

ارتعاش آزاد ورق‌های دایره‌ای هدفمند تابعی با ضخامت متغیر تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

محمد حسین یاس^۱، محمد نجاتی^۲ و سید سجاد جعفری^{۳*}

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی کرمانشاه

۲. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان اراک

۳. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان همدان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۸/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱۲/۱۹)

DOI: 10.18869/acadpub.jcme.35.2.131

چکیده - در این مقاله ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تابعی هدفمند که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند بررسی شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی به صورت پیوسته و تغییرات تدریجی و هدفمند مواد در راستای ضخامت ورق، به صورت کسر حجمی است. با توجه به در نظر گرفتن تغییرات خطی و غیرخطی ضخامت ورق دایره‌ای در راستای شعاع و نیز با توجه به تابع در نظر گرفته شده برای ضخامت، ضخامت ورق می‌تواند به صورت مقعر یا محدب باشد. همچنین معادلات حرکت ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه استخراج شده است. این معادلات یک سری معادلات دیفرانسیل درگیر شده هستند که با استفاده از بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکان‌ها، به طوری که شرط تقارن محوری را برآورده کند، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود که حل دقیق آنها بسیار مشکل است به همین دلیل از روش عددی تفاضل مربعات برای حل این معادلات استفاده شده است. نتایج به دست آمده با نتایج دیگر محققان مقایسه و مطابقت بسیار خوبی بین آنها مشاهده شده است. در نهایت اثرات پارامترهای مختلف هندسی و همچنین درصد کسر حجمی مختلف از نانولوله‌ها بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: مواد هدفمند، نانولوله‌های کربنی، ارتعاش آزاد، ورق دایره‌ای سوراخ‌دار، روش تفاضل مربعات.

Free Vibration of Functionally Graded Variable Thickness Carbon Nanotube Annular Plates

M. H. Yas¹, M. Nejadi² and S. S. Jafari^{3*}

1. Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah

2. Young Researchers and Elite Club, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak

3. Young Researchers and Elite Club, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Hamedan

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: sjd.jafari@iauh.ac.ir

Abstract: In this paper, free vibration of carbon nanotube-reinforced functionally graded circular plates with hole has been investigated. Distribution of carbon nanotubes are continuous and the gradual and graded changes of materials through the plate thickness are considered as volume fraction. Considering the linear and non-linear variation of circular plates through the radial direction and also considering the proposed function for the thickness, the plate thickness can be convex or concave. Moreover, the motion equations of plate were obtained based on the third-order shear deformation theory. These equations are coupled differential equations which can convert Ordinary Differential Equations (ODE) using the Trigonometric series expansion of displacement fields such that they satisfy the axial symmetry condition. Solving the converted ODE equations is too difficult. For this reason, the differential quadrature method is employed to solve these equations. The obtained results are compared with the results reported by other researchers and an excellent agreement is observed between them. Finally, the effects of different geometric parameters as well as different volume fraction of nanotubes on natural frequency have been studied.

Keywords: Functionally graded materials, Carbon nanotube, Free vibration, Circular plates with hole, Differential quadrature method.

فهرست علائم

R_0	نیرو برشی	C_{ij}	ماتریس سختی الاستیک
T	انرژی جنبشی سیستم	d	قطر نانولوله‌های کربنی
t	زمان	E_c	مدول یانگ کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی
U	میدان جابه‌جایی در راستای r	E_{CNT}	مدول یانگ طولی نانولوله‌های کربنی
U_1	انرژی پتانسیل سیستم	E_m	مدول یانگ طولی پلیمر
V	میدان جابه‌جایی در راستای θ	h	ضخامت ورق
V_{CNT}	کسر حجمی نانولوله‌های کربنی	h_0	ضخامت در $r = 0$
V_m	کسر حجمی پلیمر	k_1	پارامتر مؤثر طول
W	میدان جابه‌جایی در راستای z	k_0	فاکتور مؤثر جهت نانولوله‌های کربنی
W_{nt}	کسر جرمی نانولوله	k_w	پارامتر موج نانولوله‌های کربنی
علائم یونانی		l	طول نانولوله‌های کربنی
ϵ_{ij}	ماتریس کرنش	M	پارامتر هندسی
$\eta = \frac{z}{h}$	متغیر بی‌بعد	M_r	ممان خمشی
ν	ضریب پواسون کامپوزیت‌های نانولوله کربنی / پلی‌استیرن	$M_{r\theta}$	ممان پیچشی
ν_{CNT}	ضریب پواسون نانولوله کربنی	M_θ	ممان خمشی
ν_m	ضریب پواسون پلیمر	n	عدد موج محیطی
δ	نماد تغییرات	P_r	ممان خمشی
ρ	چگالی کامپوزیت‌های نانولوله کربنی / پلی‌استیرن	$P_{r\theta}$	ممان پیچشی
ρ_{CNT}	چگالی جرمی نانولوله‌های کربنی	P_θ	ممان خمشی
ρ_m	چگالی جرمی پلیمر خالص	q	پارامتر هندسی
σ_{ij}	ماتریس تنش	Q_r	نیرو برشی
φ	متغیر تعریف شده در رابطه (۱-۲)	Q_θ	نیرو برشی
ψ_r	زاویه چرخش صفحه $r-z$	R_r	نیرو برشی
ψ_θ	زاویه چرخش صفحه $\theta-z$		

به صورت چهار پارامتری و در راستای شعاع در نظر گرفت و نشان داد که به ازای پروفیل کسر حجمی خاص، فرکانس‌های منتجه می‌تواند بالاتر از فرکانس‌های پوسته مخروطی متشکل از فلز خالص و سرامیک خالص قرار بگیرد.

فیدلوس و همکاران [۶] خصوصیات مکانیکی- حرارتی نانوکامپوزیت با زمینه اپوکسی بر پایه درصد وزنی کم نانولوله (از ۰/۰۱ تا ۰/۵ درصد وزنی) و راستای دلخواه نانولوله کربنی تک‌جداره و چندجداره را به صورت تجربی بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که مدول یانگ در نانوکامپوزیت‌ها با ماتریس رزین اپوکسی نسبت به رزین اپوکسی بهبود می‌یابد. همچنین مطابق بررسی آنها، فقط با استفاده از مقدار کمی نانولوله کربنی، چقرمگی ضربه کششی^۳ زیاد می‌شود.

سانگ و یان [۷] خصوصیات مؤثر الاستیک نانوکامپوزیت پر شده با نانولوله را به صورت تجربی و عددی بررسی کردند. آنها راستای نانولوله کربن را به طور دلخواه در داخل ماتریس فرض کردند. هان و الیوت [۸] با استفاده از شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی^۴ به بررسی خواص مکانیکی پلیمر تقویت شده با نانولوله کربن تک‌جداره پرداختند. آنها نانولوله کربن را در دو پلیمر متفاوت با درصد‌های حجمی مختلف در نظر گرفتند. نتایج شبیه‌سازی آنها این نظریه را که خواص مکانیکی کامپوزیت‌های پلیمری با افزایش نانولوله کربن بهبود پیدا می‌کنند، تأیید می‌کند. علاوه بر این، آنها نشان دادند که تأثیر پیوندهای بین نانولوله کربن و پلیمر تا زمانی که بین اتم‌های نانولوله کربن و پلیمر پیوند قوی وجود دارد، نباید نادیده گرفته شوند. همچنین در پیوندهای بین مولکولی بین نانولوله و پلیمر اختلاف قابل ملاحظه‌ای بین نتایج شبیه‌سازی با قانون اختلاط در مقیاس ماکروسکوپیک مشاهده شد.

شن [۸] برای اولین بار ایده استفاده نانولوله‌های کربن در مواد هدفمند را مطرح کرد. او در این مقاله خمش غیرخطی ورق‌های مستطیلی هدفمند کامپوزیتی که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند را بررسی کرد. خصوصیات نانولوله کربن وابسته به دما فرض شده و با استفاده از شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی

با توجه به پیشرفت روزافزون صنعت و تکنولوژی در زمینه‌های مختلف، نیاز به موادی که ویژگی‌های منحصر به فردی داشته باشند بیش از پیش احساس می‌شود. به عنوان نمونه، برای پوشش شاتل‌های فضایی و راکتورهای هسته‌ای که در معرض درجه حرارت بالا قرار دارند باید از موادی که مقاومت بالایی در برابر حرارت دارند استفاده نمود. بدین منظور در سال ۱۸۹۴ مواد تابعی مدرج^۱ برای اولین بار در ژاپن ساخته شد [۱] که از دیدگاه ترموالاستیک مطالعات گسترده‌ای بر روی آنها انجام شده است [۲]. در دهه‌های اخیر با افزایش چشمگیر تقاضا برای سازه‌هایی با مقاومت بالا در برابر حرارت، جاذب انرژی و سبک، مطالعات زیادی بر روی رفتار مواد تابعی مدرج (مواد هدفمند) صورت گرفته است.

نی و ژونگ [۳] ارتعاشات سه‌بعدی آزاد و اجباری ورق‌های دایره‌ای هدفمند را تحت شرایط مرزی مختلف به صورت نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. آنها فرکانس‌های ارتعاشی و پاسخ‌های دینامیکی ورق را به دست آوردند و نشان دادند که با افزایش اندیس خواص مواد، کمترین فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین در مسأله ارتعاش اجباری با نزدیک‌تر شدن فرکانس اجباری به فرکانس طبیعی، تغییر مکان‌ها و تنش‌ها افزایش می‌یابند.

ملک‌زاده [۴] تحلیل ارتعاش آزاد سه‌بعدی ورق هدفمند بر روی بستر الاستیک را انجام داد. در این مقاله تغییرات تدریجی کسر حجمی مواد با استفاده از قانون توانی و توزیع نمایی در راستای ضخامت ورق در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به دست آمده و به کمک بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکان‌ها به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و معادلات با استفاده از روش تفاضل مربعات^۲ حل شده‌اند.

ترنابنه [۵] ارتعاش آزاد یک پوسته مخروطی هدفمند را به کمک روش تفاضل مربعات دوبعدی بررسی نمود. وی شرایط تکیه‌گاهی را به صورت ساده و تغییرات کسر حجمی را

به دست آمده‌اند. شن معادلات حاکم را بر پایه تئوری تغییر مکان برشی مرتبه بالاتر ردی با سینماتیک غیرخطی ون کارمن و با در نظر گرفتن تأثیرات حرارتی به دست آورد و از روش اختلالی^۵ دو مرحله‌ای برای محاسبه منحنی‌های بار- تغییر مکان و بار- ممان خمشی استفاده کرد. بررسی منحنی‌های بار- ممان خمشی ورق نشان داد که خصوصیات مکانیکی ورق تقویت شده با نانولوله‌ها بهبود یافته است. همچنین نتایج مبین این است که علاوه بر درصد حجمی نانولوله‌های کربن، عوامل دیگری مانند افزایش دما، شرایط مرزی درون صفحه‌ای، تغییر مکان برشی عرضی و نسبت‌های طولی بر خصوصیات خمشی غیرخطی تأثیرگذار هستند.

لیو و همکاران [۹] در یک مطالعه جامع، به بررسی خواص مکانیکی مواد هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداختند. در زمینه ارتعاشات مواد هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مطالعات گسترده‌ای انجام شده است که در آنها از روش‌های مختلف برای حل معادلات حاکم استفاده شده است [۱۴-۱۰].

هدایتی و سبحانی [۱۵] اثرات نانولوله‌های کربنی را بر روی ارتعاش آزاد ورق‌های حلقوی بررسی کردند. آنها از تخمین موری- تاکانا برای اعمال اثرات نانولوله‌ها بر روی معادلات حاکم استفاده نمودند. وانگ و شن [۱۶] ارتعاشات غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را در محیط‌های دمایی بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد.

کی و همکارانش [۱۷] ارتعاشات غیرخطی یک تیر کامپوزیتی هدفمند تقویت شده با نانولوله کربن را بررسی کردند. آنها معادلات حاکم را به کمک تئوری مرتبه بالاتر با سینماتیک غیرخطی ون کارمن به دست آورده و نشان دادند که افزایش کسر حجمی نانولوله منجر به افزایش فرکانس‌های خطی و غیرخطی می‌شود. همچنین توزیع متقارن نانولوله منجر به فرکانس‌های بالاتری نسبت به توزیع نامتقارن و یا یکنواخت می‌شود.

استفاده از ورق‌های دایره‌ای متشکل از مواد پیشرفته و مواد

هدفمند در صنایع هوافضا، هسته‌ای، شیمیایی و... روز به روز بیشتر می‌شود. از سوی دیگر محصولات گوناگون نانوفناوری، مانند نانوکامپوزیت‌ها، کاربردهای وسیعی در صنایع مختلف پیدا کرده‌اند. نانوکامپوزیت‌ها دارای انواع مختلفی هستند. یکی از مهم‌ترین انواع نانوکامپوزیت‌ها، نانوکامپوزیت پلیمری بوده که با نانولوله کربن تقویت شده‌اند. نانولوله کربن به‌خاطر خواص فوق‌العاده مکانیکی، الکتریکی و حرارتی که دارد تأثیر زیادی در بهبود خواص پلیمر می‌گذارد.

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار هدفمند، که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند، بررسی شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی به‌صورت پیوسته و تغییرات تدریجی و هدفمند مواد در راستای ضخامت ورق، به‌صورت کسر حجمی است. با توجه به در نظر گرفتن تغییرات خطی و غیرخطی ضخامت ورق دایره‌ای در راستای شعاع و نیز با توجه به تابع در نظر گرفته شده برای ضخامت، ضخامت ورق می‌تواند به‌صورت مقعر یا محدب باشد. همچنین معادلات حرکت ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه استخراج شده است. این معادلات یک سری معادلات دیفرانسیل درگیر هستند که با استفاده از بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکان‌ها، به‌طوری‌که شرط تقارن محوری را برآورده کند، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود که حل دقیق آنها بسیار مشکل است به‌همین دلیل از روش عددی تفاضل مربعات برای حل این معادلات استفاده شده است. نتایج به دست آمده با نتایج دیگر محققان مقایسه و مطابقت بسیار خوبی بین آنها مشاهده شده است. در نهایت اثرات پارامترهای مختلف هندسی و همچنین درصد کسر حجمی مختلف از نانولوله‌ها بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است.

۲- استخراج معادلات

۲-۱- اعمال اثرات نانولوله‌ها در خواص مکانیکی

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، توزیع نانولوله‌ها تأثیر به‌سزایی در خواص مکانیکی مخصوصاً مدول یانگ دارد. با

جدول ۱- خواص مکانیکی پلی استیرن و نانولوله کربنی خالص [۱۸].

$E_m = 1/9 \text{ GPa}$	
$\rho_m = 1.05 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$	پلی استیرن
$\nu_m = 0.34$	
$E_{CNT} = 900 \text{ GPa}$	
$\rho_{CNT} = 2100 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$	نانولوله کربنی
$\nu_{CNT} = 0.28$	
$d = 25 \text{ nm}$	ابعاد نانولوله های کربنی
$l = 60 \mu\text{m}$	
$k_o = 0.2$	مقادیر استفاده شده در معادله (۱)
$k_w = 0.1$	
$E_c = 3/8 \text{ GPa}$	
$V_{CNT} = 0.15$	

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (5)$$

خواص مکانیکی پلی استیرن و نانولوله های کربنی خالص در جدول (۱) آورده شده است. منحنی تغییرات مدول یانگ کامپوزیت های نانولوله کربنی / پلی استیرن برحسب تغییرات کسر حجمی براساس رابطه (۱) در شکل (۱) نشان داده شده و با داده های تجربی مرجع [۲۰] مقایسه شده است. همان طور که این شکل نشان می دهد مطابقت خوبی بین نتایج تجربی و نتایج حاصل از رابطه (۱) وجود دارد.

در این مقاله فرض شده است که توزیع نانولوله های کربن در راستای ضخامت ورق دایره ای سوراخ دار به صورت خطی باشد. از این رو چند تابع برای توزیع نانولوله ها در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. توزیع نامتقارن نانولوله های کربن در راستای ضخامت^۷ که در این حالت از رابطه زیر استفاده می شود:

$$V_{CNT} = \left(1 - \frac{z}{h}\right) V_{CNT}^* \quad \text{توزیع نامتقارن هدفمند} \quad (6)$$

دو نوع مختلف از توزیع خطی متقارن از کسر حجمی نانولوله ها در راستای ضخامت^۸ که به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

استفاده از قانون مخلوطها، می توان مدول یانگ کامپوزیت های پلیمری تقویت شده با نانولوله های کربنی (E_c) را به صورت زیر تخمین زد [۱۸ و ۱۹]:

$$E_c = (k_1 k_o k_w E_{CNT} - E_m) V_{CNT} e^{\gamma V_{CNT}} + E_m \quad (1)$$

که در رابطه فوق، E_m و E_{CNT} به ترتیب مدول یانگ طولی نانولوله های کربنی و پلیمر مورد نظر هستند. همچنین کسر حجمی نانولوله های کربنی و k_1 ، k_o و k_w به ترتیب پارامتر مؤثر طول، فاکتور مؤثر جهت نانولوله های کربنی و پارامتر موج نانولوله های کربنی هستند. k_1 با استفاده از رابطه زیر به دست می آید:

$$k_1 = 1 - \frac{\tanh \phi}{\phi} \quad (2)$$

به طوری که:

$$\phi = \frac{\gamma l}{d} \sqrt{\frac{-2E_m}{E_{CNT}(1-\nu_m) \ln(V_{CNT})}}$$

$$\gamma = \frac{\ln(\beta')}{\bar{V}_{CNT}}$$

$$\beta' = \frac{\hat{E}_c - E_m}{(k_1 k_o k_w E_{CNT} - E_m) \bar{V}_{CNT}} \quad (3)$$

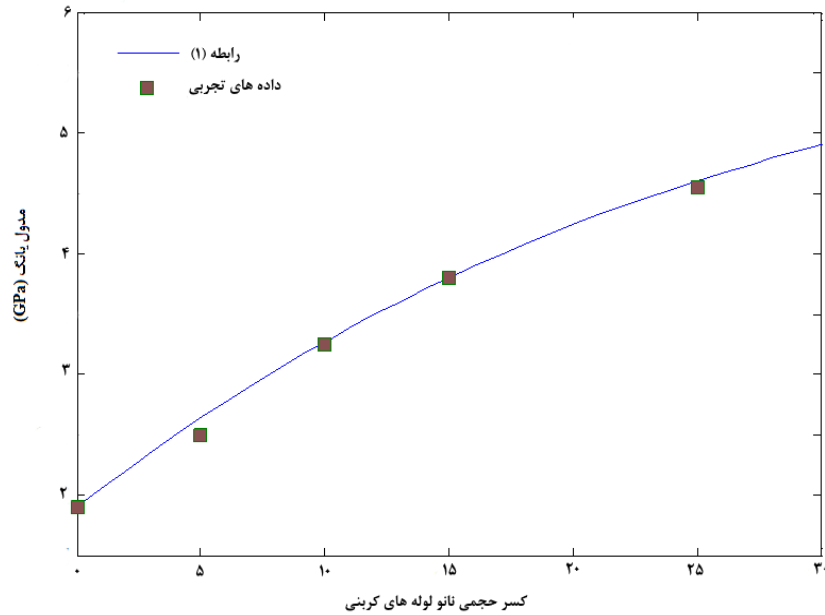
در رابطه فوق، l و d به ترتیب طول و قطر نانولوله های کربنی و ν_m ضریب پواسون پلیمر است. پارامترهایی که با علامت \wedge مشخص شده اند به صورت تجربی و از طریق تست کشش برای نانولوله های با درصد وزنی بالا تعیین می شوند.

چگالی (ρ) و ضریب پواسون (ν) کامپوزیت های نانولوله کربنی / پلی استیرن^۶ طبق قانون خطی مخلوطها به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\rho = V_{CNT} \rho_{CNT} + V_m \rho_m \quad (4)$$

$\nu = V_{CNT} \nu_{CNT} + V_m \nu_m$ که ρ_m و ρ_{CNT} به ترتیب چگالی جرمی نانولوله های کربنی و پلیمر خالص هستند. V_m و V_{CNT} به ترتیب کسر حجمی نانولوله های کربنی و کسر حجمی پلیمر خالص هستند.

در این مقاله فرض شده که ماتریس پلی استیرن با نانولوله های کربنی تقویت شده، به طوری که برای کسر حجمی آنها به صورت زیر می توان نوشت:



شکل ۱- منحنی تغییرات مدول یانگ کامپوزیت‌های نانولوله کربنی / پلی‌استیرین برحسب تغییرات کسر حجمی تغییرات و مقایسه بین داده‌های تجربی و نتایج رابطه (۱)

۲-۲- معادلات حاکم با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

در شکل (۴) شماتیکی از ورق دایره‌ای سوراخ‌دار با ضخامت متغیر در راستای شعاعی نشان داده شده است. معادلات حاکم با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی به‌دست آمده‌اند. براساس این تئوری، خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل دیگر راست و مستقیم باقی نمی‌مانند. بنابراین، مؤلفه‌های جابه‌جایی U و V به‌صورت توابع مرتبه بالا از Z فرض شده و مؤلفه W مستقل از Z در نظر گرفته می‌شود. میدان جابه‌جایی طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۲۱]:

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta, z, t) &= z\psi_r(r, \theta, t) \\
 &\quad - \frac{4z^3}{3h^3} \left(\psi_r(r, \theta, t) + \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \right) \\
 V(r, \theta, z, t) &= z\psi_\theta(r, \theta, t) \\
 &\quad - \frac{4z^3}{3h^3} \left(\psi_\theta(r, \theta, t) + \frac{\partial w(r, \theta, t)}{r\partial\theta} \right) \\
 W(r, \theta, z, t) &= w(r, \theta, t)
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$V_{CNT} = \frac{4|z|}{h} V_{NT}^* \quad \text{توزیع متقارن هدفمند نوع اول} \quad (7)$$

$$V_{CNT} = 4\left(\frac{1}{4} - \frac{|z|}{h}\right) V_{NT}^* \quad \text{توزیع متقارن هدفمند نوع دوم}$$

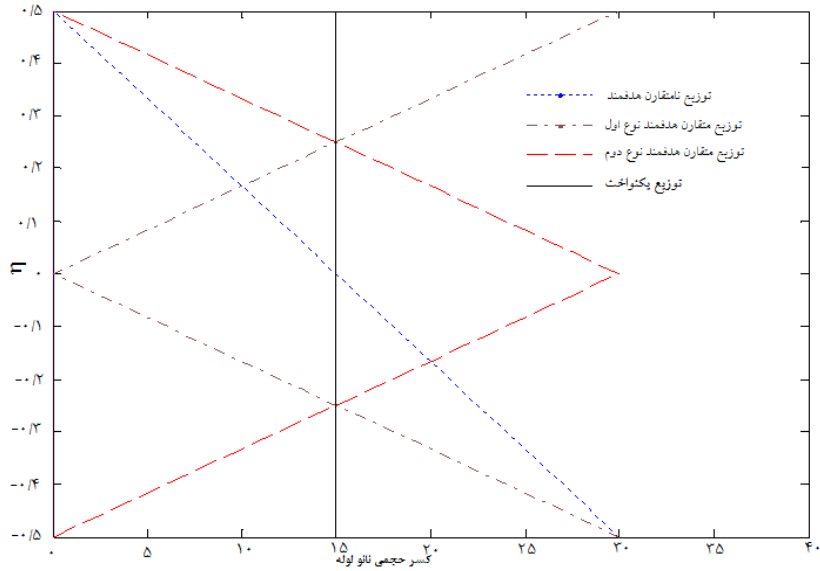
توزیع یکنواخت^۹ نانولوله‌ها که تابع آن به‌صورت زیر است:

$$V_{CNT} = V_{NT}^* \quad (8)$$

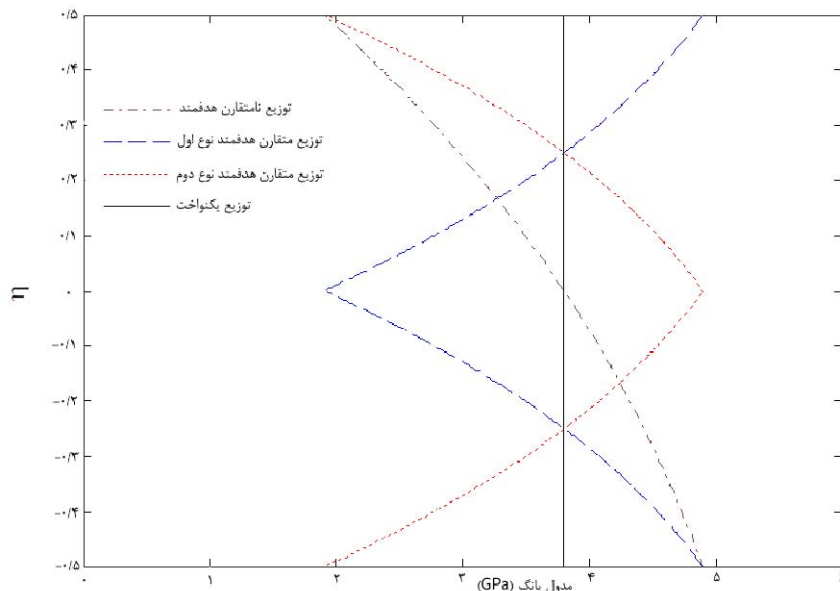
در روابط فوق h ضخامت ورق و V_{NT}^* به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$V_{NT}^* = \frac{w_{NT}}{w_{NT} + \left(\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}\right) - \left(\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}\right)w_{NT}} \quad (9)$$

که w_{NT} ، ρ_{CNT} و ρ_m به‌ترتیب کسر جرمی نانولوله، چگالی جرمی نانولوله‌های کربنی و چگالی جرمی پلیمر خالص هستند. با تعریف پارامتر بی‌بعد $\eta = z/h$ تغییرات کسر حجمی نانولوله‌های کربن و همچنین مدول یانگ در راستای ضخامت ورق دایره‌ای به‌صورت شکل‌های (۲) و (۳) است.



شکل ۲- تغییرات کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت به‌ازای توزیع مختلف

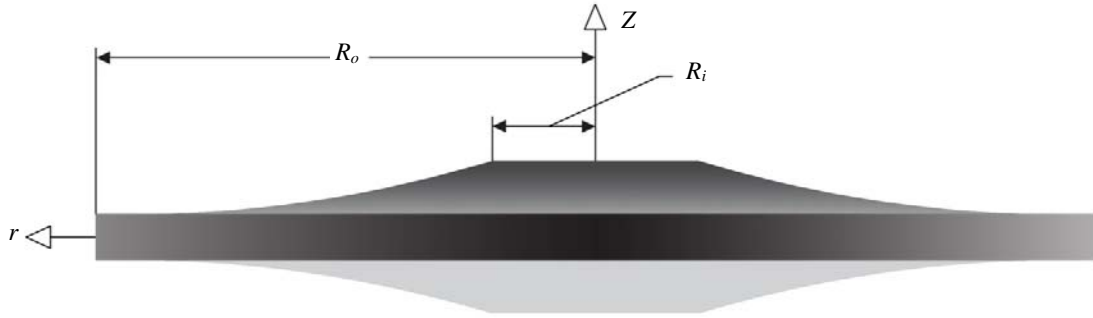


شکل ۳- تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت به‌ازای توزیع مختلف از کسر حجمی نانولوله‌های کربنی

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

که در این رابطه C_{ij} ماتریس سختی الاستیک، ε_{ij} کرنش و σ_{ij}

که در آن، w جابه‌جایی عرضی (خیز) صفحه میانی است. ψ_r و ψ_θ زاویه چرخش صفحات $r-z$ و $\theta-z$ در $Z=0$ حول محوره‌های r و θ هستند. رابطه تنش-کرنش در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است:



شکل ۴- ورق دایره‌ای با ضخامت متغیر در راستای شعاعی

حال با توجه به اینکه کار نیروهای خارجی برابر صفر است و با در نظر گرفتن اصل همیلتون می‌توان نوشت:

$$\int_V (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (15)$$

که در آن T انرژی جنبشی و U انرژی پتانسیل سیستم و δ نماد تغییرات^۱ است. برای به دست آوردن δU می‌توان نوشت:

$$\delta U = \int_V (\sigma_r \delta \epsilon_r + \sigma_\theta \delta \epsilon_\theta + \sigma_{z\theta} \delta \gamma_{z\theta} + \sigma_{rz} \delta \gamma_{rz} + \sigma_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta}) dV \quad (16)$$

منتجه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_r \\ P_r \end{Bmatrix} &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} \sigma_r dz \\ \begin{Bmatrix} M_\theta \\ P_\theta \end{Bmatrix} &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} \sigma_\theta dz \\ \begin{Bmatrix} M_{r\theta} \\ P_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} \sigma_{r\theta} dz \\ \begin{Bmatrix} Q_r \\ Q_\theta \end{Bmatrix} &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} R_r \\ R_\theta \end{Bmatrix} &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} z^2 \begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (17)$$

که $M_r, M_\theta, P_r, P_\theta$ ممان‌های خمشی، $M_{r\theta}, P_{r\theta}$ ممان‌های پیچشی و $Q_r, Q_\theta, R_r, R_\theta$ نیروهای برشی هستند. با تعریف نتیجه‌ها تنش به صورت رابطه (۱۷) و با جایگذاری (۱۴) در رابطه (۱۶) و انجام ساده‌سازی، رابطه (۱۸) به دست می‌آید:

تنش هستند. ضرایب ماتریس الاستیک به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \frac{E(z)\nu(z)}{(1-\nu(z)^2)} \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین روابط کرنش - جابه‌جایی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در (۱۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= z \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{r z^2}{r h^2} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left\{ z \psi_r - \frac{r z^2}{r h^2} \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{r z^2}{r h^2} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} \right) \right\} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left\{ z \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{r z^2}{r h^2} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) - z \psi_\theta - \frac{r z^2}{r h^2} \left(\psi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{r z^2}{r h^2} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right) \right\} \\ \gamma_{rz} &= \psi_r - \frac{r z^2}{h^2} \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= \psi_\theta - \frac{r z^2}{h^2} \left(\psi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\delta U = \int_{R_i}^R \int_0^{2\pi} \left\{ \left[M_r \frac{\partial \delta \psi_r}{\partial r} - \frac{r P_r}{r h^2} \left(\frac{\partial \delta \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[M_\theta \delta \psi_r - \frac{r P_\theta}{r h^2} \left(\delta \psi_r + \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right) + M_\theta \frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{r P_\theta}{r h^2} \left(\frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta w}{r \partial \theta^2} \right) \right] + \left[Q_\theta \delta \psi_\theta - \frac{r R_\theta}{h^2} \left(\delta \psi_\theta + \frac{\partial \delta w}{r \partial \theta} \right) + Q_\theta \frac{\partial \delta w}{r \partial \theta} \right] + \left[Q_r \delta \psi_r - \frac{r R_r}{h^2} \left(\delta \psi_r + \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right) + Q_r \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right] \right\} + \left\{ \frac{1}{r} \left[M_{r\theta} \frac{\partial \delta \psi_r}{\partial \theta} - \frac{r P_{r\theta}}{r h^2} \left(\frac{\partial \delta \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta w}{r \partial r \partial \theta} \right) - M_{r\theta} \delta \psi_\theta - \frac{r P_{r\theta}}{r h^2} \left(\delta \psi_\theta + \frac{\partial \delta w}{r \partial \theta} \right) \right] + \left[M_{r\theta} \frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial r} - \frac{r P_{r\theta}}{r h^2} \left(\frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial \delta w}{r^2 \partial \theta} \right) \right] \right\} r dr d\theta \quad (18)$$

همچنین δT به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta T = \int_{R_i}^R \int_0^{2\pi} \left\{ I_1 \left(\frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + I_r \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta \psi_r}{\partial t} \right) + I_r \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial t} \right) + I_v \left(\frac{r}{r h^2} \right)^2 \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta \psi_r}{\partial t} \right) + I_v \left(\frac{r}{r h^2} \right)^2 \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial t} \right) + I_v \left(\frac{r}{r h^2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial t} \right) + I_v \left(\frac{r}{r h^2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{r \partial \theta \partial t} \right) - I_\Delta \frac{\wedge}{r h^2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta \psi_r}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial t} \right) \right\} + I_v \left(\frac{r}{r h^2} \right)^2 \left\{ \frac{\partial \delta \psi_r}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} + \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial t} \right\} + I_v \left(\frac{r}{r h^2} \right)^2 \left\{ \frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial t} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{r \partial \theta \partial t} \right\} - I_\Delta \frac{\wedge}{r h^2} \left\{ \frac{\partial \delta \psi_r}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} + \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial t} + \frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial t} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{r \partial \theta \partial t} \right\} \right\} r dr d\theta \quad (19)$$

که در رابطه فوق، ثوابت به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(I_1, I_r, I_r, I_r, I_\Delta, I_v) = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \rho \{ 1, z, z^2, z^3, z^4, z^6 \} dz \quad (20)$$

در نهایت با قرار دادن روابط (18) و (19) در رابطه (15)،

معادلات حرکت ورق دایره‌ای سوراخدار تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و ضخامت متغیر برحسب متجه‌های نیرو و

ممان به دست می آید:

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{h^2} \left(\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{r}{r h^2} \left(\frac{\partial^2 P_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 P_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_\theta}{\partial \theta^2} \right) + \frac{r}{r h^2} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial P_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial P_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{r}{r h^2} \left(\frac{\partial P_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{r}{r h^2} \frac{P_\theta - P_r}{r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{r}{h^2} R_r - Q_r = \left(I_r - \frac{\wedge}{r h^2} I_\Delta + \frac{1}{4h^2} I_v \right) \ddot{\psi}_r - \frac{r}{r h^2} \left(I_\Delta - \frac{r}{r h^2} I_v \right) \frac{\partial \ddot{w}}{\partial r} \quad (21)$$

مقعر و $M > 1$ پروفیل ضخامت محدب خواهد بود. در شکل های (۵) تا (۸)، پروفیل تغییرات ضخامت ورق گرد که تابع شعاعی بوده، به ازای پارامترهای مختلف q و M ، برحسب شعاع، نشان داده شده است.

۳- حل معادلات

۳-۱- اعمال روش تفاضل مربعات

روش تفاضل مربعات اولین بار توسط بلمن و کاستی در سال ۱۹۷۱ در مقاله‌ای ارائه [۲۳] و بعدها توسط برت و مالیک برای حل معادلات مکانیک جامدات استفاده شد [۲۴]. از این روش می‌توان در حل معادلات مقدار مرزی و مقدار اولیه با طبیعت خطی و غیرخطی استفاده نمود (برای مطالعه جزئیات بیشتر به مرجع [۲۵] مراجعه شود). با اعمال این روش به معادلات حرکت، آنها به فرم روش تفاضل مربعات نوشته می‌شوند (با توجه به طولانی بودن روابط، این روابط در ضمیمه آورده شده است).

۴- نتایج و بحث

۴-۱- بررسی صحت نتایج

هدف اصلی این مقاله بررسی ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تابعی هدفمند که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند، است. در ابتدا لازم است تا نتایج به‌دست آمده با نتایج سایر تحقیقات مقایسه شود تا اعتبار و صحت نتایج به‌دست آمده تأیید شود. بدین منظور از تابع زیر برای تغییرات خواص استفاده شده است [۲۶]:

$$C_{ij}(z) = C_{ij}^m e^{(\beta z/h)} \quad (28)$$

$$\rho(z) = \rho^m e^{(\beta z/h)}$$

در جدول‌های (۲) و (۳) فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به‌دست آمده به‌ترتیب با نتایج مراجع [۲۶-۲۸] و [۳ و ۲۸] مقایسه شده است. فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به‌صورت $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_m / C_{11}}$ در نظر گرفته شده است که در آن

$$\frac{1}{r}(Q_r - \frac{4}{h^2}R_r) = I_v \ddot{w} - (\frac{4}{r h^2})^2 I_v (\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \theta^2}) + \frac{4}{r h^2} (I_\delta - \frac{4}{r h^2} I_v) (\frac{\partial \ddot{\psi}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{\psi}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \ddot{\psi}_r) - \frac{16}{9 h^4} \frac{\partial I_v}{\partial r} (\frac{\partial \ddot{w}}{\partial r} + \frac{\partial \ddot{\psi}_r}{\partial r}) + \frac{4}{r h^2} \frac{\partial I_\delta}{\partial r} (\ddot{\psi}_r) \quad (23)$$

(..) به‌معنای مشتق دوم نسبت به زمان است. برای اعمال شرایط مرزی در حالت تکیه‌گاه ساده می‌توان نوشت:

$$W = 0$$

$$M_r = 0$$

$$M_{r\theta} - \frac{4}{3} P_{r\theta} = 0 \quad (24)$$

و در حالت تکیه‌گاه گیردار:

$$W = 0$$

$$\psi_r = 0$$

$$\psi_\theta = 0 \quad (25)$$

با قرار دادن متجه‌های نیرو و ممان برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی و سپس جایگذاری در معادلات حرکت برحسب متجه‌ها و در نهایت قرار دادن روابط (۲۶) در این روابط، معادلات حرکت برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی برای ورق گرد تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با ضخامت متغیر در راستای شعاعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه، استخراج می‌شود:

$$\psi_r(r, \theta, t) = \psi_r(r) \cos(n\theta) e^{i\omega t}$$

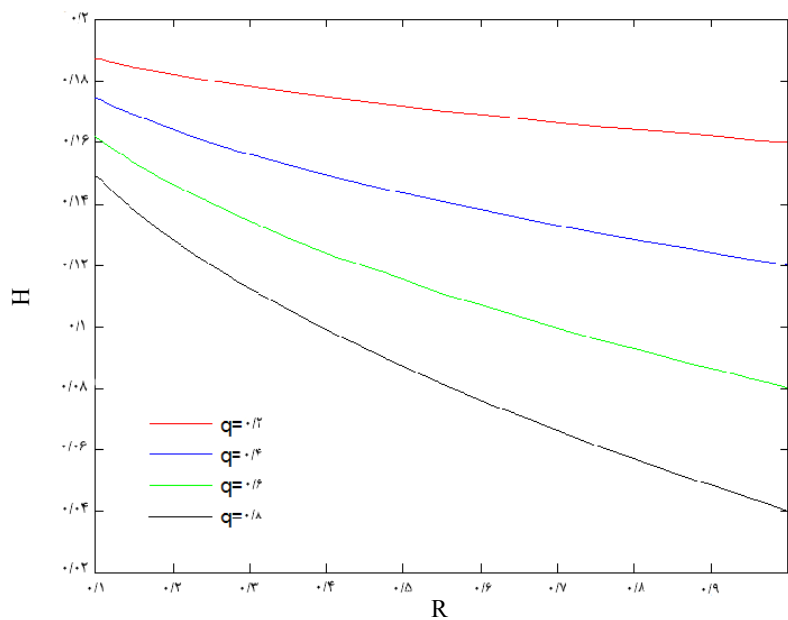
$$\psi_\theta(r, \theta, t) = \psi_\theta(r) \sin(n\theta) e^{i\omega t}$$

$$W(r, \theta, t) = W(r) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \quad (27)$$

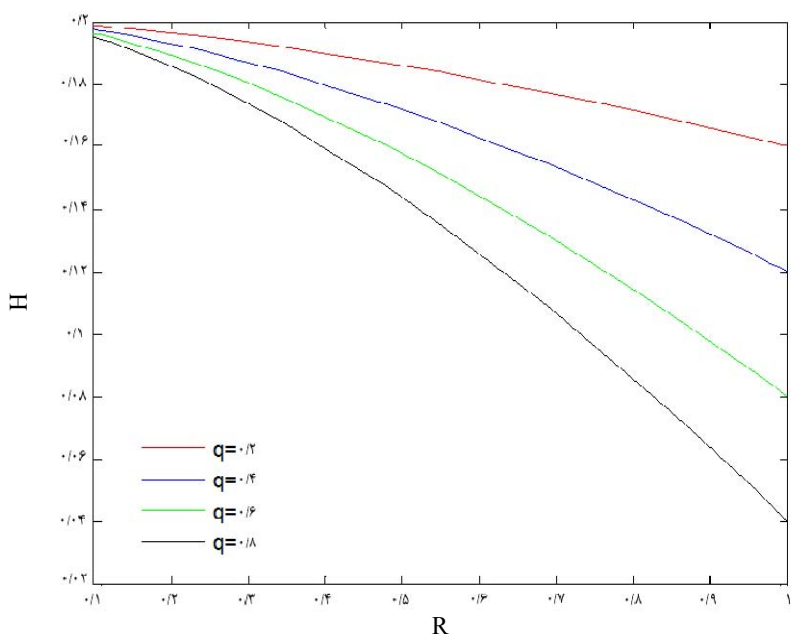
که $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ در روابط بالا عدد موج محیطی است و $n = 0$ به‌معنی هندسه متقارن محوری است. در این مقاله ضخامت به‌صورت تابعی از شعاع ورق گرد در نظر گرفته شده که طبق مرجع [۲۲] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(r) = h_0 \left\{ 1 - q \left(\frac{r}{r_0} \right)^M \right\}, \quad 0 \leq q < 1, \quad M > 0 \quad (27)$$

که h_0 ضخامت در $r = 0$ و q و M پارامترهای هندسی هستند. در صورتی که $q = 0$ ، ضخامت ثابت و به‌ازای $q \neq 0$ اگر $M = 1$ منحنی ضخامت خطی و اگر $M < 1$ پروفیل ضخامت



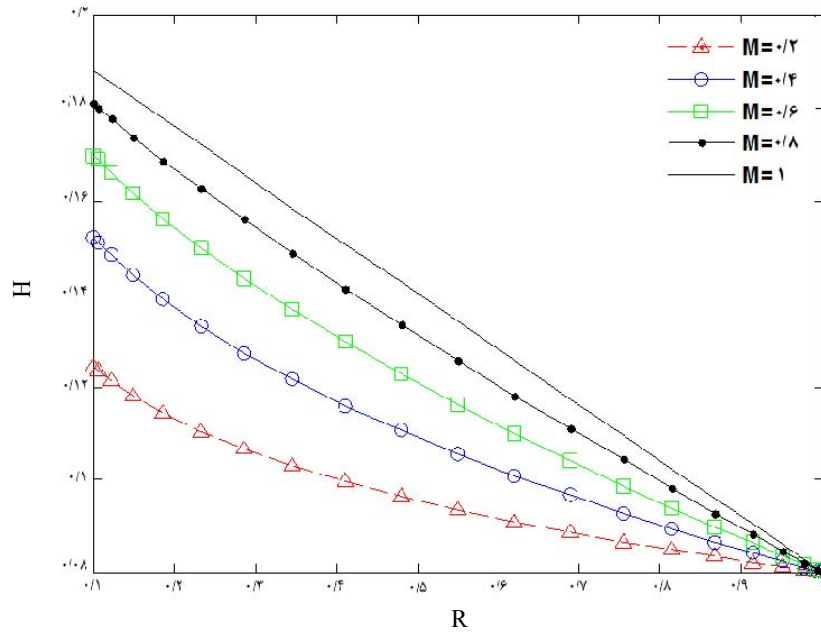
شکل ۵- تغییرات ضخامت ورق گرد نسبت به شعاع: $m = 0.5, h_0 = 0.2, R_i / R_0 = 0.1$



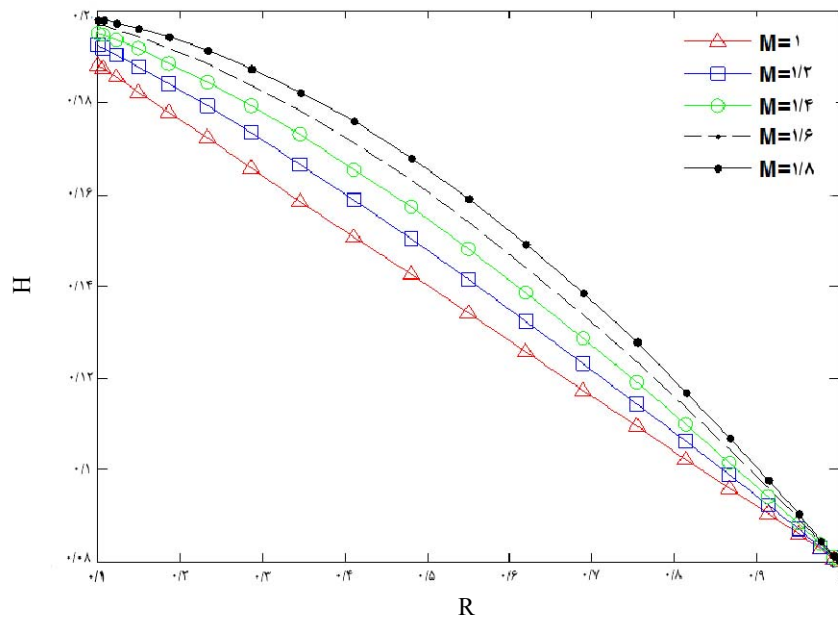
شکل ۶- تغییرات ضخامت ورق گرد نسبت به شعاع: $m = 1.5, h_0 = 0.2, R_i / R_0 = 0.1$

گرفته شده است. همان طور که از این جدول مشخص است، مطابقت خوبی بین نتایج وجود دارد. در جدول (۴) مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد به ازای شرایط مرزی مختلف و اعداد موج مختلف ۰، ۱، ۲، ۳ برای

n در این جدول $C_{11} = E_m(1 - \nu_m) / (1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)$ عدد موج محیطی، R_i شعاع داخلی و R_0 شعاع خارجی از ورق گرد و N_f تعداد گره ها در راستای شعاعی است. همچنین نتایج کار حاضر به ازای ۱۵ گره در راستای شعاعی



شکل ۷- تغییرات ضخامت ورق گرد نسبت به شعاع: $q = 0/6, R_1/R_0 = 0/1, h_0 = 0/2$ به ازای $M \leq 1$



شکل ۸- تغییرات ضخامت ورق گرد نسبت به شعاع: $q = 0/6, R_1/R_0 = 0/1, h_0 = 0/2$ به ازای $M \geq 1$

۴-۲- بررسی همگرایی

برای بررسی همگرایی نتایج به دست آمده با استفاده از روش تفاضل مربعات، به ازای تعداد گره‌های مختلف (N_r) یعنی

یک ورق گرد ایزوتروپیک به دست آمده و با نتایج حاصل از حل دقیق مرجع [۲۹] مقایسه شده است. همانگونه که مقایسه نتایج نشان می‌دهد، مطابقت مناسبی بین نتایج وجود دارد.

جدول ۲- مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار- گیردار و اعداد موج مختلف،

$$R_i / R_0 = 0/2, h / R_0 = 0/1, N_r = 15, \beta = 1$$

n	مطالعه حاضر (تئوری مرتبه سوم)	مرجع [۲۶]	مرجع [۲۷]	مرجع [۲۸]
۰	۰/۰۷۹۸	۰/۰۷۹۶	۰/۰۸۰۷	۰/۰۸۰۱
۱	۰/۰۸۲۹	۰/۰۸۲۶	۰/۰۸۳۷	۰/۰۸۳۱
۲	۰/۰۹۶۰	۰/۰۹۵۲	۰/۰۹۶۱	۰/۰۹۵۵

جدول ۳- مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار- گیردار و اعداد موج مختلف،

$$R_i / R_0 = 0/1, h / R_0 = 0/2, N_r = 15, \beta = 1$$

n	مطالعه حاضر (تئوری مرتبه سوم)	مرجع [۳]	مرجع [۲۸]
۰	۰/۱۸۷۱	۰/۱۸۷۱	۰/۱۸۷۲
۱	۱۹۸۷/۰	۰/۱۹۹۴	۰/۱۹۹۰
۲	۰/۲۷۶۶	۰/۲۷۸۱	۰/۲۷۸۳
۳	۰/۳۷۹۱	۰/۳۸۱۹	۰/۳۸۱۹

جدول ۴- مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده در شرایط مرزی و اعداد موج مختلف،

$$R = 0/2, N_r = 15, R = R_i / R_0, \eta = h / R_0, \Omega = \omega R_0^2 \sqrt{\rho h (12(1 - \nu^2))} / Eh^3$$

شرایط تکیه‌گاهی	η	n				
		۳	۲	۱	۰	
ساده- ساده	۰/۰۱	۴۰/۰۷۶۷	۲۷/۰۰۸۴	۱۹/۱۰۱۶	۱۶/۷۷۳۱	مطالعه حاضر (روش تفاضل مربعات)
	۰/۱	۴۰/۲۷۸۸	۲۷/۲۲۶۱	۱۹/۲۱۴۳	۱۶/۷۷۳۲	مرجع [۲۹]
		۳۶/۹۶۲۰	۲۵/۰۶۵۵	۱۷/۹۷۰۱	۱۶/۱۷۰۲	مطالعه حاضر (روش تفاضل مربعات)
		۳۷/۶۷۰۸	۲۵/۹۴۵۱	۱۸/۴۸۳۰	۱۶/۱۷۰۵	مرجع [۲۹]
گیردار- ساده	۰/۰۱	۴۱/۱۹۶۶	۳۰/۰۰۹۴۵	۲۴/۲۳۳۹	۲۲/۶۹۲۷	مطالعه حاضر (روش تفاضل مربعات)
	۰/۱	۴۱/۲۸۸۰	۳۰/۰۵۷۶	۲۴/۲۵۰۰	۲۲/۶۹۶۰	مرجع [۲۹]
		۳۷/۷۲۴۰	۲۷/۴۳۵۲	۲۲/۱۳۱۵	۲۰/۸۴۵۷	مطالعه حاضر (روش تفاضل مربعات)
		۳۸/۲۱۷۶	۲۷/۶۸۱۸	۲۲/۴۷۰۰	۲۱/۱۱۲۶	مرجع [۲۹]

جدول ۵- همگرایی فرکانس طبیعی اول بی بعد شده به ازای اعداد موج و شرایط مرزی و تعداد گره مختلف، توزیع متقارن نوع اول

$$M = q = 0/2, R_i / R_0 = 0/2, h_0 / R_0 = 0/2$$

$N_r=19$	$N_r=17$	$N_r=15$	$N_r=11$	$N_r=7$	$N_r=5$	n	شرایط تکیه گاهی
۸/۸۷۶۹	۸/۸۷۹۶	۸/۸۵۸۹	۸/۸۲۴۵	۸/۸۱۵۶	۸/۸۳۷۶	۰	گیردار - ساده
۹/۴۰۹۸	۹/۴۰۹۸	۹/۳۹۲۶	۹/۳۵۴۶	۹/۳۳۵۶	۹/۳۱۰۵	۱	
۱۱/۷۷۱۸	۱۱/۷۷۸۳	۱۱/۷۵۶۷	۱۱/۷۱۱۶	۱۱/۶۷۳۷	۱۱/۶۰۶۳	۲	
۶/۸۰۲۳	۶/۷۹۹۴	۶/۷۸۵۵	۶/۷۸۳۷	۶/۷۷۸۴	۶/۶۷۶۹	۰	ساده - ساده
۷۰۵۳۹۳	۷۰۵۳۸۸	۷۰۵۳	۷۰۵۱۸۱	۷/۵۲۷۲	۷/۴۰۸۷	۱	
۱۰/۳۴۰۰	۱۰/۳۴۷۵	۱۰/۳۳۰۵	۱۰/۳۰۷۵	۱۰/۳۲۲۴	۱۰/۱۹۵۸	۲	
۹/۴۵۲۸	۹/۴۵۲۶	۹/۴۵۲۳	۹/۴۴۹۴	۹/۴۲۳۵	۹/۴۱۳۲	۰	گیردار - گیردار
۱۰/۰۰۲۸	۱۰/۰۰۲۴	۱۰/۰۰۰۲	۱۰/۰۱۱۸	۱۰/۰۱۴۶	۱۰/۰۰۵	۱	
۱۲/۱۰۳۵	۱۲/۱۰۳۳	۱۲/۱۰۸۶	۱۲/۱۲۲	۱۲/۱۳۲۷	۱۲/۲۵۰۱	۲	

در شکل های (۹)، (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. همچنین در این شکل ها انواع توزیع نانولوله ها در راستای ضخامت یعنی؛ متقارن نوع اول، متقارن نوع دوم، نامتقارن و یکنواخت نیز در نظر گرفته شده است. از رابطه بی بعد $\Omega = \omega R_0 \sqrt{\rho_m / G_m}$ برای فرکانس طبیعی استفاده شده است. همان طور که مشخص است، با افزایش عدد محیطی، فرکانس طبیعی اول بی بعد شده نیز افزایش می یابد.

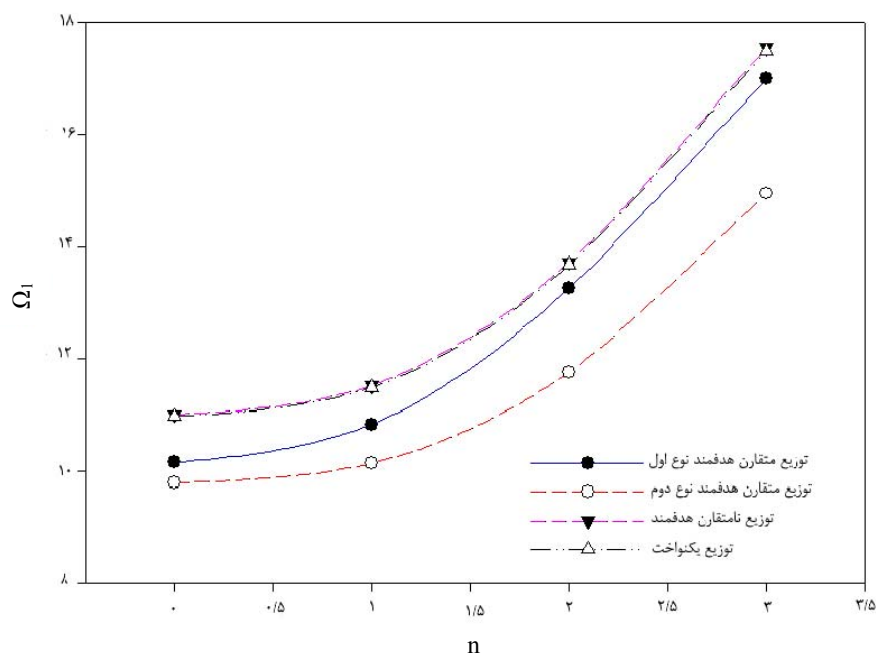
نتایج به دست آمده در این شکل ها نشان می دهد که برای کلیه شرایط تکیه گاهی ذکر شده، فرکانس طبیعی بی بعد شده در حالت توزیع نامتقارن و توزیع یکنواخت بسیار نزدیک به هم است. همچنین فرکانس طبیعی بی بعد به ازای توزیع متقارن نوع دوم کمترین مقدار را نسبت به توزیع های دیگر در تمامی شرایط مرزی دارد. از طرفی در شرایط تکیه گاهی گیردار- گیردار و گیردار- ساده یعنی شکل های (۱۰) و (۱۱)، بالاترین مقادیر فرکانس بی بعد به توزیع نامتقارن و یکنواخت اختصاص دارد و همان طور که قبلاً نیز ذکر شد نتایج به ازای این دو نوع توزیع بسیار نزدیک به هم است. در

۷، ۵، ۱۱، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ به ازای شرایط تکیه گاهی: گیردار- گیردار (C-C)، ساده- ساده (S-S)، گیردار- ساده (S-C) و همچنین اعداد موج محیطی $n = 0, 1, 2$ برای توزیع متقارن از نانولوله های کربنی در راستای ضخامت، نتایج در جدول (۵) آورده شده است. در این جدول پارامتر بی بعد شده به صورت $\Omega = \omega R_0 \sqrt{\rho_m / G_m}$ در نظر گرفته شده است. همان طور که در این جدول مشاهده می شود، با افزایش تعداد گره ها نرخ همگرایی افزایش یافته و به ازای تعداد گره های بالای ۱۶ نتایج همگرایی حاصل شده است.

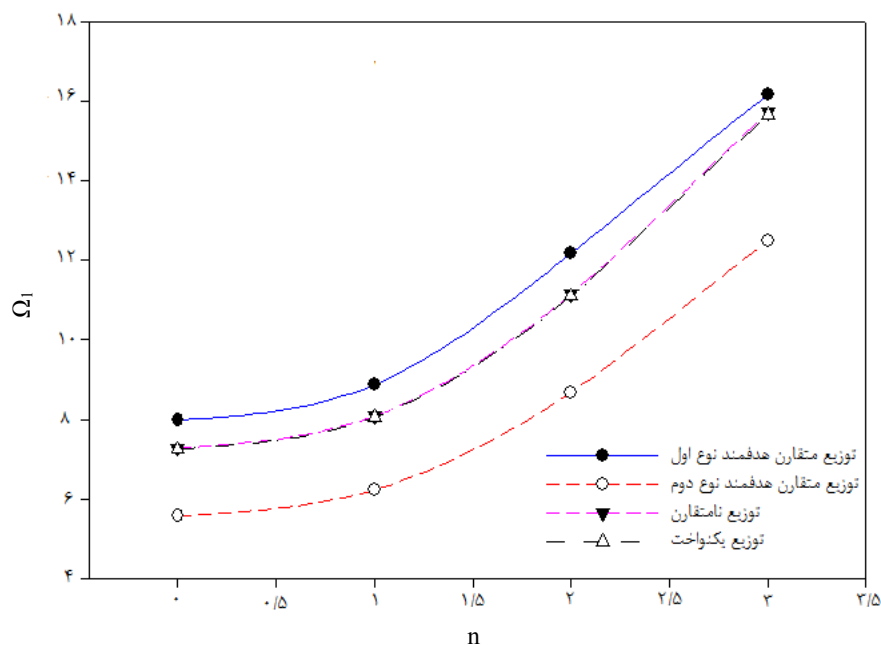
۳-۴- بررسی اثرات تکیه گاهی، عدد موج طبیعی و فرکانس

طبیعی بی بعد شده

پس از اعتبارسنجی و تأیید صحت نتایج به دست آمده، اثرات برخی از پارامترها بررسی شده است. منحنی تغییرات فرکانس طبیعی اول بی بعد شده بر حسب عدد موج محیطی برای شرایط تکیه گاهی گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده ورق گرد در شعاع داخلی و خارجی به ترتیب



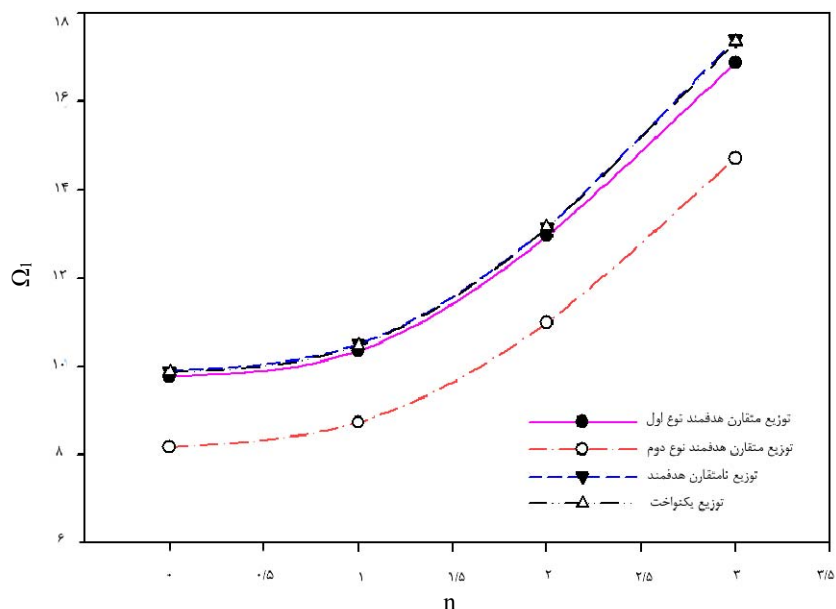
شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب عدد موج محیطی برای شرایط تکیه گاهی گیردار- گیردار



شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب عدد موج محیطی برای شرایط تکیه گاهی ساده- ساده

منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد برحسب پارامتر q ، برای $n=1$ با در نظر گرفتن مقادیر مختلف M و در

در شرایط تکیه گاهی ساده- ساده یعنی شکل (۱۰)، بیشترین مقادیر فرکانس بی بعد در توزیع متقارن نوع اول رخ می دهد.



شکل ۱۱- تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب عدد موج محیطی برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- ساده

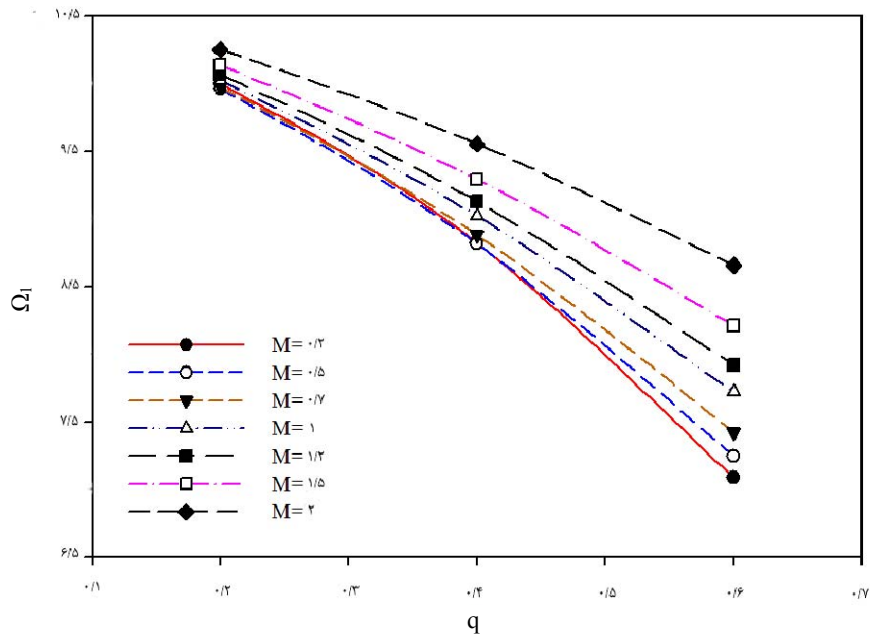
شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشخص است افزایش M و کاهش q باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده می‌شود.

مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به‌ازای مقادیر مختلف q و M با شرایط تکیه‌گاهی گیردار- ساده و برای توزیع نانولوله‌های کربن به‌صورت‌های متقارن نوع اول، متقارن نوع دوم، نامتقارن و یکنواخت در جدول (۶) ارائه شده است. در این جدول پارامتر بی‌بعد شده به‌صورت $\Omega = \omega R_0 \sqrt{\rho_m / G_m}$ در نظر گرفته شده است. این مقادیر با در نظر گرفتن $n = 1$ به‌دست آمده‌اند. مقایسه مقادیر به‌دست آمده نشان می‌دهد که برای این حالت نیز افزایش M و کاهش q باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده می‌شود.

منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده بر حسب M ، با در نظر گرفتن توزیع متقارن نوع اول و $n = 1$ برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی (گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده) در شکل (۲۰) نشان داده شده است. مطابق این شکل، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در حالت گیردار- گیردار بیشترین و در حالت ساده- ساده کمترین مقدار را دارد.

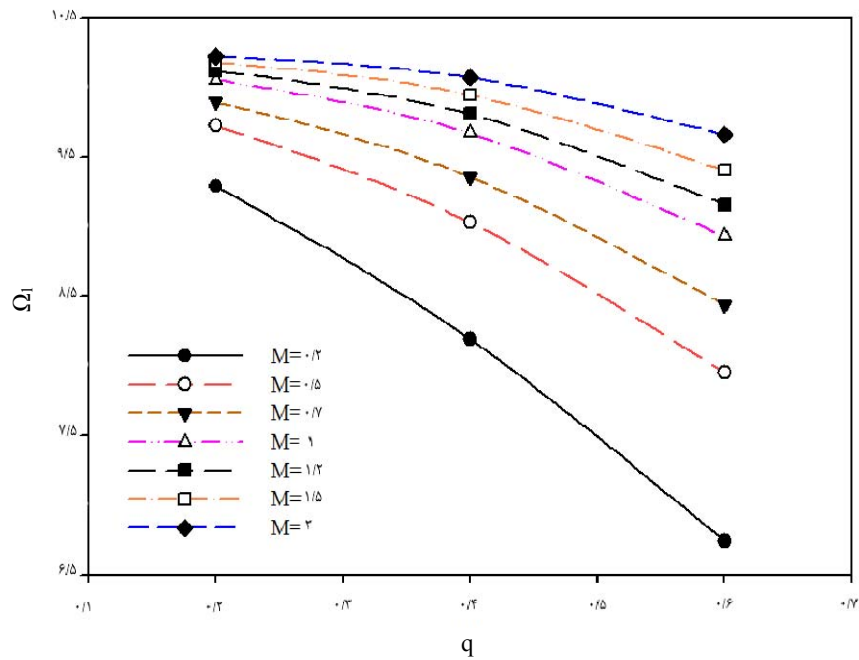
شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار برای توزیع نانولوله کربنی به‌صورت‌های متقارن نوع اول، متقارن نوع دوم، نامتقارن و یکنواخت به‌ترتیب در شکل‌های (۱۲) تا (۱۵) نشان داده شده است. مطابق این شکل‌ها با ثابت در نظر گرفتن پارامتر M ، افزایش q باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده می‌شود. همچنین با ثابت در نظر گرفتن q ، با افزایش پارامتر M فرکانس طبیعی بی‌بعد شده نیز افزایش می‌یابد، به‌طوری‌که این افزایش در مقادیر کم q مقدار قابل‌توجهی ندارد اما با زیاد شدن مقدار q ، این افزایش محسوس‌تر می‌شود. در واقع می‌توان ادعا کرد که اثر پارامتر M بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده، با افزایش q محسوس‌تر می‌شود. همانگونه که قبلاً ذکر شده به‌ازای $M < 1$ پروفیل ضخامت مقعر و به‌ازای $M > 1$ پروفیل ضخامت محدب است.

منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب پارامتر M ، برای $n = 1$ با در نظر گرفتن مقادیر مختلف q و در شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده برای توزیع نانولوله‌های کربن به‌صورت‌های متقارن نوع اول، متقارن نوع دوم، نامتقارن و یکنواخت به‌ترتیب در شکل‌های (۱۶) تا (۱۹) نشان داده



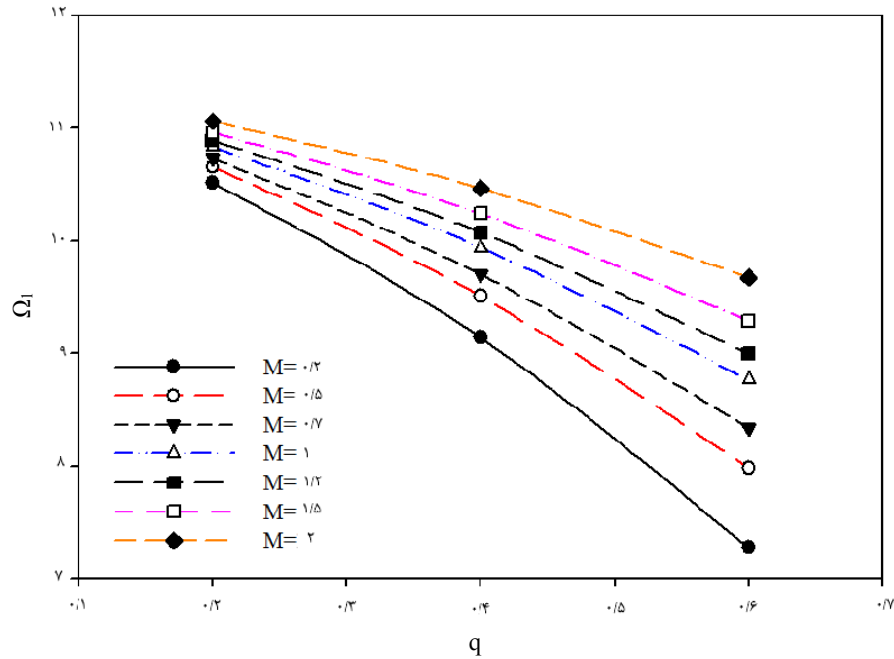
شکل ۱۲- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر q ، برای توزیع متقارن نوع اول از نانولوله‌های کربنی،

$$n = 1, R_i / R_o = 0.2, h_o / R_o = 0.2$$



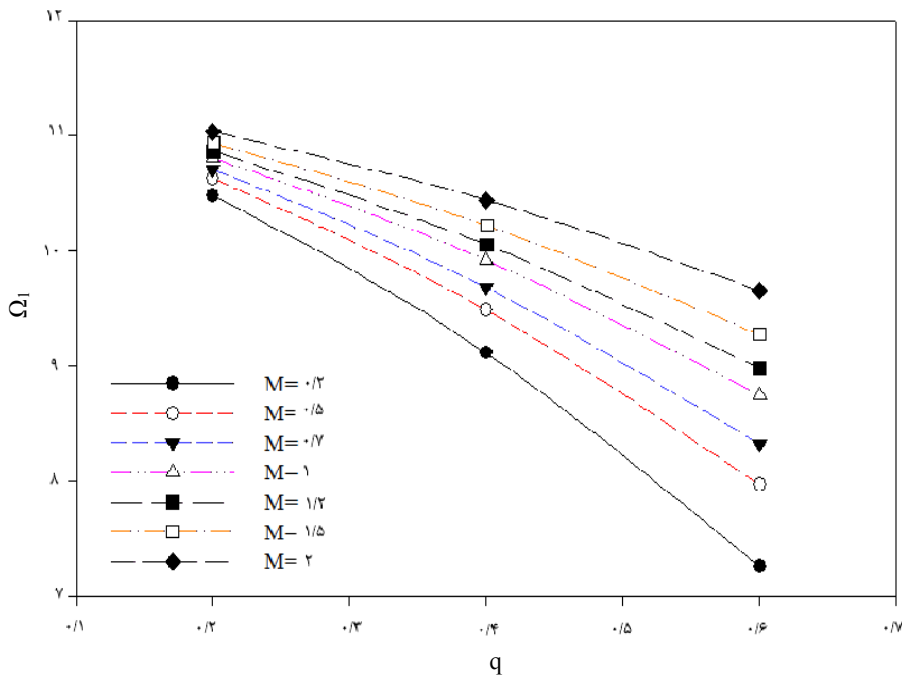
شکل ۱۳- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر q ، برای توزیع متقارن نوع دوم از نانولوله‌های کربنی،

$$n = 1, R_i / R_o = 0.2, h_o / R_o = 0.2$$



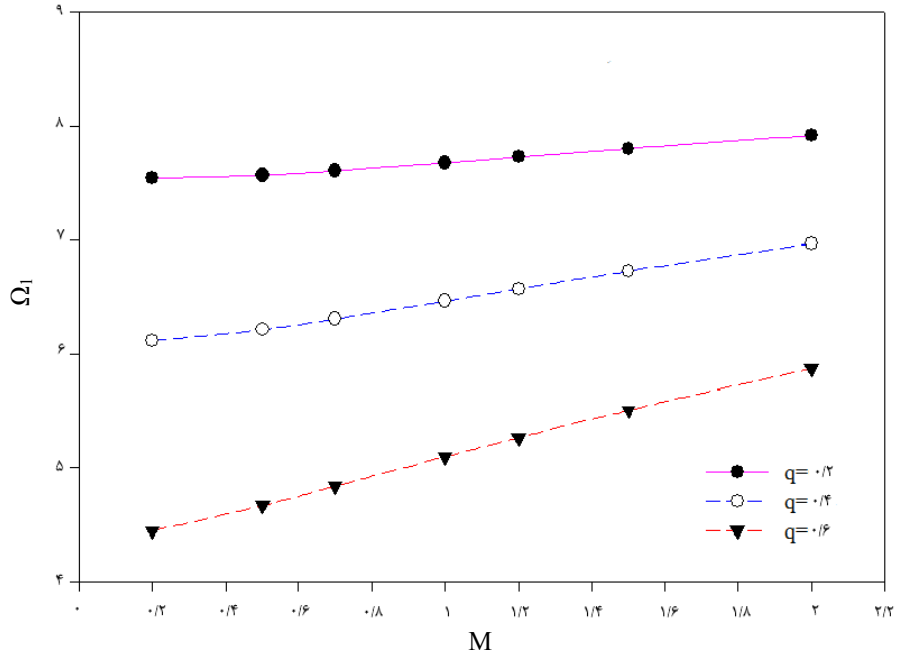
شکل ۱۴- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر q ، برای توزیع نامتقارن از نانولوله‌های کربنی،

$$n = 1, R_i / R_o = 0.2, h_o / R_o = 0.2$$

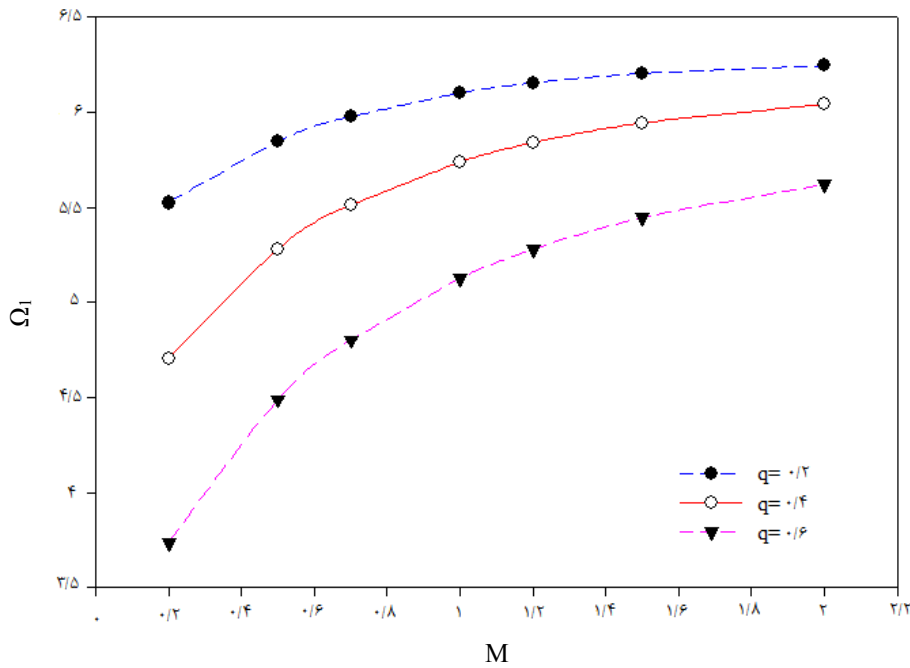


شکل ۱۵- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر q ، برای توزیع یکنواخت از نانولوله‌های کربنی،

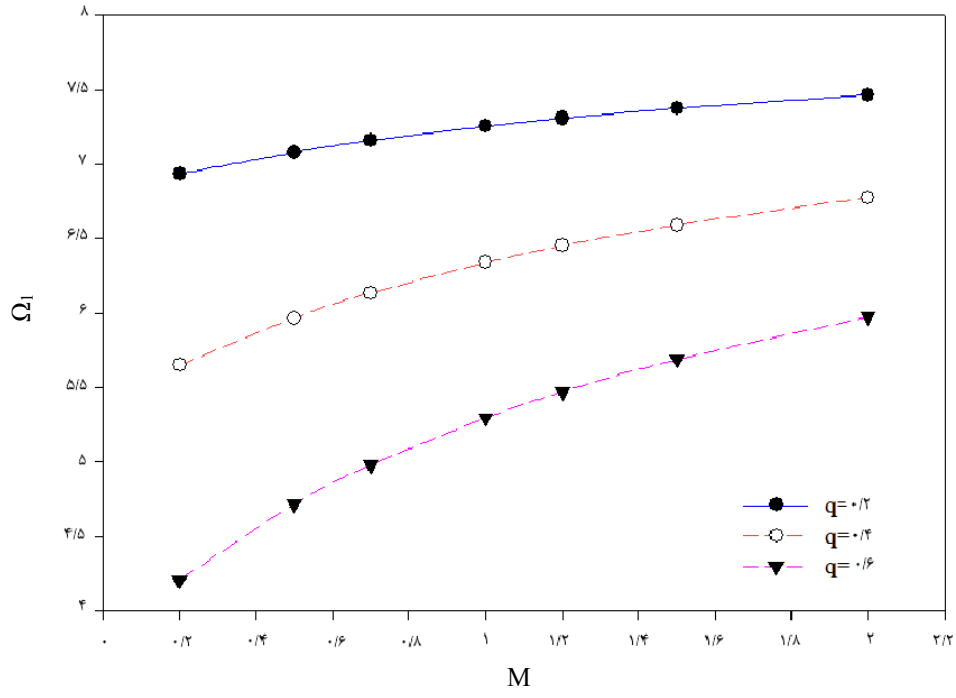
$$n = 1, R_i / R_o = 0.2, h_o / R_o = 0.2$$



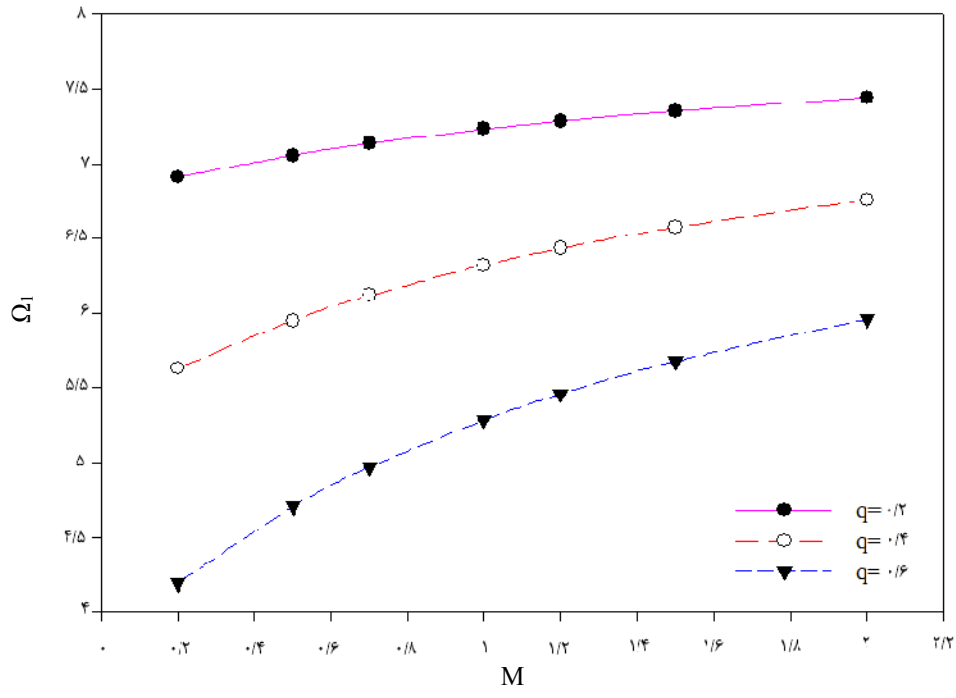
شکل ۱۶- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M ، برای توزیع متقارن نوع دوم از نانولوله‌های کربنی



شکل ۱۷- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M ، برای توزیع نامتقارن از نانولوله‌های کربنی



شکل ۱۸- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M، برای توزیع نامتقارن از نانولوله‌های کربنی



شکل ۱۹- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M، برای توزیع یکنواخت از نانولوله‌های کربنی

جدول ۶- مقادیر فرکانس طبیعی اول به ازای توزیع مختلف از نانولوله‌های کربنی برای ورق گرد با تکیه‌گاه ساده- گیردار

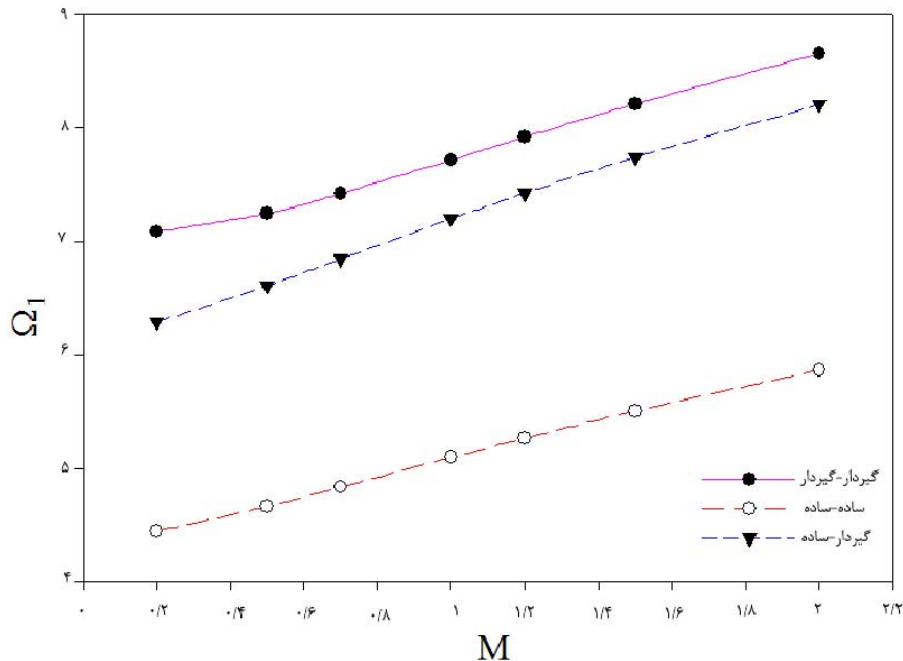
با ضخامت متغیر، $n=1$, $R_i/R_0=0/2$, $h_0/R_0=0/2$

یکنواخت	نامتقارن	متقارن نوع دوم	متقارن نوع اول	q	M
۹/۳۵۲۵	۹/۳۸۲۹	۷/۸۶۹۷	۹/۴۰۹۸	۰/۲	
۷/۹۲۴۲	۷/۹۴۸۹	۶/۸۱۷۸	۸/۰۸۶۶	۰/۴	۰/۲
۶/۱۲۸۶	۶/۱۴۵۷	۵/۵۰۹۴	۶/۲۸۸۵	۰/۶	
۹/۵۳۶۲	۹/۵۶۵۰	۸/۲۸۰۲	۹/۴۲۹۱	۰/۲	
۸/۳۵۵۹	۸/۳۷۸۳	۷/۵۹۳۶	۸/۱۹۷۴	۰/۴	۰/۵
۶/۸۷۲۱	۶/۸۸۷۳	۶/۵۹۳۳	۶/۶۰۹۰	۰/۶	
۹/۶۳۳۷	۹/۶۶۲۲	۸/۴۴۵۲	۹/۴۶۷۸	۰/۲	
۸/۵۷۹۳	۸/۶۰۱۳	۷/۹۰۴۷	۸/۳۱۰۳	۰/۴	۰/۷
۷/۲۴۹۳	۷/۲۶۴۵	۷/۰۴۴۵	۶/۸۴۶۷	۰/۶	
۹/۷۵۲۹	۹/۷۸۱۳	۸/۶۰۱۳	۹/۵۴۲۷	۰/۲	
۸/۸۴۸۸	۸/۸۷۱۰	۸/۲۱۰۱	۸/۴۹۸۹	۰/۴	۱
۷/۷۰۱۱	۷/۷۱۷	۷/۵۱۱۳	۷/۲۰۰۸	۰/۶	
۹/۸۱۸۵	۹/۸۴۷۱	۸/۶۶۶۳	۹/۵۹۷	۰/۲	
۸/۹۹۵۸	۹/۰۱۸۴	۸/۳۴۵۴	۸/۶۲۶۳	۰/۴	۱/۲
۷/۹۴۶۷	۷/۹۶۳۳	۷/۷۳۱۴	۷/۴۲۶۷	۰/۶	
۹/۹۰۱۰	۹/۹۲۹۹	۸/۷۲۷۶	۹/۶۷۸۴	۰/۲	
۹/۱۷۹۸	۹/۲۰۳۲	۸/۴۸۳۷	۸/۸۱۰۷	۰/۴	۱/۵
۸/۲۵۴۲	۸/۲۷۲۰	۷/۹۷۱۸	۷/۷۴۳۸	۰/۶	
۱۰/۰۰۷۲	۱۰/۰۳۶۸	۸/۷۷۴۲	۹/۸۰۳۷	۰/۲	
۹/۴۱۶۱	۹/۴۴۰۹	۸/۶۱۰۷	۹/۰۸۶۶	۰/۴	۲
۸/۶۵	۸/۶۶۹۹	۸/۲۲۰۸	۸/۲۰۷۹	۰/۶	

۵- نتیجه گیری

دایره‌ای با نانولوله‌های کربنی تقویت شده و به صورت تابعی و مدرج است. پارامترهای بررسی شده عبارتند از: توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق، شرایط

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار با ضخامت متغیر و شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی شده است. ورق



شکل ۲۰- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M و به ازای شرایط تکیه‌گاهی مختلف برای توزیع متقارن نوع اول.

$$n = 1, q = 0/6, R_i / R_0 = 0/2, h_0 / R_0 = 0/2$$

نانولوله‌های کربنی نشان می‌دهد که به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار و گیردار- ساده، بیشترین مقادیر فرکانسی مربوط به توزیع متقارن نوع اول و برای شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده بیشترین مقادیر فرکانسی مربوط به توزیع یکنواخت و نامتقارن است.

- افزایش پارامتر M مربوط به تغییرات تابع ضخامت، افزایش فرکانس طبیعی و همچنین افزایش q مربوط به تغییرات تابع ضخامت، کاهش فرکانس طبیعی را در پی خواهد داشت. در واقع هرچه تغییرات ضخامت ورق گرد سوراخ‌دار از حالت مقعر به حالت محدب نزدیک شود فرکانس‌های طبیعی افزایش پیدا می‌کند.

تکیه‌گاهی مختلف، پروفیل‌های مختلف از تغییرات ضخامت ورق دایره‌ای در راستای شعاعی و تغییرات عدد موج محیطی. مطابق نتایج به‌دست آمده، می‌توان گفت:

- علاوه بر شرایط تکیه‌گاهی عدد موج محیطی نیز پارامتری مهم در تغییرات فرکانس طبیعی است به‌طوری‌که، افزایش عدد موج محیطی باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.
- در بین توزیع‌های در نظر گرفته شده برای نانولوله‌های کربنی، توزیع متقارن نوع دوم از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق گرد سوراخ‌دار کمترین مقادیر فرکانسی را به‌خود اختصاص می‌دهد.
- نتایج فرکانسی به‌ازای توزیع‌های نامتقارن و یکنواخت از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت بسیار نزدیک به یکدیگر است.
- در نظر گرفتن هم‌زمان شرایط تکیه‌گاهی و توزیع‌های

فرم تفاضل مربعات معادلات حرکت نهایی استخراج شده به صورت زیر است.

معادله اول حرکت:

$$\begin{aligned} & -\frac{\nu}{r} \frac{A_{\varphi\varphi}(r)}{h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} W_j - D_{11}(r) \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j + \frac{nD_{rr}(r)}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{\theta j} - \frac{n^{\nu} D_{rr}(r) \psi_{ri}}{r^{\nu}} - \frac{nD_{rr}(r) \psi_{\theta i}}{r^{\nu}} - \frac{\wedge nD_{\varphi\varphi}(r)}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{\theta j} + \\ & \frac{\wedge n^{\nu} D_{\varphi\varphi}(r) \psi_{ri}}{r^{\nu} h^{\nu}} + \frac{\wedge n^{\nu} D_{\varphi\varphi}(r)}{r^{\nu} h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j - \frac{\wedge A_{\varphi\varphi}(r)}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} \psi_{rj} + \frac{\wedge nD_{\varphi\varphi}(r) \psi_{\theta i}}{r^{\nu} h^{\nu}} + \frac{\nu nD_{\Delta\Delta}(r)}{4 rh^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{\theta j} - \frac{\nu n^{\nu} D_{\Delta\Delta}(r) \psi_{ri}}{4 r^{\nu} h^{\nu}} - \\ & \frac{r^{\nu} n^{\nu} D_{\Delta\Delta}(r)}{4 r^{\nu} h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j - \frac{\nu nD_{\Delta\Delta}(r) \psi_{\theta i}}{4 r^{\nu} h^{\nu}} + \frac{\nu n^{\nu} D_{\Delta\Delta}(r) W_i}{4 r^{\nu} h^{\nu}} + \frac{\nu}{4} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} \psi_{ri} + \frac{\nu}{4} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j + \frac{\nu n}{4} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} \psi_{\theta i} - \\ & \frac{\nu n^{\nu}}{4} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} W_i + \frac{\nu nB_{\Delta\Delta}}{4 rh^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{\theta j} + \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} + A_{rr}(r) \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} \psi_{rj} - \frac{\nu n^{\nu} B_{\Delta\Delta}}{4 r^{\nu} h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j + \frac{\nu n^{\nu} B_{\Delta\Delta}}{4 r^{\nu} h^{\nu}} W_i + \\ & \frac{n}{r} \frac{\partial B_{rr}}{\partial r} \psi_{\theta i} - \frac{\nu n^{\nu} D_{\varphi\varphi}}{r^{\nu} h^{\nu}} W_i + \frac{\wedge A_{\varphi\varphi}}{r^{\nu} h^{\nu}} \psi_{ri} + \frac{\wedge nA_{\varphi\varphi}}{r^{\nu} h^{\nu}} \psi_{\theta i} - \frac{\nu A_{\Delta\Delta}}{4 r^{\nu} h^{\nu}} \psi_{ri} - \frac{\nu A_{\Delta\Delta}}{4 r^{\nu} h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j - \frac{\nu nA_{\Delta\Delta}}{4 r^{\nu} h^{\nu}} \psi_{\theta i} + \frac{\nu n^{\nu} A_{\Delta\Delta}}{4 r^{\nu} h^{\nu}} W_i - \\ & \frac{\wedge A_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} + \frac{\nu A_{\Delta\Delta}}{4 rh^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} + \frac{\nu A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} \psi_{rj} - D_{11}(r) \psi_{ri} + \frac{\nu}{4 h^{\nu}} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} W_j + \frac{A_{rr}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} - \\ & \frac{A_{rr}}{r^{\nu}} \psi_{ri} + \frac{\wedge D_{rr}}{h^{\nu}} \psi_{ri} + \frac{\wedge D_{rr}}{h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j + \frac{\nu}{4 h^{\nu}} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} - \frac{\wedge}{r h^{\nu}} \frac{\partial A_{\varphi\varphi}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} + \frac{\partial B_{rr}}{r \partial r} \psi_{ri} - \frac{\nu D_{\varphi\varphi}}{h^{\nu}} \psi_{ri} - \frac{\nu D_{\varphi\varphi}}{h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j + \\ & \frac{\nu}{4 h^{\nu}} A_{\Delta\Delta} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} W_j - \frac{\nu}{r h^{\nu}} A_{\varphi\varphi} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j + \frac{\nu A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} W_j - \frac{nA_{rr}}{r^{\nu}} \psi_{\theta i} + \frac{\nu A_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j - \frac{\nu n^{\nu} A_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} W_i + \frac{nB_{rr}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{\theta j} - \\ & \frac{\wedge}{r h^{\nu}} \frac{\partial B_{\varphi\varphi}}{\partial r} \psi_{ri} - \frac{\nu}{r h^{\nu}} \frac{\partial B_{\varphi\varphi}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j - \frac{\wedge n}{r h^{\nu}} \frac{\partial B_{\varphi\varphi}}{\partial r} \psi_{\theta i} + \frac{\nu n^{\nu}}{r h^{\nu}} \frac{\partial B_{\varphi\varphi}}{\partial r} W_i - \frac{\wedge nB_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{\theta j} + \frac{\nu n^{\nu} B_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j - \frac{\nu n^{\nu} B_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} W_i - \\ & \frac{\nu}{r h^{\nu}} \frac{\partial A_{\varphi\varphi}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} W_j = -(I_r - \frac{\wedge}{r h^{\nu}} I_{\Delta} + \frac{\nu}{4 h^{\nu}} I_{\nu}) \omega^{\nu} \psi_{ri} + \frac{\nu}{r h^{\nu}} (I_{\Delta} - \frac{\nu}{r h^{\nu}} I_{\nu}) \omega^{\nu} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j \end{aligned}$$

(پ-۱)

معادله دوم حرکت:

$$\begin{aligned} & \frac{\nu nB_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} W_j - \frac{n}{r} \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \psi_{ri} - \frac{r^{\nu} nD_{\Delta\Delta}}{4 h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} W_j - \frac{\nu nB_{\Delta\Delta}}{4 h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\nu)} W_j \\ & \frac{\wedge n}{r h^{\nu}} \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j + \frac{\wedge nD_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} + \frac{\wedge nD_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \psi_{ri} + \frac{\nu nD_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} W_j + \\ & \frac{\wedge}{r h^{\nu}} \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial r} \psi_{\theta i} - \frac{\nu n}{r h^{\nu}} \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial r} W_i - \frac{\wedge D_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{\theta j} - \frac{nB_{rr}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} + \\ & \frac{\wedge nB_{\varphi\varphi}}{r h^{\nu}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{rj} + \frac{\wedge D_{rr}}{h^{\nu}} \psi_{\theta i} + \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} \psi_{\theta j} - \frac{nA_{rr}}{r^{\nu}} \psi_{ri} - \frac{n^{\nu} A_{rr}}{r^{\nu}} \psi_{\theta i} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda n A_{rr}}{r r^{\lambda} h^{\gamma}} \psi_{ri} + \frac{r n A_{rr}}{r h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{\lambda n^{\gamma} A_{rr}}{r r^{\lambda} h^{\gamma}} \psi_{\theta i} - \frac{r n^{\gamma} A_{rr}}{r r^{\lambda} h^{\gamma}} W_i - \frac{\lambda n D_{rr}}{r h^{\gamma}} W_i + \\
& \frac{n D_{\lambda\lambda}}{r} W_i + \frac{\lambda D_{rr}}{r h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{\theta i} - \frac{\gamma n}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} \psi_{ri} - \frac{r \gamma n}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j - \frac{\gamma n D_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \\
& \frac{\gamma n D_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{ri} - \frac{\gamma n D_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j - \frac{\gamma}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} \psi_{\theta i} + \frac{\gamma n}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} W_i + \\
& \frac{\gamma D_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - \frac{\gamma D_{\Delta\Delta}}{4 r^{\gamma} h^{\gamma}} \psi_{\theta i} - \frac{\gamma n B_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \frac{\gamma}{r} \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \psi_{\theta i} - \frac{\lambda D_{rr}}{r h^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - \\
& \frac{\gamma n A_{\Delta\Delta}}{4 r^{\gamma} h^{\gamma}} \psi_{ri} - \frac{\gamma n A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j - \frac{\gamma n^{\gamma} A_{\Delta\Delta}}{4 r^{\gamma} h^{\gamma}} \psi_{\theta i} + \frac{D_{rr}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - \frac{D_{rr}}{r^{\gamma}} \psi_{\theta i} + \\
& \frac{\gamma}{4 h^{\gamma}} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - \frac{\lambda}{r h^{\gamma}} \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} + \frac{\gamma n D_{rr}}{r h^{\gamma}} W_i + D_{rr} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} + \\
& \frac{\lambda n D_{rr}}{r h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{\gamma D_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - D_{\lambda\lambda} \psi_{\theta i} + \frac{\gamma n^{\gamma} A_{\Delta\Delta}}{4 r^{\gamma} h^{\gamma}} W_i - \frac{n D_{rr}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \\
& \frac{n D_{rr}}{r^{\gamma}} \psi_{ri} + \frac{\lambda n}{r h^{\gamma} r} \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \psi_{ri} - \frac{\gamma D_{rr}}{h^{\gamma}} \psi_{\theta i} = -(I_r - \frac{\lambda}{r h^{\gamma}} I_{\Delta} + \frac{\gamma}{4 h^{\gamma}} I_{\gamma}) \omega^{\gamma} \psi_{\theta i} - \\
& \frac{r n}{r h^{\gamma}} (I_{\Delta} - \frac{\gamma}{r h^{\gamma}} I_{\gamma}) \omega^{\gamma} w_i
\end{aligned}$$

(۲-ب)

معادله سوم حرکت:

$$\begin{aligned}
& - \frac{r \gamma}{4 h^{\gamma}} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{\gamma n^{\gamma}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \frac{\partial^{\gamma} B_{\Delta\Delta}}{\partial r^{\gamma}} W_i + \frac{r n B_{rr}}{r h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - \frac{r n^{\gamma} A_{rr}}{r h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{\theta i} + \frac{\gamma n^{\gamma} A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{ri} + \frac{\gamma n^{\gamma} A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{\theta i} - \frac{\gamma n^{\gamma} A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} W_i - \\
& \frac{r \gamma n^{\gamma} B_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{\gamma}{r h^{\gamma} r} \frac{\partial B_{rr}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} + \frac{\lambda}{r h^{\gamma} r} \frac{\partial B_{rr}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - \frac{\gamma}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \frac{r \gamma n}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} + \\
& \frac{r \gamma n^{\gamma}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{\gamma A_{rr}}{r h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{ri} - \frac{\gamma A_{rr}}{r h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \frac{r \gamma}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \frac{\gamma n}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial^{\gamma} B_{\Delta\Delta}}{\partial r^{\gamma}} \psi_{\theta i} - \frac{\gamma}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial^{\gamma} B_{\Delta\Delta}}{\partial r^{\gamma}} \psi_{ri} - \\
& \frac{r \gamma}{4 h^{\gamma} r} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j - \frac{\gamma B_{rr} n^{\gamma}}{r h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \frac{\gamma}{r h^{\gamma} r} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} \psi_{ri} + \frac{\gamma D_{rr}}{h^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{\partial D_{\lambda\lambda}}{\partial r} \psi_{ri} - \frac{\lambda D_{rr}}{h^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \\
& \frac{\gamma A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j - \frac{r \gamma A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \frac{r \gamma A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{\lambda A_{rr}}{r h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} + \frac{\lambda n}{r h^{\gamma} r} \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - \frac{\lambda D_{rr}}{h^{\gamma} r} \psi_{ri} + \\
& \frac{\gamma D_{rr}}{h^{\gamma} r} \psi_{ri} + \frac{\gamma D_{rr}}{h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{\gamma}{h^{\gamma}} \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \psi_{ri} + \frac{\gamma}{h^{\gamma}} \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j + \frac{n D_{\lambda\lambda}}{r} \psi_{\theta i} + \frac{\gamma}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \psi_{ri} + \frac{\gamma n}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \psi_{\theta i} - \\
& \frac{\gamma n^{\gamma}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} W_i + \frac{r \gamma n^{\gamma} A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} W_i - \frac{\gamma A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{ri} + \frac{\gamma}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j - \frac{r n A_{rr}}{r h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} - \frac{\gamma A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} W_j - \\
& \frac{\gamma n A_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{\theta i} + \frac{r n A_{rr}}{r h^{\gamma} r^{\gamma}} \psi_{\theta i} - \frac{n^{\gamma} D_{\lambda\lambda}}{r^{\gamma}} W_i - \frac{\lambda n D_{rr}}{r h^{\gamma}} \psi_{\theta i} + \frac{\lambda n^{\gamma} D_{rr}}{r^{\gamma} h^{\gamma}} W_i + \frac{\lambda}{r h^{\gamma} r} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{rj} - \frac{r \gamma n D_{\Delta\Delta}}{4 h^{\gamma} r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\gamma)} \psi_{\theta j} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon \tau n^\tau D_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j - \frac{\nu \epsilon n B_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{0j} + \frac{\tau \tau n^\tau B_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j - \frac{\lambda n^\tau}{\tau h^\tau r^\tau} \frac{\partial D_{\tau\tau}}{\partial r} \psi_{ri} - \frac{\tau \tau n^\tau}{4h^\tau r^\tau} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} W_i - \frac{\lambda n}{\tau h^\tau r^\tau} \frac{\partial D_{\tau\tau}}{\partial r} \psi_{\theta i} - \\
& \frac{\lambda n^\tau D_{\tau\tau}}{\tau h^\tau r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} - \frac{\tau \tau n}{4h^\tau r} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{0j} + \frac{\tau \tau n^\tau}{4h^\tau r^\tau} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} \psi_{ri} + \frac{\epsilon \tau n^\tau}{4h^\tau r^\tau} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + \frac{\tau \tau n^\tau D_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} - \\
& \frac{\tau \tau n^\tau D_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + \frac{\nu \epsilon n D_{\tau\tau}}{h^\tau r} \psi_{\theta i} - \frac{\nu \epsilon n^\tau D_{\tau\tau}}{h^\tau r^\tau} W_i + \frac{\tau \tau n}{4h^\tau r^\tau} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} \psi_{\theta i} - \frac{\tau \tau n^\tau}{4h^\tau r^\tau} \frac{\partial D_{\Delta\Delta}}{\partial r} W_i + \frac{\tau \tau n^\tau B_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} W_i + \frac{\nu \epsilon n^\tau B_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} - \\
& \frac{\tau n^\tau A_{\tau\tau}}{\tau h^\tau r^\tau} \psi_{ri} + D_{\tau\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j - \frac{\lambda}{h^\tau} \frac{\partial D_{\tau\tau}}{\partial r} \psi_{ri} - \frac{\lambda}{h^\tau} \frac{\partial D_{\tau\tau}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j - \frac{\lambda D_{\tau\tau}}{h^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} - \frac{\tau \tau}{4h^\tau} \frac{\partial A_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} + \frac{\nu \epsilon A_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} + \\
& \frac{\lambda n D_{\tau\tau}}{\tau h^\tau r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{0j} + \frac{\nu \epsilon n A_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{0j} + \frac{\tau \tau n^\tau D_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r^\tau} W_i + \frac{\lambda}{\tau h^\tau} \frac{\partial A_{\tau\tau}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} - \frac{\lambda D_{\tau\tau}}{h^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j - \frac{\nu \epsilon}{4h^\tau} \frac{\partial^\tau A_{\Delta\Delta}}{\partial r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + \\
& \frac{\tau}{\tau h^\tau} \frac{\partial^\tau A_{\tau\tau}}{\partial r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} + D_{\tau\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} - \frac{\nu \epsilon}{4h^\tau} \frac{\partial^\tau A_{\Delta\Delta}}{\partial r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} - \frac{\nu \epsilon A_{\Delta\Delta}}{4h^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + \frac{\partial D_{\tau\tau}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + \frac{\nu \epsilon D_{\tau\tau}}{h^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} + \\
& \frac{D_{\tau\tau}}{r} \psi_{ri} + \frac{D_{\tau\tau}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + \frac{\tau}{\tau h^\tau r} \frac{\partial^\tau B_{\tau\tau}}{\partial r^\tau} \psi_{ri} - \frac{\nu \epsilon}{4h^\tau r} \frac{\partial^\tau B_{\Delta\Delta}}{\partial r^\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j - \frac{\nu \epsilon}{4h^\tau r} \frac{\partial B_{\Delta\Delta}}{\partial r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j - \frac{\tau n}{\tau h^\tau r^\tau} \frac{\partial A_{\tau\tau}}{\partial r} \psi_{\theta i} + \frac{\tau n}{\tau h^\tau r} \frac{\partial^\tau B_{\tau\tau}}{\partial r^\tau} \psi_{\theta i} = \\
& -I_v \omega^\tau w_i + \left(\frac{\tau}{\tau h^\tau}\right)^\tau I_v \omega^\tau \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j - \frac{n^\tau}{r} w_i\right) - \frac{\tau \omega^\tau}{\tau h^\tau} (I_\Delta - \frac{\tau}{\tau h^\tau} I_v) \times \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} + \frac{n}{r} \psi_{\theta i} + \frac{1}{r} \psi_{ri}\right) + \\
& \frac{\nu \epsilon \omega^\tau}{4h^\tau} \frac{\partial I_v}{\partial r} \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj}\right) - \frac{\tau \omega^\tau}{\tau h^\tau} \frac{\partial I_\Delta}{\partial r} (\psi_{ri})
\end{aligned}$$

(۳-ب)

و هم چنین فرم تفاضل مربعات از روابط شرایط مرزی به صورت زیر هستند:

شرایط مرزی تکیه گاه ساده:

$$W_i = 0$$

$$M_r = 0 \Rightarrow A_{\tau\tau} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} - \frac{\tau A_{\tau\tau}}{\tau h^\tau} \left\{ \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{rj} + \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j \right\} + B_{\tau\tau} \left\{ \frac{\psi_{ri}}{r} + \frac{n \psi_{\theta i}}{r} \right\} -$$

$$\frac{\tau B_{\tau\tau}}{\tau h^\tau r} \left\{ \psi_{ri} + \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j + n \psi_{\theta i} - \frac{n^\tau W_i}{r} \right\} = 0$$

$$M_{r\theta} - \frac{\tau}{r} P_{r\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$D_{\tau\tau} \left\{ \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{0j} - \frac{n \psi_{ri}}{r} - \frac{\psi_{\theta i}}{r} \right\} - \frac{\lambda D_{\tau\tau}}{\tau h^\tau} \left\{ \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{0j} \right\} + \frac{\lambda D_{\tau\tau} n}{\tau h^\tau r} \psi_{ri} + \frac{\lambda D_{\tau\tau} n}{\tau h^\tau r} \left\{ \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j \right\} +$$

$$\frac{\lambda D_{\tau\tau}}{\tau h^\tau r} \psi_{\theta i} - \frac{\tau D_{\tau\tau} n}{\tau h^\tau r^\tau} W_i + \frac{\nu \epsilon D_{\Delta\Delta}}{4h^\tau} \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} \psi_{0j} - \frac{n \psi_{ri}}{r} \right) - \frac{\tau \tau D_{\Delta\Delta} n}{4h^\tau r} \left\{ \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tau)} W_j \right\} - \frac{\nu \epsilon D_{\Delta\Delta}}{4h^\tau r} \psi_{\theta i} +$$

$$\frac{\nu \epsilon D_{\Delta\Delta} n}{4h^\tau r^\tau} W_i = 0$$

(۴-ب)

تکیه‌گاه گیردار:

$$W_i = 0$$

$$\Psi_{ri} = 0$$

$$\Psi_{\theta i} = 0$$

(پ-۵)

که در معادلات حرکت و شرایط مرزی برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی که در بالا آورده شده است، ثابت آورده شده در این روابط به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$(A_{rr}, A_{\theta\theta}, A_{\delta\delta}) = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} C_{11}(z)(z^r, z^\theta, z^\delta) dz$$

$$(B_{rr}, B_{\theta\theta}, B_{\delta\delta}) = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} C_{12}(z)(z^r, z^\theta, z^\delta) dz$$

$$(D_{11}, D_{rr}, D_{\theta\theta}, D_{\delta\delta}) = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} C_{44}(z)(z^r, z^\theta, z^\delta) dz$$

(پ-۶)

هم‌چنین از ضرایب وزنی مربوط به روش تفاضل مربعات است.

واژه‌نامه

- | | | |
|---|-----------------------------------|---------------------|
| 1. functionally graded materials (FGM) | 3. tensile impact toughness | 7. unsymmetrical FG |
| 2. differential quadrature method (DQM) | 4. molecular dynamics simulations | 8. symmetrical FG |
| | 5. perturbation method | 9. uniform |
| | 6. CNT/ Polystyrene (PS) | 10. variational |

مراجع

- Rao, S. S., and Sunar, M., "Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 47, pp. 113-123, 1994.
- Zhong, Z., and Shang, E. T., "Three-Dimensional Exact Analysis of a Simply Supported Functionally Graded Piezoelectric Plate", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 5335-5352, 2003.
- Nie, G. J., and Zhong, Z., "Semi-Analytical Solution for Three-Dimensional Vibration of Functionally Graded Circular Plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 4901-4910, 2007.
- Malekzadeh, P., "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations", *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 367-373, 2009.
- Tornabene, F., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical, Cylindrical Shell and Annular Plate Structures with a Four-Parameter Power-Law Distribution", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 2911-2935, 2009.
- Fidelus, J. D., Wiesel, E., Gojny, F. H., Schulte, K. and Wagner, H. D., "Thermo-Mechanical Properties of Randomly Oriented Carbon/Epoxy Nanocomposites", *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 36, pp. 1555-1561, 2005.
- Song, Y. S. and Youn, J. R., "Modeling of Effective Elastic Properties for Polymer Based Carbon Nanotube Composites", *Polymer*, Vol. 47, pp. 1741-1748, 2006.
- Han, Y. and Elliott, J., "Molecular Dynamics Simulations of the Elastic Properties of Polymer/Carbon Nanotube Composites", *Computational Materials Science*, Vol. 39, pp. 315-323, 2007.
- Liew, K. M., Lei, Z. X. and Zhang, L. W., "Mechanical Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composites: A Review", *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 90-97, 2015.

10. Zhang, L. W., Lei, Z. X. and Liew, K. M., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Triangular Plates Using the FSDT and Element-Free IMLS-Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 189-199, 2015.
11. Lei, Z. X., Zhang, L. W. and Liew, K. M., "Vibration Analysis of CNT-Reinforced Functionally Graded Rotating Cylindrical Panels using the Element-Free Kp-Ritz Method", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 77, pp. 291-303, 2015.
12. Zhang, L. W., Lei, Z. X. and Liew, K. M., "Vibration Characteristic of Moderately Thick Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Skew Plates", *Composite Structures*, Vol. 122, pp. 172-183, 2015.
13. Moradi-Dastjerdi, R., Pourasghar, A., Foroutan, M. and Bidram, M., "Vibration Analysis of Functionally Graded Nanocomposite Cylinders Reinforced by Wavy Carbon Nanotube Based on Mesh-Free Method", *Journal of Composite Materials*, Vol. 48, pp. 1901-1913, 2014.
14. Shen, H. S. and Xiang, Y., "Nonlinear Response of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Panels Subjected to Combined Loadings and Resting on Elastic Foundations", *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 939-950, 2015.
15. Hedayati, H. and Sobhani Aragh, B., "Influence of Graded Agglomerated CNTs on Vibration of CNT-Reinforced Annular Sectorial Plates Resting on Pasternak Foundation", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218, pp. 8715-8735, 2012.
16. Wang, Z. X. and Shen, H. S., "Nonlinear Vibration of Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments", *Computational Materials Science*, Vol. 50, pp. 2319-2330, 2011.
17. Ke, L. L., Yang, J. and Kitipornchai, S., "Nonlinear Free Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Beams", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 676-683, 2010.
18. Heshmati, M. and Yas, M. H., "Dynamic Analysis of Functionally Graded Multi-Walled Carbon Nanotube-Polystyrene Nanocomposite Beams Subjected to Multi-Moving Loads", *Materials & Design*, Vol. 49, pp. 894-904, 2013.
19. Omidi, M., Rokni D. T. H., Milani, A. S., Seethaler, R. J. and Arasteh, R., "Prediction of the Mechanical Characteristics of Multi-Walled Carbon Nanotube/Epoxy Composites Using a New Form of the Rule of Mixtures", *Carbon*, Vol. 48, pp. 3218-3228, 2010.
20. Andrews, R., Jacques, D., Minot, M. and Rantell, T., "Fabrication of Carbon Multiwall Nanotube/Polymer Composites by Shear Mixing", *Macromolecular Materials and Engineering*, Vol. 287, pp. 395-403, 2002.
21. Najafizadeh, M. M. and Heydari, H. R., "An Exact Solution for Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher order Shear Deformation Plate Theory under Uniform Radial Compression", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 603-612, 2008.
22. Bayat, M., Sahari, B. B., Saleem, M., Ali, A. and Wong, S. V., "Thermoelastic Solution of a Functionally Graded Variable Thickness Rotating Disk with Bending Based on the First-Order Shear Deformation Theory", *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, pp. 568-582, 2009.
23. Bellman, R. and Casti, J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, pp. 235-238, 1971.
24. Bert, C. W. and Malik, M., "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, pp. 1-28, 1996.
25. Shu, C., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer Science & Business Media, 2012.
26. Jodaeei, A., Jalal, M. and Yas, M. H., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Annular Plates by State-space Based Differential Quadrature Method and Comparative Modeling by ANN", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 340-353, 2012.
27. Nie, G. and Zhong, Z., "Dynamic Analysis of Multi-Directional Functionally Graded Annular Plates", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 608-616, 2010.
28. Tahouneh, V. and Yas, M. H., "3-D Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Annular Sector Plates on Pasternak Elastic Foundation Via 2-D Differential Quadrature Method", *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 1879-1897, 2012.
29. Bisadi, H., Es'haghi, M., Rokni, H. and Ilkhani, M., "Benchmark Solution for Transverse Vibration of Annular Reddy Plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 56, pp. 35-49, 2012.

