

## یافتن آسیب‌دیدگی در تیر و میله به‌روش انتشار موج با استفاده از المان‌های محدود طیفی

محمد صادق اسکندرجوی و عبدالحسین بغلانی\*

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی شیراز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۶/۱۶ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱۱/۰۴)

DOI: 10.18869/acadpub.jcme.35.2.197

**چکیده** - در این مقاله، روش انتشار موج برای یافتن آسیب در سازه‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. برای تحلیل انتشار موج در سازه‌ها از روش اجزای محدود طیفی استفاده شده است. دو سازه میله و تیر اولر برنولی با استفاده از المان‌های طیفی مدل شده‌اند. مزیت این روش نسبت به روش اجزای محدود سنتی در تحلیل انتشار موج در سازه، سرعت و دقت بیشتر آن است. برای نشان دادن برتری روش اجزای محدود طیفی بر روش سنتی، دو مثال از سازه‌های میله و تیر اولر برنولی که جرم متمرکزی در طول آنها تعبیه شده، ارائه شده است. در نهایت تیری با ترک‌های عرضی به‌وسیله المان‌های محدود طیفی مدل شده و مورد تحلیل قرار گرفته است و با به‌دست آوردن پاسخ تاریخیچه زمانی، محل قرارگیری ترک در تیر مشخص شده است.

واژه‌های کلیدی: انتشار موج در سازه‌ها، آسیب‌یابی، روش اجزای محدود طیفی، ارتعاش تیر.

## Damage Detection in Beam and Rod using Wave Propagation Method with Spectral Finite Elements

M. S. Eskandarjuy and A. Baghlani\*

Department of Civil and Environmental Engineering, Shiraz University of Technology

**Abstract:** *In this paper, wave propagation method was applied to detect damage of structures. Spectral Finite Element Method (SFEM) was used to analyze wave propagation in structures. Two types of structures i.e. rod and Euler-Bernoulli beam were modelled using spectral elements. The advantage of spectral finite element over conventional Finite Element Method (FEM), in wave propagation problems, is its accuracy and lower computational time. Two examples of rod and Euler-Bernoulli beam with embedded concentrated mass were presented to illustrate the superiority of SFEM to FEM. Finally, a cracked beam was modeled and analyzed using spectral finite elements and the location of the crack was determined using time history response of beam structure.*

**Keywords:** *Wave Propagation in Structures, Damage Detection, Spectral Finite Element (FEM), Vibration of Beam.*

\* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: baghlani@sutech.ac.ir

$A$	سطح مقطع (مترمربع)	$[M_c]_g$	ماتریس جرم متمرکز کل
$d_{gn}$	بردار درجات آزادی کل	$\hat{N}_i$	نیروی محوری گره $i$ ام (نیوتن)
$E$	مدول الاستیسیته (نیوتن بر مترمربع)	$S_i$	ماتریس ارتباط گره‌ها
$f_{gn}$	بردار نیروهای طیفی کل	$U$	تغییر شکل طولی میله (متر)
$f_i$	بردار نیروی وارد بر گره $i$ ام	$\hat{u}_i$	بردار تغییر شکل گره $i$ ام
$h_i$	ارتفاع المان‌های فرعی (متر)	$\hat{u}_i^z$	تغییر شکل محوری گره $i$ ام (متر)
$K_g$	ماتریس سختی دینامیکی با جرم متمرکز	$\hat{V}_i$	نیروی برشی گره $i$ ام - نیوتن
$K_{gn}$	ماتریس سختی کل	علائم یونانی	
$[K]_{gn}$	ماتریس سختی دینامیکی کل	$\rho$	چگالی (کیلوگرم بر مترمربع)
$\hat{M}_i$	لنگر خمشی گره $i$ ام (نیوتن متر)	$\hat{\phi}_i$	تغییر زاویه گره $i$ ام (رادیان)
$M_{ci}$	جرم متمرکز اضافه شده (کیلوگرم)	$\hat{\omega}_i$	تغییر شکل محوری گره $i$ ام (متر)
$[M_c]$	ماتریس جرم متمرکز المان		

## ۱- مقدمه

به منظور افزایش عمر مفید سازه‌ها، ضروری است که آنها به صورت دائمی مورد بازرسی و نظارت قرار گیرند. امروزه یافتن آسیب در سازه‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. طی چند دهه اخیر، تحقیقات فراوانی روی آسیب‌یابی<sup>۱</sup> سازه‌ها صورت گرفته است که اساس بسیاری از این تحقیقات بر آنالیز مودال سازه‌ها استوار است [۵-۱]. این گونه روش‌ها در صورتی اعتبار دارند که آسیب در سازه تغییرات عمده‌ای در خواص آن مانند سختی و جرم ایجاد کند. اگر تغییرات ایجاد شده در خواص سازه‌ای اندک باشد، روش‌های مبتنی بر آنالیز مودال کاربری خود را از دست می‌دهند، زیرا حجم محاسبات به شدت افزایش می‌یابد. ترک‌های ریز جزء این دسته آسیب‌ها قرار دارند که وجود آنها در سازه باعث تغییر چندانی در خواص سازه نمی‌شود. روش مؤثری که در تشخیص این آسیب‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش انتشار موج<sup>۲</sup> در سازه‌ها است. روش انتشار موج در سازه‌ها بر این اساس استوار است که وجود ترک یا آسیب در جسم جامد روی سیگنال منتشر شده در سازه تأثیر

می‌گذارد [۶]. روش انتشار موج به طور خلاصه به این صورت است که یک سیگنال در محلی از سازه تولید و منتشر و در همان محل یا محل دیگر دریافت می‌شود. این سیگنال تولید شده با رسیدن به انتهای مقید سازه یا رسیدن به محل آسیب و یا محل ناپیوستگی، بازتاب می‌شود. با دریافت سیگنال بازتاب شده می‌توان در مورد مکان و میزان آسیب دیدگی یا ناپیوستگی اظهار نظر کرد. این مقاله قصد دارد که صحت روش انتشار موج را در یافتن آسیب در سازه‌ها مورد ارزیابی قرار دهد.

## ۲- تئوری روش

برای تحلیل سازه می‌توان از روش اجزای محدود سستی<sup>۳</sup> استفاده کرد، ولی از آنجایی که مسأله انتشار موج در سازه‌ها جزء مسائل دینامیکی با فرکانس بالا دسته‌بندی می‌شود، برای اینکه تخمین درستی از جرم و سختی در طول سازه زده شود باید از تعداد بسیاری المان محدود استفاده کرد [۷ و ۸]. مسائل دینامیکی با فرکانس بالا<sup>۴</sup> به مسائل ارتعاشی اطلاق می‌شود که در آنها فرکانس بارگذاری بسیار زیاد است و به همین دلیل طول

محدود طیفی می توان به مرجع [۱۲] مراجعه کرد.

### ۳- مدل کردن جرم متمرکز در المان طیفی میله و تیر اولر برنولی

معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد میله با سطح مقطع  $A$ ، چگالی  $\rho$  و مدول الاستیسیته  $E$  به صورت زیر است:

$$EAu'' - \rho A \ddot{u} = 0 \quad (2)$$

که در آن  $u(x,t)$  تغییر مکان طولی لوله،  $(\ddot{\quad})$  نشان دهنده مشتق نسبت به زمان و  $(\prime)$  مشتق نسبت به مکان است. برای مدل کردن جرم متمرکز در سازه، باید اثر نیروی اینرسی اضافی ناشی از آن در معادله ارتعاش دیده شود [۱۳]. در صورت وجود جرم متمرکز معادله (۲) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$EAu'' - \rho A \ddot{u} = M_{ci} \ddot{u}_i \delta(x - x_i) \quad (3)$$

که در آن  $\delta(x - x_i)$  تابع دلتای دیراک<sup>۱</sup> و  $M_{ci}$  جرم متمرکز اضافه شده است. برای تیر اولر برنولی هم به همین شکل عمل می شود. نیروی اینرسی تولید شده از جرم متمرکز با این فرض که جرم متمرکز فقط در راستای طولی حرکت می کند، به صورت شرایط مرزی به گره مربوطه در سازه اعمال می شود. یعنی از اثر حرکت چرخشی آنها صرف نظر شده است، بنابراین ماتریس سختی دینامیکی سازه با جرم متمرکز به صورت زیر اصلاح می شود [۱۳]:

$$\mathbf{K}_g = [\mathbf{K}]_{gn} - \omega^2 [\mathbf{M}_c]_g \quad (4)$$

که  $[\mathbf{K}]_{gn}$  ماتریس سختی دینامیکی کل و  $[\mathbf{M}_c]_g$  ماتریس جرم متمرکز کل است (بعد این ماتریس برابر با تعداد درجات آزادی تراکم یافته کل است) که به صورت زیر تعریف می شود:

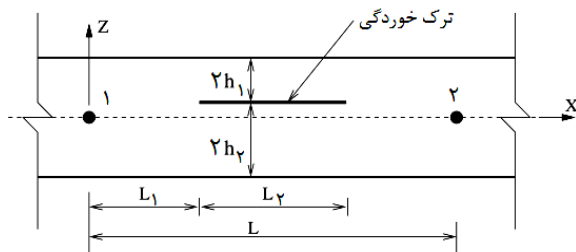
$$[\mathbf{M}_c]_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

که  $[\mathbf{M}_c]$  ماتریس جرم متمرکز برای هر المان است و برای المان میله به صورت:

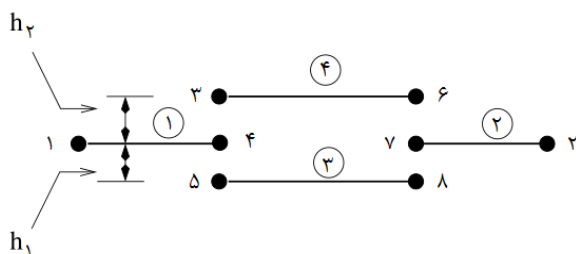
موج منتشره در سازه بسیار کم است و برای اینکه پاسخ به دست آمده از روش اجزای محدود سنتی صحیح و قابل اطمینان باشد، باید طول المان های استفاده شده از طول موج منتشر شده کمتر انتخاب شود [۹]. به همین دلیل حجم محاسبات با روش اجزای محدود بسیار بالا می رود. استفاده از المان های طیفی و تحلیل سازه با روش اجزای محدود طیفی<sup>۵</sup> به دلیل استفاده از ماتریس سختی دینامیکی<sup>۶</sup>، دقیق ترین پاسخ را با کمترین المان ممکن ارائه می دهد. دلیل این امر آن است که ماتریس سختی دینامیکی از توابع شکل دقیق در حوزه فرکانس به دست می آید. این توابع شکل خود از حل معادله ارتعاش، که از حوزه زمان به حوزه فرکانس منتقل شده است، به دست می آیند. روند کلی در تحلیل سازه ها به روش اجزای محدود طیفی، مشابه روش اجزای محدود سنتی است و به طور کلی شامل سه گام محاسبه ماتریس سختی دینامیکی، سرهم کردن المان ها و اعمال شرایط مرزی، حل کردن مسأله و عملیات پس پردازش<sup>۷</sup> نتایج است [۱۰]. برای به دست آوردن ماتریس سختی دینامیکی المان میله و تیر می توان به ترتیب به مراجع [۷] و [۱۱] مراجعه کرد. سرهم کردن المان ها و اعمال شرایط مرزی نیز مانند روش اجزای محدود انجام می گیرد. پس از سرهم کردن المان ها، شرایط مرزی به سازه وارد می شود و سیستم معادلات کلی به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathbf{K}_{gn}(\omega) \mathbf{d}_{gn} = \mathbf{f}_{gn} \quad (1)$$

که  $\mathbf{K}_{gn}(\omega)$ ،  $\mathbf{d}_{gn}$  و  $\mathbf{f}_{gn}$  به ترتیب بیانگر ماتریس سختی دینامیکی کل، بردار درجات آزادی کل و بردار نیروهای طیفی کل هستند. تفاوت اصلی بین روش اجزای محدود سنتی و طیفی در این است که در روش طیفی  $\mathbf{K}_{gn}(\omega)$ ،  $\mathbf{d}_{gn}$  و  $\mathbf{f}_{gn}$  باید در هر گام فرکانسی به طور مکرر سرهم و محاسبه شوند، بنابراین ماتریس سختی مرتباً تغییر می کند و در هر فرکانس مقدار متفاوتی دارد، ولی در روش اجزای محدود سنتی ماتریس های سختی و جرم ثابت هستند و فقط یک بار سرهم و محاسبه می شوند. برای به دست آوردن پاسخ سازه در برابر بارهای دینامیکی با استفاده از روش اجزای



شکل ۱- مقطع تیر با ترک عرضی



شکل ۲- نحوه شماره گذاری المان‌ها و گره‌ها در تیر ترک خورده

که صفحات مستوی پس از تغییر شکل مستوی باقی می‌مانند و در محل تماس المان‌های اصلی و فرعی شیب به صورت پیوسته و ثابت است. این فرض باعث می‌شود که روابط زیر برقرار باشند [۹]:

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \begin{Bmatrix} \hat{u}_r^* \\ \hat{w}_r \\ \hat{\phi}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_r^* + h_r \hat{\phi}_r \\ \hat{w}_r \\ \hat{\phi}_r \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_r \hat{\mathbf{u}}_r \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_d = \begin{Bmatrix} \hat{u}_d^* \\ \hat{w}_d \\ \hat{\phi}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_d^* - h_l \hat{\phi}_d \\ \hat{w}_d \\ \hat{\phi}_d \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_l \hat{\mathbf{u}}_d \quad (9)$$

و به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$\hat{\mathbf{u}}_6 = \mathbf{S}_l \hat{\mathbf{u}}_7 \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_8 = \mathbf{S}_l \hat{\mathbf{u}}_7$$

که ماتریس‌های  $\mathbf{S}_l$  و  $\mathbf{S}_r$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{S}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h_r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h_l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[\mathbf{M}_c] = \begin{bmatrix} M_{ci} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

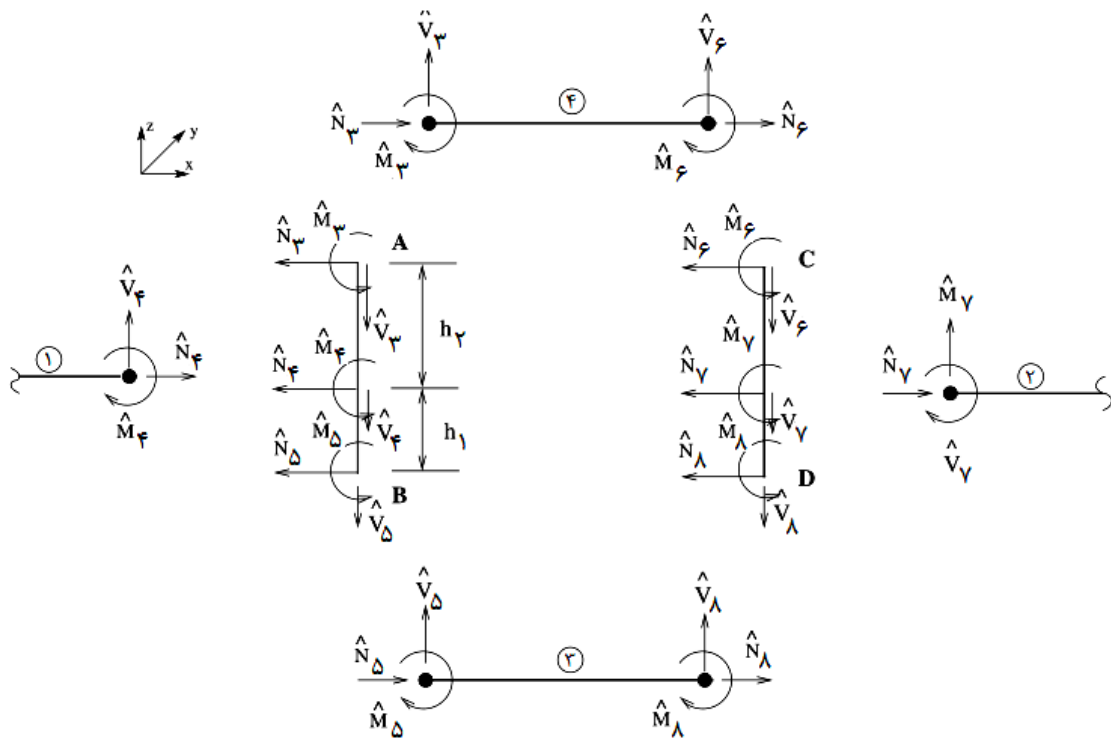
و برای المان تیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{M}_c] = \begin{bmatrix} M_{ci} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{ci} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در ماتریس جرم متمرکز برای تیر، تمام درایه‌های غیرقطری و درایه‌های قطری مربوط به تغییر زاویه صفر هستند و فقط درایه‌های قطری مربوط به تغییر شکل محوری و جانبی مقدار غیرصفر دارند [۱۳]. لازم به ذکر است که جرم متمرکز را می‌توان در هر گره از سازه مدل کرد، این گره در دو المان متوالی از سازه مشترک است.

#### ۴- مدل کردن ترک عرضی در المان تیر

روش انتشار موج در جامدات بر این اساس استوار است که وجود ناپیوستگی در سازه بر موج منتشر شده در این مواد تأثیر می‌گذارد [۶]. شکل (۱) مقطع تیر با ترک عرضی را نشان می‌دهد. در صورتی که بین دو نقطه از سازه ناپیوستگی وجود نداشته باشد برای مدل کردن سازه به روش اجزای محدود طیفی، وجود فقط یک المان کافی است. وجود ترک خوردگی در تیر، تعداد المان‌ها را از یک به چهار عدد و تعداد گره‌ها را از دو به هشت عدد افزایش می‌دهد. المان اول و دوم، قبل و بعد از ترک خوردگی، و المان‌های سوم و چهارم، در پایین و بالای ترک خوردگی قرار می‌گیرند. المان‌های ۱ و ۲، المان‌های اصلی و المان‌های ۳ و ۴، المان‌های فرعی نامیده می‌شوند. طول المان ۳ و ۴ مساوی طول ترک خوردگی است [۱۴ و ۱۵]. شماره گذاری المان‌ها و گره‌ها در شکل (۲) نشان داده شده است. فرض می‌شود



شکل ۳- نیروهای اعمالی به گره‌ها در تیر ترک خورده

$$\hat{\mathbf{f}}_V + \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{f}}_F + \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{f}}_\Delta = 0 \quad (14)$$

رابطه (۱۵) بین نیروهای داخلی و تغییر شکل هر چهار المان به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(j)} & \hat{\mathbf{K}}_{1r}^{(j)} \\ \hat{\mathbf{K}}_{r1}^{(j)} & \hat{\mathbf{K}}_{rr}^{(j)} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_p \\ \hat{\mathbf{u}}_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_p \\ \hat{\mathbf{f}}_q \end{Bmatrix} \quad (15)$$

که  $j=1,2,3,4$  شماره المان‌ها و  $p$  و  $q$  شماره گره‌های هر المان هستند. برای المان ۱ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(1)} & \hat{\mathbf{K}}_{1r}^{(1)} \\ \hat{\mathbf{K}}_{r1}^{(1)} & \hat{\mathbf{K}}_{rr}^{(1)} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1 \\ \hat{\mathbf{f}}_r \end{Bmatrix} \quad (16)$$

به همین ترتیب برای المان ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{1r}^{(2)} \\ \hat{\mathbf{K}}_{r1}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{rr}^{(2)} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_2 \\ \hat{\mathbf{f}}_r \end{Bmatrix} \quad (17)$$

با استفاده از این روابط می‌توان تغییر شکل‌های گره‌های ۳ و ۵ را به صورت تابعی از تغییر شکل گره ۴ و تغییر شکل‌های گره‌های ۶ و ۸ را به صورت تابعی از تغییر شکل گره ۷ بیان کرد. با توجه به شکل (۳) از تعادل نیروهای داخلی در سطح تماس المان‌های اصلی و فرعی در سمت چپ، خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \hat{N}_F \\ \hat{V}_F \\ \hat{M}_F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{N}_r \\ \hat{V}_r \\ \hat{M}_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_r \hat{N}_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{N}_\Delta \\ \hat{V}_\Delta \\ \hat{M}_\Delta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -h_1 \hat{N}_\Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

فرم ماتریسی معادله (۱۲) به صورت زیر است:

$$\hat{\mathbf{f}}_F + \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{f}}_r + \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{f}}_\Delta = 0 \quad (13)$$

به طور مشابه از تعادل نیروهای داخلی سطح تماس المان‌های اصلی و فرعی در سمت راست خواهیم داشت:

عرضی است [۹].

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(3)} & \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(3)} \\ \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(3)} & \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(3)} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_5 \\ \hat{\mathbf{u}}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_5 \\ \hat{\mathbf{f}}_8 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

می‌توان تغییرشکل گره‌های ۵ و ۸ در المان را به‌ترتیب برحسب تغییر شکل گره‌های ۴ و ۷ نوشت. با استفاده از معادله‌های (۹) و (۱۰) با پیش ضرب  $\mathbf{S}_r^T$  در آنها خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(3)} \mathbf{S}_r & \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(3)} \mathbf{S}_r \\ \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(3)} \mathbf{S}_r & \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(3)} \mathbf{S}_r \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_4 \\ \hat{\mathbf{u}}_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{f}}_5 \\ \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{f}}_8 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

برای المان ۴ داریم:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(4)} & \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(4)} \\ \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(4)} & \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(4)} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_4 \\ \hat{\mathbf{u}}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_4 \\ \hat{\mathbf{f}}_6 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

به‌روش مشابه تغییرشکل گره‌های ۳ و ۶ در المان را به‌ترتیب برحسب تغییر شکل گره‌های ۴ و ۷ نوشت. با استفاده از معادله ۸ تا ۱۰ با پیش ضرب  $\mathbf{S}_1^T$  در آن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(4)} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(4)} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(4)} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(4)} \mathbf{S}_1 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \hat{\mathbf{u}}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{f}}_4 \\ \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{f}}_6 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

پس از سرهم کردن ماتریس سختی چهار المان، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\hat{\mathbf{K}}} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_4 \\ \hat{\mathbf{u}}_6 \\ \hat{\mathbf{u}}_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1 \\ \circ \\ \circ \\ \hat{\mathbf{f}}_7 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

که در آن  $\hat{\hat{\mathbf{K}}}$  ماتریس سختی کل برای تیر با ترک‌خوردگی

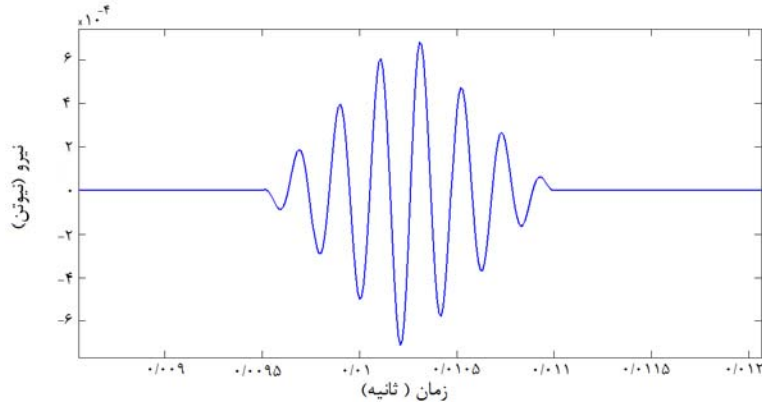
## ۵- نتایج عددی

### ۵-۱- مثال عددی یافتن جرم متمرکز در میله و تیر

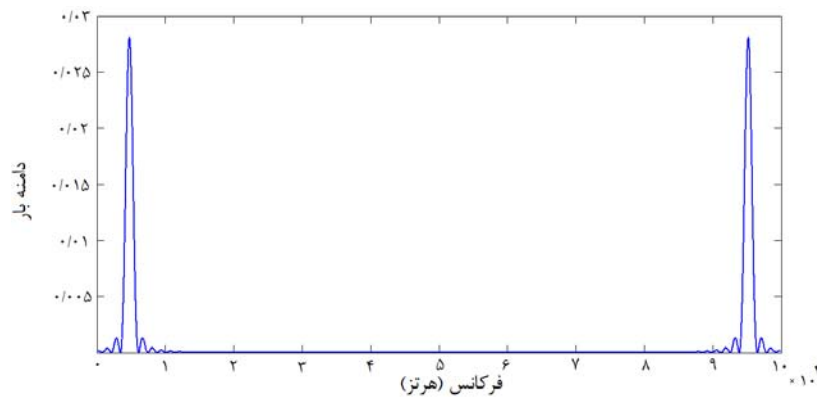
#### الف) میله

میله‌ای به طول ۱۲ متر، چگالی ۸۰۰۰ کیلوگرم بر مترمربع، سطح مقطع ۰/۰۱ مترمربع و مدول الاستیسیته ۲۱۰ گیگاپاسکال که از یک طرف گیردار است، تحت ارتعاش طولی قرار می‌گیرد. شکل‌های (۴) و (۵) به‌ترتیب، بار وارد بر سر آزاد میله را در حوزه زمان و حوزه فرکانس نشان می‌دهند. شکل (۶)، شتاب طولی سر آزاد میله را در حالت بدون وجود جرم متمرکز نشان می‌دهد. زمان محاسبات با استفاده از روش اجزای محدود طیفی و سنتی به‌ترتیب ۲/۶ و ۳۰/۳ ثانیه و تعداد المان‌های استفاده شده در دو روش به‌ترتیب ۳ و ۱۰۰۰ است. در این شکل دو سیگنال مشخص است که سیگنال اول، همان سیگنال تولید شده در سر آزاد میله و سیگنال دوم، سیگنال بازتاب شده از تکیه‌گاه انتهایی گیردار میله است. به‌دلیل آنکه هیچگونه میرایی در ارتعاش طولی میله فرض نشده است، دامنه سیگنال بازتابی از دامنه سیگنال تولید شده بیشتر است. سیگنال تولید شده به محض رسیدن به انتهای سازه (تکیه‌گاه یا انتهای آزاد) یا ناپیوستگی بازتاب خواهد شد و اگر میرایی در سازه وجود نداشته باشد، این رفت و برگشت سیگنال تا ابد ادامه می‌یابد و دامنه سیگنال هم به‌سمت یک مقدار مشخص میل می‌کند. بنابراین اگر پاسخ سازه تا بی‌نهایت رسم شود، سیگنال‌هایی با فاصله یکسان و دامنه‌هایی برابر با سیگنال بازتاب شده از انتهای سازه وجود خواهد داشت. شکل (۷) شتاب سر آزاد میله را

$$\hat{\hat{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(1)} & \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(1)} & \circ & \circ \\ \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(1)} & \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(1)} + \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(4)} \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(3)} \mathbf{S}_r & \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(4)} \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(3)} \mathbf{S}_r & \circ \\ \circ & \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(4)} \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(3)} \mathbf{S}_r & \mathbf{S}_1^T \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(4)} \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_r^T \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(3)} \mathbf{S}_r + \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(2)} \\ \circ & \circ & \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (23)$$



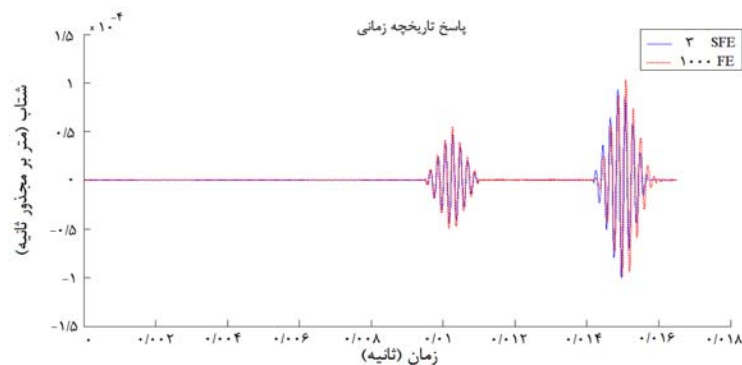
شکل ۴- نیروی ارتعاشی در حوزه زمان



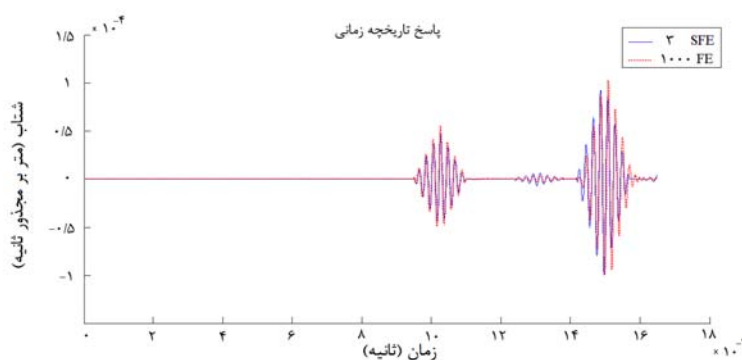
شکل ۵- نیروی ارتعاشی در حوزه فرکانس

می‌کند، باز هم سیگنال به دو بخش تقسیم می‌شود که بخش اول به سمت ابتدای سازه برمی‌گردد که همان سیگنال سومی است که در شکل مشاهده می‌شود و بخش دیگر تا ابد مابین جرم متمرکز و تکیه‌گاه به دام می‌افتد، این روند تا میرا شدن سیگنال‌ها ادامه می‌یابد. ذکر این نکته ضروری است که سیگنال به دام افتاده بین جرم متمرکز و تکیه‌گاه تا پیش از آنکه کاملاً میرا شود، روی سیگنال‌های بازتابی از انتها تأثیر گذاشته و با آنها جمع می‌شود که اگر پاسخ سازه تا بی‌نهایت رسم شود، این امر خودش را نشان می‌دهد. شکل (۸) شتاب سر آزاد میله را با وجود یک جرم متمرکز به جرم ۱ درصد جرم میله که در فاصله ۰/۶ طول میله از سر آزاد آن قرار گرفته است را نشان می‌دهد. از مقایسه شکل (۸) و شکل (۷) مشخص است که

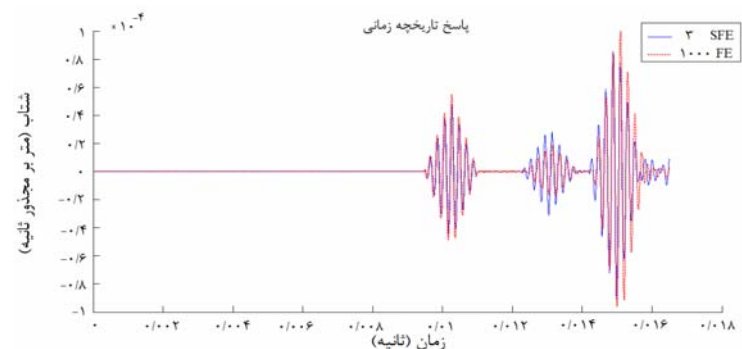
با وجود یک جرم متمرکز به جرم ۰/۲ درصد جرم میله که در فاصله ۰/۶ طول میله از سر آزاد آن قرار گرفته است را نشان می‌دهد. در این قسمت نیز نتایج به دست آمده از روش طیفی با روش اجزای محدود سنتی مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، یک سیگنال اضافی میان دو سیگنال تولید شده ابتدایی و سیگنال بازتابی مشاهده می‌شود. دلیل این امر آن است که با رسیدن سیگنال تولید شده به محل جرم متمرکز، سیگنال به دو بخش تقسیم می‌شود، بخش اول به سمت ابتدای میله برمی‌گردد که همان سیگنال کوچکی است که در شکل مشخص است. ولی بخش دوم به مسیر خود تا رسیدن به انتهای سازه ادامه می‌دهد، سپس این سیگنال با برخورد با انتهای سازه بازتاب می‌شود و مسیرش را ادامه می‌دهد تا دوباره به جرم متمرکز میانی برخورد



شکل ۶- شتاب طولی سر آزاد میله در حالت بدون جرم متمرکز



شکل ۷- شتاب طولی سر آزاد میله با جرم متمرکز ۰/۲ درصد جرم میله



شکل ۸- شتاب طولی سر آزاد میله با جرم متمرکز ۱ درصد جرم کل میله

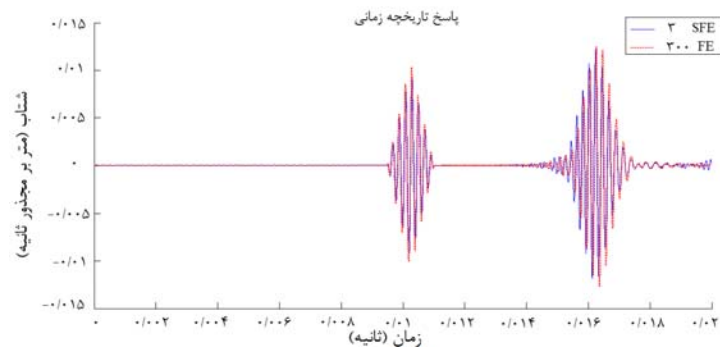
عرض و ارتفاع ۲ و ۴ سانتی‌متر و مدول الاستیسیته ۷۲/۷ گیگاپاسکال به صورت طره قرار دارد و در اثر همان بار قبلی و این بار تحت ارتعاش جانبی قرار گرفته است. شکل (۹) پاسخ تاریخچه زمانی شتاب سر آزاد تیر را در حالت بدون وجود جرم متمرکز نشان می‌دهد. زمان محاسبات با استفاده از

با افزایش نسبت جرم متمرکز، دامنه سیگنال میانی هم افزایش می‌یابد.

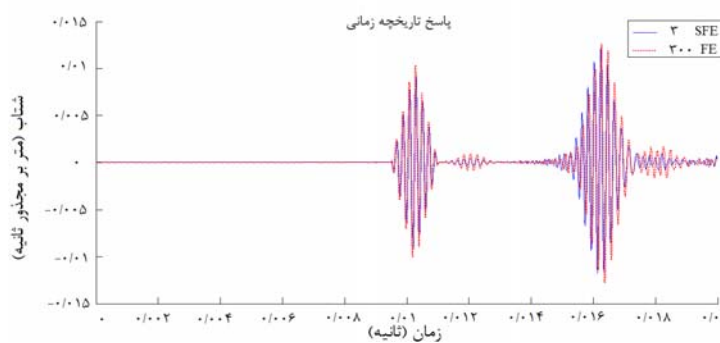
ب) تیر

تیری با طول ۸ متر، چگالی ۲۷۰۰ کیلوگرم بر مترمربع،





شکل ۹- شتاب جانبی سر آزاد تیر در حالت بدون جرم متمرکز



شکل ۱۰- شتاب جانبی سر آزاد تیر با جرم متمرکز ۰/۲ درصد جرم کل تیر

جدول ۱- خلاصه نتایج به دست آمده از روش انتشار موج مربوط به یافتن جرم متمرکز

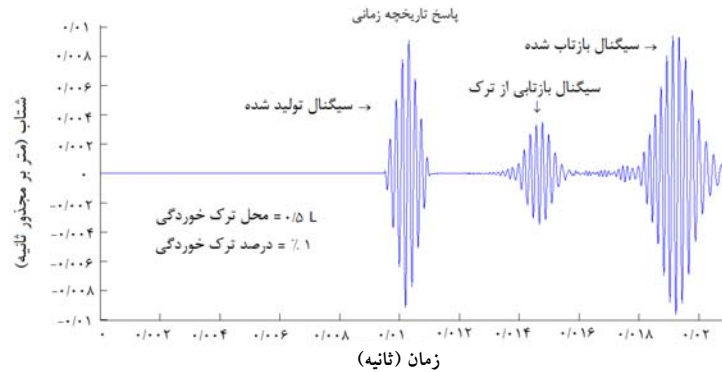
نوع سازه	درصد جرم متمرکز	فاصله جرم متمرکز از تکیه‌گاه (متر)	نتیجه به دست آمده از روش انتشار موج (متر)	درصد خطا
میله	۰/۲	۴/۸۰۰	۴/۷۰۴	۲/۰۰
میله	۱	۴/۸۰۰	۴/۶۹۲	۲/۲۵
تیر	۰/۲	۵/۶۰۰	۵/۶۷۲	۱/۲۹

نیاز به دانستن سرعت موج و تنها با استفاده از نمودار پاسخ و با استفاده از نسبت فاصله زمانی دریافت موج از جرم متمرکز به زمان دریافت موج از انتهای سازه می‌توان با دقت بسیار خوب، محل جرم را پیدا کرد. در نهایت خلاصه نتایج به دست آمده از روش انتشار موج مربوط به یافتن جرم متمرکز در جدول (۱) آمده است.

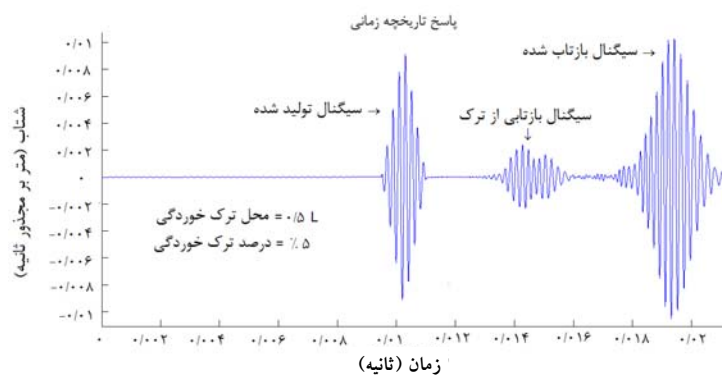
#### ۵-۱- مثال عددی یافتن ترک عرضی در تیر

در اینجا تیری ترک خورده با طول ۱۲ متر، چگالی ۲۷۰۰

روش اجزای محدود طیفی و سنتی به ترتیب ۲/۶ و ۲۲/۷ ثانیه و تعداد المان‌های استفاده شده در دو روش به ترتیب ۳ و ۳۰۰ است. شکل (۱۰) پاسخ شتاب سر آزاد تیر را با وجود یک به دست آمده از روش طیفی با روش اجزای محدود سنتی مقایسه شده‌اند. در مورد تیر نیز، وجود جرم متمرکز باعث به وجود آمدن یک سیگنال اضافی در پاسخ سازه می‌شود. با توجه به اختلاف زمان رسیدن موج بازتاب شده از انتهای سازه و جرم متمرکز و با داشتن سرعت موج تولید شده می‌توان محل جرم متمرکز را به آسانی تعیین کرد. حتی بدون



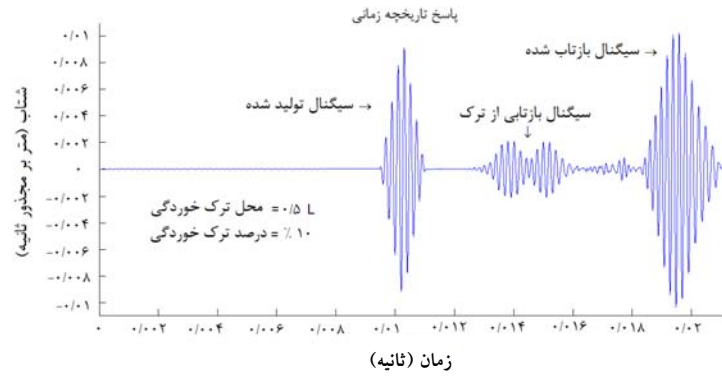
شکل ۱۱- شتاب جانبی سر آزاد تیر (طول ترک ۱ درصد)



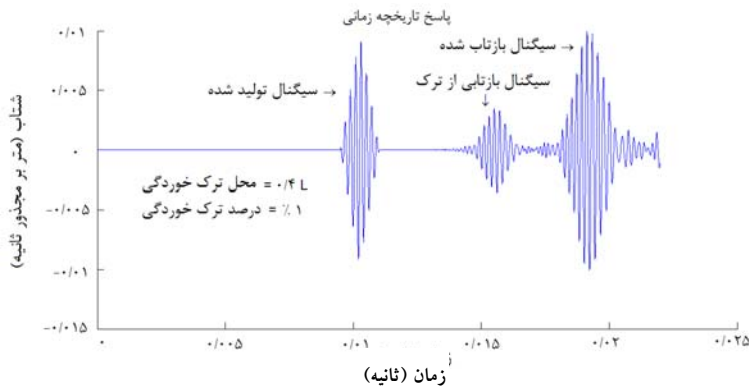
شکل ۱۲- شتاب جانبی سر آزاد تیر (طول ترک ۵ درصد)

آن مقداری کمتر می‌شود. در شکل (۱۳) با افزایش طول ترک به ۱۰ درصد طول کل تیر، سیگنال میانی به دو سیگنال مجزا تبدیل می‌شود. دلیل این امر آن است که با برخورد سیگنال تولید شده به ابتدا و انتهای ترک به‌ازای هر برخورد یک سیگنال تولید می‌شود و در مجموع دو سیگنال به‌وجود می‌آید. در شکل‌های (۱۴) و (۱۵) ترکی به طول ۱ درصد طول تیر به‌ترتیب در فاصله  $4/8$  و  $7/2$  متری از محل تکیه‌گاه در آن مدل شده است و شتاب سر آزاد تیر به‌دست آمده است. با تغییر محل ترک خوردگی محل سیگنال میانی هم تغییر می‌کند، با توجه به این شکل‌ها و با استفاده از تفاوت زمانی دریافت سیگنال دوم و سوم، طول و محل ترک را می‌توان تعیین کرد. در نهایت خلاصه نتایج به‌دست آمده از روش انتشار موج مربوط به یافتن ترک عرضی در

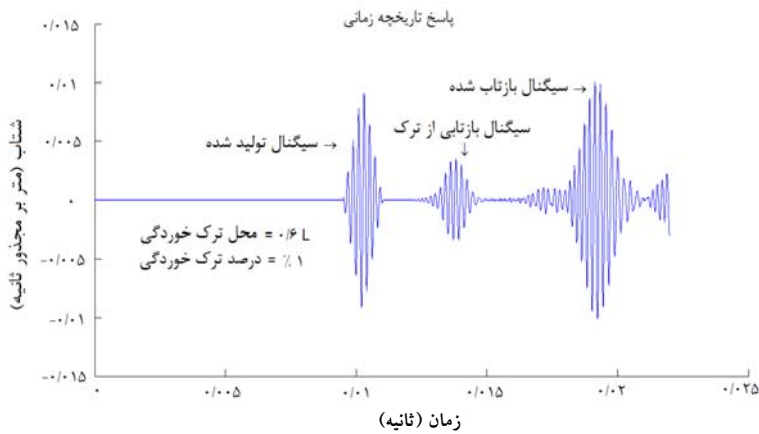
کیلوگرم بر مترمربع، عرض و ارتفاع ۲ و ۴ سانتی‌متر و مدول الاستیسیته  $72/7$  گیگاپاسکال به‌صورت طره قرار دارد و تحت ارتعاش جانبی با بارگذاری شکل (۱) و (۲) قرار گرفته است. شتاب سر آزاد تیر در چندین حالات با طول و مکان مختلف ترک خوردگی به‌دست آمده است. در شکل (۱۱) ترکی به طول ۱ درصد طول تیر در فاصله ۶ متری از محل تکیه‌گاه در آن مدل شده است و شتاب سر آزاد تیر به‌دست آمده است. سیگنال اول بیانگر تحریک اولیه و سیگنال سوم، سیگنال دریافت شده از انتهای تیر است. سیگنال میانی به‌دلیل بازتاب از محل ترک عرضی است. دامنه سیگنال بازتاب شده از انتهای تیر در حالت وجود ترک از حالت بدون وجود ترک کمتر است. در شکل (۱۲) با افزایش طول ترک به ۵ درصد طول کل تیر، طول سیگنال میانی افزایش می‌یابد ولی دامنه



شکل ۱۳- شتاب جانبی سر آزاد تیر (طول ترک ۱۰ درصد)



شکل ۱۴- شتاب جانبی سر آزاد تیر (محل ترک در فاصله ۴/۸ متری از تکیه‌گاه)



شکل ۱۵- شتاب جانبی سر آزاد تیر (محل ترک در فاصله ۷/۲ متری از تکیه‌گاه)

جدول ۲- خلاصه نتایج به دست آمده از روش انتشار موج مربوط به یافتن ترک عرضی

طول ترک (متر)	نتیجه به دست آمده از روش انتشار موج برای طول ترک (متر)	فاصله ترک از تکیه گاه (متر)	نتیجه به دست آمده از روش انتشار موج برای فاصله ترک از تکیه گاه (متر)	درصد خطای در صد خطای فاصله	درصد خطای طول
۰/۱۲	ناچیز	۶/۰۰۰	۶/۰۰۰	۰/۰۰	----
۰/۶	۰/۶۱۸	۶/۰۰۰	۶/۱۰۲	۰/۰۰	۳/۰۰
۱/۲	۱/۲۳۶	۶/۰۰۰	۶/۳۹۶	۶/۶۰	۳/۰۰
۰/۱۲	ناچیز	۴/۸۰۰	۴/۹۲۰	۲/۵۰	----
۰/۱۲	ناچیز	۷/۲۰۰	۷/۲۱۲	۰/۱۷	----

جدول (۲) آمده است.

پاسخ سازه می شود.

۲- سیگنال دریافتی از انتهای سازه در حالت سالم بزرگتر از سیگنال دریافتی از انتهای آن در حالت آسیب دیده است.

۳- در کاربری های عملی هرچه فرکانس بارگذاری بالاتر رود، تشخیص ترک های ریزتر امکان پذیر است.

۴- در صورتی که فقط یک آسیب در طول سازه وجود داشته باشد، برای یافتن محل آن، وجود نمودار پاسخ سازه به تنهایی کافی است و نیازی به دانستن سرعت انتشار موج نیست.

۵- در صورتی که طول ترک خوردگی کم باشد، فقط یک سیگنال اضافی تولید می شود. با افزایش طول ترک خوردگی، سیگنال میانی به دو سیگنال تقسیم می شود و هرچه این طول بیشتر شود، فاصله این دو سیگنال هم بیشتر می شود.

۶- هرچه فرکانس بارگذاری مسأله بیشتر شود، مزیت روش اجزای محدود طیفی بر روش اجزای محدود سنتی بیشتر مشخص می شود.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله برای یافتن آسیب در سازه از روش انتشار موج استفاده شد. چون مسأله انتشار موج جزء مسائل دینامیکی با فرکانس بالاست، برای تحلیل سازه از روش اجزای محدود طیفی استفاده شد. در تحلیل سازه به روش اجزای محدود طیفی، تعداد المان های استفاده شده و دقت پاسخ به دست آمده، به فرکانس بارگذاری بستگی ندارند. در واقع همین موضوع است که موجب می شود تا محققین در مسائل انتشار موج از روش اجزای محدود طیفی به جای روش سنتی آن استفاده کنند. برای آسیب یابی سازه، بار به صورت یک سیگنال با فرکانس تقریباً یکنواخت در انتهای آزاد سازه تولید و در همان محل دریافت شد. با مقایسه اختلاف زمان رسیدن سیگنال تولیدی و سیگنال دریافتی، محل آسیب با دقت خوب تعیین گردید. در تحلیل دو سازه میله و تیر اولر برنولی نتایج زیر به دست آمد:

۱- وجود ناپیوستگی در سازه (ناپیوستگی جرمی یا ناپیوستگی در سختی) باعث ایجاد سیگنال اضافی در

## واژه نامه

1. damage detection
2. wave propagation method

3. conventional finite element method
4. high frequency problem

5. spectral finite element method
6. dynamic stiffness matrix

7. post processing
8. Dirac delta function

## مراجع

1. Adams, R. D., and Cawley, P., "The Localisation of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies", *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 14, No. 2, pp. 49-57, 1979.
2. Cawley, P., Adams, R. D., Pye, C. J., and Ston, B. J., "A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 20, No. 2, pp. 93-100, 1978.
3. Messina, A., Jones, I. A., and Williams, E. J., "Damage Detection and Localisation Using Natural Frequency Changes", *Proceedings of the First Conference on Structural Identification*, Cambridge, pp. 67-76, 1992.
4. Palacz, M., and Krawczuk, M., "Vibration Parameters for Damage Detection in Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 249, No. 5, pp. 1011-1015, 2002.
5. Lim, T. W., and Kashangaki, T. A. L., "Structural Damage Detection of Space Truss Structures Using Best Achievable Eigenvectors", *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 5, pp. 1049-1057, 1994.
6. Ostachowicz, W., Krawczuk, M., Cartmell, M., and Gilchrist, M., "Wave Propagation in Delaminated Beam", *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 475-483, 2004.
7. بغلانی، ع. و اسکندرجوی، م. ص.، "محاسبه فرکانس‌های ارتعاشی میله با استفاده از روش اجزای محدود طیفی و مقایسه آن با روش اجزای محدود"، اولین همایش ملی معماری، عمران و محیط زیست شهری، همدان، ۱۳۹۳.
8. Krawczuk, M., Palacz, M., and Ostachowicz, W., "Wave Propagation in Plate Structures for Crack Detection", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, pp. 991-1004, 2004.
9. Gopalakrishnan, S., Chakraborty, A., and Mahapatra, D. R., *Spectral Finite Element Method Wave Propagation and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures*, 1st, Springer, 2008.
10. Lee, U., *Spectral Element Method In Structural Dynamics*, 1st, John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, pingapore, 2009.
۱۱. اسکندرجوی، م. ص. و بغلانی، ع.، "مقایسه استفاده از ماتریس سختی دینامیکی و روش اجزای محدود در محاسبه فرکانس‌های ارتعاشی تیر اولر برنولی"، دومین کنگره بین‌المللی سازه، معماری و توسعه شهری، تبریز، ۱۳۹۳.
12. Eskandarjuy, M. S., and Baghlani, A., *Second International Conference on Advances in Engineering and Basic Sciences*, Tehran, 2014.
13. Ait-Djaoud, R., Djeran-Maigre, I., and Cabrilac, R., "Calculation of Natural Frequencies of Beam Structures Including Concentrated Mass Effects by the Dynamic Stiffness Matrix Method", *Journal of Materials and Structures*, Vol. 34, pp. 71-75, 2001.
14. Mujumdar, P. M., and Suryanarayan, S., "Flexural Vibration of Beams with Delaminations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 125, pp. 441-461, 1988.
15. Erdelyi, N. H., and Hashemi, S. M., "A Dynamic Stiffness Element for Free Vibration Analysis of Delaminated Layered Beams", *Journal of Modelling and Simulation in Engineering*, Vol. 2012, No. 2, 2012.

