_{p1} = 0 \quad (36)$$

همچنین با ارضای معادلات در تکیه‌گاه سمت راست تیر و با توجه به معادلات (۳۳)، می‌توان نوشت:

$$(S_{r \times r})_p \begin{Bmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \\ C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{Bmatrix} = S_p T_p \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} = (R_{r \times r})_p \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

که در این معادله:

$$S_p = \begin{bmatrix} \cosh \lambda_1 l_{m+1} & \sinh \lambda_1 l_{m+1} & \cos \lambda_1 l_{m+1} & \sin \lambda_1 l_{m+1} \\ q_1 \lambda_1 \cosh \lambda_1 l_{m+1} & q_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 l_{m+1} & -q_1 \lambda_1 \sin \lambda_1 l_{m+1} & q_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 l_{m+1} \end{bmatrix}_p \quad (38)$$

زمانی است. دادفرنیا و همکاران [۱۸] نشان دادند که استفاده از تابع یکسان زمانی برای جابه‌جایی و شیب، خطای بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی را وارد معادلات می‌کند.

توابع ویژه  $w_{kp}(x)$  و  $\varphi_{kp}(x)$  به ترتیب شکل مودهای جابه‌جایی و زاویه‌ای تیر  $p$  ام هستند، که خود به  $m+1$  ضابطه تقسیم و در محل فنرهای میانی از هم جدا می‌شوند و عبارتند از:

$$w_{kp} = f_{kp(j)}(x) = \{ A_{kp(j)} \cosh \lambda_{1kp}(x - x_{j-1}) + B_{kp(j)} \sinh \lambda_{1kp}(x - x_{j-1}) + C_{kp(j)} \cos \lambda_{2kp}(x - x_{j-1}) + D_{kp(j)} \sin \lambda_{2kp}(x - x_{j-1}) \} \quad (42-الف)$$

$$\varphi_{kp} = g_{kp(j)}(x) = \{ q_{1kp} (B_{kp(j)} \cosh \lambda_{1kp}(x - x_{j-1}) + A_{kp(j)} \sinh \lambda_{1kp}(x - x_{j-1})) + q_{2kp} (-D_{kp(j)} \cos \lambda_{2kp}(x - x_{j-1}) + C_{kp(j)} \sin \lambda_{2kp}(x - x_{j-1})) \} \quad (42-ب)$$

این معادلات برای کل تیر نوشته شده‌اند و در ادامه برای سادگی کار از اندیس  $j$  که به بخش  $j$  ام تیر مربوط می‌شود، صرف‌نظر می‌شود. با جایگزینی معادلات (۴۱) در (۲۴) و همچنین با

$$\begin{cases} Y_{i1}(0, T) = 0 \rightarrow y_{i1}(0, t) = 0 \rightarrow u_{p1}(0, t) = 0 \\ \rightarrow w_{p1}(0) = 0 \\ \Phi'_{i1}(0, T) = 0 \rightarrow \phi'_{i1}(0, t) = 0 \rightarrow \theta'_{p1}(0, t) = 0 \\ \rightarrow \varphi'_{p1}(0) = 0 \\ Y_{i(m+1)}(L, T) = 0 \rightarrow y_{i(m+1)}(l, t) = 0 \\ \rightarrow u_{p(m+1)}(l, t) = 0 \rightarrow w_{p(m+1)}(l) = 0 \\ \Phi'_{i(m+1)}(L, T) = 0 \rightarrow \phi'_{i(m+1)}(l, t) = 0 \\ \rightarrow \theta'_{p(m+1)}(l, t) = 0 \rightarrow \varphi'_{p(m+1)}(l) = 0 \end{cases} \quad (35)$$

با ارضای معادلات در تکیه‌گاه سمت چپ تیر می‌توان نوشت:

$$R_p = S_p T_p = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix}_p \quad (39)$$

جهت داشتن حل غیربدهی برای این معادلات لازم است:

$$\det \begin{bmatrix} r_{12} & r_{14} \\ r_{22} & r_{24} \end{bmatrix}_p = 0 \quad (40)$$

این معادله فرکانس‌های طبیعی تیر  $p$  ام را برای شرط مرزی مفصلی به دست می‌دهد.

## ۵- پاسخ اجباری به عبور سیستم شش درجه آزادی دو محوره

با کاربرد تئوری آنالیز مودال، می‌توان پاسخ اجباری را برای  $p$  امین دسته از معادلات جدید بسط داد:

$$u_p(x, t) = \sum_{k=1}^N w_{kp}(x) p_{kp}(t) \quad (41)$$

$$\theta_p(x, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_{kp}(x) p_{kp}(t)$$

در این معادلات،  $p_{kp}(t)$  مختصات تعمیم یافته یا عمومی برای شیب و جابه‌جایی تیر  $p$  ام، با در نظر گرفتن تابع یکسان

$$\frac{m_{tr}}{L} \ddot{z}_1 = \left[ k_r (z_r - z_1) + k_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^N \bar{c}_{rp} w_{kp}(\zeta_1) p_{kp}(t) - z_1 \right] \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} \left[ b_r (\dot{z}_r - \dot{z}_1) + b_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^N \bar{c}_{rp} w_{kp}(\zeta_1) \dot{p}_{kp}(t) - \dot{z}_1 \right] \right] \quad (48-f)$$

$$\frac{m_{tr}}{L} \ddot{z}_r = \left[ k_r (z_r - z_r) + k_r \left[ \varepsilon_r \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^N \bar{c}_{rp} w_{kp}(\zeta_r) p_{kp}(t) - z_r \right] \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} \left[ b_r (\dot{z}_r - \dot{z}_r) + b_r \left[ \varepsilon_r \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^N \bar{c}_{rp} w_{kp}(\zeta_r) \dot{p}_{kp}(t) - \dot{z}_r \right] \right] \quad (48-b)$$

مشاهده می‌شود که طرف راست معادله (۴۵) به توابع  $P_i(t)$  و  $\dot{P}_i(t)$  بستگی دارد، پس با توجه به معادلات (۴۶) و (۴۷) طرف راست معادله (۴۵) خود وابسته به پارامترهای  $p_{kp}(t)$  و  $\dot{p}_{kp}(t)$  است؛ همچنین این پارامترها در معادلات حرکت سیستم شش درجه آزادی یا خودرو، یعنی روابط (۴۸) نیز دیده می‌شوند. بنابراین واضح است که معادلات (۴۵) تا (۴۸) و همچنین معادلات (۱۷) و (۱۹) همگی به یکدیگر وابسته و درهم‌گیر هستند و در کل یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر مرتبه دوم را تشکیل می‌دهند. در ادامه هدف این است که پارامترهای  $p_{kp}(t)$  و مشتقات آنها و همچنین جابه‌جایی‌های عمودی مربوط به خودرو از یکدیگر جدا و معادلات قابل حل شوند. به دلیل در هم پیچیدگی و درهم‌گیر شدن عبارات، معادلات (۴۵-۴۸) به‌طور مستقیم و به‌سادگی قابل جدا شدن نیستند. به همین دلیل معادله (۴۵) به فرم دستگاهی از معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر مرتبه دوم برای هر تیر به ازای  $p=1,2,\dots,n$  و  $q=1,2,\dots,N$ ، به صورت یک دستگاه معادلات ماتریسی بسط داده می‌شود:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{P}}_1(t) + \mathbf{\Omega}_1^T \mathbf{P}_1(t) = \frac{c_{pr}}{\rho AL} [\varepsilon_1 P_1(t) \mathbf{W}_1(\zeta_1) + \varepsilon_r P_r(t) \mathbf{W}_1(\zeta_r)] = \mathbf{Q}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{P}}_r(t) + \mathbf{\Omega}_r^T \mathbf{P}_r(t) = \frac{c_{pr}}{\rho AL} [\varepsilon_1 P_1(t) \mathbf{W}_r(\zeta_1) + \varepsilon_r P_r(t) \mathbf{W}_r(\zeta_r)] = \mathbf{Q}_r(t) \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ \ddot{\mathbf{P}}_n(t) + \mathbf{\Omega}_n^T \mathbf{P}_n(t) = \frac{c_{nr}}{\rho AL} [\varepsilon_1 P_1(t) \mathbf{W}_n(\zeta_1) + \varepsilon_r P_r(t) \mathbf{W}_n(\zeta_r)] = \mathbf{Q}_n(t) \end{cases} \quad (49)$$

در نظر گرفتن ارتعاشات آزاد، پس از ساده‌سازی روابط می‌توان نوشت:

$$\rho A \sum_{k=1}^N w_{kp}(x) [\ddot{p}_{kp}(t) + \omega_{kp}^T p_{kp}(t)] = \frac{c_{pr}}{L} [P_1(t) \delta(x - \zeta_1(t)) \varepsilon_1 + P_r(t) \delta(x - \zeta_r(t)) \varepsilon_r] \quad (43-f)$$

$$\rho I \sum_{k=1}^N \varphi_{kp}(x) [\ddot{p}_{kp}(t) + \omega_{kp}^T p_{kp}(t)] = 0 \quad (43-b)$$

$\omega_{kp}$  در این معادلات،  $k$  امین فرکانس طبیعی تیر  $p$  ام است. شرط تعامد مودها برای  $k, q = 1, 2, \dots, N$  عبارت است از:

$$\int_0^L [w_{kp}(x) w_{qp}(x) + \frac{I}{AL^2} \varphi_{kp}(x) \varphi_{qp}(x)] dx = \delta_{kq} \quad (44)$$

پس از به‌کارگیری شرط تعامد مودها در معادلات (۴۳)، می‌توان نوشت:

$$\ddot{p}_{qp}(t) + \omega_{qp}^T p_{qp}(t) = \frac{c_{pr}}{\rho AL} [\varepsilon_1 P_1(t) w_{qp}(\zeta_1) + \varepsilon_r P_r(t) w_{qp}(\zeta_r)] = Q_{qp}(t) \quad (45)$$

در این معادله، نیروهای بین تیر و خودرو با جای‌گذاری معادلات (۴۱) در (۲۵) و (۲۶) به دست می‌آید:

$$P_1(t) = -L \left\{ \frac{m_r g}{L} + k_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^N \bar{c}_{rp} w_{kp}(\zeta_1(t)) p_{kp}(t) - z_1(t) \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} b_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^N \bar{c}_{rp} w_{kp}(\zeta_1(t)) \dot{p}_{kp}(t) - \dot{z}_1(t) \right] \right\} \quad (46)$$

$$P_r(t) = -L \left\{ \frac{m_r g}{L} + k_r \left[ \varepsilon_r \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^N \bar{c}_{rp} w_{kp}(\zeta_r(t)) p_{kp}(t) - z_r(t) \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} b_r \left[ \varepsilon_r \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^N \bar{c}_{rp} w_{kp}(\zeta_r(t)) \dot{p}_{kp}(t) - \dot{z}_r(t) \right] \right\} \quad (47)$$

برای معادلات (۲۷) می‌توان نوشت:

که برای دسته  $p$  ام از دستگاه معادلات، ماتریس‌ها و بردارها عبارتند از:

$$\mathbf{P}_p(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_r(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{Bmatrix}_p, \quad \dot{\mathbf{P}}_p(t) = \begin{Bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_r(t) \\ \vdots \\ \dot{p}_N(t) \end{Bmatrix}_p,$$

$$\mathbf{P}_p(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1(t) \\ \ddot{p}_r(t) \\ \vdots \\ \ddot{p}_N(t) \end{Bmatrix}_p, \quad \mathbf{W}_p(\zeta) = \begin{Bmatrix} w_1(\zeta) \\ w_r(\zeta) \\ \vdots \\ w_N(\zeta) \end{Bmatrix}_p,$$

$$\mathbf{Q}_p(t) = \begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_r(t) \\ \vdots \\ Q_N(t) \end{Bmatrix}_p, \quad \mathbf{\Omega}_p^\gamma = \begin{bmatrix} \omega_1^\gamma & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \omega_r^\gamma & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \omega_N^\gamma \end{bmatrix}_p \quad (50)$$

همچنین برای معادلات (46 و 47) می‌توان نوشت:

$$P_1(t) = -L \left\{ \frac{m_1 g}{L} + k_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \mathbf{W}_p^T(\zeta_1(t)) \mathbf{P}_p(t) - z_1(t) \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} b_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \mathbf{W}_p^T(\zeta_1(t)) \dot{\mathbf{P}}_p(t) - \dot{z}_1(t) \right] \right\} \quad (51)$$

$$P_r(t) = -L \left\{ \frac{m_r g}{L} + k_r \left[ \varepsilon_r \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \mathbf{W}_p^T(\zeta_r(t)) \mathbf{P}_p(t) - z_r(t) \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} b_r \left[ \varepsilon_r \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \mathbf{W}_p^T(\zeta_r(t)) \dot{\mathbf{P}}_p(t) - \dot{z}_r(t) \right] \right\} \quad (52)$$

و برای معادلات (48) نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{m_t}{L} \ddot{z}_1 = \left[ k_r (z_r - z_1) + k_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \mathbf{W}_p^T(\zeta_1) \mathbf{P}_p(t) - z_1 \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} \left[ b_r (\dot{z}_r - \dot{z}_1) + b_1 \left[ \varepsilon_1 \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \mathbf{W}_p^T(\zeta_1) \dot{\mathbf{P}}_p(t) - \dot{z}_1 \right] \right] \right] \quad (53\text{-الف})$$

$$\frac{m_{tr}}{L} \ddot{z}_r = \left[ k_r (z_r - z_r) + k_r \left[ \varepsilon_r \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \mathbf{W}_p^T(\zeta_r) \mathbf{P}_p(t) - z_r \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} \left[ b_r (\dot{z}_r - \dot{z}_r) + b_r \left[ \varepsilon_r \sum_{p=1}^n \bar{c}_{rp} \mathbf{W}_p^T(\zeta_r) \dot{\mathbf{P}}_p(t) - \dot{z}_r \right] \right] \right] \quad (53\text{-ب})$$

با جای‌گذاری معادلات (51) و (52) در دستگاه معادلات (49) و با جابه‌جایی و مرتب کردن کلیه جملات آن، یک مجموعه دستگاه معادلات پیچیده و طولانی به دست خواهد آمد که در اینجا به اختصار فقط دسته  $p$  ام از آن دستگاه معادلات طولانی بیان می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{P}}_p(t) + \sum_{i=1}^n [\mathbf{D}_{pi}(t) \dot{\mathbf{P}}_i(t) + \mathbf{K}_{pi}(t) \mathbf{P}_i(t)] = \mathbf{q}_p(t) \quad (54)$$

در این معادله، بردارها و ماتریس‌ها به ازای  $i=1, 2, \dots, n$  عبارتند از:

$$\mathbf{D}_{pi}(t) = c_{pr} \bar{c}_{ri} \frac{\sqrt{L}}{\rho A L} \left[ \varepsilon_1 b_1 \mathbf{W}_p(\zeta_1) \mathbf{W}_i^T(\zeta_1) + \varepsilon_r b_r \mathbf{W}_p(\zeta_r) \mathbf{W}_i^T(\zeta_r) \right] \quad (55\text{-الف})$$

$$\mathbf{K}_{pi} = \mathbf{\Omega}_p^\gamma \delta_{pi} + c_{pr} \bar{c}_{ri} \frac{1}{\rho A} \left[ \varepsilon_1 k_1 \mathbf{W}_p(\zeta_1) \mathbf{W}_i^T(\zeta_1) + \varepsilon_r k_r \mathbf{W}_p(\zeta_r) \mathbf{W}_i^T(\zeta_r) \right] \quad (55\text{-ب})$$

$$\mathbf{q}_p(t) = \frac{c_{pr}}{\rho A} \left\{ \left[ \varepsilon_1 k_1 z_1 \mathbf{W}_p(\zeta_1) + \varepsilon_r k_r z_r \mathbf{W}_p(\zeta_r) \right] + \frac{\sqrt{L}}{L} \left[ \varepsilon_1 b_1 \dot{z}_1 \mathbf{W}_p(\zeta_1) + \varepsilon_r b_r \dot{z}_r \mathbf{W}_p(\zeta_r) \right] - \left[ \varepsilon_1 \frac{m_1 g}{L} \mathbf{W}_p(\zeta_1) + \varepsilon_r \frac{m_r g}{L} \mathbf{W}_p(\zeta_r) \right] \right\} \quad (55\text{-ج})$$

سرانجام با مرتب کردن معادلات (54) می‌توان نوشت:

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{D}(t) \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{P}(t) = \mathbf{q}(t) \quad (56)$$

ماتریس‌ها و بردارهای این رابطه این‌گونه تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1(t) \\ \mathbf{P}_r(t) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{P}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{P}}_r(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{P}}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{P}}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{P}}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{P}}_r(t) \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{P}}_n(t) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_r(t) \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}(t) & \dots & \mathbf{D}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{n1}(t) & \dots & \mathbf{D}_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_p(\circ) = \int_x^1 \left[ u_{,p}(x) \mathbf{W}_p(x) + \frac{I}{AL^2} \theta_{,p}(x) \Phi_p(x) \right] dx \quad (61-الف)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_p(\circ) = \int_x^1 \left[ \dot{u}_{,p}(x) \mathbf{W}_p(x) + \frac{I}{AL^2} \dot{\theta}_{,p}(x) \Phi_p(x) \right] dx \quad (61-ب)$$

که در این معادلات:

$$\Phi_p(x) = [\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_N(x)]_p^T \quad (62)$$

حال باید با جای گذاری معادلات (61) در (57)، بردار شرایط اولیه نهایی را برای استفاده در معادله (56) به دست آورد:

$$\mathbf{P}(0) = [\mathbf{P}_1^T(0) \quad \mathbf{P}_2^T(0) \quad \dots \quad \mathbf{P}_n^T(0)]^T \quad (63-الف)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(0) = [\dot{\mathbf{P}}_1^T(0) \quad \dot{\mathbf{P}}_2^T(0) \quad \dots \quad \dot{\mathbf{P}}_n^T(0)]^T \quad (63-ب)$$

پس از حل معادلات نهایی، پاسخ اجباری مجموعه جدید تعیین می شود:

$$u_p(x,t) = \mathbf{W}_p^T(x) \mathbf{P}_p(t) \quad , \quad \theta_p(x,t) = \Phi_p^T(x) \mathbf{P}_p(t) \quad (64)$$

در نهایت با کاربرد معادلات (22) پاسخ مجموعه اصلی محاسبه می شود.

اینک، برای تیر  $i$ ام از مجموعه اصلی به ازای  $i=1,2,\dots,n$ ، ممان خمشی  $M_i(x,t)$  و نیروی برشی  $Q_i(x,t)$  را می توان محاسبه کرد:

$$M_i(x,t) = \frac{EI}{L} \sum_{p=1}^n \bar{c}_{ip} \Phi_{p,1}^T(x) \mathbf{P}_p(t) \quad (65)$$

$$Q_i(x,t) = \kappa AG \sum_{p=1}^n \bar{c}_{ip} (\mathbf{W}_{p,1}^T(x) - \Phi_p^T(x)) \mathbf{P}_p(t) \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (66)$$

که در این معادلات، مشتق مرتبه اول نسبت به  $x$ ، این گونه تعریف می شود:

$$\mathbf{W}_{p,1}(x) = [w'_1(x) \quad w'_2(x) \quad \dots \quad w'_N(x)]_p^T \quad (67-الف)$$

$$\Phi_{p,1}(x) = [\varphi'_1(x) \quad \varphi'_2(x) \quad \dots \quad \varphi'_N(x)]_p^T \quad (67-ب)$$

## 6- فرم فضای حالت معادلات

فرم فضای حالت معادلات نهایی (17)، (19)، (56) و (57) عبارت است از:

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(t) & \dots & \mathbf{K}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1}(t) & \dots & \mathbf{K}_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (57)$$

همچنین معادلات (53) به فرم (58) نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_a^T(t) \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{G}_a^T(t) \mathbf{P}(t) = & \\ \left\{ \left[ \frac{m_{tr}}{L} \dot{z}_r(t) + \frac{\sqrt{L}}{L} (b_1 + b_r) \dot{z}_r(t) + (k_1 + k_r) z_r(t) \right] \right. & \\ \left. - \left[ \frac{\sqrt{L}}{L} b_r \dot{z}_r(t) + k_r z_r(t) \right] \right\} & \quad (58-الف) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_b^T(t) \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{G}_b^T(t) \mathbf{P}(t) = & \\ \left\{ \left[ \frac{m_{tr}}{L} \dot{z}_r(t) + \frac{\sqrt{L}}{L} (b_r + b_\varphi) \dot{z}_r(t) + (k_r + k_\varphi) z_r(t) \right] \right. & \\ \left. - \left[ \frac{\sqrt{L}}{L} b_\varphi \dot{z}_r(t) + k_\varphi z_r(t) \right] \right\} & \quad (58-ب) \end{aligned}$$

که در این معادلات:

$$\mathbf{H}_a(t) = \frac{\sqrt{L}}{L} \varepsilon_1 b_1 \begin{Bmatrix} \bar{c}_{r1} \mathbf{W}_1(\zeta_1) \\ \bar{c}_{r2} \mathbf{W}_2(\zeta_2) \\ \vdots \\ \bar{c}_{rn} \mathbf{W}_n(\zeta_n) \end{Bmatrix} \quad ,$$

$$\mathbf{H}_b(t) = \frac{\sqrt{L}}{L} \varepsilon_r b_\varphi \begin{Bmatrix} \bar{c}_{r1} \mathbf{W}_1(\zeta_r) \\ \bar{c}_{r2} \mathbf{W}_2(\zeta_r) \\ \vdots \\ \bar{c}_{rn} \mathbf{W}_n(\zeta_r) \end{Bmatrix} \quad ,$$

$$\mathbf{G}_a(t) = \sqrt{L} \frac{k_1}{b_1} \mathbf{H}_a(t) \quad , \quad \mathbf{G}_b(t) = \sqrt{L} \frac{k_r}{b_\varphi} \mathbf{H}_b(t) \quad (59)$$

معادلات نهایی (56)، (58)، (17) و (19)، معادلاتی قابل حل هستند که برای تحلیل همزمان آنها، در اختیار داشتن شرایط اولیه مجموعه تیرها و خودرو ضروری است. می توان بردار شرایط اولیه خودرو را این گونه بیان کرد:

$$\mathbf{Z}(\circ) = [z_1(\circ) \quad z_r(\circ) \quad \dots \quad z_\varepsilon(\circ)]^T \quad (60-الف)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}(\circ) = [\dot{z}_1(\circ) \quad \dot{z}_r(\circ) \quad \dots \quad \dot{z}_\varepsilon(\circ)]^T \quad (60-ب)$$

پس از اعمال شرط تعامد مودها در معادلات (41)، بردار شرایط اولیه تیرها برای دسته  $p$  ام از معادلات (54) تعیین می شود:

$$\mathbf{Z}(t) = [z_1(t) \quad z_r(t) \quad \dots \quad z_\varphi(t)]^T \quad (۷۰-الف)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = [\dot{z}_1(t) \quad \dot{z}_r(t) \quad \dots \quad \dot{z}_\varphi(t)]^T \quad (۷۰-ب)$$

در معادله (۶۸)، ماتریس حالت عبارت است از:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times N) * (n \times N)} & \mathbf{0}_{(n \times N) * \varphi} & \mathbf{I}_{(n \times N) * (n \times N)} & \mathbf{0}_{(n \times N) * \varphi} \\ \mathbf{0}_{\varphi * (n \times N)} & \mathbf{0}_{\varphi * \varphi} & \mathbf{0}_{\varphi * (n \times N)} & \mathbf{I}_{\varphi * \varphi} \\ -\mathbf{K}(t) & [\mathbf{A}_{r\tau}(t)]_{(n \times N) * \varphi} & -\mathbf{D}(t) & [\mathbf{A}_{r\varphi}(t)]_{(n \times N) * \varphi} \\ [\mathbf{A}_{\varphi 1}(t)]_{\varphi * (n \times N)} & [\mathbf{A}_{\varphi r}(t)]_{\varphi * \varphi} & [\mathbf{A}_{\varphi \tau}(t)]_{\varphi * (n \times N)} & [\mathbf{A}_{\varphi \varphi}(t)]_{\varphi * \varphi} \end{bmatrix} \quad (۷۱)$$

$$\mathbf{A}_{r\varphi} = \sqrt{L} \begin{bmatrix} \frac{-(b_1 + b_r)}{m_{t1}} & \cdot & \frac{b_r}{m_{t1}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{-(b_r + b_\varphi)}{m_{tr}} & \cdot & \frac{b_\varphi}{m_{tr}} & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{r1} & \bar{a}_{r\tau} & \bar{a}_{r\tau} & \bar{a}_{r\varphi} & \bar{a}_{r\delta} & \bar{a}_{r\varphi} \\ \bar{a}_{\varphi 1} & \bar{a}_{\varphi r} & \bar{a}_{\varphi r} & \bar{a}_{\varphi \varphi} & \bar{a}_{\varphi \delta} & \bar{a}_{\varphi \varphi} \\ \cdot & \cdot & \frac{b_\delta}{m_{p1}} & \cdot & \frac{-b_\delta}{m_{p1}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{b_\varphi}{m_{p2}} & \cdot & \frac{-b_\varphi}{m_{p2}} \end{bmatrix} \quad (۷۲-و)$$

سایر درایه‌های ماتریس‌های بلوکی  $\mathbf{A}_{r\tau}$  و  $\mathbf{A}_{r\varphi}$  عبارتند از:

$$a_{r1} = \left[ \frac{k_r}{M_s} + \frac{k_r d_r^\vee}{J} \right], \quad a_{r\tau} = \left[ \frac{k_\varphi}{M_s} - \frac{k_\varphi d_r d_r}{J} \right],$$

$$a_{r\tau} = - \left[ \frac{k_r + k_\delta}{M_s} + \frac{k_r d_r^\vee + k_\delta d_r e_1}{J} \right],$$

$$a_{r\varphi} = - \left[ \frac{k_\varphi + k_\varphi}{M_s} - \frac{k_\varphi d_r d_r + k_\varphi d_r e_r}{J} \right],$$

$$a_{r\delta} = \left[ \frac{k_\delta}{M_s} + \frac{k_\delta d_r e_1}{J} \right], \quad a_{r\varphi} = \left[ \frac{k_\varphi}{M_s} - \frac{k_\varphi d_r e_r}{J} \right],$$

$$a_{\varphi 1} = \left[ \frac{k_r}{M_s} - \frac{k_r d_r d_r}{J} \right], \quad a_{\varphi r} = \left[ \frac{k_\varphi}{M_s} + \frac{k_\varphi d_r^\vee}{J} \right],$$

$$a_{\varphi \tau} = - \left[ \frac{k_r + k_\delta}{M_s} - \frac{k_r d_r d_r + k_\delta d_r e_1}{J} \right],$$

$$a_{\varphi \varphi} = - \left[ \frac{k_\varphi + k_\varphi}{M_s} + \frac{k_\varphi d_r^\vee + k_\varphi d_r e_r}{J} \right],$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t) \quad (۶۸)$$

که در این معادله، بردار حالت را می‌توان این‌گونه تعریف کرد:

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{P}^T(t) \quad \mathbf{Z}^T(t) \quad \dot{\mathbf{P}}^T(t) \quad \dot{\mathbf{Z}}^T(t)]^T \quad (۶۹)$$

برای بردار سرعت و جابه‌جایی عمودی خودرو نیز می‌توان نوشت:

$$\mathbf{A}_{r\tau}(t) = \frac{1}{\rho A} \begin{bmatrix} c_{1r} \varepsilon_1 k_1 \mathbf{W}_1(\zeta_1) & c_{1r} \varepsilon_r k_r \mathbf{W}_r(\zeta_r) & \mathbf{0}_{N * \varphi} \\ c_{1r} \varepsilon_1 k_1 \mathbf{W}_r(\zeta_1) & c_{1r} \varepsilon_r k_r \mathbf{W}_r(\zeta_r) & \mathbf{0}_{N * \varphi} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{nr} \varepsilon_1 k_1 \mathbf{W}_n(\zeta_1) & c_{nr} \varepsilon_r k_r \mathbf{W}_n(\zeta_r) & \mathbf{0}_{N * \varphi} \end{bmatrix} \quad (۷۲-الف)$$

که ماتریس‌های بلوکی درون ماتریس حالت، عبارتند از:

$$\mathbf{A}_{r\varphi}(t) = \frac{\sqrt{L}}{\rho AL} \begin{bmatrix} c_{1r} \varepsilon_1 b_1 \mathbf{W}_1(\zeta_1) & c_{1r} \varepsilon_r b_r \mathbf{W}_r(\zeta_r) & \mathbf{0}_{N * \varphi} \\ c_{1r} \varepsilon_1 b_1 \mathbf{W}_r(\zeta_1) & c_{1r} \varepsilon_r b_r \mathbf{W}_r(\zeta_r) & \mathbf{0}_{N * \varphi} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{nr} \varepsilon_1 b_1 \mathbf{W}_n(\zeta_1) & c_{nr} \varepsilon_r b_r \mathbf{W}_n(\zeta_r) & \mathbf{0}_{N * \varphi} \end{bmatrix} \quad (۷۲-ب)$$

$$\mathbf{A}_{\varphi 1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{L}{m_{t1}} \mathbf{G}_a(t) & \frac{L}{m_{tr}} \mathbf{G}_b(t) & \mathbf{0}_{(n \times N) * \varphi} \end{bmatrix}^T \quad (۷۲-ج)$$

$$\mathbf{A}_{\varphi r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{L}{m_{t1}} \mathbf{H}_a(t) & \frac{L}{m_{tr}} \mathbf{H}_b(t) & \mathbf{0}_{(n \times N) * \varphi} \end{bmatrix}^T \quad (۷۲-د)$$

$$\mathbf{A}_{\varphi \tau} = L \begin{bmatrix} \frac{-(k_1 + k_r)}{m_{t1}} & \cdot & \frac{k_r}{m_{t1}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{-(k_r + k_\varphi)}{m_{tr}} & \cdot & \frac{k_\varphi}{m_{tr}} & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r\tau} & a_{r\tau} & a_{r\varphi} & a_{r\delta} & a_{r\varphi} \\ a_{\varphi 1} & a_{\varphi r} & a_{\varphi r} & a_{\varphi \varphi} & a_{\varphi \delta} & a_{\varphi \varphi} \\ \cdot & \cdot & \frac{k_\delta}{m_{p1}} & \cdot & \frac{-k_\delta}{m_{p1}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{k_\varphi}{m_{p2}} & \cdot & \frac{-k_\varphi}{m_{p2}} \end{bmatrix} \quad (۷۲-ه)$$

سیستم شش درجه آزادی:

$$M_s = 1794/4, m_{t1} = 87/15, m_{t2} = 140/4, \\ m_{p1} = m_{p2} = 75 \text{ kg}, \\ J = 3443/05 \text{ kg m}^2, d_1 = 1/271, d_2 = 1/716, e_1 = 0/481, \\ e_2 = 1/313 \text{ m}, \\ k_1 = k_2 = 101115, k_3 = 66824/4, k_4 = 18615, \\ k_\delta = k_\epsilon = 14000 \frac{N}{m}, \\ b_1 = b_2 = 14/6, b_3 = 1190, b_4 = 1000, b_\delta = 50/2, \\ b_\epsilon = 62/1 \frac{Ns}{m}$$

مجموعه تیرهای موازی و اتصالات میانی:

$$L = 50 \text{ m}, H = 0/02L, W = 0/5H, L_1 = 0/3L, \\ L_2 = 0/4L, \\ E = 2/1 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}, \nu = 0/3, \rho = 7860 \frac{kg}{m^3}, \\ M = M_s + m_{t1} + m_{t2} + m_{p1} + m_{p2}, \\ k_{11} = k, k_{21} = 2k, k_{31} = 3k, k_{12} = 2k, \\ k_{22} = 4k, k_{32} = 6k$$

همچنین برای سادگی نمایش نتایج، پارامترهای جدیدی تعریف می‌شود:

$$(k_{c1} = 0, k_{c2} = 2/5 \times 10^6, k_{c3} = 5 \times 10^6, k_{c4} = 10 \times 10^6 \frac{N}{m})$$

برای حل، در ابتدا باید یکسان بودن بردارهای ویژه نرمالیزه شده  $K_1$  و  $K_2$ ، برای دو ستون اتصالات میانی بررسی گردد. از معادله (۳۰) رابطه بین این دو ماتریس به صورت  $K_2 = 2K_1$  است، بنابراین بردارهای ویژه یکدیگر شده این دو ماتریس برابرند و روش ارائه شده برای این مثال مناسب است.

#### ۷-۱- بررسی پاسخ مجموعه تیرهای موازی

در این قسمت، جابه‌جایی نقاط میانی تیرها نسبت به جابه‌جایی ماکزیمم استاتیکی تیر اوپلر برنولی دو سر مفصل، بی‌بعد می‌شود:

$$Y_{st} = \frac{MgL^3}{48EI} \rightarrow y_{st} = \frac{MgL^3}{48EI} \quad (75)$$

سرعت بار متحرک نسبت به سرعت بحرانی  $V_{cr}$  بی‌بعد می‌شود [۱۹]:

$$a_{\delta} = \left[ \frac{k_\delta}{M_s} - \frac{k_\delta d_1 e_1}{J} \right], \quad a_{\epsilon} = \left[ \frac{k_\epsilon}{M_s} + \frac{k_\epsilon d_2 e_2}{J} \right] \quad (73-الف)$$

$$\bar{a}_{21} = \left[ \frac{b_2}{M_s} + \frac{b_2 d_1^2}{J} \right], \quad \bar{a}_{22} = \left[ \frac{b_\epsilon}{M_s} - \frac{b_\epsilon d_1 d_2}{J} \right],$$

$$\bar{a}_{33} = - \left[ \frac{b_2 + b_\delta}{M_s} + \frac{b_2 d_1^2 + b_\delta d_1 e_1}{J} \right],$$

$$\bar{a}_{34} = - \left[ \frac{b_\epsilon + b_\delta}{M_s} - \frac{b_\epsilon d_1 d_2 + b_\delta d_1 e_1}{J} \right],$$

$$\bar{a}_{35} = \left[ \frac{b_\delta}{M_s} + \frac{b_\delta d_1 e_1}{J} \right], \quad \bar{a}_{36} = \left[ \frac{b_\epsilon}{M_s} - \frac{b_\epsilon d_1 e_2}{J} \right],$$

$$\bar{a}_{41} = \left[ \frac{b_2}{M_s} - \frac{b_2 d_1 d_2}{J} \right], \quad \bar{a}_{42} = \left[ \frac{b_\epsilon}{M_s} + \frac{b_\epsilon d_1^2}{J} \right],$$

$$\bar{a}_{43} = - \left[ \frac{b_2 + b_\delta}{M_s} - \frac{b_2 d_1 d_2 + b_\delta d_1 e_1}{J} \right],$$

$$\bar{a}_{44} = - \left[ \frac{b_\epsilon + b_\delta}{M_s} + \frac{b_\epsilon d_1^2 + b_\delta d_1 e_2}{J} \right],$$

$$\bar{a}_{45} = \left[ \frac{b_\delta}{M_s} - \frac{b_\delta d_1 e_1}{J} \right], \quad \bar{a}_{46} = \left[ \frac{b_\epsilon}{M_s} + \frac{b_\epsilon d_1 e_2}{J} \right]$$

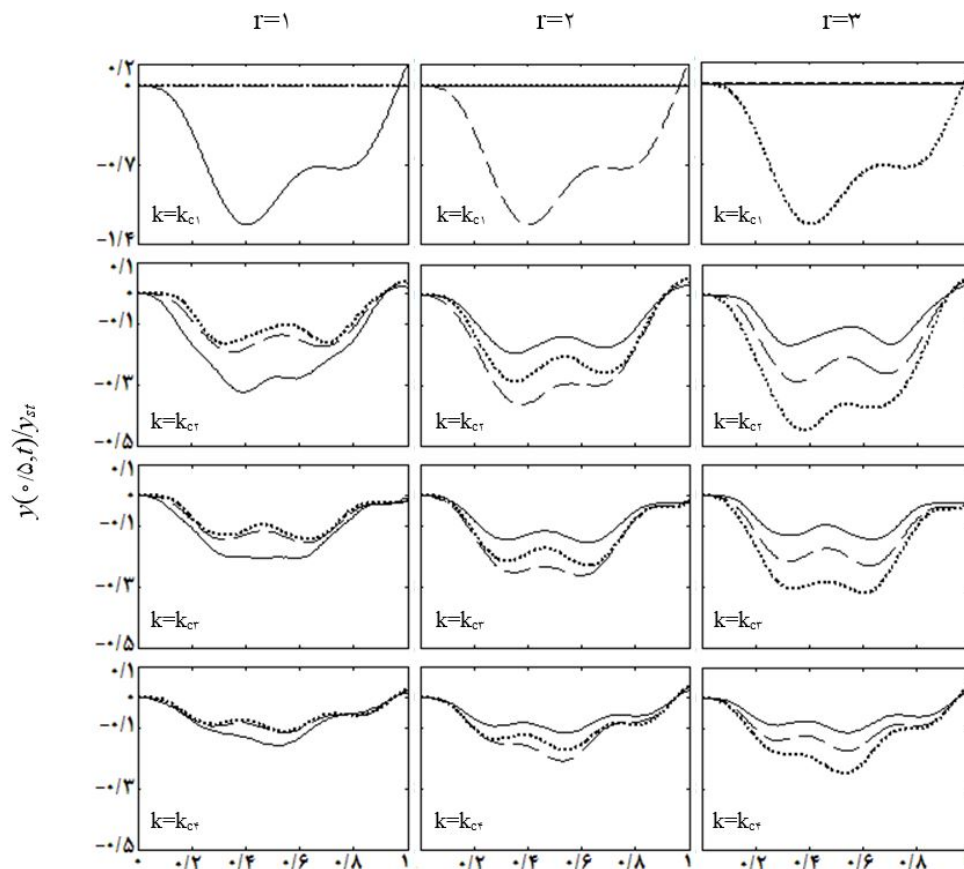
(۷۳-ب)

همچنین برای بردار  $F(t)$  در معادله فضای حالت (۶۸) می‌توان نوشت:

$$F(t) = \frac{-g}{\rho AL} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times n + 6) \times 1} \\ c_{1r} [\epsilon_1 m_1 W_1(\zeta_1(t)) + \epsilon_r m_r W_1(\zeta_r(t))] \\ c_{2r} [\epsilon_1 m_1 W_2(\zeta_1(t)) + \epsilon_r m_r W_2(\zeta_r(t))] \\ \vdots \\ c_{nr} [\epsilon_1 m_1 W_n(\zeta_1(t)) + \epsilon_r m_r W_n(\zeta_r(t))] \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} \end{bmatrix} \quad (74)$$

#### ۷- نتایج عددی

مجموعه‌ای از سه تیر تیموشنکو با ارتفاع  $H$  و پهنای  $W$ ، با مقاطع مستطیلی، دو ستون اتصالات میانی و شرایط مرزی دو سر مفصل، تحت عبور خودرو در نظر گرفته می‌شود. داده‌های عددی در این مثال به منظور اعتبارسنجی، از دو مرجع [۱۵ و ۱۰] گرفته شده‌اند و کلیه نتایج عددی در این بخش بر مبنای این داده‌ها به دست آمده‌اند مگر آنکه داده‌های عددی جدیدی ذکر گردد:



موقعیت بی بعد شده خودروی عبوری از روی تیرها ( $\zeta(t)$ )

شکل ۳- تأثیر سختی اتصالات میانی بر جابه‌جایی بی بعد شده نقطه وسط تیرها بر حسب موقعیت

بی بعد شده خودرو،  $V=0/25 V_{cr}$ ، تیر ۱ (—)، تیر ۲ (---)، تیر ۳ (.....)

است، زیرا در این حالت مسأله به حل یک مجموعه تک تیری تبدیل می‌شود که تمام تیرها با یکدیگر مشابه هستند و اتصالی بین آنها وجود ندارد و سایر تیرهایی که بار از روی آنها عبور نمی‌کند ساکن باقی می‌مانند. با افزایش سختی اتصالات، جابه‌جایی نقطه میانی تیری که بار از روی آن عبور می‌کند کاهش می‌یابد. درحالی‌که در سایر تیرها برای مقادیر پایین سختی، افزایش سختی باعث افزایش جابه‌جایی و در مقادیر بالای سختی، به دلیل اتصال قوی مجموعه با زمین، باعث کاهش جابه‌جایی می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش در پارامتر  $\Gamma$  یعنی عبور بار از روی تیر بالاتر، ماکزیمم جابه‌جایی نقاط میانی مجموعه زیاد می‌شود.

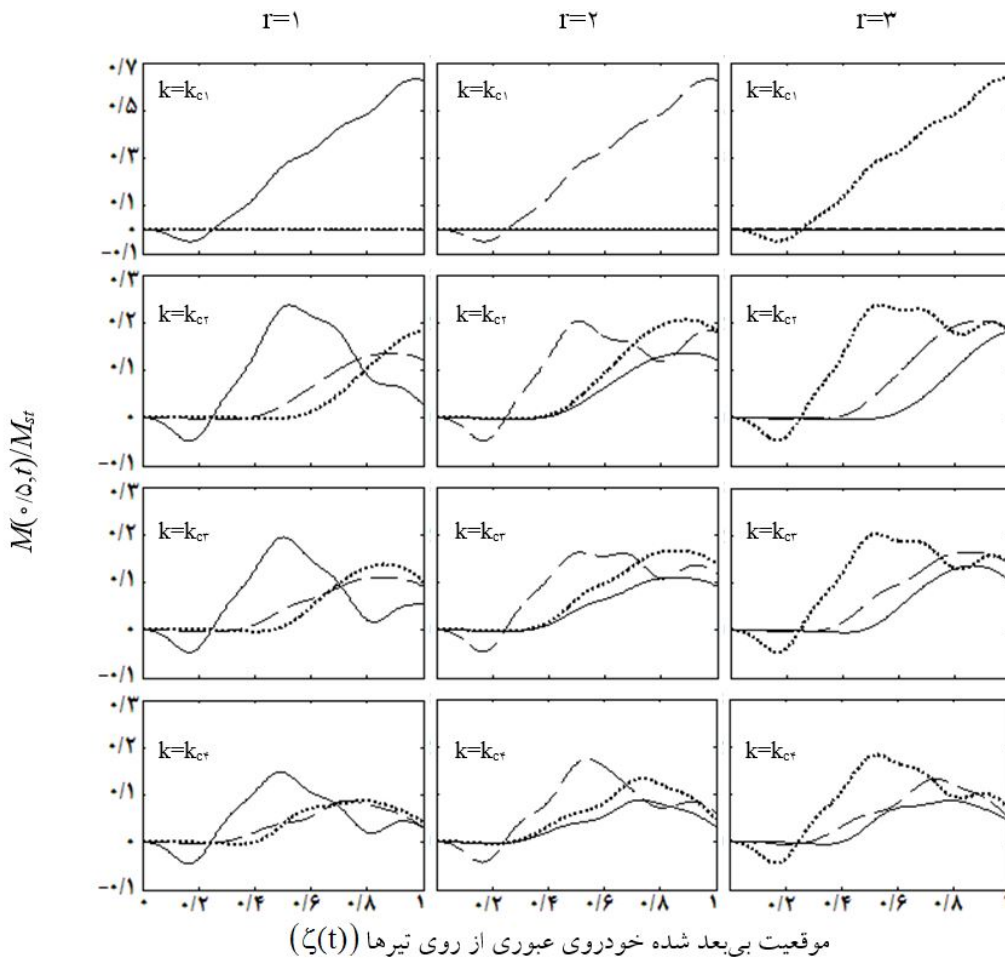
$$V_{cr} = \frac{\omega_1 L}{\pi}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{m}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (76)$$

همچنین ممان خمشی تیرها نسبت به ماکزیمم ممان خمشی استاتیکی تیر اوپلر برنولی دو سر مفصل که با رابطه (۷۷) بیان می‌شود، بی بعد می‌شود:

$$M_{st} = \frac{MgL}{\psi} \quad (77)$$

شکل (۳)، جابه‌جایی تیرها را به‌ازای سرعت  $V=0/25V_{cr}$  و مقادیر مختلف سختی اتصالات میانی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود در حالتی که  $k=k_{c1}=0$  و سختی اتصالات برابر صفر است، جابه‌جایی نقاط میانی تیرهایی که بار متحرک از روی آنها عبور می‌کند با یکدیگر برابر هستند. این نتیجه منطقی





شکل ۴- تأثیر سختی اتصالات میانی بر ممان خمشی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها برحسب موقعیت بی‌بعد شده خودرو،  $V=V_{cr}$ ، تیر ۱ (—)، تیر ۲ (---)، تیر ۳ (.....)

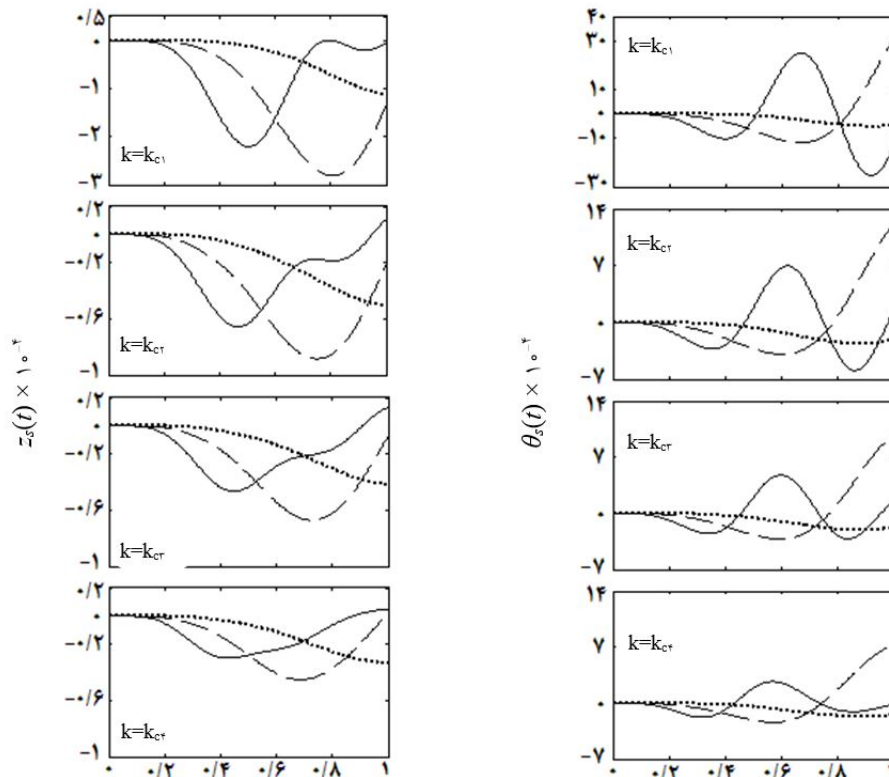
می‌افتد و با افزایش سختی اتصالات، این نقاط به سمت چپ جابه‌جا می‌شوند. همچنین در شکل‌های (۳) و (۴) مشاهده می‌شود که مقادیر جابه‌جایی و ممان خمشی نقاط میانی در یک مجموعه چندتیری با اتصالات میانی، کمتر از یک تیر به تنهایی است. این امر می‌تواند به‌عنوان یک کاربرد در جاذب‌های ارتعاشی چندتیری و همچنین افزایش استحکام و مقاومت مجموعه مورد توجه قرار گیرد.

#### ۷-۲- بررسی پاسخ سیستم شش درجه آزادی

در شکل (۵)، جابه‌جایی عمودی و دورانی مرکز جرم خودرو

به‌عبارت دیگر جابه‌جایی ماکزیمم مجموعه با عبور بار از روی تیر نزدیکتر به زمین کاهش می‌یابد.

در شکل (۴)، ممان خمشی مجموعه به‌ازای تغییر در سختی اتصالات میانی نمایش داده شده است. ماکزیمم ممان خمشی مجموعه مربوط به تیری است که بار از روی آن عبور می‌کند و با افزایش سختی، کاهش می‌یابد. در سایر تیرها با افزایش سختی، برای مقادیر بسیار پایین سختی، ماکزیمم ممان خمشی افزایش و برای مقادیر بالای آن، کاهش می‌یابد. در مجموعه تک تیری و سختی‌های بسیار پایین، ماکزیمم ممان خمشی نقاط میانی در انتهای تیر اتفاق



شکل ۵- تأثیر سرعت خودرو و سختی اتصالات میانی بر جابه‌جایی بی‌بعد عمودی ( $z_s(t)$ ) و دورانی ( $\theta_s(t)$ )، برحسب موقعیت بی‌بعد شده خودروی عبوری از روی تیرها ( $\zeta(t)$ )

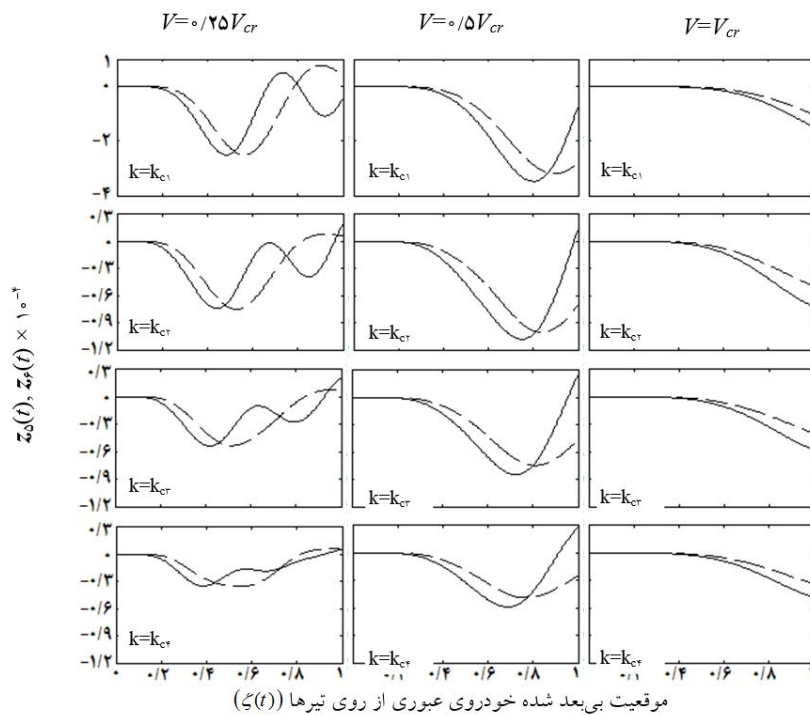
شکل ۵- تأثیر سرعت خودرو و سختی اتصالات میانی بر جابه‌جایی بی‌بعد شده عمودی ( $z_s(t)$ ) و دورانی ( $\theta_s(t)$ )، برحسب موقعیت بی‌بعد شده خودروی تیر دوم ( $r=2$ )، به‌ازای سرعت‌های ( $\text{---}$ )  $V=0.25V_{cr}$ ، ( $\text{---}$ )  $V=0.5V_{cr}$  و ( $\text{.....}$ )  $V=V_{cr}$

تیر، جابه‌جایی‌ها بیشتر از چند تیر با اتصالات میانی است و با افزایش سختی اتصالات، جابه‌جایی راننده و مسافر کاهش می‌یابد. ماکزیمم جابه‌جایی راننده زودتر از مسافر رخ می‌دهد، زیرا راننده زودتر به روی تیرها وارد می‌شود. با افزایش سرعت بار، جابه‌جایی‌های ماکزیمم به سمت راست و با افزایش سختی، کمی به چپ کشیده می‌شوند.

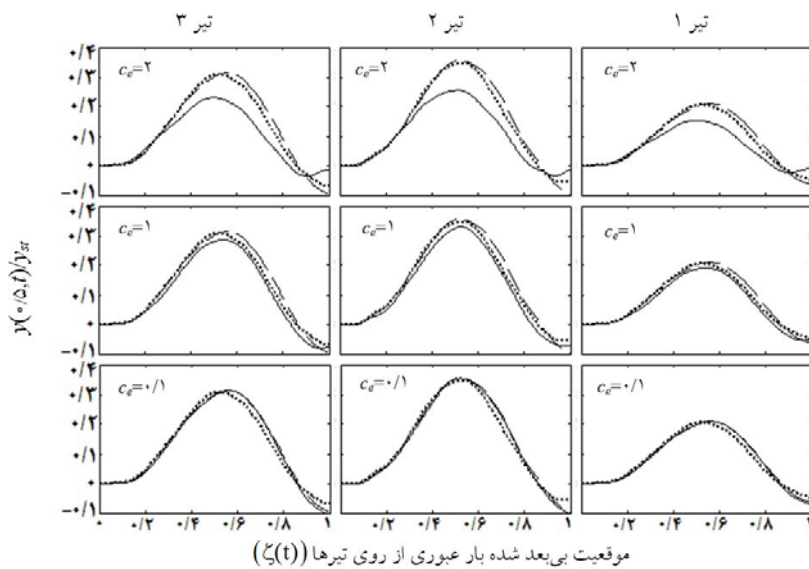
### ۷-۳- اعتبارسنجی پاسخ مجموعه تحت عبور خودرو، جرم و نیرو

در این قسمت به منظور اعتبارسنجی، نتایج عددی با دو مقاله علمی مقایسه می‌شود. شکل (۷)، جابه‌جایی مجموعه را در سه حالت بار متحرک به‌ازای کاهش طول خودرو نشان می‌دهد، در حالی که سختی فنرها و استهلاک مستهلک‌کننده‌ها در

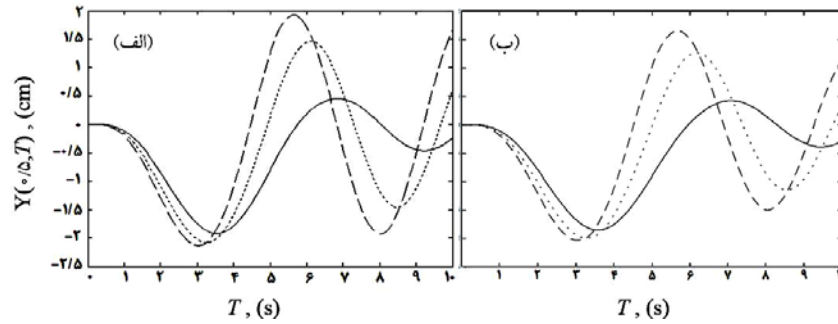
به‌ازای سرعت‌های مختلف بار متحرک و همچنین سختی‌های مختلف اتصالات میانی، نشان داده شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که جابه‌جایی‌های خودرو به‌ازای افزایش سختی اتصالات، کاهش می‌یابد؛ زیرا با افزایش سختی، جابه‌جایی تیری که بار از روی آن عبور می‌کند کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت، ماکزیمم جابه‌جایی به سمت راست و با افزایش سختی مقداری به سمت چپ مجموعه کشیده می‌شود. در یک مجموعه تک‌تیری، جابه‌جایی‌ها هم برای تیر و هم برای خودرو نسبت به یک مجموعه چندتیری با اتصالات میانی، بیشتر است. شکل (۶) جابه‌جایی‌های عمودی راننده و مسافر را به‌ازای افزایش سختی اتصالات و سرعت خودرو نشان می‌دهد. در این شکل نیز مشاهده می‌شود که برای یک



شکل ۶- تأثیر سرعت خودرو و سختی اتصالات بر جابه‌جایی عمودی بی‌بعد شده راننده و مسافر بر حسب موقعیت بی‌بعد شده خودرو روی تیر دوم ( $r=2$ )، ( $z_6$ , ---) و ( $z_0$ , —)



شکل ۷- تأثیر کاهش طول خودرو بر جابه‌جایی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها بر حسب موقعیت بی‌بعد شده بار عبوری از روی تیر دوم ( $r=2$ ) با سرعت  $V=0/5 V_{cr}$ ، سختی اتصالات میانی  $k = 2/5 \times 10^6 \frac{N}{m}$ ، مقدار سختی فنرها و استهلاک مستهلک کننده‌های خودرو بسیار زیاد (خودروی صلب) - عبور خودرو (—)، عبور جرم (---)، عبور نیرو [۱۵] (.....)،  
 $(d_1 = 1/271 \times c_e, d_2 = 1/716 \times c_e, e_1 = 0/481 \times c_e, e_2 = 1/313 \times c_e, L = 20, H = 0/4, W = 0/2m)$



شکل ۸- (الف) جابه‌جایی عمودی نقطه وسط مجموعه تک تیر تیموشنکو ( $k=0$ ) - (ب) جابه‌جایی عمودی نقطه وسط یک تیر اویلر برنولی [ $10^\circ$ ]; به‌ازای سرعت‌های (—)  $V=56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ، (.....)  $V=72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  و (---)  $V=88 \frac{\text{km}}{\text{h}}$   
 $(L = 100 \text{ m}, E = 207 \text{ GPa}, I = 0.174 \text{ m}^4, H = 1/278 \text{ m}, W = 1 \text{ m}, \rho = 15649 / 253 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})$

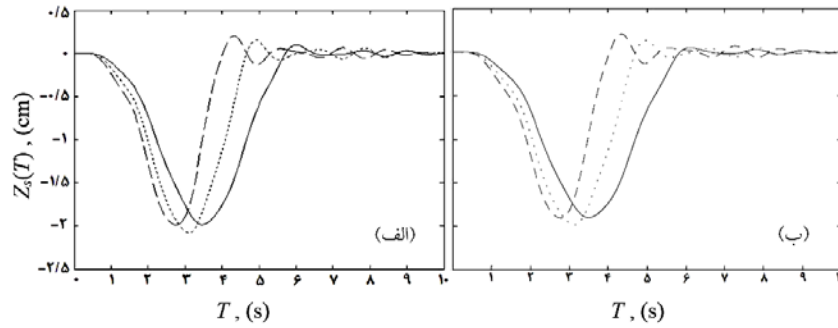
می‌دهد. نمودارهای (ب)، استخراج شده از مرجع [۱۰] هستند که عبور خودرو را از روی یک تیر اویلر برنولی نشان می‌دهند.

شکل (۸)، جابه‌جایی یک تیر را با دو تئوری مختلف، برحسب زمان نشان می‌دهد. با مقایسه نمودارهای (الف) و (ب)، یک اختلاف پاسخ کم در نقاط اکسترمم آنها دیده می‌شود. وجود این اختلاف پاسخ منطقی است، زیرا در نظر گرفتن تئوری اویلر برنولی در مرجع مذکور، تیر را سخت‌تر و جابه‌جایی را کمتر از تیر تیموشنکو نشان می‌دهد؛ اما ناچیز بودن این اختلاف پاسخ، به دلیل کوچک بودن ابعاد سطح مقطع تیر نسبت به طول آن است.

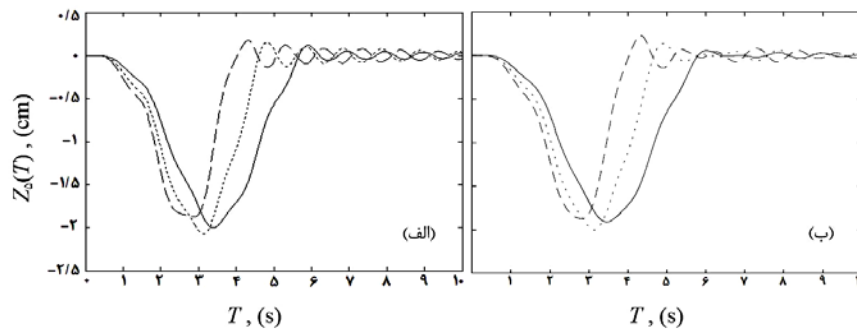
در شکل‌های (۹) و (۱۰) به ترتیب جابه‌جایی عمودی مرکز جرم خودرو و جابه‌جایی راننده برحسب زمان نشان داده شده است، که اختلاف پاسخ چندانی دیده نمی‌شود. مشاهده می‌شود که ماکزیمم جابه‌جایی‌های مربوط به خودروی عبوری از روی تیر اویلر برنولی کمتر از تیر تیموشنکو است، هر چند این اختلاف پاسخ ناچیز است. همچنین دیده می‌شود که به علت وجود مستهلک کننده‌ها پس از خروج کامل خودرو از روی تیر در حین حرکت، نمودارها به سمت نقطه تعادل خود میرا می‌شوند.

خودرو مقدار بسیار زیادی در نظر گرفته شده است تا به صورت صلب عمل کند. در حالتی که طول خودرو زیاد است، اختلاف پاسخ بین دو حالت بار متمرکز و خودرو زیاد است و با کاهش طول خودرو، کاهش می‌یابد تا جایی که برای دو حالت عبور خودرو با طول بسیار کم و عبور جرم متمرکز جابه‌جایی تقریباً یکسان می‌شود؛ زیرا برای خودرویی با طول زیاد، ابعاد آن در برابر ابعاد تیر قابل توجه است، بنابراین نمی‌توان عبور خودرو را از روی تیرها به صورت بار متمرکز مدل کرد. ولی برای خودرویی با طول کم که ابعاد آن در برابر تیر قابل چشم‌پوشی است، می‌توان خودرو را مانند یک ذره فرض کرد و با توجه به اینکه خودرو به صورت صلب در نظر گرفته شده و جرم آن قابل توجه است، برای سادگی در حل معادلات پیچیده می‌توان عبور آن را به صورت جرم متحرک مدل کرد. در این شکل برای آنکه اختلاف پاسخ بین سه حالت بار متحرک بیشتر دیده شود طول تیر کوتاه و وزن خودرو ثابت در نظر گرفته شده است، در صورتی که اگر طول تیر زیاد و جرم خودرو کم باشد اختلاف پاسخ بین سه حالت بار متحرک بسیار جزئی است.

شکل‌های (۸) تا (۱۰) نمودارهای (الف)، حل مسأله حاضر را برای یک مجموعه تک تیری با تئوری تیموشنکو، به‌ازای سرعت‌های مختلف و زمان  $T=10$  ثانیه نشان



شکل ۹- (الف) جابه‌جایی عمودی مرکز جرم خودرو، مجموعه تک تیر تیموشنکو ( $k=0$ ) - (ب) جابه‌جایی عمودی مرکز جرم خودرو، یک تیر اویلر برنولی [ $10^\circ$ ]، به‌ازای سرعت‌های  $V=56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  (.....)،  $V=72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  (---) و  $V=88 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  (—) ( $L=100 \text{ m}$ ,  $E=207 \text{ Gpa}$ ,  $I=0/174 \text{ m}^4$ ,  $H=1/278 \text{ m}$ ,  $W=1 \text{ m}$ ,  $\rho=15649/453 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )



شکل ۱۰- (الف) جابه‌جایی عمودی راننده، مجموعه تک تیر تیموشنکو ( $k=0$ ) - (ب) جابه‌جایی عمودی راننده، یک تیر اویلر برنولی [ $10^\circ$ ]، به‌ازای سرعت‌های  $V=56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  (.....)،  $V=72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  (---) و  $V=88 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  (—) ( $L=100 \text{ m}$ ,  $E=207 \text{ Gpa}$ ,  $I=0/174 \text{ m}^4$ ,  $H=1/278 \text{ m}$ ,  $W=1 \text{ m}$ ,  $\rho=15649/453 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )

## ۸- نتیجه‌گیری

ارتعاشات مجموعه‌ای از تیرهای تیموشنکوی موازی با اتصالات انعطاف‌پذیر میانی تحت عبور یک سیستم شش درجه آزادی دومحوره به‌عنوان مدلی برای یک خودرو مورد بررسی قرار گرفت. در تحلیل مسأله تعدادی معادلات دیفرانسیل حرکت و پیوستگی درهم‌گیر به‌دست آمد که برای جداسازی هم‌زمان آنها از یک تغییر متغیر خاص استفاده شد؛ بدین منظور، مقادیر سختی اتصالات میانی باید به‌گونه‌ای باشد که بردارهای ویژه یک‌ه شده ماتریس‌های سختی به‌دست آمده برای هر ستون از اتصالات میانی یکسان گردد. این محدودیت باید قبل از شروع حل بررسی شود. مشاهده شد که جابه‌جایی‌ها در یک مجموعه

چندتیری با اتصالات میانی کمتر از یک تیر به‌تنهایی است. همچنین جابه‌جایی و ممان خمشی ماکزیمم مربوط به تیری است که بار از روی آن عبور می‌کند که مقدار آن با افزایش سختی اتصالات میانی کاهش می‌یابد؛ اما در سایر تیرها با افزایش سختی اتصالات میانی، برای مقادیر بسیار پایین این سختی، مقدار بیشینه جابه‌جایی و ممان خمشی افزایش و برای مقادیر بالای سختی، کاهش می‌یابد.

همچنین مشاهده شد که جابه‌جایی‌های سیستم شش درجه آزادی نیز به‌ازای افزایش سختی اتصالات میانی، کاهش می‌یابد. بین دو حالت بار متمرکز یعنی نیرو و جرم متحرک و حالتی که خودرو دارای طول زیادی نسبت به تیر باشد، اختلاف پاسخ

سادگی در حل معادلات دیفرانسیل درهم‌گیر و پیچیده در حالت عبور خودرو، می‌توان بار را به صورت متمرکز در یک نقطه در نظر گرفت و آن را به صورت جرم متحرک مدل کرد. همچنین اگر طول تیر زیاد و جرم بار نسبت به تیر کم باشد، دو حالت نیرو و جرم متحرک تقریباً یکسان می‌شوند.

زیادی وجود دارد و با کاهش طول خودرو، این اختلاف پاسخ نیز کاهش می‌یابد. اگر ابعاد خودرو در برابر ابعاد تیر قابل چشم‌پوشی نباشد آنگاه مدل کردن بار به صورت جرم یا نیروی متمرکز به جای خودرو مناسب نیست، ولی در صورتی که ابعاد خودرو کوچک و در برابر ابعاد تیر قابل چشم‌پوشی باشد، برای

## واژه‌نامه

1. versatile element

2. VBI element

3. heaviside

## مراجع

- Willis, R., "Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures", London, Stationary Office, 1949.
- Mamandi, A., Kargarnovin, M. H., and Farsi, S., "An Investigation on Effects of Traveling Mass with Variable Velocity on Nonlinear Dynamic Response of an Inclined Timoshenko Beam with Different Boundary Conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, pp. 1694-1708, 2010.
- Sharbati, E., and Szyszkowski, W., "A New FEM Approach for Analysis of Beams with Relative Movements of Masses", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 47, pp. 1047-1057, 2011.
- Esmailzadeh, E., and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Beams Traversed by Uniform Partially Distributed Moving Masses", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 184, pp. 9-17, 1995.
- Esmailzadeh, E., and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Timoshenko Beam Subjected to a Traveling Mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 199, pp. 615-628, 1997.
- Eftekhari Azam, S., Mofid, M., and Afghani-Khoraskani, R., "Dynamic Response of Timoshenko Beam under Moving Mass", *Scientia Iranica Transactions A: Civil Engineering*, Vol. 20, pp. 50-56, 2013.
- Lin, Y. H., and Tretheway, M. W., "Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, pp. 323-342, 1990.
- Stancioiu, D., Ouyang, H., and Mottershead, J. E., "Vibration of a Continuous Beam with Multiple Elastic Supports Excited by a Moving Two-axle System with Separation", *Meccanica*, Vol. 44, pp. 293-303, 2009.
- Wu, J. J., "Free Vibration Analysis of Beams Carrying a Number of Two-Degree-of-Freedom Spring-Damper-Mass Systems", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, pp. 363-381, 2004.
- Esmailzadeh, E., and Jalili, N., "Vehicle-Passenger-Structure Interaction of Uniform Bridges Traversed by Moving Vehicles", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, pp. 611-635, 2003.
- Lou, P., and Au, F. T. K., "Finite Element Formulae for Internal Forces of Bernoulli-Euler Beams under Moving Vehicles", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, pp. 1533-1552, 2013.
- Yang, Y. B., and Wu, Y. S., "A Versatile Element for Analyzing Vehicle-Bridge Interaction Response", *Engineering Structures*, Vol. 23, pp. 452-469, 2001.
- Vu, H. V., Ordonez, A. M., and Karnopp, B. H., "Vibration of a Double-beam System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, pp. 807-822, 2000.
- Abu-Hilal, M., "Dynamic Response of a Double Euler-Bernoulli Beam due to a Moving Constant Load", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, pp. 477-491, 2006.
- Ariaei, A., Ziaei-Rad, S., and Ghayour, M., "Transverse Vibration of a Multiple-Timoshenko Beam System with Intermediate Elastic Connections Due to a Moving Load", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, pp. 263-281, 2010.
- Oniszczuk, Z., "Forced Transverse Vibrations of an Elastically Connected Complex Simply Supported Double-beam System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 264, pp. 273-286, 2003.
- Stojanovic, V., Kozic, P., Pavlovic, R., and Janevski, G., "Effect of Rotary Inertia and Shear on Vibration and Buckling of a Double Beam System under

- Compressive Axial Loading”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, pp. 1993-2005, 2011.
18. Dadfarnia, M., Jalili, N., and Esmailzadeh, E., “A Comparative Study of the Galerkin Approximation Utilized in the Timoshenko Beam Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 280, pp. 1132-1142, 2005.
19. Fryba, L., “A Rough Assessment of Railway Bridges for High Speed Trains”, *Journal of Engineering Structures*, Vol. 23, pp. 548-556, 2001.