

## شبیه‌سازی عددی دو بعدی معادلات انتقال رسوب با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین

علی رحمانی فیروزجائی\* و مصطفی صاحب‌دل  
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۲/۱۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۰۲/۱۸)

**چکیده-** در این پژوهش، روش عددی بدون شبکه گالرکین برای شبیه‌سازی معادلات انتقال رسوب بستر در حالت دو بعدی به‌کار گرفته شد. این روش که یکی از روش‌های بدون شبکه است، با استفاده از توزیع دلخواه گره‌ها در دامنه محاسباتی به گسسته‌سازی مکانی مسئله می‌پردازد و در این روش، نیازی به شبکه، المان و یا هرگونه اطلاعات ارتباطی بین گره‌ای نیست. بخش هیدرودینامیک معادلات انتقال رسوب توسط معادلات دو بعدی آب‌های کم عمق مدل شده و معادله اکسندر پیوستگی رسوب را توصیف می‌کند. در انتها به حل مثال‌های مرجع جهت بررسی صحت کارایی روش مورد استفاده پرداخته شد و نتایج حاصل با تحقیقات سابق انجام شده مقایسه شد.

واژه‌های کلیدی: روش‌های عددی، روش بدون شبکه گالرکین، معادلات آب‌های کم‌عمق، روابط تجربی معادلات رسوب.

## Numerical Simulation of 2D Sediment Transport Equations via Element Free Galerkin

A. Rahmani Firoozjaee\* and M. Sahebdel

Department of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

**Abstract:** *In this research, the element free Galerkin is implemented to simulate the bed-load sediment transport equations in two dimensions. In this method, which is a meshless method, the computational domain is discretized by a set of arbitrarily scattered nodes and there is no need to use meshes, elements or any other connectivity information in nodes. The hydrodynamical part of sediment transport equations is modeled using 2D shallow water equations; and the Exner equation describes the sediment continuity. Eventually, to appraise the ability of considered method, several benchmark examples are solved and then, the obtained results are compared with previously published works*

**Keywords:** *Numerical methods, Element free Galerkin, Shallow water equations, Empirical relations of sediment transport.*

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: rahmani@nit.ac.ir

دبی در واحد عرض جریان	$q_x, q_y$	پارامتر اندرکنش رسوب و سیال	$A_g$
زمان	$t$	ماتریس های ضرایب	$A_i(W), i=1,2$
مؤلفه های سرعت جریان در جهات X و Y	$u, v$	بردار نیروها	$F$
بردار متغیرهای پایستار	$W$	شتاب ثقل	$g$
مقدار مشخص شرط مرزی دریشه	$\bar{W}$	عمق جریان	$h$
توپوگرافی بستر	$Z$	ماتریس سختی	$K$
ماتریس توابع شکل	$\Phi(x)$	تعداد نقاط گره ای	$N$
ضریب جریمه	$\alpha$	مرتبۀ توابع پایه	$m$
گام زمانی	$\Delta t$	تخلخل رسوب	$p_0$
منحنی مرزی دارای شرط مرزی دریشه	$\Gamma_1$	دبی انتقال رسوب بستر	$Q_1, Q_2$

#### ۱- مقدمه

ارزیابی و برآورد انتقال رسوب و فرایندهای همراه با آن، از دیرباز، یکی از مسائل عمده و اصلی مهندسين هیدرولیک و رودخانه بوده است و محققین به حل این مسئله با استفاده از روش های عددی پرداخته اند. در حالت کلی، مدل ریاضیاتی مسئله مورفودینامیک به دو بخش از معادلات تقسیم می شود. معادلات غیرخطی آب های کم عمق، پیوستگی و مومثوم جریان آب را توصیف می کنند و معادله اکسنر که از پیوستگی رسوب منتج می شود، تغییرات بستر را توصیف می کند. تاکنون مدل های مختلف برای محاسبه دبی انتقال رسوب نظیر مدل گراس، مدل میر- پیتر و مولر، مدل ون راین، مدل فرناندز لوک- ون بیگ و مدل نیلسن معرفی شده که عموماً براساس روش های تجربی ارائه شده اند [۱]. در اکثر مدل های فوق به جز مدل گراس، تنش برشی بحرانی کنترل کننده حرکت رسوب است.

همزمان با پیشرفت سریع و چشم گیر فناوری کامپیوتر در طی چند دهه اخیر، روش های عددی مورد استفاده برای حل مسائل مهندسی و علمی، توسعه و تنوع قابل توجهی یافته اند. از جمله معروف ترین این روش ها، تفاضل محدود، احجام محدود و اجزاء محدود هستند که هر یک دارای ویژگی هایی هستند. روش های تفاضل محدود تا مدتی نسبتاً طولانی، تنها روش

موجود حل عددی معادله های دیفرانسیل به شمار می رفت. اما کاربرد این روش به مسائلی محدود می شود که امکان تولید شبکه منظم از نقاط گره ای در دامنه آنها وجود دارد. از جمله محققینی که با استفاده از این روش به شبیه سازی انتقال بار رسوبی بستر پرداخته اند می توان به نوروزی اشاره کرد. او به حل مدل دو بعدی انتقال رسوب با استفاده از روش تفاضلات محدود پرداخت و برای حل معادلات جریان، روش ماتریس سه قطری و روش Ultimate Quickest را برای حل جملات انتقال در معادله انتقال- انتشار به کار برد [۲]. برخی دیگر از محققین به حل مسئله انتقال بار بستر با استفاده از روش اجزاء محدود پرداختند [۳ و ۴]. آیزم با استفاده از روش المان محدود با گره های گسسته گالرکین<sup>۲</sup> به حل این مسئله پرداخت که در روش پیشنهادی او، گسسته سازی مکانی توسط شار<sup>۳</sup> عددی بر پایه شار محلی لاکس- فردریش<sup>۴</sup> و گسسته سازی زمان توسط روش صریح رانگ- کوتای<sup>۵</sup> مرتبه سوم انجام می شود [۴].

کاربرد روش حجم محدود در شبیه سازی انتقال رسوب مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است [۵-۱۶]. هادسون با تمرکز بر روش پایدار و ناپایدار و ارائه فرمولاسیون متفاوت بر آن مبنا، روش عددی پیشنهادی خود را از نظر دقت مورد بررسی قرار داد. او یک نسخه محدود کننده شار از روش

رو<sup>۶</sup> بر مبنای روش حجم محدود به کار گرفت [۵]. همچنین، از تقریب‌های عددی گوناگونی برای سیستم تشکیل شده از معادلات آب‌های کم‌عمق و معادله انتقال بار بستر با استفاده از مدل گراس ارائه کرد و چندین فرمول‌نویسی متفاوت برای مسئله در نظر گرفت [۶].

گروهی از محققین، روش ENO<sup>۷</sup> و WENO<sup>۸</sup> را برای سیستم معادلات انتقال رسوب تعمیم دادند [۷]. در حالی که کالی، با به‌کارگیری روش CWENO<sup>۹</sup> به حل مسئله انتقال رسوب پرداخت [۸]. اما ایراد اکثر روش‌های ENO، WENO و CWENO که به‌خوبی مدل مورفودینامیک را حل می‌کنند، هزینه‌بر بودن آنها از لحاظ محاسباتی است [۹]. دلیس و پاپگلو، به حل عددی معادلات انتقال بار بستر توسط روش حجم محدود و با استفاده از تقریب آرام<sup>۱۰</sup> در جریان‌های آب‌های کم‌عمق در حالت‌های یک بعدی و دو بعدی پرداختند. با به‌کارگیری تقریب آرام، معادلات غیرخطی تبدیل به نیمه‌خطی قطری‌پذیر<sup>۱۱</sup> با متغیر مشخصه‌های خطی می‌شود. همچنین آنها برای گسسته‌سازی زمانی از روش ضمنی-صریح<sup>۱۲</sup> استفاده کرده‌اند [۱۰].

بن‌خلدون و سعید با ترکیب روش مشخصات و روش حجم محدود، روش FVC<sup>۱۳</sup> را معرفی کرده و توسط آن به گسسته‌سازی مکانی معادلات با در نظرگیری روش صریح برای پیشروی زمانی پرداختند [۱۱]. در این مقاله، آنها مسئله انتقال رسوب را در حالت کلی با در نظرگیری بار معلق و بار بستر در جریان آب‌های سطحی مورد بررسی قرار دادند و از روش شبه‌پایدار<sup>۱۴</sup> برای حل استفاده کردند. همچنین بن‌خلدون در مقاله‌ای دیگر به حل مسئله در حالت یک‌بعدی با استفاده از فرمول‌بندی‌های متفاوت پرداخت و در انتها نتایج ناشی از فرمول‌بندی‌های متفاوت را با یکدیگر مقایسه کرد. وی برای گسسته‌سازی مکانی از روش حجم محدود مبتنی بر MUSCL که محدود کننده‌های شیب<sup>۱۵</sup> را یکی می‌کند، و از روش رانگ کوتای مرتبه دوم برای گسسته‌سازی زمانی استفاده کرد [۱۲]. در مقاله‌ای دیگر بن‌خلدون، از شبکه‌بندی نامنظم برای حل مسئله انتقال بار بستر با به‌کارگیری ترکیب شار عددی آپویند<sup>۱۶</sup>

و محدود کننده‌های شیب برای ایجاد وضوح قوی گرادیان بستر تند استفاده کرده‌اند و دسته‌ای از روش‌های حجم محدود برای تحلیل مدل دوبعدی مورفودینامیک برای شبکه‌های نامنظم مثلثی به نمایش گذاشته شد و از روش صریح برای گسسته‌سازی زمانی استفاده کرده‌اند [۱۳].

بیلانتری و همکاران، دستگاه معادلات انتقال بار بستر را توسط روش حجم محدود و یک روش رو اصلاحی (MR)<sup>۱۷</sup> طراحی شده برای سیستم‌های غیرپایستار انجام دادند. در مورد پیشروی زمانی که در این مقاله مورد تمرکز بوده، دو روش ضمنی و صریح به‌کار گرفته شده و از لحاظ دقت و زمان محاسباتی در حالت‌های یک‌بعدی و دو بعدی سیستم معادلات انتقال رسوب با یکدیگر مقایسه شده‌اند [۱۴]. آنها از یک روش خطی ضمنی<sup>۱۸</sup> با دقت از مرتبه دوم برای گسسته‌سازی زمانی استفاده کرده و به مقایسه نتایج با نتایج حاصل از روش صریح پرداختند. همچنین آنها برای گسسته‌سازی مکانی، دو روش حجم محدود، یکی روش پیش‌بینی-اصلاح<sup>۱۹</sup> SRNH و دیگری روش اصلاح شده رو را برای سیستم معادلات غیرپایستار در نظر گرفتند [۱۵]. کاسترو دیاز و همکاران، به حل مسئله انتقال بار رسوبی با استفاده از روش رو با دقت مرتبه دوم پرداختند. او ابتدا روش مرتبه اولی از انواع روش‌های رو به همراه متغیر بر مبنای استفاده از محدود کننده‌های شار، در نظر گرفتند؛ سپس این روش را با استفاده از یک اپراتور جدید بازسازی از نوع MUSCL روی شبکه‌های نامنظم به دقت از مرتبه دوم ارتقا دادند [۱۶].

نکته حائز اهمیت در تمامی روش‌های فوق، نیازمند بودن آنها به وجود یک شبکه‌بندی از پیش تعریف شده برای ایجاد ارتباط بین گره‌ها است که اساس فرمول‌نویسی این نوع روش‌های عددی است. به‌طور کلی در استفاده از روش‌هایی که وابسته به شبکه هستند اگر چه می‌توان شبکه را سریع تولید کرد، اما نیاز به چندین بار سعی و خطا است تا شبکه مطلوب و بهینه به دست آید [۱۷]. روش‌های بدون شبکه طی سه دهه اخیر به مجموعه روش‌های عددی اضافه شده است. در

اثر انتقال رسوب نیاز به کارگیری معادله اضافی که تغییرات زمانی تراز بستر را توصیف کند، است. از این رو از معادله اکسیر که بیان کننده پیوستگی حجم رسوب است برای تعیین مورفودینامیک استفاده می شود:

$$\partial_t(Z) + \xi [\partial_x(Q_1) + \partial_y(Q_2)] = 0 \quad (2)$$

که در آن:

$$\xi = \frac{1}{1-p} \quad (3)$$

$p$  تخلخل رسوب بوده و ثابت در نظر گرفته می شود.  $Q_1$  و  $Q_2$  دبی بار بستر در راستای  $X$  و  $Y$  هستند. در این پژوهش، برای تعیین دبی بار بستر، از مدل گراس استفاده شده است. مدل گراس به صورت زیر است [۱۹]:

$$Q_1 = A_g u \left( u^2 + v^2 \right)^{\frac{m_g-1}{2}}$$

$$Q_2 = A_g v \left( u^2 + v^2 \right)^{\frac{m_g-1}{2}} \quad (4)$$

که  $0 \leq A_g \leq 1$  و  $1 \leq m_g \leq 4$  پارامترهای وابسته به شرایط خاص مسئله است.  $A_g$  پارامتر مربوط به قطر ذرات و لزجت سینماتیکی بوده و به طور مستقیم با قدرت اندرکنش بین جریان آب و بار بستر در ارتباط است. به این معنی که مقادیر کوچک برای  $A_g$  متناظر با تعامل ضعیف بین رسوب و سیال و مقادیر نزدیک به ۱ نشان دهنده تعامل قوی بین آن دو است. همچنین برای  $m_g$  به طور معمول، مقدار ۳ در نظر گرفته می شود. سیستم معادلات فوق را می توان به فرم سیستم معادلات هذلولوی غیرپایستار<sup>۲۷</sup> در نظر گرفت:

$$\partial_t(W) + A_x \partial_x(W) + A_y \partial_y(W) = 0 \quad (5)$$

که در آن:

$$W = [h \quad hu \quad hv \quad Z]^T \quad (6)$$

$$A_1(W) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_x}{h^2} + gh & \frac{1}{h} & 0 & gh \\ \frac{q_x}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} & 0 \\ \xi \frac{\partial Q_1}{\partial h} & \xi \frac{\partial Q_1}{\partial q_x} & \xi \frac{\partial Q_1}{\partial q_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

روش های بدون شبکه برای نمایش دامنه مسئله نیازی به در نظرگیری المان نبوده و حل مسئله مبتنی بر شبکه ای از نقاط گره ای است که با توزیع دلخواه در سطح دامنه پراکنده شده اند. از جمله روش های بدون شبکه می توان به هیدرو دینامیک ذره هموار<sup>۲۰</sup> ارائه شده توسط موناکان، روش المان های پراکنده<sup>۲۱</sup> توسط نیرولز، RKPM<sup>۲۲</sup> توسط لیو و همکاران، روش پتروف-گالرکین موضعی بدون شبکه<sup>۲۳</sup> و روش ابرهای محدود<sup>۲۴</sup> اشاره کرد. در این مقاله، یک مدل عددی بر پایه روش های بدون شبکه، ارائه شده است. روش بدون شبکه گالرکین<sup>۲۵</sup> از جمله روش های بدون شبکه بوده که توسط بلیشکو توسعه پیدا کرده است [۱۸]. در این روش با استفاده از نقاط گره ای دلخواه توزیع شده در دامنه به حل مسئله پرداخته و برای تقریب از روش حداقل مربعات متحرک (MLS)<sup>۲۶</sup> استفاده می شود. ساختار کلی این مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم معادلات حاکم بر انتقال رسوب ارائه شد، روش عددی EFG به همراه توابع شکل MLS در بخش سوم بیان شده و سپس در بخش چهارم مثال های مرجع مورد بررسی قرار گرفتند.

## ۲- معادلات حاکم بر پدیده انتقال رسوب

با فرض توزیع هیدرواستاتیکی فشار، غیرقابل تراکم پذیر بودن سیال و یکنواخت بودن توزیع پروفیل سرعت در عمق، با متوسط گیری نسبت به عمق از معادلات ناویر استوکس، معادلات آب های کم عمق حاصل می شود. معادلات آب های کم عمق در حالت دو بعدی با صرف نظر کردن از ترم پخشیدگی و اثر باد و کوریولیس به صورت زیر بیان می شود:

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{\rho} gh^2) + \partial_y(huv) = -gh \partial_x Z$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2 + \frac{1}{\rho} gh^2) = -gh \partial_y Z \quad (1)$$

که در آن  $t$  زمان،  $h$  عمق جریان روی کف  $Z$ ،  $g$  شتاب ثقل و  $u$  و  $v$  به ترتیب مؤلفه سرعت در جهت  $X$  و  $Y$  هستند. در فرمول بندی استاندارد آب های کم عمق، بستر کانال فقط تابعی از مکان است، بدین معنی که  $Z = Z(x, y)$ . به منظور در نظرگیری

$$\mathbf{W}^{n+1} + \mathbf{A}_1 \Delta t \partial_x(\mathbf{W}^{n+1}) + \mathbf{A}_r \Delta t \partial_y(\mathbf{W}^{n+1}) = \mathbf{W}^n \quad (11)$$

شرط مرزی دریشله (بر  $\Gamma_1$ ) به صورت زیر است:

$$\mathbf{W}^{n+1} - \bar{\mathbf{W}} = 0 \quad (12)$$

از آنجایی که توابع شکل حداقل مربعات متحرک (MLS) شرط دلتای کرونگر را ارضا نمی‌کند، لذا برای اعمال شرایط مرزی نیاز به تمهیدات ویژه‌ای است. روش‌های متفاوتی جهت اعمال شرایط مرزی ارائه شده است که از جمله آن می‌توان به روش جریمه<sup>۲۹</sup>، روش ضرایب لاگرانژ<sup>۳۰</sup> [۲۰]، اصول تغییرات اصلاح شده [۱۸]، روش کوپله FE-EFG<sup>۳۱</sup> [۲۲] اشاره کرد. در این پژوهش از روش جریمه برای تحمیل شرایط مرزی استفاده شده است. از مزایای روش جریمه می‌توان به سادگی در اعمال شرایط مرزی نسبت به روش ضرایب لاگرانژ اشاره کرد. همچنین این روش دستگاه معادلات را بزرگ‌تر نمی‌کند. با وزن‌دار کردن رابطه (۱۱) و انتگرال‌گیری بر دامنه  $\Omega$  می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \Phi_i \sum_{j=1}^N \Phi_j \mathbf{W}_j^{n+1} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A}_1 \Delta t \Phi_i \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \mathbf{W}_j^{n+1} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A}_r \Delta t \Phi_i \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \mathbf{W}_j^{n+1} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} \Phi_i^T \sum_{j=1}^N \Phi_j \mathbf{W}_j^{n+1} d\Gamma_1 = \int_{\Omega} \Phi_i \mathbf{W}^n d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} \Phi_i^T \bar{\mathbf{W}} d\Gamma_1 \quad (13)$$

که  $\Phi_i$  ماتریس توابع شکل MLS بوده و برابر است با:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

و  $N$  تعداد گره‌ها و  $\alpha$  ضریب جریمه است. معمولاً، ضریب جریمه عدد مثبت بزرگی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، فرم نهایی معادلات EFG با در نظر گرفتن روش جریمه به صورت زیر است:

$$\mathbf{K} \mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{F} \quad (15)$$

که در آن:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j \mathbf{W}_j^{n+1} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A}_1 \Delta t \Phi_i \Phi_{j,x} \mathbf{W}_j^{n+1} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A}_r \Delta t \Phi_i \Phi_{j,y} \mathbf{W}_j^{n+1} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} \Phi_i^T \Phi_j \mathbf{W}_j^{n+1} d\Gamma_1 \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega} \Phi_i \mathbf{W}^n d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} \Phi_i^T \bar{\mathbf{W}} d\Gamma_1 \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_r(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} & 0 \\ \frac{q_y^2}{h^2} + gh & 0 & \frac{q_y}{h} & gh \\ \xi \frac{\partial Q_r}{\partial h} & \xi \frac{\partial Q_r}{\partial q_x} & \xi \frac{\partial Q_r}{\partial q_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

که در آن  $\mathbf{W}$  بردار متغیرها بوده و شامل  $h$  عمق جریان،  $q_x = hu$  دبی جریان در واحد عرض در جهت  $X$ ،  $q_y = hv$  دبی جریان در واحد عرض در جهت  $Y$  و  $Z$  عمق بار رسوبی بستر است. همچنین  $\mathbf{A}_1(\mathbf{W})$  و  $\mathbf{A}_r(\mathbf{W})$  ماتریس‌های ضرایب،  $Q_r$  و  $Q_x$  دبی بار بستر در جهت‌های  $X$  و  $Y$  هستند.

### ۳- روش بدون شبکه گالرکین

روش‌های بدون شبکه طی سه دهه اخیر به مجموعه روش‌های عددی با هدف حل تقریبی بر مبنای عبارات تعدادی از گره‌ها اضافه شده است. در این روش‌ها، برای ایجاد حل گسسته نیازی به المان‌ها یا برقراری روابط داخلی بین گره‌ها نیست. روش‌های بدون شبکه وابستگی کمتری به نظم در قرارگیری گره‌ها نسبت به روش‌های عددی دیگر دارد. برای استفاده از فرم گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم و پوشش دامنه مورد نظر، لازم است که توابع درون‌یاب تولید شود. در روش بدون شبکه گالرکین این توابع با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک تولید می‌شود [۲۰].

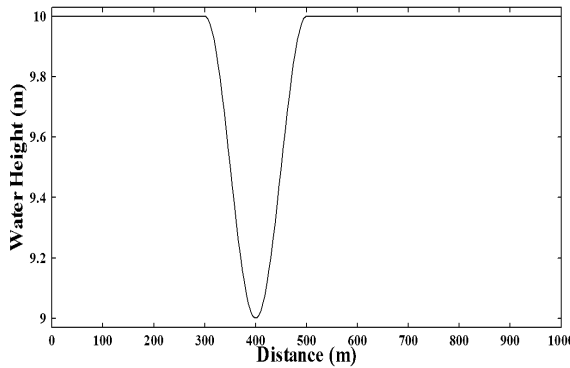
سیستم معادلات انتقال بار بستر را که به فرم هذلولوی غیرپایستار در (۶) در نظر گرفته را دوباره بازنویسی می‌شود:

$$\partial_t(\mathbf{W}) + \mathbf{A}_1 \partial_x(\mathbf{W}) + \mathbf{A}_r \partial_y(\mathbf{W}) = 0 \quad (9)$$

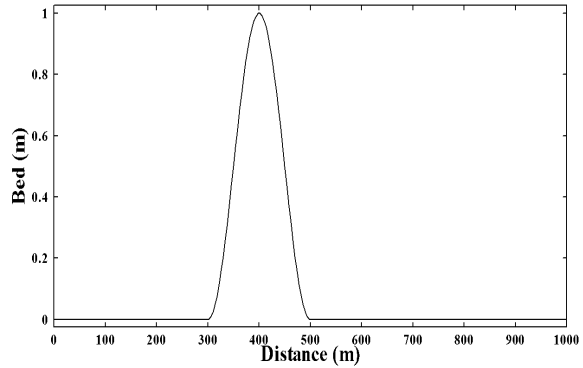
با در نظرگیری روش پیش‌روی زمانی ضمنی<sup>۲۸</sup> برای گسسته‌سازی زمانی می‌توان نوشت:

$$\frac{(\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n)}{\Delta t} + \mathbf{A}_1 \partial_x(\mathbf{W}^{n+1}) + \mathbf{A}_r \partial_y(\mathbf{W}^{n+1}) = 0 \quad (10)$$

که در آن  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . معادله (۹) پس از بازنویسی به فرم زیر تبدیل می‌شود:



(ب)



(الف)

شکل ۱- الف) شرایط اولیه رسوب و ب) تراز آب در مثال ۱

احتساب رسوب معلق است که از مسائل مورد علاقه بسیاری از محققین در کارهای عددی است [۵، ۱۱، ۱۲ و ۱۵]. طول کانال ۱۰۰۰ متر بوده و توپوگرافی بستر و شرایط اولیه برای دبی جریان و ارتفاع رسوب به فرم زیر است. شرایط اولیه مسئله در شکل (۱) نشان داده شده است. به عنوان شرایط مرزی مسئله، در بالادست دبی و رسوب اعمال شده است.

$$\begin{cases} Z(x,0) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{(x-300)\pi}{200}\right) & 300 \leq x \leq 500 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \\ h(x,0) = 10 - Z(x,0) \\ hu(x,0) = 10 \end{cases} \quad (17)$$

همان‌طور که در بخش دوم مقاله بیان شد،  $A_g$  پارامتر مربوط به قطر ذرات و لزجت سینماتیکی بوده و به‌طور مستقیم با قدرت اندرکنش بین جریان آب و بار بستر در ارتباط است. از این رو مطابق تحقیقات محققین، مسئله در دو حالت با قدرت اندرکنش قوی رسوب بستر و جریان آب ( $A_g = 1$ ) و قدرت اندرکنش ضعیف آنها ( $A_g = 0.001$ ) بررسی شده است. برای هر دو نحوه توزیع گره‌های LNSD و MNSD، ۱۰۰۰ نقطه گوسی برای انتگرال‌گیری در نظر گرفته شد.

در این مسئله، بخش فوقانی تپه با سرعت بیشتری نسبت به بخش پایینی آن حرکت می‌کند که این امر باعث ایجاد یک ناپیوستگی در جبهه جلویی بعد از یک زمان مشخص خواهد شد که در مدل‌سازی، این ناپیوستگی با ایجاد نوسان‌های جعلی

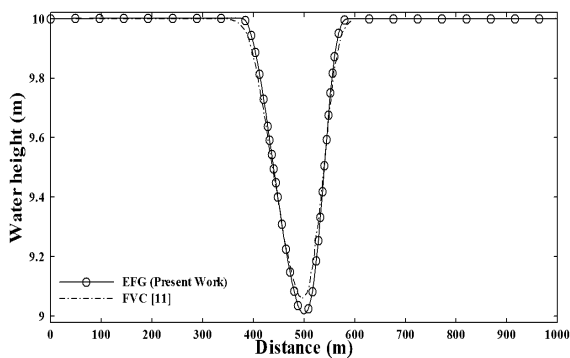
روش بدون شبکه گالرکین جهت انجام انتگرال‌گیری روابط فوق نیاز به شبکه‌بندی پس‌زمینه‌ای<sup>۳۳</sup> دارد. شبکه‌بندی پس‌زمینه‌ای مستقل از گره‌هایی است که جهت تقریب متغیرهای میدان استفاده شده است. جهت ایجاد شبکه‌بندی پس‌زمینه‌ای از نقاط گوسی<sup>۳۴</sup> استفاده شده که تعداد آنها به میزان زیادی به تراکم گره‌ای وابسته است.

#### ۴- مثال عددی

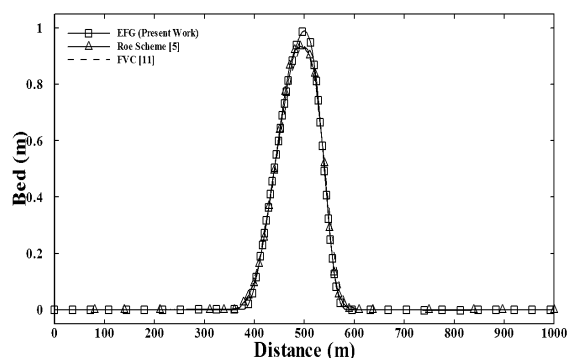
در این بخش به حل چند مثال مرجع پرداخته شد تا توانایی و قابلیت روش EFG در شبیه‌سازی مسئله انتقال رسوب بررسی شود. در این مقاله برای تعیین دبی بار بستر، از مدل گراس با در نظر گرفتن  $m_g = 3$  استفاده شد تا قابلیت مقایسه نتایج با سایر محققین فراهم شود. در تمامی مسائل ( $p_0 = 0.4$ )، شرایط مرزی از نوع دریشله و ضریب جریمه برابر  $10^8$  لحاظ شده است. برای حل مسائل این بخش، دو نحوه توزیع گره‌ای دلخواه و متفاوت به کار گرفته شده که در حالت اول، از ۲۵۰ گره، به فاصله  $\Delta x = 4m$  از یکدیگر و در حالت دوم از ۵۰۰ گره به فاصله  $\Delta x = 2m$  از یکدیگر استفاده شده است. در این مقاله، توزیع گره در حالت اول با نام (LNSD)<sup>۳۵</sup> و توزیع گره در حالت دوم با نام (MNSD)<sup>۳۶</sup> در نظر گرفته شده است.

#### ۴-۱- انتقال لایه رسوبی بستر با توپوگرافی معین

اولین مسئله مورد بررسی، انتقال لایه رسوبی بستر، بدون

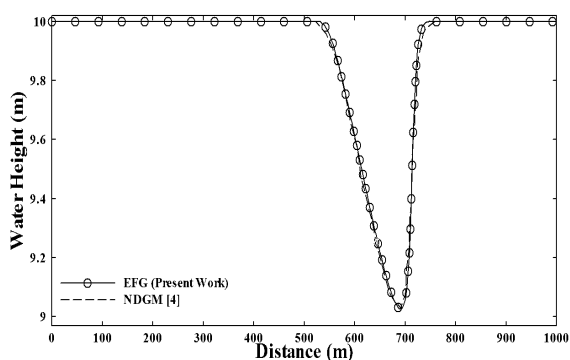


(ب)

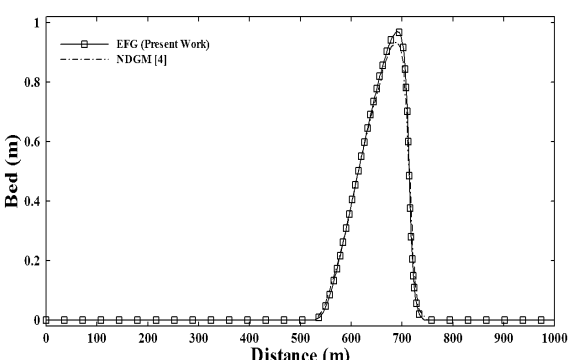


(الف)

شکل ۲- الف) تغییرات بستر و ب) و تراز آب در زمان  $(t=338\text{ s})$  با در نظر گیری  $(A_g=1)$  و مقایسه نتایج در مثال ۱



(ب)



(الف)

شکل ۳- الف) تغییرات بستر و ب) تراز آب در زمان  $(t=700\text{ s})$  با در نظر گیری  $(A_g=1)$  و مقایسه نتایج در مثال ۱

فاصله گره‌ای، گام زمانی  $(\Delta t = 0.5\text{ s})$  و مرتبه ۱ توابع پایه لحاظ شد. همان‌طور که نمایان است، نتایج روش EFG از مطابقت خوبی با نتایج روش رو و روش ترکیبی حجم محدود و مشخصه برخورددار بوده و اثری از نوسانات جعلی دیده نمی‌شود.

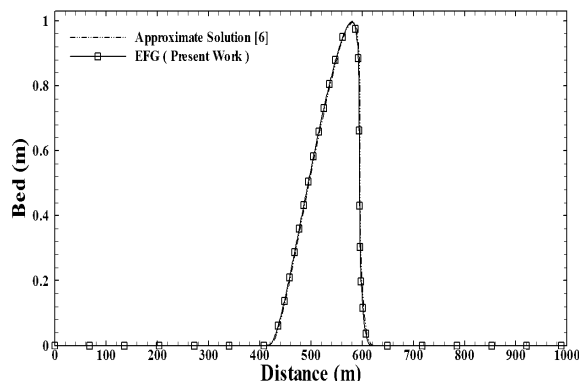
#### ۴-۳- اندرکنش ضعیف<sup>۳۸</sup> رسوب و جریان آب

در این حالت، اندرکنش بین جریان آب و رسوب ضعیف است  $(A_g = 0.01)$ . هادسون با ارائه یک حل تقریبی برای این مسئله در حالتی که  $(A_g \leq 0.1)$  است، به شبیه‌سازی آن پرداخت [۶]. برای حل این مسئله در وضعیت اندرکنش ضعیف رسوب و جریان آب، توزیع گره‌ای MNSD با شعاع تأثیر ۱/۱ برابر فاصله نقاط گره‌ای، مرتبه توابع پایه برابر ۱ و گام زمانی  $(\Delta t = 50\text{ s})$  مورد استفاده قرار گرفته شد. کمتر بودن

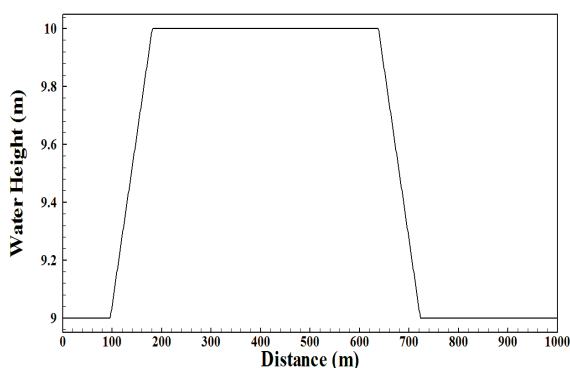
در دو طرف آن همراه می‌شود که همان‌طور که در نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌شود مدل EFG به‌خوبی توانسته این ناپیوستگی را شبیه‌سازی کند.

#### ۴-۲- اندرکنش قوی<sup>۳۷</sup> رسوب و جریان آب

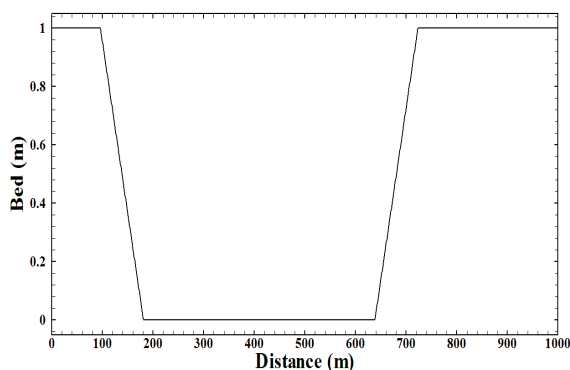
اولین حالت مورد بررسی، حالتی است که در آن قدرت اندرکنش بین رسوب بستر و جریان آب بیشتر بوده و رسوب سریع‌تر به حرکت در می‌آید  $(A_g = 1)$ . انتظار می‌رود با گذشت زمان تپه رسوبی به پایین دست جابه‌جا شود. نتایج در دو زمان  $(t = 238\text{ s})$  و  $(t = 700\text{ s})$  به‌دست آمد و با نتایج سایرین مقایسه شد. شکل (۲) نتایج را در زمان  $(t = 238\text{ s})$  و شکل (۳) در زمان  $(t = 700\text{ s})$  ارائه می‌کند. در این وضعیت اندرکنش رسوب و جریان آب، توزیع گره‌ای LNSD با شعاع تأثیر ۲ برابر



شکل ۴- تغییرات بار بستر در زمان  $(t = 238000 \text{ s})$  با در نظر گرفتن  $(A_g = 0/001)$  در مثال ۱



(ب)



(الف)

شکل ۵- (الف) شرایط اولیه رسوب و (ب) تراز آب در مثال ۲

نوسانات جعلی را تسخیر کند.

#### ۴-۴- انتقال لایه رسوبی بستر با توپوگرافی نامنظم

در این مسئله، حفره رسوبی دارای تغییرات بستر با توپوگرافی نامنظم و ناپیوستگی‌های عمودی و ناگهانی<sup>۳۹</sup> در کانالی به طول ۱۰۰۰ متر و با شرایط اولیه زیر قرار گرفته است و توسط محققین نیز مطالعه شده است [۴ و ۱۲]. شرایط اولیه مسئله به صورت زیر است:

$$Z(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 96 \\ \frac{-x + 181}{85} & 96 \leq x \leq 181 \\ 181 & 181 \leq x \leq 638 \\ \frac{x - 638}{85} & 638 \leq x \leq 723 \\ 0 & 723 \leq x \leq 1000 \end{cases}$$

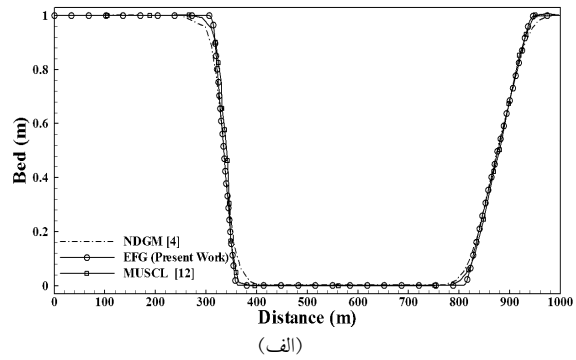
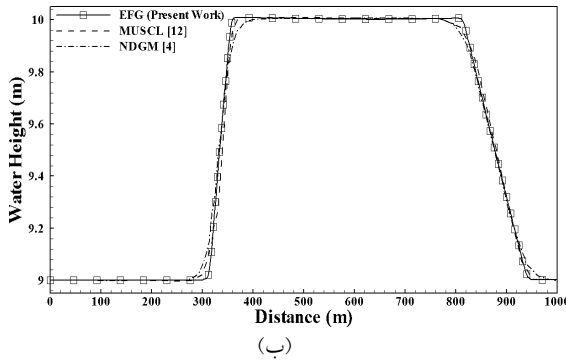
$$\begin{cases} h(x, 0) = 10 - Z(x, 0) \\ hu(x, 0) = 10 \end{cases} \quad (18)$$

شکل (۵) نمایانگر شرایط اولیه بستر و تراز آب است.

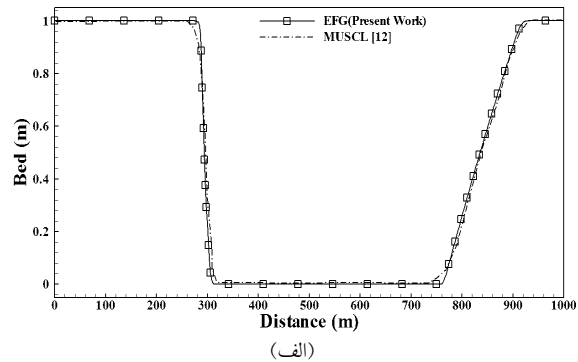
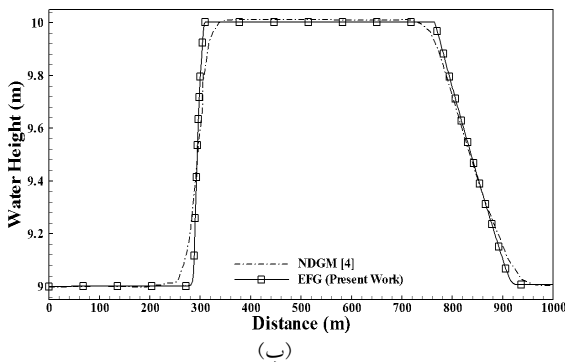
قدرت اندرکنش بستر و جریان در مقایسه با حالت قبل منجر به سرعت تغییرات پایین تری می‌شود و همچنین گام‌های زمانی متفاوتی نیز برای آن مطرح می‌شود. باید خاطر نشان کرد در مسائل انتقالی، گام زمانی تأثیر قابل توجهی در دقت پاسخ و همچنین زمان انجام محاسبات دارند. به دلیل اینکه برای گسسته‌سازی زمان از روش ضمنی استفاده شده است، گام‌های زمانی بزرگ‌تری را در نظر گرفته شده است.

از آنجایی که جواب دقیق مسئله مشخص نیست، به جهت تشخیص پاسخ صحیح، به مقایسه نتایج به دست آمده روش EFG با نتایج قابل استناد محققین گذشته پرداخته شده است و همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، مدل ارائه شده عملکرد خوبی در شبیه‌سازی انتقال رسوب از خود نشان داده است و همچون حالت اندرکنش قوی، به خوبی توانسته





شکل ۶- الف) بار بستر و ب) تراز آب در زمان  $(t = 482 \text{ s})$  با در نظر گرفتن  $(A_g = 1)$  در مثال ۲



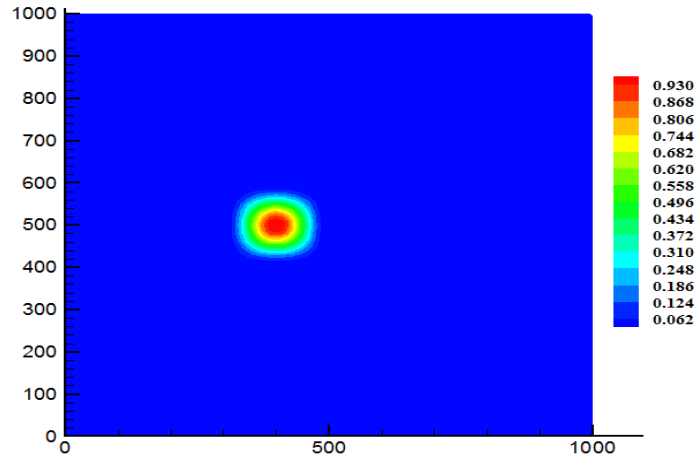
شکل ۷- الف) بار بستر و ب) تراز آب در زمان  $(t = 250000 \text{ s})$  با در نظر گرفتن  $(A_g = 0/001)$  در مثال ۲

روش‌های دیگر در حال مقایسه توانسته ناپیوستگی‌های موجود را مدل کند که این نشان از توانایی بالای این روش در شبیه‌سازی ناپیوستگی‌ها دارد.

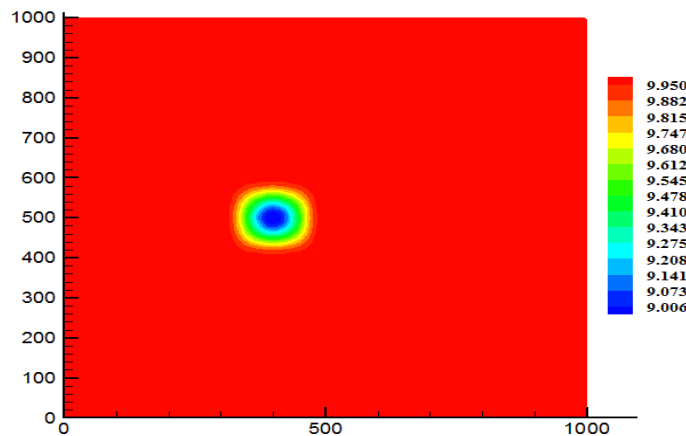
۴-۵- انتقال لایه رسوبی با توپوگرافی معین در حالت دو بعدی جهت ارزیابی روش EFG در حل مسائل دو بعدی، به حل مثال زیر پرداخته شد که توسط سایر محققین نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۱۳، ۱۶ و ۲۱]. توپوگرافی بستر طبق رابطه زیر بوده که در شکل (۸) نشان داده شده است. شرایط مرزی حاکم بر مسئله به صورت زیر لحاظ شده است:

$$Z(x, y, 0) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{(x-300)\pi}{200}\right) \sin^2\left(\frac{(y-400)\pi}{200}\right) & 300 \leq x \leq 500 \\ & 400 \leq y \leq 600 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (19)$$

همان‌طور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود شرایط اولیه مسئله دارای ناپیوستگی‌های زیادی بوده و مدل را به چالش بیشتری نسبت به مثال قبل می‌کشد. دامنه محاسباتی مسئله با استفاده از توزیع گره‌ای MNSD و با در نظر گرفتن ۱۰۰۰ نقطه انتگرال‌گیری به صورت منظم گسسته‌سازی شده است. توابع پایه از مرتبه ۱ و شعاع تأثیر ۲ برابر فاصله نقاط گره‌ای لحاظ شد. گام زمانی در حالت اندرکنش قوی، برابر  $(\Delta t = 1 \text{ s})$  و در حالت اندرکنش ضعیف، برابر  $(\Delta t = 200 \text{ s})$  در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی حاکم بر مسئله، اعمال مقادیر ثابت به دبی جریان و رسوب بستر در بالادست است. در شکل (۶) تغییرات بستر و ارتفاع آب با در نظر گیری  $(A_g = 1)$  در زمان  $(t = 482 \text{ s})$  و در شکل (۷) تغییرات ایجاد شده با در نظر گرفتن  $(A_g = 0/001)$  در زمان  $(t = 250000 \text{ s})$  ارائه شده است. نتایج در مقایسه با نتایج محققین نشان داد که روش EFG بهتر از



شکل ۸- شرایط اولیه بستر در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

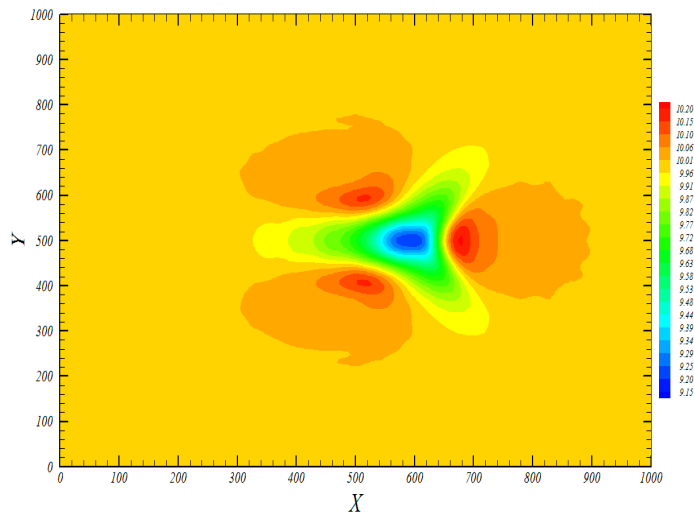


شکل ۹- شرایط اولیه تراز آب در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

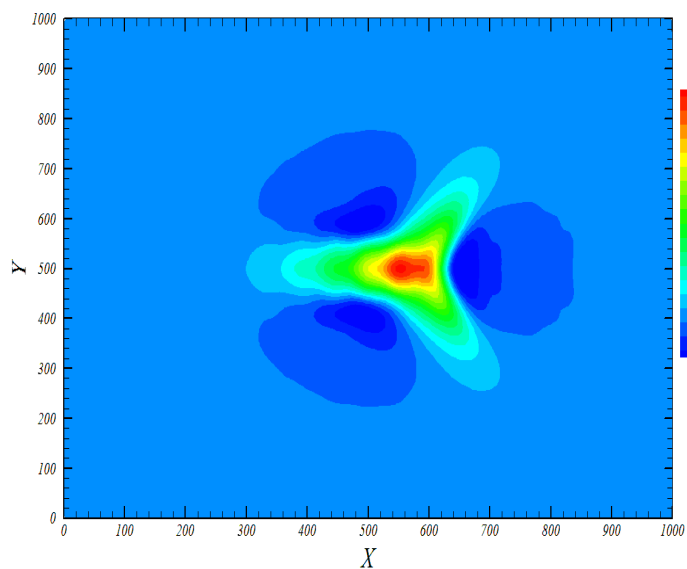
فاصله  $(\Delta x = \Delta y = 25 \text{ m})$  که به طور منظم در دامنه پخش شده‌اند گسسته‌سازی شد. همچنین شعاع تأثیر، ۶۵ متر و توابع پایه از مرتبه ۱ در نظر گرفته و از  $14880$  نقطه انتگرال‌گیری استفاده شد. با انتخاب گام زمانی برابر  $(\Delta t = 1 \text{ s})$  در حالت اندرکنش قوی جریان آب و رسوب و گام زمانی  $(\Delta t = 1000 \text{ s})$  برای حالت اندرکنش ضعیف، مسئله مورد نظر تحلیل شد. شکل (۱۰) نتایج را در حالت  $(A_g = 1)$  در زمان  $(t = 500 \text{ s})$  و شکل (۱۱) نتایج برای حالت  $(A_g = 0.001)$  در زمان  $(t = 100 \text{ hour})$  نشان می‌دهد. همچنین در وضعیت اندرکنش ضعیف جریان آب و رسوب  $(A_g = 0.001)$ ، دامنه توسط  $1712$  نقطه گره‌ای که

در مرز بالادست در جهت X، دبی جریان برابر  $10$  مترمکعب بر ثانیه در واحد عرض و در پایین دست، ارتفاع آب  $10$  متر در نظر گرفته شد. در دیواره‌های جانبی، شرط عدم لغزش تحمیل شده است.

برای حل این مسئله، ابتدا معادلات آب‌های کم‌عمق را به‌تنهایی و با در نظر گیری بستر ثابت مدل کرده تا جریان، حالت پایدار به‌خود بگیرد. مقادیر به‌دست آمده فوق برای عمق و دبی جریان به‌عنوان شرایط اولیه جریان در نظر گرفته می‌شود که در شکل (۹) ارائه شده است. این مسئله با استفاده از پخش نقاط گره‌ای به‌طور منظم و نامنظم مدل‌سازی شد. ابتدا دامنه توسط  $1680$  نقطه گره‌ای به



شکل ۱۰- شرایط تراز آب در زمان  $(t=500s)$  با در نظر گرفتن  $(A_g = 1)$  در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



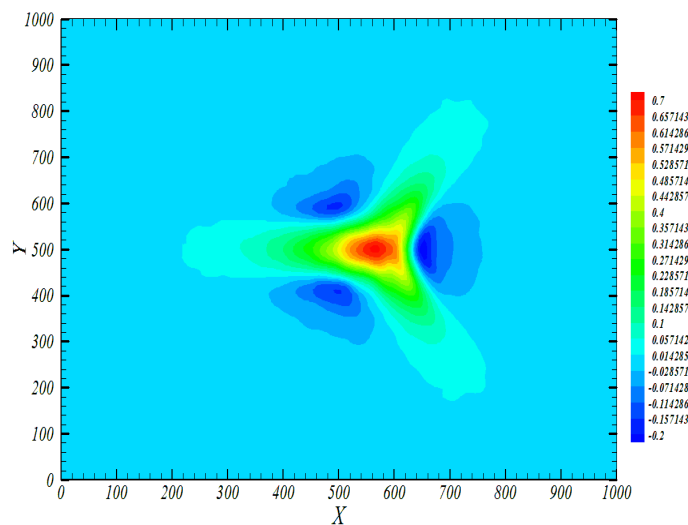
شکل ۱۱- تغییرات بستر در زمان  $(t=100 \text{ hour})$  با در نظر گرفتن  $(A_g = 0/001)$  در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

منظم و نامنظم، تطابق خوبی با نتایج سایر محققین دارد شکل (۱۳) و می توان بیان کرد که روش EFG در حالت دو بعد نیز به خوبی قادر به شبیه سازی مسئله انتقال رسوب است.

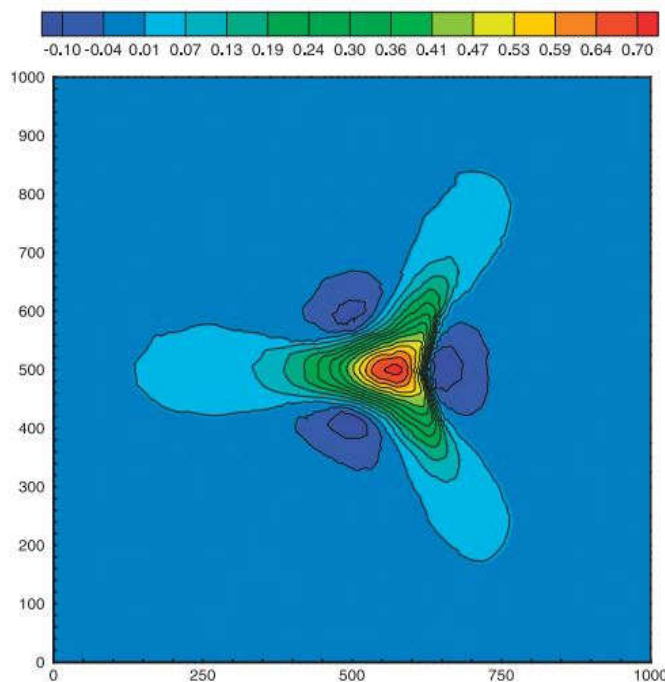
#### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله به حل مسئله انتقال بار بستر توسط روش بدون شبکه گالرکین پرداخته شد. این روش بر خلاف سایر روش های

به صورت نامنظم پخش شده اند گسسته سازی شد. در این حالت همچون حالت پخش منظم نقاط گره ای، از ۱۴۸۸۰ نقطه گوسی جهت انتگرال گیری استفاده شد. توابع پایه از مرتبه ۱، شعاع تأثیر برابر ۶۵ و گام زمانی برابر  $(\Delta t = 1000 \text{ s})$  در نظر گرفته شد. شکل (۱۲) نتایج به دست آمده در زمان  $(t = 100 \text{ hour})$  در حالت پخش نامنظم گره ای را نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود نتایج به دست آمده در هر دو حالت پخش



شکل ۱۲- تغییرات بستر در حالت پخش نامنظم نقاط گره‌ای در زمان ( $t = 100$  hour) با در نظر گرفتن ( $A_g = 0/001$ ) در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۳- تغییرات بستر به دست آمده در زمان ( $t = 100$  hour) با در نظر گرفتن ( $A_g = 0/001$ ) در مرجع [۱۳] (رنگی در نسخه الکترونیکی)

مورد استفاده در حل مسئله انتقال رسوب، نیازی به شبکه‌بندی از پیش تعریف شده بین گره‌ها ندارد و گره‌ها به صورت دلخواه در دامنه محاسباتی پراکنده می‌شوند. همان‌طور که بیان شد معادلات انتقال رسوب از دو بخش معادلات آب‌های کم‌عمق و

گرفت و به حل مثال با استفاده از این مدل پرداخته شد. در انتها به حل چند مثال مرجع در حالت یک بعدی و دو بعدی پرداخته شد و نتایج ناشی از روش EFG با نتایج سایر محققین مقایسه شد و نشان داده شد که روش بدون شبکه گالرکین قادر به حل مسائل انتقال رسوب در حالت‌های یک بعدی و دو بعدی با دقت قابل قبولی است.

معادله اکسرن تشکیل شده است. معادلات آب‌های کم‌عمق بیان کننده بخش هیدرودینامیک جریان بوده که با در نظر گیری فرضیاتی از معادلات ناویر استوکس منتج می‌شوند و معادله اکسرن نشان‌دهنده پیوستگی رسوب است. معادلات فوق را به صورت درگیر<sup>۴۰</sup> در نظر گرفته و معادلات درگیر به صورت سیستم معادلات هذلولوی غیر پایستار نوشته شد. همچنین برای دبی انتقال بار بستر، مدل معروف گراس مورد استفاده قرار

## واژه‌نامه

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1. Convection                                   | 14. quasi-steady                                    | 28. implicit time marching                   |
| 2. Nodal Discontinuous Galerkin                 | 15. slope limiters                                  | 29. Penalty method                           |
| 3. flux   | 16. upwind  | 30. Lagrange Multiplier                      |
| 4. Lax- Friedrichs                              | 17. modified Roe Scheme                             | 31. modified variational principles          |
| 5. Runge-Kutta                                  | 18. linearized implicit method                      | 32. FE-EFG coupled method                    |
| 6. Roe scheme                                   | 19. predictor-corrector                             | 33. background cell                          |
| 7. Essentially Non-Oscillatory                  | 20. Smooth Particle Hydrodynamics                   | 34. gauss quadrature                         |
| 8. Weighted Essentially Non-Oscillatory         | 21. Diffuse Element Method (DEM)                    | 35. Large Nodal Spacing Distribution (LNSD)  |
| 9. Central Weighted Essentially Non-Oscillatory | 22. Reproducing Kernel Particle                     | 36. Medium Nodal Spacing Distribution (MNSD) |
| 10. Relaxation approximation                    | 23. Local Petrov-Galerkin                           | 37. strong interaction                       |
| 11. diagonalizable                              | 24. Finite Clouds (FC)                              | 38. weak interaction                         |
| 12. implicit-explicit scheme                    | 25. Element Free Galerkin                           | 39. shock                                    |
| 13. Finite Volume Characteristic                | 26. Moving Least Squares                            | 40. coupled                                  |
|   | 27. Non-conservative hyperbolic system of equations |  |

## پیوست‌ها:

### پیوست ۱

تقریب با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک (MLS)

تقریب با استفاده از MLS از دو ویژگی برجسته برخوردار است که سبب محبوبیت آن شده است: (۱) تابع میدان تقریبی در کل دامنه مسئله به صورت پیوسته و نرم است و (۲) توانایی ایجاد تقریب با مرتبه دلخواهی از سازگاری دارا است [۲۰]. تقریب تابع  $u(x)$  در روش MLS به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1-پ)$$

که در آن  $u^h(\mathbf{x})$  تابع تقریب زده شده در نقطه  $\mathbf{x} = [x, y]$ ، بردار توابع پایه چند جمله‌ای از مختصات مکانی و  $m$  تعداد جملات توابع پایه است. در روش بدون شبکه، توابع

شکل به توابع پایه بستگی داشته که نقش مهمی در بالا بردن دقت پاسخ ایفا می‌کند. توابع پایه  $p(x)$  از تک جمله‌هایی از مثلث پاسکال ایجاد می‌شود که به صورت زیر است:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{p_0(\mathbf{x}), p_1(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\} \quad (2-پ)$$

که در حالت یک بعدی به صورت:

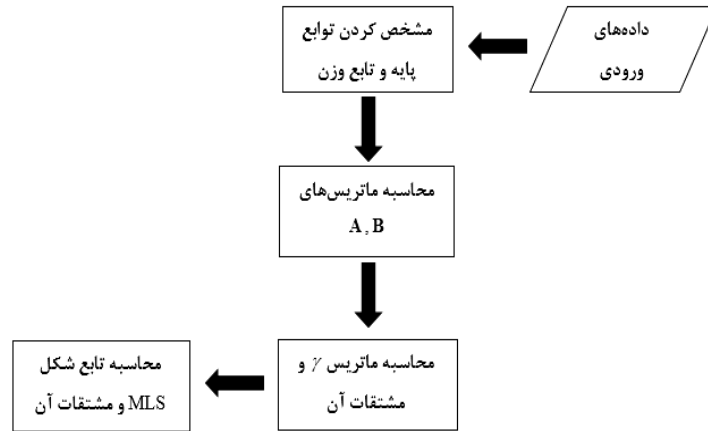
$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, x^2, \dots, x^m\}$$

و

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}, y) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m\}$$

در دو بعد است. در معادله (۱-پ)، بردار ضرایب بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_0(\mathbf{x}), a_1(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})\} \quad (3-پ)$$



شکل پ ۱. فلوجارت روش محاسبه تابع شکل MLS

جای‌گذاری معادله (پ-۵) در (پ-۱) خواهیم داشت:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_j(x) (A^{-1}(x) B(x))_{ji} u_i =$$

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i(x) u_i = \Phi^T(x) U_s \quad (\text{پ-۹})$$

که  $\Phi(x)$  تابع شکل MLS است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Phi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) (A^{-1}(x) B(x))_{ji} = p^T A^{-1} B_i \quad (\text{پ-۱۰})$$

برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، نیاز به محاسبه مشتقات جزئی تابع شکل مورد نظر است. فلوجارت محاسبه تابع شکل MLS در شکل زیر ارائه شده است. می‌توان ثابت نمود که مشتق تابع شکل MLS طبق رابطه زیر به دست می‌آید [۲۰]:

$$\Phi_{,i}(x) = \gamma_{,i} B + \gamma^T B_{,i} \quad (\text{پ-۱۱})$$

که در آن  $\gamma$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma(x) = A^{-1}(x) p(x) \quad (\text{پ-۱۲})$$

فلوجارت سکلی روش محاسبه توابع شکل MLS در شکل (پ-۱) ارائه شده است.

## پیوست ۲

### تابع وزن انتخابی در روش MLS

توابع وزن نقش مهمی در روش‌های بدون شبکه ایفا می‌کنند.

باید خاطرنشان کرد که  $a(x)$  در معادله (پ-۱)، تابعی از  $x$  است و با استفاده از کمینه کردن تابع  $J(x)$  که در زیر نشان داده شده است به دست می‌آید:

$$J(x) = \sum_{i=1}^N \widehat{W}(x-x_i) \left[ p^T(x_i) a(x) - u_i \right]^2 \quad (\text{پ-۴})$$

که  $\widehat{W}(x-x_i) = \widehat{W}_i(x)$  تابع وزن (Weight function) گره  $i$ ام،  $N$  تعداد گره‌ها و  $u_i$  پارامتر گره‌ای  $u$  در  $x = x_i$  است. با کمینه کردن تابع  $J(x)$  خواهیم داشت:

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) U_s \quad (\text{پ-۵})$$

که در آن:

$$A(x) = \sum_{i=1}^N \widehat{W}(x-x_i) p(x_i) p^T(x_i) \quad (\text{پ-۶})$$

$$B(x) = \left[ \widehat{W}_1(x) p(x_1), \widehat{W}_2(x) p(x_2), \dots, \widehat{W}_N(x) p(x_N) \right] \quad (\text{پ-۷})$$

$$U_s = \{ u_1, u_2, \dots, u_N \}^T \quad (\text{پ-۸})$$

در معادله (پ-۶)،  $A(x)$  ماتریس ممان وزن‌دار (Weighted Moment Matrix) و  $U_s$  بردار پارامترهای گره‌ای تابع تقریب برای تمامی گره‌های داخل دامنه تأثیر است. ماتریس‌های  $A$  و  $A^{-1}$  متقارن بوده که این خاصیت، کاهش زمان محاسباتی را در پی خواهد داشت. باید به این نکته توجه داشت که همواره تعداد گره‌ها نسبت به مرتبه توابع پایه، عددی خیلی بزرگ‌تری است که این شرط مانع ایجاد تکین در ماتریس  $A$  شده و بنابراین  $A^{-1}$  ایجاد می‌شود. با

$$\widehat{W}(x - x_I) = \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\bar{d}}{\alpha}\right)} & \text{for } \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (15\text{-پ})$$

که در معادله (پ-۱۵)،  $\alpha$  عددی ثابت بوده و معمولاً برابر ۰/۳ در نظر گرفته می‌شود.

تابع وزن درجه ۴ ( $\widehat{W}_4$ ):

$$\widehat{W}(x - x_I) = \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{32}\bar{d}^2 + \frac{19}{192}\bar{d}^3 - \frac{5}{512}\bar{d}^4 & \text{for } \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (16\text{-پ})$$

در تمامی توابع وزن فوق، مقدار  $\bar{d}$  برابر است با:

$$\bar{d} = \frac{|x - x_I|}{d_w} \quad (17\text{-پ})$$

که در آن  $d_w$  شعاع دامنه تأثیر برای گره مربوطه است.

قابل ذکر است که در تحقیق حاضر از تابع وزن اسپیلاین درجه ۳ جهت ساختن توابع شکل MLS بهره گرفته شده است.

توابع وزن باید در همسایگی کوچکی از  $x_i$  دارای مقادیر غیر صفر باشد که این همسایگی کوچک، دامنه تأثیر نامیده می‌شود. توابع وزن باید در این دامنه علاوه بر مثبت بودن، پیوسته و مشتق‌پذیر نیز باشد. همچنین توابع وزن باید در گره‌های نزدیک به نقطه مورد بررسی دارای مقادیر بزرگ‌تری به نسبت نقاط دورتر باشد. اکثر توابع وزن به کار گرفته شده در روش‌های بدون شبکه زنگوله‌ای شکل هستند. تعدادی از توابع وزن معروف در ادامه آورده شده است [۲۰].

تابع وزن اسپیلاین درجه ۳ ( $\widehat{W}_3$ ):

$$\widehat{W}(x - x_I) = \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \bar{d}^2 + \bar{d}^3 & \text{for } \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - \bar{d} + \bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{for } \frac{1}{2} \leq \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (13\text{-پ})$$

تابع وزن اسپیلاین درجه ۴ ( $\widehat{W}_4$ ):

$$\widehat{W}(x - x_I) = \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 8\bar{d}^3 - 3\bar{d}^4 & \text{for } \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (14\text{-پ})$$

تابع وزن نمایی ( $\widehat{W}_p$ ):

## مراجع

۱. شفای بچستان، م. هیدرولیک رسوب، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ویرایش دوم، ۱۳۸۴.
۲. Noroozi, S., Kolahdoozan, M., and Zarrati, A. R., "Study on Sediment Exchange Between Bed and Flow with a 2D Shallow Water Model", 7<sup>th</sup> International River Engineering Conference, Shahid Chamran University, Ahwaz, 2007.
۳. Tassi, P. A., Rhebergen, S., Vionnet, C. A., and Bokhove, O., "A Discontinuous Galerkin Finite Element Model for River Bed Evolution under Shallow Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 2930-2947, 2008.
۴. Izem, N., Seaid, M., and Wakrim, M., "A High-Order Nodal Discontinuous Galerkin Method for 1D Morphodynamic Modelling", *International Journal of Computer Applications*, Vol. 41, pp. 19-27, 2012.
۵. Hudson, J., and Sweby, P. K., "Formulations for Numerically Approximating Hyperbolic Systems Governing Sediment Transport", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 19, pp. 225-252, 2003.
۶. Hudson, J., "Numerical Techniques for Morphodynamic Modelling", Ph.D. Thesis, University of Reading, Department of Mathematics, 2001.
۷. Črnjarić-Žic, N., Vuković, S., and Sopta, L., "Extension of ENO and WENO Schemes to One-

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۶، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶

- Dimensional Sediment Transport Equations”, *Computers & Fluids*, Vol. 31, pp. 31-56, 2004.
8. Caleffi, V., Valiani, A., and Bernini, A., “High-Order Balanced CWENO Scheme for Movable Bed Shallow Water Equations”, *Advances in Water Resources*, Vol. 30, pp. 730-741, 2007.
  9. Sportiello, V., *Implicit Simulations for Morphodynamic Shallow Water Flows*, in Department of Civil and Industrial Engineering, University of Pisa, 2012.
  10. Delis, A. I. and Papoglou, I., “Relaxation Approximation to Bed-Load Sediment Transport”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 231, pp. 521-546, 2008.
  11. Benkhaldoun, F., and Seaïd, M., “Combined Characteristics and Finite Volume Methods for Sediment Transport and Bed Morphology in Surface Water Flows”, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 81, pp. 2073-2086, 2011.
  12. Benkhaldoun, F., Seaïd, M., and Sahmim, S., “Mathematical Development and Verification of a Finite Volume Model for Morphodynamic Flow Applications”, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol 3, pp. 470-492, 2011.
  13. Benkhaldoun, F., Sahmim, S., and Seaïd, M., “A Two-Dimensional Finite Volume Morphodynamic Model on Unstructured Triangular Grids,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 63, pp. 1296-1327, 2009.
  14. Bilanceri, M., Beux, F., Elmahi, I., Guillard, H., and Salvetti, M. V., “Implicit Time Advancing Combined with Two Finite-Volume Methods in the Simulation of Morphodynamic Flows”, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 99, pp. 153-169, 2014.
  15. Bilanceri, M., Beux, F., Elmahi, I., Guillard, H., and Salvetti, M. V., “Linearized Implicit Time Advancing and Defect Correction Applied to Sediment Transport Simulations”, *Computers & Fluids*, Vol. 63, pp. 82-104, 2012.
  16. Castro Díaz, M. J., Fernández-Nieto, E. D., Ferreiro, A. M., and Parés, C., “Two-Dimensional Sediment Transport Models in Shallow Water Equations. A Second order Finite Volume Approach on Unstructured Meshes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 2520-2538, 2009.
  17. Idelsohn, S. R., Oñate, E., Calvo, E., and Del Pin, F. “Meshless Finite Element Ideas”, *Proceeding in Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, 2002.
  18. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., “Element Free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
  19. Grass, A. J., Sediment Transport by Wave and Currents, SERC London Cent. Mar. Technol, Report No, FL29, 1981.
  20. Liu, G. R., *Mesh-Free Methods: Moving beyond the Finite Element Methods*, CRC Press, 2003.
  21. Hudson, J., and Sweby, P. K., “A High-Resolution Scheme for the Equations Governing 2D Bed-Load Sediment Transport”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 47, pp. 1085-1091, 2005.
  22. Belytschko, T., Organ, D., and Krongauz, Y., “A Coupled Finite Element-Element-Free Galerkin Method”, *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp.186-195, 1995.