

## تحلیل عددی مسائل معیار پلاستیسیته کرنش بزرگ با استفاده از المان‌ها و سلول‌های مرتبه بالا

علی اکبر تقی پور<sup>۱\*</sup>، جمشید پرویزیان<sup>۱</sup>، اشتفان هاینتزه<sup>۲</sup>، الکساندر دوستر<sup>۲</sup> و ارنست رنک<sup>۳</sup>

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

۲. موسسه تحلیل عددی سازه‌ها با کاربرد در فناوری کشتی، دانشگاه صنعتی هامبورگ، هامبورگ، آلمان

۳. موسسه محاسبات در مهندسی، دانشگاه صنعتی مونیخ، مونیخ، آلمان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۸/۰۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۱۱/۲۴)

چکیده- در این مقاله، یک روش اجزای محدود مرتبه بالا به همراه فرم توسعه یافته جدید آن بر اساس رویکرد دامنه مجازی، روش سلول محدود، برای تحلیل تعدادی از مسائل معیار پلاستیسیته فون-میزز کرنش بزرگ به کار گرفته شده‌اند. توابع سلسله مراتبی (لژاندر انتگرال‌گیری شده) برای تقریب اجزای محدود تغییر شکل‌های پلاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیری که در تغییر شکل‌های بزرگ فلزات نرم اتفاق می‌افتند استفاده شده‌اند. مسائل تحلیل شده عبارتند از باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده با نمونه‌های شیاردار و بدون شیار و فشارگذاری صفحه سوراخ‌دار. این تحلیل‌ها نشان می‌دهند که روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا با فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی توانایی فائق آمدن بر قفل‌شدگی حجمی را دارند. این روش‌ها همچنین واجد خصوصیت‌هایی نظیر نرخ همگرایی بالا و عدم حساسیت زیاد به تغییر شکل‌های بسیار زیاد المانی نیز هستند. تحلیل‌های معیار با روش سلول محدود همچنین نشان می‌دهند که این روش علاوه بر مزایای روش‌های مرتبه بالا، قابلیت تحلیل آسان هندسه‌های بسیار پیچیده را نیز فراهم می‌آورد. نتایج تحلیل‌های ارائه شده نیز با استفاده از نتایج یک روش اجزای محدود مرتبه پایین با نام F-bar به تأیید رسیده‌اند. مطالعات عددی انجام شده نشان می‌دهد که هر دو روش مورد بررسی را می‌توان برای تحلیل پلاستیک مواد و سازه‌های مهندسی ساخته شده از فلزات نرم، به ویژه مواردی که دارای هندسه پیچیده هستند، با اطمینان به کار برد.

واژه‌های کلیدی: روش اجزای محدود مرتبه بالا، روش سلول محدود، پلاستیسیته کرنش بزرگ، تراکم‌ناپذیری و قفل‌شدگی حجمی.

## Numerical Analysis of Benchmark Finite Strain Plasticity Problems using High-order Finite Elements and Finite Cells

A. Taghipour<sup>1\*</sup>, J. Parvizian<sup>1</sup>, S. Heinze<sup>2</sup>, A. Düster<sup>2</sup> and E. Rank<sup>3</sup>

1. Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

2. Numerical Structural Analysis with Application in Ship Technology (M-10), Hamburg University of Technology, Am Schwarzenberg-Campus 4 (C), Hamburg, Germany.

3. Chair for Computation in Engineering, Technical University of Munich, Arcisstr. Munich, Germany.

**Abstract:** In this paper, a high-order finite element discretization and its newly developed fictitious domain approach, the

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: a.taghipour@me.iut.ac.ir

*finite cell method, are employed to compute a series of benchmark problems in the finite strain von Mises or J2 theory of plasticity. The hierarchical (integrated Legendre) shape functions are used for the finite element approximation of incompressible plastic dominated deformations occurring in the finite strain plasticity of ductile metals. The computational examples include the necking under uniaxial tension with notched and un-notched samples and the compression of a perforated plate. These computations demonstrate that the high-order finite element methods can provide a locking-free behavior with a pure displacement-based formulation. They also provide high convergence rates and robustness against high mesh distortions. In addition, it is shown that the finite cell method, on the top of the aforementioned advantages, provides easy mesh generation capabilities for highly complex geometries. The computational results are verified in comparison with the results obtained using a standard low-order finite element method known as the F-bar method. The numerical investigations reveal that both methods are good candidates for the plasticity analysis of engineering materials and structures made up of ductile materials, particularly those involving complex geometries.*

**Keywords:** High-order finite element method, Finite cell method, Finite strain plasticity, Incompressibility, Volumetric locking

## فهرست علائم

ماتریس گرادیان گسسته متقارن	<b>B</b>	بردار نیروی سطحی	<b>t</b>
بردار نیروی بدنه	<b>b</b>	بردار جابه‌جایی	<b>U</b>
ماتریس مدول مماسی الاستیک-پلاستیک	<b>c</b>	نقاط مادی در هیئت مرجع	<b>X</b>
تانسور الاستیک ایزوتروپیک	<b>D</b>	متغیر داخلی پلاستیک	$\alpha$
گرادیان تغییر شکل	<b>F</b>	ضریب سخت‌شوندگی	$\gamma$
مولفه الاستیک گرادیان تغییر شکل	<b>F<sup>e</sup></b>	کرنش الاستیک	$\epsilon^e$
مولفه پلاستیک گرادیان تغییر شکل	<b>FP</b>	بردار جابه‌جایی مجازی	$\eta$
مدول برشی الاستیک	<b>G</b>	تانسور تنش کوشی	$\sigma$
ماتریس گرادیان گسسته کامل	<b>G</b>	استحکام تسلیم	$\sigma_y$
تابع کارمجازی دامنه توسعه داده شده	<b>G<sub>e</sub></b>	تانسور تنش کیرشهف	$\tau$
تانسور واحد	<b>I</b>	تابع تغییر شکل	$\varphi$
مدول حجمی الاستیک	<b>K</b>	تابع تسلیم	$\Phi$
چند جمله‌ای های استاندارد لژاندر	<b>L<sub>j</sub></b>	دامنه حقیقی یا فیزیکی	$\Omega$
ماتریس توابع شکل	<b>N</b>	دامنه توسعه داده شده	$\Omega_e$
توابع شکل سلسله مراتبی	<b>N<sub>i</sub></b>	دامنه مجازی	$\Omega_e \setminus \Omega$
تنش متوسط	<b>p</b>	اپراتور گرادیان متقارن	$\nabla_{sym}$
تابع نگاشت	<b>Q</b>		

## ۱- مقدمه

پلاستیسیته به دلیل حجم بالای محاسبات اهمیت زیادی دارد. همچنین، با رویکرد مرتبه بالا می‌توان بدون تغییر فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی و تنها با بالا بردن مرتبه توابع شکل، بر پدیده‌های قفل شدگی<sup>۱</sup> مانند قفل شدگی حجمی فائق آمد [۱، ۳ و ۴]. پدیده قفل شدگی یا سختی بیش از حد<sup>۲</sup> می‌تواند به دلیل تراکم‌ناپذیری تغییر شکل پلاستیک در مسائل پلاستیسیته کرنش بزرگ فون-میزز رخ دهد [۴ و ۵]. به علاوه، المان‌های مرتبه بالا حساسیت بسیار کمی نسبت به تغییر شکل‌های زیاد یا اعوجاج داشته و نیاز به مش‌بندی

به‌طور کلی دو رویکرد با عنوان‌های مرتبه پایین و مرتبه بالا برای کنترل دقت روش اجزای محدود وجود دارد. روش مرتبه پایین مبتنی بر استفاده از توابع شکل مرتبه پایین و ریز کردن اندازه المان‌هاست. در مقابل، روش مرتبه بالا اندازه و تعداد المان‌ها را ثابت نگاه‌داشته و برای افزایش دقت، مرتبه توابع شکل را بالا می‌برد. یکی از مزایای روش مرتبه بالا نرخ همگرایی بالای آن در مقایسه با روش مرتبه پایین است [۱ و ۲]. نرخ همگرایی در مسائل

مجدد را تا حدود زیادی مرتفع می‌سازند [۶ و ۷]. روش‌های مرتبه بالا همچنین می‌توانند قابلیت ترکیب مراحل مدل‌سازی هندسی و تحلیل اجزای محدود را فراهم سازند [۱ و ۸-۱۰]. یک نمونه بارز در این عرصه روش تحلیل ایزوژئومتریک<sup>۳</sup> است [۱۰].

روش مرتبه بالای ارائه شده توسط زاو و بابوشکا با توابع سلسله مراتبی (لژاندر انتگرال‌گیری شده) در دهه ۱۹۸۰ [۱] برای مسائل الاستیک خطی [۱، ۳، ۸ و ۱۱] و غیرخطی [۶ و ۱۵-۱۲] متعددی مورد ارزیابی قرار گرفته و مزایای آن در مقایسه با روش مرتبه پایین نشان داده شده است. توانایی این روش در فائق آمدن بر قفل‌شدگی‌های حجمی و برشی [۶ و ۱۸-۱۴] و همچنین قابلیت آن در تحلیل در شرایط اعوجاج المانی بسیار زیاد [۶] نیز نشان داده شده است. این روش همچنین برای تحلیل مسائل پلاستیسیته فون-میزز کرنش کوچک [۲۵-۱۹] و همچنین مسائل پلاستیسیته پودر در کرنش‌های بزرگ [۲۶ و ۲۷] به کار گرفته شده است. اما تاکنون گزارشی در مورد به‌کارگیری این روش در تحلیل مسائل پلاستیسیته فون-میزز کرنش بزرگ که دارای تراکم‌ناپذیری حجمی تقریبی است منتشر نشده است. این تئوری مادی برای تحلیل دسته وسیعی از فلزات نرم در شرایطی همچون شکل‌دهی و ضربه استفاده می‌شود.

روش سلول محدود یک توسعه جدید از روش اجزای محدود مرتبه بالاست که از ترکیب آن با رویکرد دامنه مجازی<sup>۴</sup> حاصل شده است. این روش به‌عنوان ابزاری برای تحلیل آسان انواع هندسه‌های بسیار پیچیده (حتی هندسه‌های حاصل از سی تی اسکن) در سال ۲۰۰۷ توسط پرویزیان و همکاران معرفی شده است [۲۸ و ۲۹]. روش اجزای محدود استاندارد دامنه حل را با استفاده از المان‌های منطبق بر مرز<sup>۵</sup> گسسته‌سازی می‌کند. درحالی که روش‌های جدیدتری همچون روش‌های بدون المان، روش‌های اجزای محدود تعمیم یافته<sup>۶</sup> و یا توسعه یافته<sup>۷</sup> و روش‌های مبتنی بر رویکرد دامنه مجازی، دامنه حل را با المان‌هایی گسسته می‌کنند که لزوماً بر مرز منطبق نیستند [۲۸-۳۱]. این روش به‌خوبی

قابلیت ترکیب مراحل مدل‌سازی هندسی و تحلیل اجزای محدود را فراهم می‌سازد. روش سلول محدود می‌تواند با انواع توابع شکل مرتبه بالا مانند توابع سلسله مراتبی [۲۸ و ۲۹] و یا توابع NURBS<sup>۸</sup> و B-spline [۳۲-۳۴] کار کند. در نتیجه این روش تمامی مزایای روش‌های مرتبه بالا همچون نرخ همگرایی بالا، فائق آمدن بر قفل‌شدگی و عدم حساسیت زیاد به تغییر شکل‌های زیاد را نیز به ارث می‌برد.

توسعه روش سلول محدود به مسائل پلاستیسیته فون-میزز کرنش بزرگ می‌تواند در تحلیل مسائل متعددی از فلزات نرم که دارای هندسه پیچیده هستند مورد استفاده قرارگیرد. به‌عنوان نمونه می‌توان به مسائل شکل‌دهی فلزات، ضربه و همچنین تحلیل رفتار پلاستیک مواد جدیدی همچون فلزات متخلخل و سلولی (فوم‌های فلزی) اشاره کرد. روش سلول محدود تاکنون برای تحلیل مسائل مختلفی به کار گرفته شده است [۳۰ و ۳۱] که نمونه‌های آن عبارتند از: الاستیسیته خطی و غیرخطی، پلاستیسیته فون-میزز [۳۵ و ۳۶] و مکانیک آسیب کرنش کوچک [۳۹-۳۶]، بهینه‌سازی توپولوژی، مهندسی پزشکی و تحلیل استخوان، همگن‌سازی عددی مواد سلولی، انتشار امواج، انتقال حرارت هدایتی، سازه‌های جدار نازک و مواد مرکب.

در این مقاله، روش اجزای محدود مرتبه بالا و روش سلول محدود برای تحلیل دسته‌ای از مسائل معیار<sup>۹</sup> پلاستیسیته فون-میزز کرنش بزرگ به کار برده خواهند شد. صحت نتایج حاصل از این روش‌ها نیز در مقایسه با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مرتبه پایین اصلاح شده به روش F-bar [۴ و ۴۰] مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در بخش دو، خلاصه روابط ساختاری مادی ارائه شده است. بخش سه نیز به معرفی روش اجزای محدود مرتبه بالا و روش سلول محدود و فرمول‌بندی غیرخطی (مادی و هندسی) آنها می‌پردازد. در بخش چهار نیز سه مسئله معیار که عبارتند از باریک‌شدگی<sup>۱۰</sup> در آزمون کشش ساده با نمونه‌های شیاردار و بدون شیار و صفحه سوراخ‌دار تحت فشار، تحلیل می‌شوند. اهم نتایج حاصل از تحقیق و برنامه ادامه آن نیز در بخش پنج ارائه می‌شوند.

$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$	۱. تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل:
$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{\nu} \ln \left[ \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T \right]$	۲. قانون الاستیسیته ایزوتروپیک:
$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$	یا
$p = \frac{1}{\nu} \text{tr } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}_v^e, \quad \mathbf{s} = \nu \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}_d^e$	$\boldsymbol{\varepsilon}_v^e = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_d^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{1}{\nu} \boldsymbol{\varepsilon}_v^e \mathbf{I}$
$\Phi(\mathbf{s}, \sigma_y) = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-1}} \mathbf{s} : \mathbf{s} - \sigma_y(\alpha)$	۳. تابع تسلیم فون- میزز:
$\dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-1}} \dot{\gamma} (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{n} \mathbf{R}^e$	۴. قانون جریان پلاستیک (پرانتدل-راس <sup>۱۲</sup> ):
$\dot{\alpha} = \dot{\gamma}$	۵. رابطه سخت‌شوندگی ایزوتروپیک:
$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0.$	۶. معیار بارگذاری/ باربرداری:
$c_{ijkl} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \frac{\partial (\det \mathbf{F} \sigma_{ij})}{\partial F_{kl}} F_{lq} - \sigma_{il} \delta_{jk}$	۷. مدول الاستیک- پلاستیک:

## ۲- پلاستیسیته فون- میزز در کرنش‌های بزرگ

در این بخش، پلاستیسیته فون- میزز در کرنش‌های بزرگ با در نظر گرفتن سخت‌شوندگی ایزوتروپیک فرمول‌بندی می‌شود [۴]. این فرمول‌بندی در هیئت تغییر شکل یافته و با توصیف هایپرالاستیک<sup>۱۱</sup> تغییر شکل برگشت پذیر ارائه شده است. خلاصه معادلات ساختاری این مدل مادی در جدول (۱) آورده شده است.

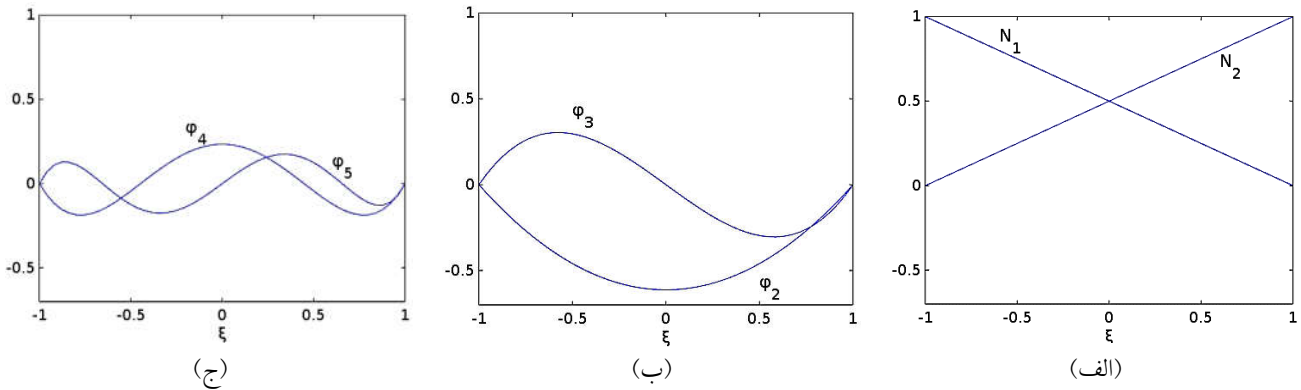
اساسی‌ترین فرضیه سینماتیکی این فرمول‌بندی، تجزیه ضربی<sup>۱۳</sup> محلی گرادیان تغییر شکل  $\mathbf{F}$  به مؤلفه‌های الاستیک  $\mathbf{F}^e$  و پلاستیک  $\mathbf{F}^p$  است. بخش الاستیک تغییر شکل با استفاده از تابع انرژی آزاد ماده<sup>۱۴</sup> فرمول‌بندی می‌شود که یک رابطه ساختاری ساده مشابه شرایط کرنش‌های کوچک را به دست می‌دهد. این رابطه با تانسور تنش کیرشهف،  $\boldsymbol{\tau}$ ، به جای تانسور تنش کوشی،  $\boldsymbol{\sigma}$ ، نوشته شده و  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  تانسور کرنش الاستیک لگاریتمی و  $\mathbf{D}$  همان تانسور الاستیک ایزوتروپیک کرنش‌های کوچک است. تابع تسلیم فون- میزز نیز با بخش انحرافی تانسور تنش کیرشهف،  $\mathbf{s}$ ، نوشته شده است ( $\boldsymbol{\tau} = p\mathbf{I} + \mathbf{s}$ ). قانون جریان نیز با به‌کارگیری نگاهت نمایی نوشته شده است. با توسعه ریاضی رابطه این قانون

می‌توان تراکم‌ناپذیری تغییر شکل پلاستیک ( $\text{tr } \mathbf{F}^p = 0$ ) یا ( $\det \mathbf{F}^p = 0$ ) را نشان داد [۴].

مجموع معادلات ساختاری ارائه شده در جدول (۱) به صورت نموی<sup>۱۵</sup> و به‌روش ضمنی یا برگشتی اوایلر<sup>۱۶</sup> انتگرال‌گیری می‌شوند. جزئیات بیشتر این انتگرال‌گیری عددی در مرجع [۴] ارائه شده است. آخرین جزء روابط ساختاری نیز مدول الاستیک- پلاستیک است که از خطی‌سازی معادله فرم ضعیف قانون کار مجازی به دست می‌آید. رابطه بسته مدول الاستیک- پلاستیک سازگار با روش انتگرال‌گیری عددی نیز در مرجع [۴] ارائه شده است.

## ۳- روش‌های اجزای محدود و سلول محدود مرتبه بالا

در این بخش، روش اجزای محدود مرتبه بالا و همچنین روش سلول محدود به‌طور خلاصه و به‌ترتیب در چارچوب مراجع [۳] و [۸] و [۲۸ و ۲۹] تشریح می‌شوند. هر دو روش در چارچوب روش اجزای محدود غیرخطی (هندسی و مادی) فرمول‌بندی می‌شوند. قابل توجه است که هر دو روش در هیئت تغییر شکل یافته فرمول‌بندی می‌شوند اما گسسته‌سازی هندسه در هیئت مرجع صورت می‌گیرد.



شکل ۱- توابع شکل یک بعدی المان با مرتبه  $p = 5$  در مختصات طبیعی: الف)  $N_1$  و  $N_2$  توابع شکل گرهی، ب و ج)  $\phi_2$  تا  $\phi_5$  توابع شکل لژاندر انتگرال گیری شده

$$\phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} L_{j-1}(x) dx, \quad j = 2, 3, \dots \quad (3)$$

به طوری که  $L_j$  ها چند جمله ای های استاندارد لژاندر هستند. توابع شکل دو و سه بعدی نیز از ضرب تانسوری توابع شکل یک بعدی به گونه ای که در مراجع [۴، ۸ و ۴۱] توضیح داده شده به دست می آیند. توابع شکل دوبعدی و همین طور درجات آزادی در دو بعد به دسته های گرهی، لبه ای و داخلی تقسیم بندی می شوند (شکل ۲). توابع سه بعدی و همین طور درجات آزادی در سه بعد نیز در دسته های گرهی، لبه ای، صفحه ای و داخلی جای می گیرند. در روش اجزای محدود مرتبه بالا هندسه مسئله با تعداد کمی از المان های نسبتاً بزرگ گسسته سازی می شود. در نتیجه، المان ها ممکن است دارای مرزهای منحنی باشند که این امر به نوبه خود ضرورت به کارگیری نگاشت های هندسی را خاطر نشان می کند (شکل ۳). تاکنون روش توابع ترکیبی<sup>۲۰</sup> و همچنین فرم اصلاح شده آن (نگاشت شبه محلی<sup>۲۱</sup>) برای این منظور استفاده شده اند که توضیحات بیشتر در این خصوص در مراجع [۴، ۸، ۹ و ۴۱] ارائه شده است.

### ۳-۲- روش سلول محدود

ایده اصلی روش سلول محدود، توسعه معادلات دیفرانسیلی فرم ضعیف کار مجازی به خارج از میدان فیزیکی مسئله و تا مرز یک میدان هندسه ساده است [۲۸ و ۲۹]. این میدان فراگیر<sup>۲۲</sup> میدانی فیزیکی مسئله را دربر گرفته و می توان آن را به سادگی با المان های کارترینی یا به اصلاح سلول گسسته سازی کرد (شکل ۴). این سلول ها ممکن است به طور کامل و یا جزئی

### ۳-۱- روش اجزای محدود مرتبه بالا

بر اساس رویکرد بابنوف-گالرکین<sup>۱۷</sup>، هر دو تابع جابه جایی حقیقی و مجازی با استفاده از توابع شکل یکسانی تقریب زده می شوند. در روش ارائه شده توسط زاو و بابوشکا از توابع سلسله مراتبی (لژاندر انتگرال گیری شده) مرتبه بالا استفاده می شود. فرم گسسته سازی شده معادله فرم ضعیف قانون کار مجازی عبارت است از:

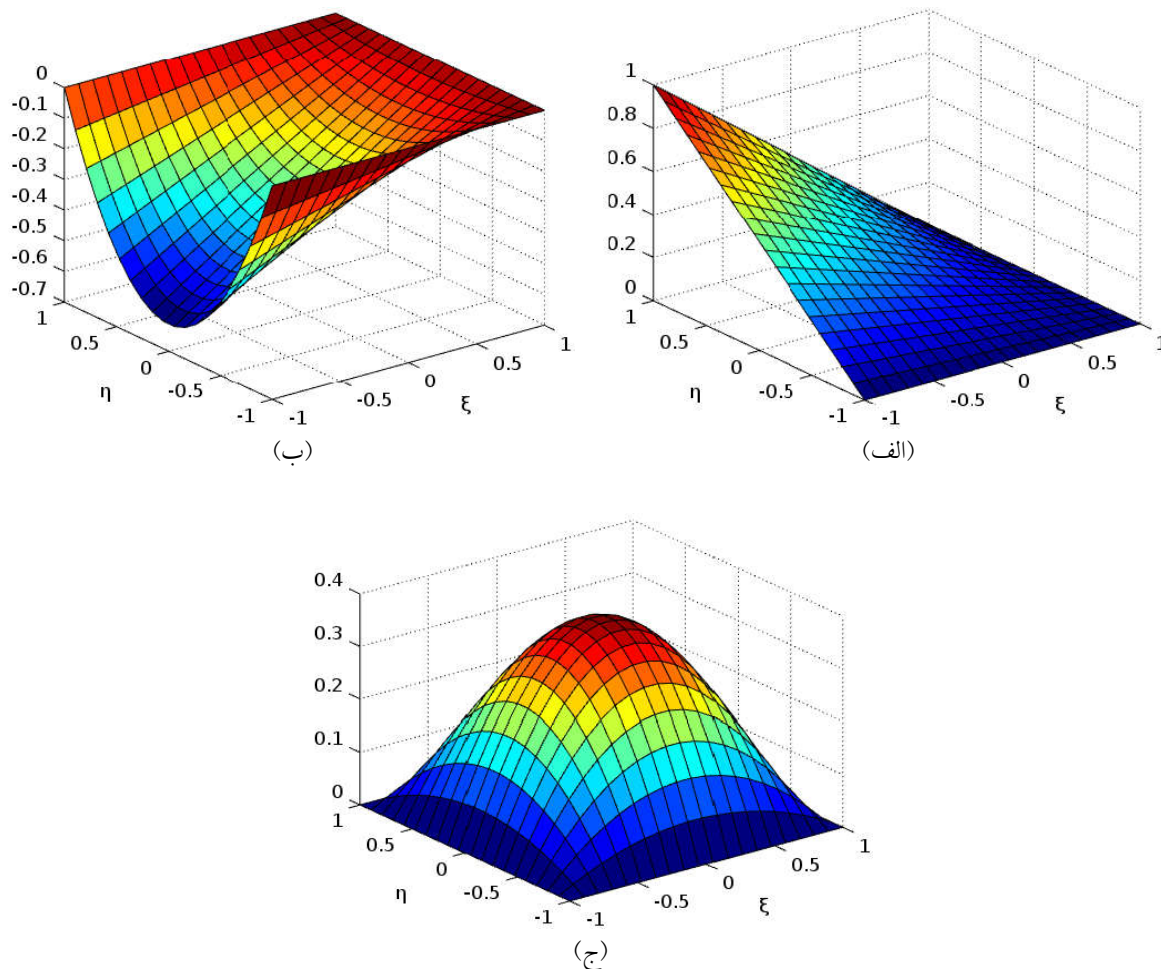
$$\left[ \int_{\varphi(h_\Omega)} \mathbf{G}^T \mathbf{c} \mathbf{G} dv \right]^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^k = - \int_{\varphi(h_\Omega)} \left[ \left\{ \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \right\}^{(k-1)} - \mathbf{N}^T \mathbf{b} \right] dv - \int_{\varphi(\partial h_\Omega)} \mathbf{N}^T \mathbf{t} da \quad (1)$$

به طوری که  $h_\Omega$  دامنه المان بندی شده،  $\varphi$  تابع نگاشت تغییر شکل بوده و  $\mathbf{b}$  و  $\mathbf{t}$  به ترتیب بردار نیروهای بدنه و سطحی هستند. اندیس  $k$  پارامتر تکرار نیوتن-رافسون<sup>۱۸</sup> بوده و  $\delta \mathbf{u}$  نیز بردار حل اجزای محدود است. به علاوه،  $\mathbf{N}$  ماتریس توابع شکل سلسله مراتبی بوده و  $\mathbf{G}$  و  $\mathbf{B}$  به ترتیب ماتریس های گرادینان گسسته<sup>۱۹</sup> کامل و مقارن هستند که مؤلفه هایشان مشتقات توابع شکل نسبت به دستگاه مختصات هیئت تغییر شکل یافته است.

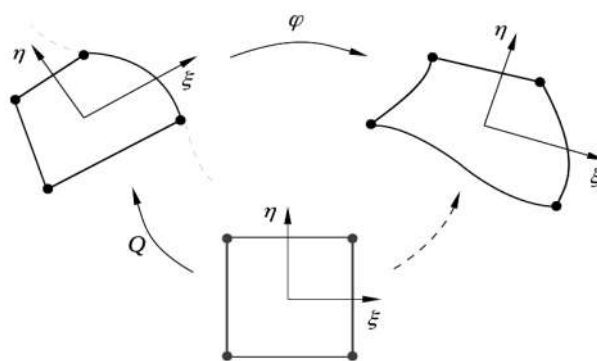
توابع سلسله مراتبی یک بعدی عبارتند از (شکل ۱):

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \dots, p+1 \end{cases} \quad (2)$$

به صورتی که:



شکل ۲- (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمونه‌هایی از توابع شکل المان دوبعدی چهاروجهی مرتبه بالا در مختصات طبیعی: (الف) تابع شکل گرهی، (ب) تابع شکل لبه‌ای و (ج) تابع شکل درونی



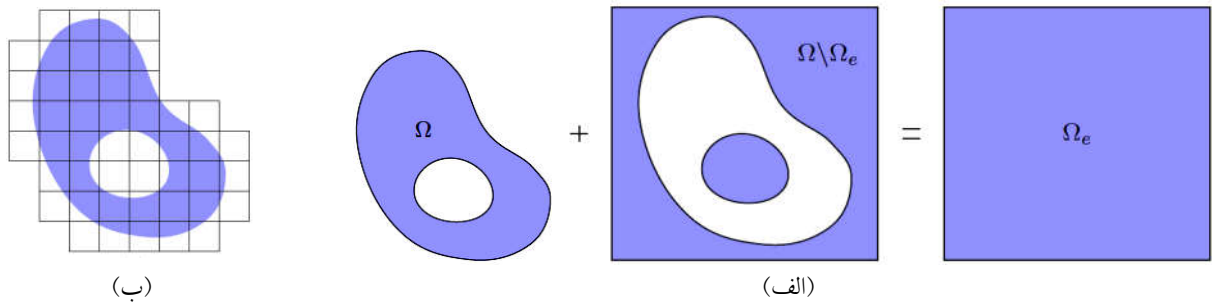
شکل ۳- نگاشت هندسی دوبعدی در هیئت مرجع با روش توابع ترکیبی (Q: تابع نگاشت و phi: تابع تغییر شکل)

$$G_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\varphi(\Omega_e)} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\text{sym}} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}) dv - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} da \quad (4)$$

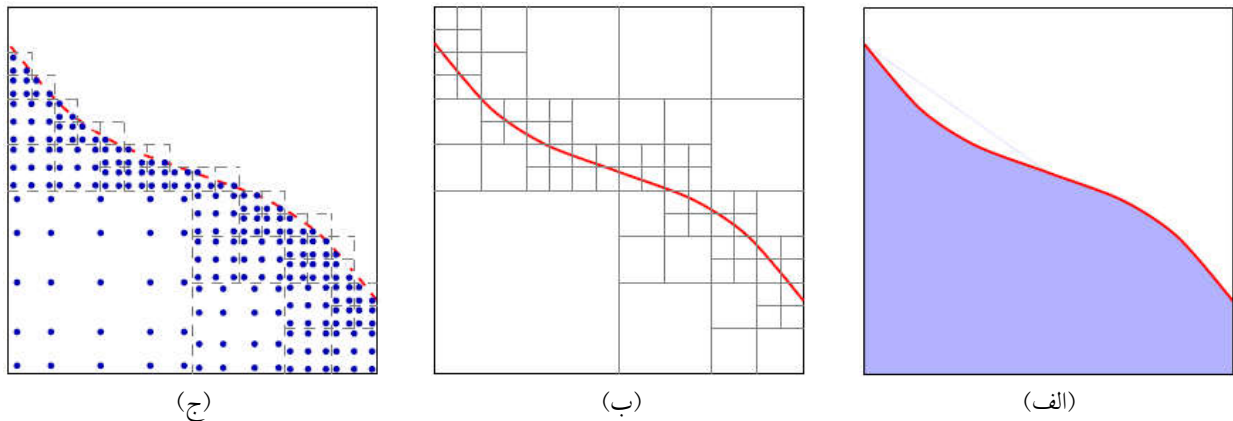
به طوری که  $\boldsymbol{\eta}$  جابه‌جایی مجازی بوده و بردارهای نیرو بدنه  $\mathbf{b}$

در میدان فیزیکی قرار داشته باشند. معادله فرم ضعیف قانون کار

مجازی در روش سلول محدود عبارت است از:



شکل ۴- روش سلول محدود: الف) قرار دادن دامنه فیزیکی پیچیده ( $\Omega$ ) در یک دامنه فراگیر ساده ( $\Omega_e$ ) و ب) گسسته‌سازی دامنه فراگیر



شکل ۵- (رنگی در نسخه الکترونیکی) انتگرال‌گیری سلول بریده شده دو بعدی توسط مرز فیزیکی به روش کوادتری: الف) سلول بریده شده، ب) ساختار زیرسلولی و ج) نقاط انتگرال‌گیری

به صورت ضعیف اعمال می‌کنند [۴۲].  
 انتگرال‌گیری ماتریس سختی در شرایطی که سلول به طور کامل در دامنه فیزیکی قرار داشته باشد به روش استاندارد گاوس<sup>۲۴</sup> انجام می‌شود. اما در حالتی که سلول به صورت جزئی در دامنه فیزیکی باشد (سلول بریده شده<sup>۲۵</sup>)، از روش گاوس اصلاح شده یا ترکیبی<sup>۲۶</sup> برای انتگرال‌گیری روی بخش فیزیکی سلول استفاده می‌شود [۲۹ و ۴۳]. در عمل می‌توان گفت مرز هندسی در روش سلول محدود در همین مرحله انتگرال‌گیری شناخته می‌شود. این روش اصلاحی که در حالت دوبعدی روش کوادتری<sup>۲۷</sup> و در حالت سه بعدی روش آکتری<sup>۲۸</sup> نامیده می‌شود به طور نمادین در شکل (۵) معرفی شده است [۲۹ و ۴۳]. دامنه سلول به صورت سلسله مراتبی به زیرسلول‌هایی کوچک‌تر تقسیم می‌شود و انتگرال سلول کلی با انتگرال‌گیری زیرسلول‌هایی که در ناحیه فیزیکی قرار دارند به دست می‌آید. قانون انتگرال‌گیری گوس در حالتی که درجه سلول  $p$  باشد استفاده از  $p+1$  نقطه در هر جهت را الزامی می‌کند. در این

سطحی  $t$  روی دامنه و مرز فیزیکی تعریف شده‌اند. قابل توجه است که با در نظر گرفتن ماده با سختی صفر در خارج از دامنه فیزیکی می‌توان معادله فرم ضعیف اولیه دامنه فیزیکی را به دست آورد.

فرم گسسته‌سازی شده معادله فرم ضعیف قانون کار مجازی عبارت است از:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = -\mathbf{r}^{(k-1)} \quad (5)$$

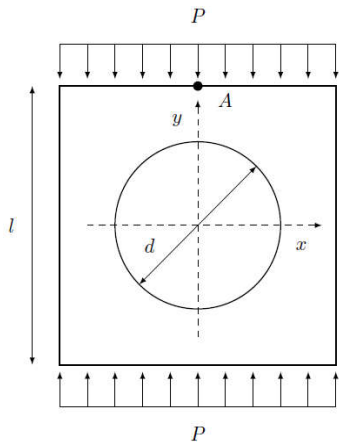
به طوری که برای هر سلول:

$$\mathbf{K}_c = \int_{\varphi(\Omega_c)} \mathbf{G}^T \alpha \mathbf{c} \mathbf{G} dv \quad (6)$$

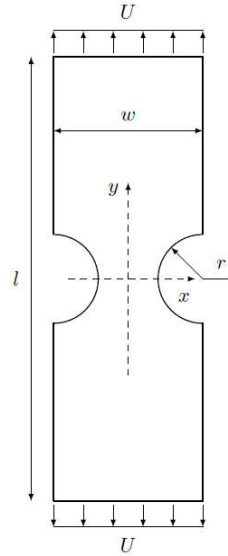
پارامتر  $\alpha$  نیز بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} 1/\alpha & \forall \mathbf{X} \in \Omega \\ 0/\alpha & \forall \mathbf{X} \in \Omega \setminus \Omega_e \end{cases} \quad (7)$$

شرط مرزی نیرویی مسائل سلول محدود را به راحتی می‌توان با انتگرال‌گیری مرز نیرویی انجام داد [۲۹]. برای اعمال شرط مرزی جابه‌جایی در حالتی که مرز درون المان باشد نیز از روش‌های مانند روش نیچه<sup>۲۳</sup> استفاده می‌شود که شرط مرزی را



(ج)



(ب)

ج

(الف)

شکل ۶- مسائل معیار: الف) باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده (نمونه بدون شیار):  
 ب) باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده (نمونه شیاردار):  
 ج) فشارگذاری صفحه سوراخ‌دار (  $l = 60 \text{ mm}$ ,  $w_1 = 20 \text{ mm}$ ,  $r = 5 \text{ mm}$  )  
 د) فشارگذاری صفحه سوراخ‌دار (  $l = 20 \text{ mm}$ ,  $d = 12 \text{ mm}$  )

جدول ۲- خواص الاستیک - پلاستیک ماده [۴۷]

۱۶۴/۲۰۶ (GPa)	K	مدول الاستیسیته حجمی
۸۰/۱۹۶ (GPa)	G	مدول الاستیسیته برشی
۴۵۰/۰ (MPa)	$\sigma_0$	استحکام تسلیم اولیه
۷۱۵/۰ (MPa)	$\sigma_{\infty}$	استحکام اشباع <sup>۲۹</sup>
۱۲۹/۴ (MPa)	h	سخت‌شوندگی خطی
۱۶/۹۳	$\omega$	توان سخت‌شوندگی

می‌گیرد. این مسائل معیار عبارتند از باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده با نمونه‌های شیاردار و بدون شیار و فشارگذاری صفحه سوراخ‌دار. هندسه و بارگذاری این مسائل در شکل (۶) نشان داده شده است. دقت حل این دو روش در تحلیل مسائل مذکور با استفاده از تحلیل‌های مرجع با استفاده از یک روش اجزای محدود مرتبه پایین به نام F-bar [۴ و ۴۰] مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. جدول (۲) پارامترهای ماده که رفتار الاستیک-پلاستیک و نمودار کارسختی ماده را تعریف می‌کنند را ارائه می‌دهد.

$$\sigma_y(\alpha) = \sigma_0 + h\alpha + (\sigma_{\infty} - \sigma_0)(1 - \exp(-\omega\alpha)) \quad (۸)$$

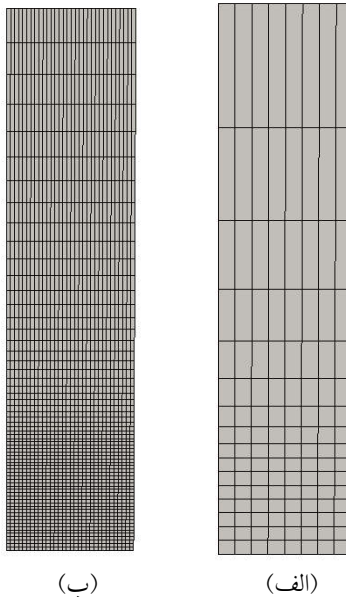
تمامی روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا، مرتبه پایین F-bar و

صورت تعداد نقاط انتگرالی بسیار زیادی برای سلول‌های بریده شده به دست می‌آید که حجم محاسباتی زیادی را به خود اختصاص می‌دهند. بنا به پیشنهاد مرجع [۳۵] می‌توان تعداد نقاط هر زیرسلول را با کاهش اندازه زیر سلول به تدریج کاهش داد. چرا که می‌توان تابع تقریب حل را با کاهش اندازه زیرسلول از درجه پایین‌تری فرض کرد.

#### ۴- تحلیل عددی مسائل معیار

در این بخش عملکرد روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا و روش سلول محدود با تحلیل چند مسئله معیار شناخته شده از پلاستیسیته فون-میزز کرنش بزرگ مورد ارزیابی عملی قرار





شکل ۷- مدل‌های اجزای محدود یک چهارم نمونه بدون شیار آزمون کشش: الف) مش A با ۱۲۸ المان مرتبه بالا و ب) مش B با ۲۰۴۸ المان F-bar

پایین F-bar و یک مدل با ۲۳۰ سلول مرتبه بالا به همراه ساختار زیرسلولی آن برای نمونه شیاردار نشان داده شده است. نمودارهای نیرو و جابه‌جایی حاصل از تحلیل با مدل‌های مختلف در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) مقایسه شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود، المان‌های با  $p=1$  یک رفتار سخت را پیش‌بینی می‌کنند. اما با  $p \geq 2$  می‌توان بر این سخت‌شدگی حاصل از قفل‌شدگی حجمی فائق آمد.

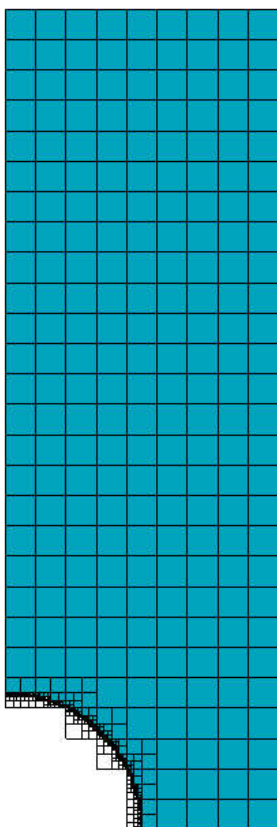
کانتورهای تنش فون-میزز و کرنش پلاستیک حل‌های مختلف در جابه‌جایی  $u=5\text{mm}$  برای مدل یک چهارم نمونه‌های کشش هم در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) نشان داده شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود، تطابق خیلی خوبی بین نتایج حاصل با استفاده از المان‌های مرتبه بالا و سلول‌های مرتبه بالا با المان‌های مرتبه پایین F-bar در حل‌های مرجع به دست آمده است.

تغییر شکل نمونه‌های کشش در طول بارگذاری نیز در شکل‌های (۱۴) و (۱۵) به نمایش درآمده است. نواحی پلاستیک و الاستیک در هر لحظه از بارگذاری به‌ترتیب با استفاده از رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که مطابق با انتظار، در نمونه بدون شیار ابتدا

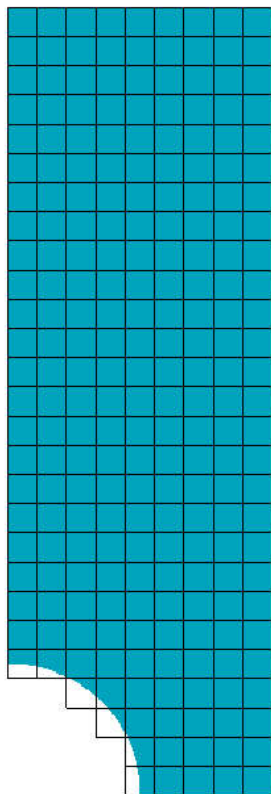
سلول محدود و مدل مادی فون-میزز در کد تحقیقاتی AdhoC [۴۴] که در دانشگاه‌های صنعتی مونیخ و هامبورگ توسعه داده شده پیاده‌سازی شده‌اند. برای حل دستگاه معادلات نیز از حل‌کننده Pardiso [۴۵] استفاده شده و برای نمایش کانتورهای گرافیکی نتایج نیز نرم‌افزار Paraview [۴۶] به‌کار برده شده است.

#### ۴-۱- باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده

شبهه‌سازی باریک‌شدگی نمونه مستطیلی تحت کشش یک‌محوره و شرایط کرنش صفحه‌ای برای اولین بار در مرجع [۴۷] انجام شده و سپس به تکرار در تحقیقات بعدی پلاستیسیته کرنش بزرگ [۴۸ و ۴۹] پیگیری شده است. بارگذاری کششی به‌صورت جابه‌جایی نموی با لبه بالای نمونه‌ها یک چهارم از آنها با المان‌ها و سلول‌های محدود اعمال می‌شود. به‌دلیل تقارن‌های موجود در مسائل کشش تنها مدل‌سازی می‌شود. در شکل (۷) یک مدل با ۱۲۸ المان مرتبه بالا و یک مدل با ۲۰۴۸ المان مرتبه پایین F-bar برای نمونه بدون شیار نشان داده شده است. در شکل‌های (۸) و (۹) هم یک مدل با ۱۹۶ المان مرتبه بالا، یک مدل با ۳۶۰۰ المان مرتبه

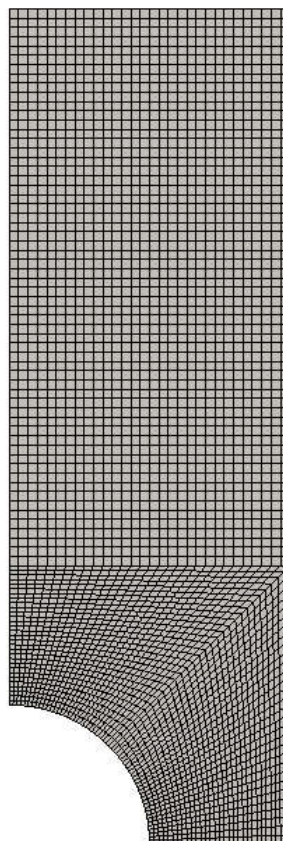


(ب)

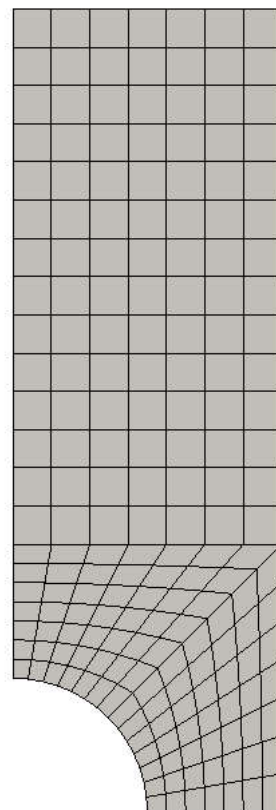


(الف)

شکل ۹- مدل‌های سلول محدود یک چهارم نمونه شیاردار  
آزمون کشش: الف) مش B با ۲۳۰ سلول مرتبه بالا و ب)  
ساختار زیرسلولی مش B با تقسیم‌بندی تا سطح ششم

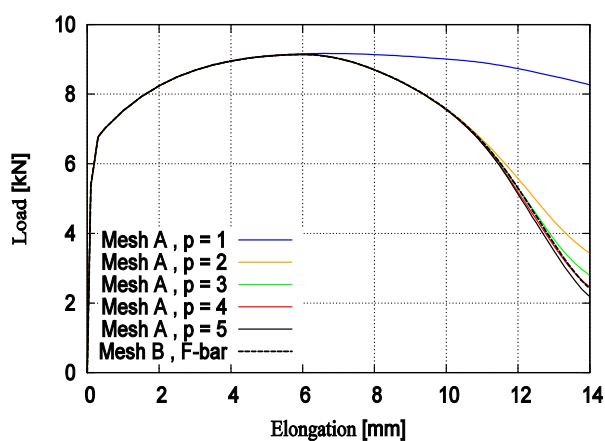


(ب)

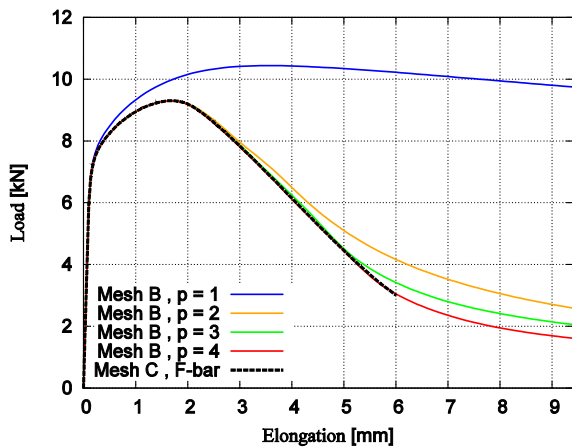


(الف)

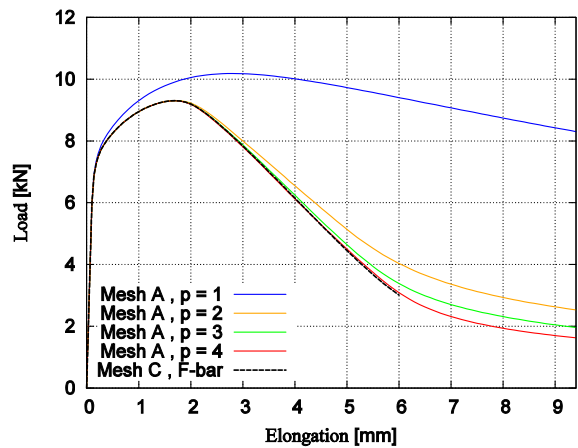
شکل ۸- مدل‌های اجزای محدود یک چهارم نمونه شیاردار  
آزمون کشش: الف) مش A با ۱۹۶ المان مرتبه بالا و ب) مش  
C با ۳۶۰۰ المان F-bar



شکل ۱۰- نمودار نیرو- جابه‌جایی در باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده با نمونه بدون شیاردار

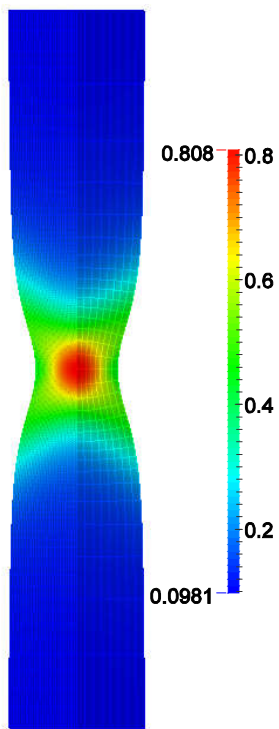


(ب)

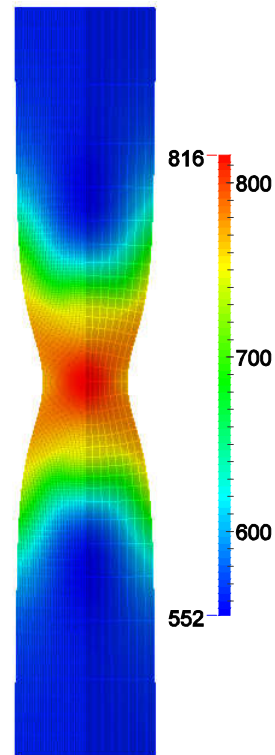


(الف)

شکل ۱۱- نمودار نیرو- جابه‌جایی در باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده با نمونه شیاردار: الف) تحلیل به‌روش اجزای محدود مرتبه بالا و ب) تحلیل به‌روش سلول محدود

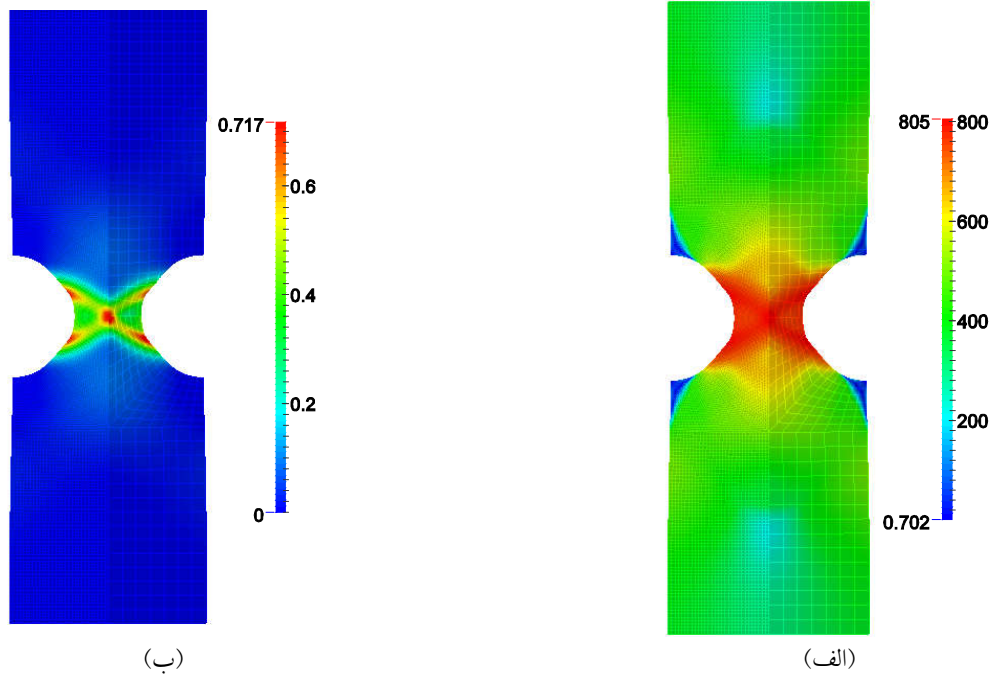


(ب)

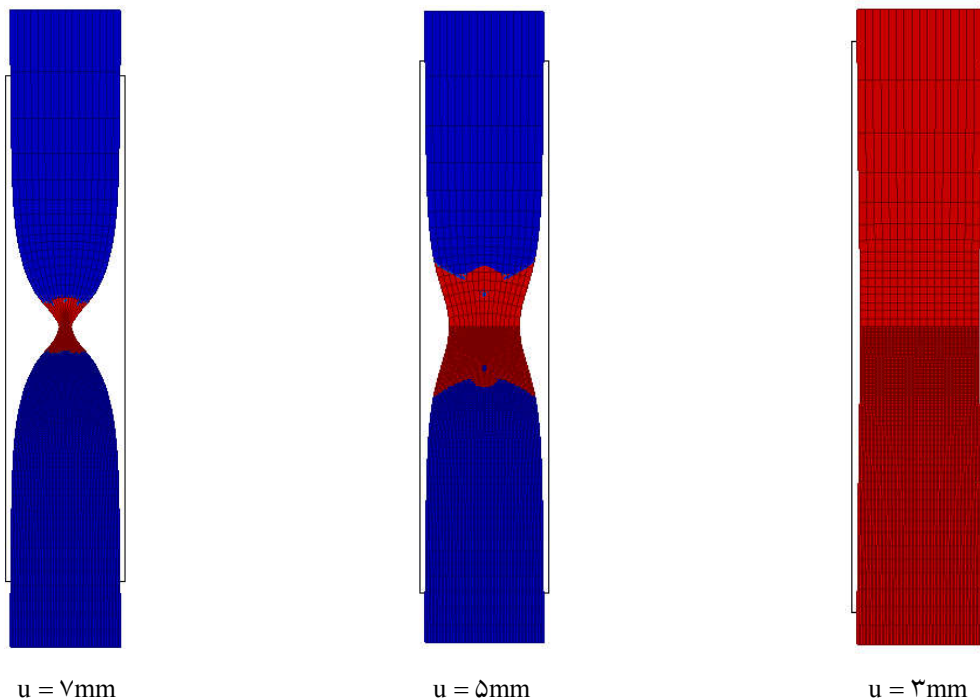


(الف)

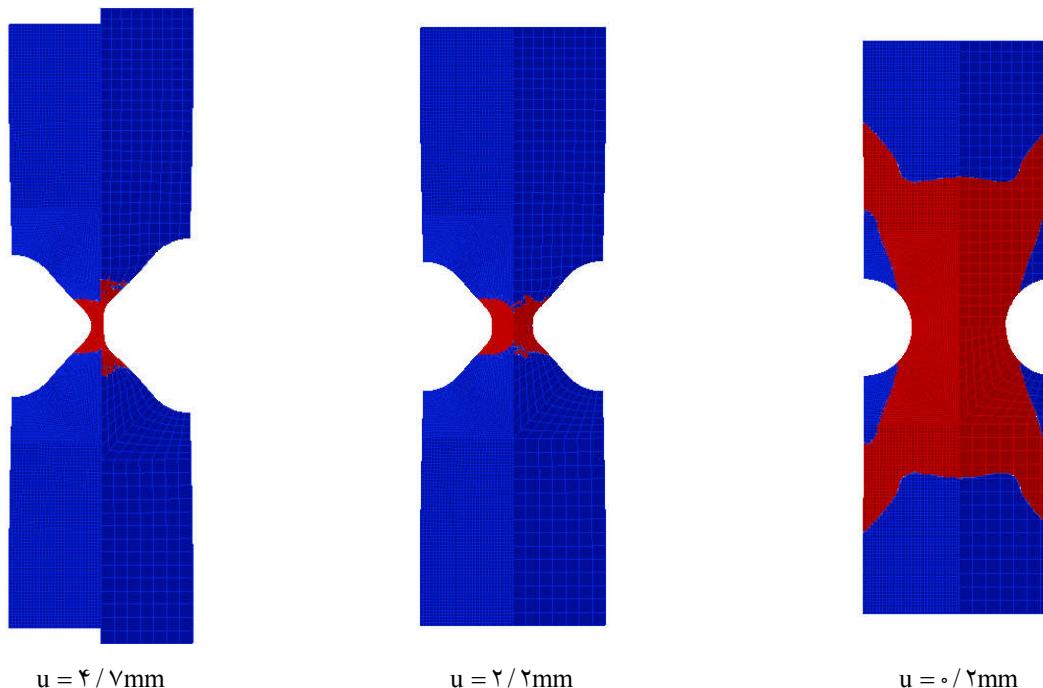
شکل ۱۲- (رنگی در نسخه الکترونیکی) باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده با نمونه بدون شیاردار: الف) کانتور تنش فون-میز و ب) کانتور کرنش پلاستیک در  $u = 5\text{mm}$  با مش A با المان‌های مرتبه بالا  $p = 5$  (نیمه راست) و مش B با المان‌های F-bar (نیمه چپ)



شکل ۱۳- (رنگی در نسخه الکترونیکی) باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده با نمونه شیاردار: الف) کانتور تنش فون-میزس و ب) کانتور کرنش پلاستیک در  $u = 2/9 \text{ mm}$  با مش A با المان‌های مرتبه  $p = 5$  (پایین-راست) و مش B با سلول‌های مرتبه  $p = 5$  (بالا-راست) و مش C با المان‌های F-bar (نیمه چپ)



شکل ۱۴- (رنگی در نسخه الکترونیکی) باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده با نمونه بدون شیاردار: هندسه تغییر شکل یافته در طول بارگذاری با مش A با المان‌های مرتبه بالا  $p = 5$  (نیمه راست) و مش B با المان‌های F-bar (نیمه چپ)



شکل ۱۵- (رنگی در نسخه الکترونیکی) باریک‌شدگی در آزمون کشش ساده با نمونه شیاردار: هندسه تغییر شکل یافته در طول بارگذاری با مش A با المان‌های مرتبه  $p = 5$  (پایین-راست) و مش B با سلول‌های مرتبه  $p = 5$  (بالا-راست) و مش C با المان‌های F-bar (نیمه چپ)  $u = 4/7 \text{ mm}$   $u = 2/2 \text{ mm}$   $u = 0/2 \text{ mm}$

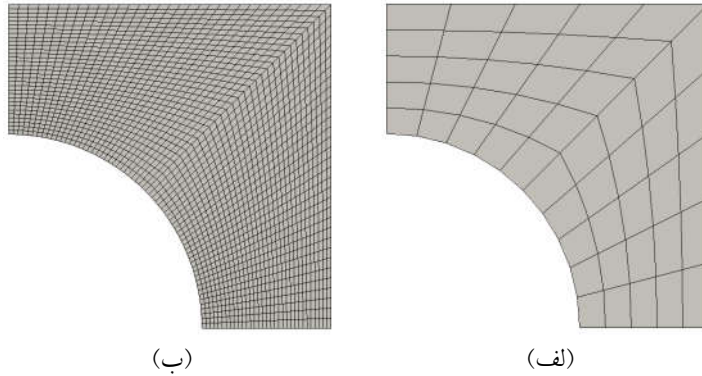
همچنین تحت کرنش‌های کوچک و بزرگ به دفعات در تحقیقات عددی مسائل جامدات تحلیل شده است. در این بخش، صفحه سوراخ‌دار تحت بارگذاری فشاری و در شرایط کرنش صفحه‌ای تحلیل می‌شود. بارگذاری فشاری شرایطی است که فلزات نرم در بسیاری از فرایندهای شکل‌دهی مانند آهنگری تجربه می‌کنند. بارگذاری فشاری مسئله به لبه بالای ورق اعمال شده و برای جلوگیری از ناپایداری احتمالی مسئله از روش نیوتن-رافسون ترکیب شده با روش Arc-Length [۴ و ۵۰] استفاده شده است. به دلیل تقارن‌های موجود در مسئله تنها یک چهارم از آن با المان‌ها و سلول‌های محدود مدل‌سازی می‌شود. در شکل (۱۶) یک مدل با ۵۰ المان مرتبه بالا و یک مدل با ۲۰۴۸ المان مرتبه پایین F-bar نشان داده شده است. در شکل (۱۷) هم یک مدل با ۷۸ سلول مرتبه بالا به همراه ساختار زیرسلولی آن نشان داده شده است.

نمودارهای نیرو و جابه‌جایی حاصل از تحلیل با مدل‌های مختلف در شکل (۱۸) مقایسه شده‌اند. همان‌طور که دیده

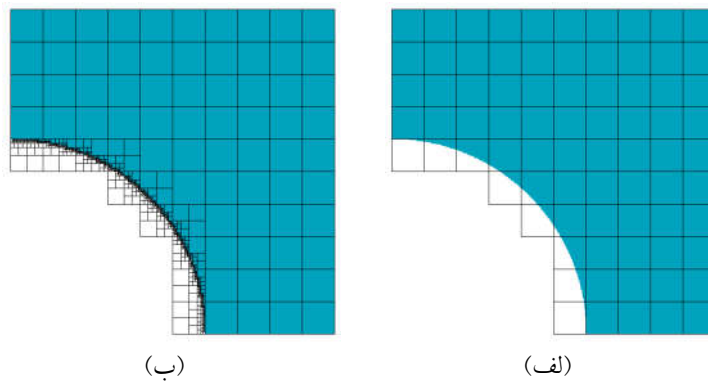
پلاستیک‌شدگی به‌طور فزاینده در کل دامنه اتفاق افتاده و سپس رفته رفته در ناحیه میانی نمونه و در محل باریک‌شدگی متمرکز شده است. به‌طوری که اولین لایه المان‌ها دچار تغییر شکل بسیار زیاد شده است. توجه شود که برای فعال‌سازی باریک‌شدگی و وقوع آن در وسط طول نمونه بدون شیار، یک کاهش پهنا در همین محل ایجاد شده است (شکل ۶-الف). اما در نمونه شیاردار پلاستیک‌شدگی در بارگذاری کمتری شروع شده است به‌طوری که تنها در نواحی مجاور شیار گسترش یافته است. سپس رفته رفته در ناحیه میانی شیار نمونه متمرکز شده به‌طوری که اولین لایه المان‌ها دچار تغییر شکل بسیار زیاد شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، تحلیل مرجع به دلیل اعوجاج زیاد المان‌های F-bar توانایی تحلیل در  $u = 4/7 \text{ mm}$  را نداشته و در جابه‌جایی کمتری موقوف شده است.

#### ۴-۲- صفحه سوراخ‌دار تحت فشار

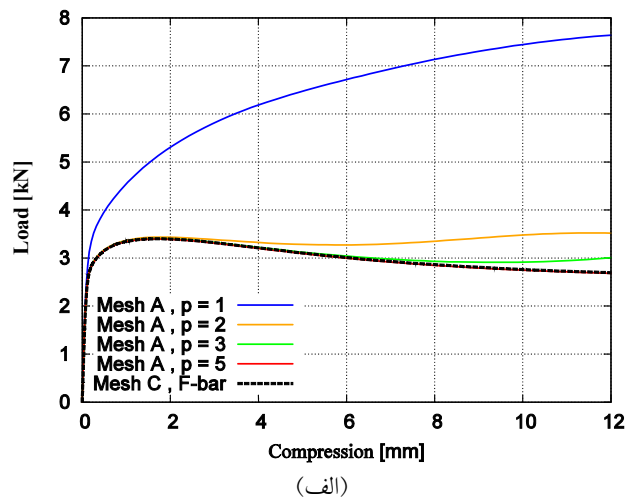
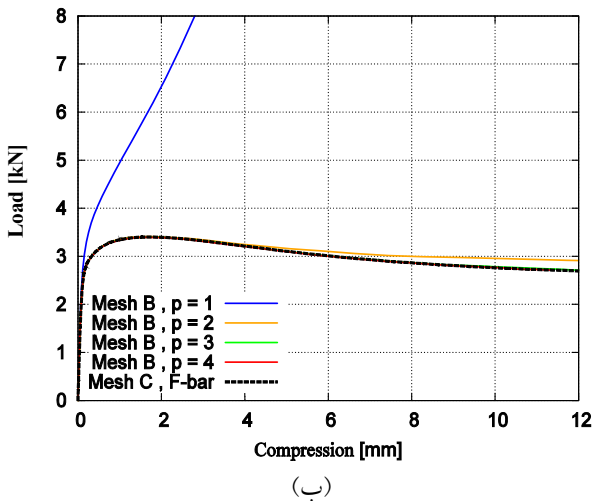
مسئله صفحه سوراخ‌دار در حالت‌های الاستیک و پلاستیک و



شکل ۱۶- مدل‌های اجزای محدود یک چهارم صفحه سوراخ‌دار: الف) مش A با ۵° المان مرتبه بالا و ب) مش C با ۲۰.۴۸ المان مرتبه پایین F-bar



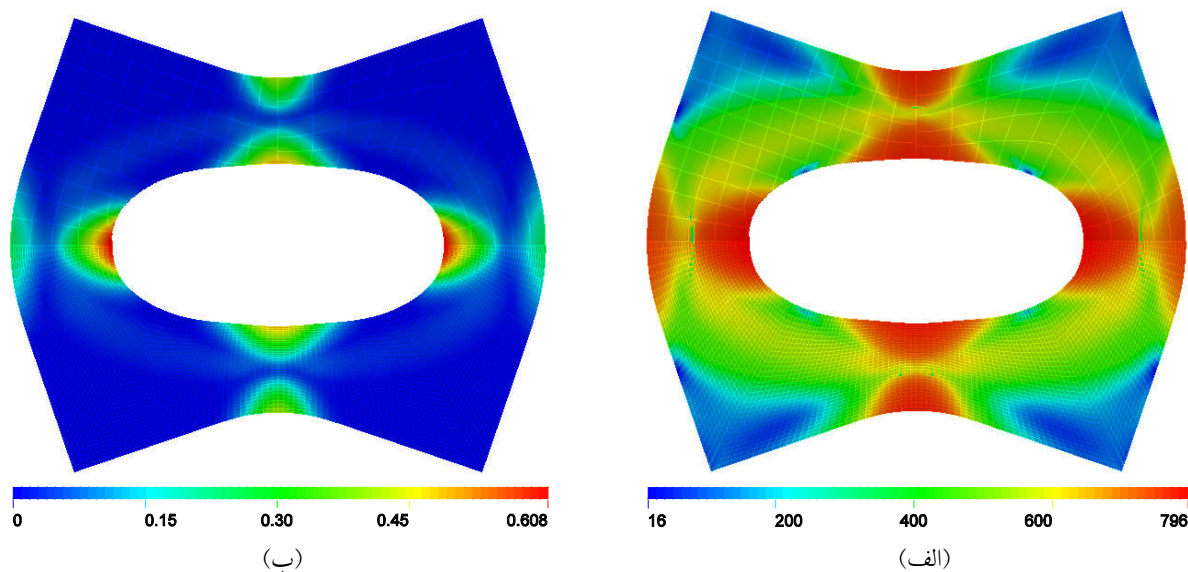
شکل ۱۷- مدل سلول محدود یک چهارم صفحه سوراخ‌دار: الف) مش B با ۷۸ سلول و ب) ساختار زیرسلولی مش B با تقسیم‌بندی تا مرتبه ششم



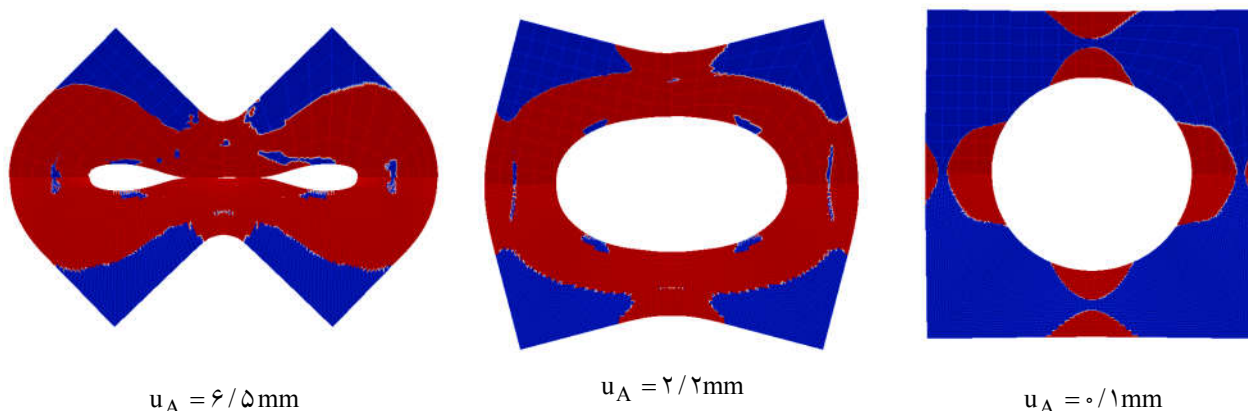
شکل ۱۸- (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار نیرو-جاب‌جایی نقطه A در فشارگذاری صفحه سوراخ‌دار: الف) تحلیل به روش اجزای محدود مرتبه بالا و ب) تحلیل به روش سلول محدود

قفل‌شدگی حجمی فائق آمد. توجه شود که وجود یک قله ماکزیمم در این نمودارها لزوم استفاده از روش Arc-Length را

می‌شود. المان‌های با  $p=1$  یک رفتار سخت را پیش‌بینی می‌کنند. اما با  $p \geq 2$  می‌توان بر این سخت‌شدگی حاصل از



شکل ۱۹- (رنگی در نسخه الکترونیکی) صفحه سوراخدار تحت فشار: الف) کانتور تنش فون-میزز و ب) کانتور کرنش پلاستیک در  $u_A = 4\text{mm}$  با مش A با المانهای مرتبه بالا  $p = 6$  (بالا-راست) و مش B با سلولهای مرتبه بالا  $p = 6$  (بالا-چپ) و مش C با المانهای F-bar (نیمه پایین)



شکل ۲۰- (رنگی در نسخه الکترونیکی) صفحه سوراخدار تحت فشار: هندسه تغییر شکل یافته در طول بارگذاری با مش A با المانهای مرتبه بالا  $p = 6$  (بالا-راست) و مش B با سلولهای مرتبه بالا  $p = 6$  (بالا-چپ) و مش C با المانهای F-bar (نیمه پایین)

صفحه با چنان سوراخ بزرگی به یک قاب دو بعدی تحت فشار شباهت داشته و تغییر شکل‌های غالب، مطابق با انتظار، در اثر خمش به وجود آمده‌اند. نواحی پلاستیک و الاستیک در هر لحظه از بارگذاری به ترتیب با استفاده از رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که در این مسئله، پلاستیک‌شدگی به‌طور فراگیر اتفاق افتاده و رفته رفته غالب دامنه حل را با افزایش فشار دربرمی‌گیرد.

نشان می‌دهد. کانتورهای تنش فون-میزز و کرنش پلاستیک حل‌های مختلف در جابه‌جایی  $u_A = 4\text{mm}$  برای مدل یک چهارم صفحه سوراخدار هم در شکل (۱۹) نشان داده شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود، تطابق خیلی خوبی بین نتایج حاصل با استفاده از المانهای مرتبه بالا و پایین به دست آمده است. تغییر شکل صفحه سوراخدار در طول فشارگذاری نیز در شکل (۲۰) به نمایش درآمده است. همان‌طور که دیده می‌شود،

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، تعدادی مسئله معیار استاندارد پلاستیسیته فون-میزز کرنش بزرگ با استفاده از روش اجزای محدود مرتبه بالا و توسعه جدید آن بر مبنای رویکرد دامنه مجازی، روش سلول محدود، تحلیل شدند. اهم نتایج حاصل از این مطالعه عددی در مورد عملکرد روش‌های مذکور در تحلیل مسائل پلاستیسیته کرنش بزرگ عبارتند از:

- المان‌ها و سلول‌های مرتبه بالا بدون تغییر فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی قادر به فائق آمدن بر پدیده قفل‌شدگی حجمی هستند. بسته به نوع مسئله و تعداد و اندازه المان‌ها و سلول‌های با توابع شکل با  $P \geq 2$  این توانایی را دارند.
- المان‌ها و سلول‌های مرتبه بالا نسبت به اعوجاج‌های زیاد مقاومت بیشتری نسبت به المان‌های مرتبه پایین دارند. بدین ترتیب می‌توان مسائل پلاستیسیته را تحت تغییر شکل‌های بسیار بزرگ، بدون نیاز به مش‌بندی مجدد، تنها با یک مش تحلیل کرد.
- روش سلول محدود هندسه‌های ساده و پیچیده را به شکل یکسانی تحلیل می‌کند. بدین معنی که با این روش مرحله مش‌بندی هندسه که در مورد هندسه‌های پیچیده زمان‌بر

است، در عمل به‌سادگی تولید یک مش کارترین منظم است.

- توصیه می‌شود برای تحلیل مسائل عملی پلاستیسیته از یک مش ثابت با المان‌ها یا سلول‌های با اندازه متوسط استفاده شود و همگرایی حل با افزایش درجه توابع شکل تحقیق شود. مؤلفان برآنند که به‌دنبال مطالعه عددی انجام شده در مقاله حاضر، با استفاده از مسائل معیار استاندارد، هر دو روش مورد بررسی را برای تحلیل پلاستیک مواد و سازه‌های مهندسی ساخته شده از فلزات نرم به‌کار برند. در مقاله بعدی، کاربرد روش سلول محدود برای تحلیل پلاستیسیته فلزات متخلخل و سلولی (فوم‌های فلزی) که دارای هندسه بسیار پیچیده هستند مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## تقدیر و تشکر

تحقیق حاضر نتیجه همکاری تحقیقاتی بین دانشگاه صنعتی اصفهان و دانشگاه‌های صنعتی هامبورگ و مونیخ در آلمان است. این همکاری تحت حمایت مالی موسسه‌های الکساندر فون-هومبولت<sup>۳۰</sup> و داآد<sup>۳۱</sup> قرار داشته است. مؤلفان از حمایت این مؤسسات و همچنین کمک‌های علمی همکاران تحقیقاتی خود در دانشگاه‌های صنعتی هامبورگ و مونیخ کمال تشکر را دارند.

## واژه‌نامه

- |  |                                  |   |
|--|----------------------------------|---|
| 1. locking                                   | 11. Hyperelastic                 | 24. Gauss Quadrature Rule                   |
| 2. over-stiff behavior                       | 12. Prantdl-Ruess                | 25. Cut cell                                |
| 3. isogeometric analysis                     | 13. Multiplicative Decomposition | 26. Modified/Composed Gauss Quadrature Rule |
| 4. fictitious domain                         | 14. Hencky                       | 27. Quadtree                                |
| 5. boundary conforming elements              | 15. Incremental                  | 28. Octree                                  |
| 6. generalized finite element method (gfem)  | 16. Implicit or Backward Euler   | 29. Saturation Strength                     |
| 7. extended finite element method (xfem)     | 17. Bobnov-Galerkin              | 30. Alexander von Humboldt Foundation (AvH) |
| 8. non-uniform rational basis spline (nurbs) | 18. Newton-Raphson               | 31. German Academic Exchange Service (DAAD) |
| 9. benchmark                                 | 19. Discrete Gradient            |   |
| 10. necking                                  | 20. Blending Function Method     |   |
|  | 21. Quasi Regional Mapping       |   |
|  | 22. Extended/Embedding Domain    |   |
|  | 23. Nitche Method                |   |

## مراجع

1. Szabo, B. A., and Babuska, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
2. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Zhu, J. Z., *The Finite Element Method -Its Basis and Fundamentals*,



- Vol. 1. Butterworth-Heinemann, 7th Edition, 2013.
3. Szabo, B. A., Duster, A., and Rank, E., *The p-version of the Finite Element Method*, pp. 119-139, In: Stein, E., de Borst, R., and Hughes, T. J. R., (Eds.), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Vol. 1, Chapter. 5, John Wiley & Sons, 2004.
  4. de Souza Neto, E. A., Peric, D., and Owen, D. R. J., *Computational Methods for Plasticity, Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 2008.
  5. Wriggers, P., *Nonlinear Finite-Element-Methods*, Springer-Verlag, 2008.
  6. Duster, A., Hartmann, S., and Rank, E., "p-FEM Applied to Finite Isotropic Hyperelastic Bodies", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 5147-5166, 2003.
  7. Lipton, S., Evans, J. A., Bazilevs, Y., Elguedj, T., and Hughes, T. J. R., "Robustness of Isogeometric Structural Discretizations under Severe Mesh Distortion", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 357-373, 2010.
  8. Rank, E., Broker, H., Duster, A., Krause, R., and Rucker, M., *The p-version of the Finite Element Method for Structural Problems*, pp. 263-307, In: Stein, E., (Eds.), *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*, Chapter. 8, John Wiley & Sons, 2002.
  9. Kiralyfalvi, G., and Szabo, B. A., Quasi-regional Mapping for the p-version of the Finite Element Method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 27, pp. 85-97, 1997.
  10. Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., and Bazilevs, Y., *Isogeometric Analysis: Towards Integration of CAD and FEM*, John Wiley & Sons, 2009.
  11. Szabo, B. A., and Babuska, I., *Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification, and Validation*, Wiley-Blackwell, 2011.
  12. Krause, R., Mucke, R., and Rank, E., "hp-version Finite Elements for Geometrically Nonlinear Problems", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 887-897, 1995.
  13. Yosibash, Z., and Priel, E., "High-order Fems for Thermoelasticity at Finite Strains", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 67, pp. 477-496, 2014.
  14. Yosibash, Z., Weissa, D., and Hartmann, S., "p-fems for Hyperelastic Anisotropic Nearly Incompressible Materials under Finite Deformations with Applications to Arteries Simulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 88, pp. 1152-1174, 2011.
  15. Netz, T., Duster, A., and Hartmann, S., "High-order Finite Elements Compared to Low-order Mixed Element Formulations", *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 93, No. 2-3, pp. 163-176, 2013.
  16. Babuska, I., and Suri, M., "On Locking and Robustness in the Finite Element Method", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 29, pp. 1261-1293, 1992.
  17. Suri, M., "Analytical and Computational Assessment of Locking in the hp Finite Element Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 133, pp. 347-371, 1996.
  18. Heisserer, U., Hartmann, S., Duster, A., and Yosibash, Z., "On Volumetric Locking-free Behavior of p-version Finite Elements under Finite Deformations", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 1019-1032, 2008.
  19. Holzer, S., and Yosibash, Z., "The p-version of the Finite Element Method in Incremental Elasto-plastic Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 1859-1878, 1996.
  20. Szabo, B. A., Actis, R., and Holzer, S., *Solution of Elastic-plastic Stress Analysis Problems by the p-version of the Finite Element Method*, pp. 395-416, In: Babuska, I., and Flaherty, J., (Eds.), *Modeling, Mesh Generation, and Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 75, Springer, NewYork, 1995.
  21. Duster, A., and Rank, E., "The p-version of the Finite Element Method Compared to an Adaptive h-version for the Deformation Theory of Plasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 1925-1935, 2001.
  22. Duster, A., and Rank, E., "A p-version Finite Element Approach for Two- and Three-dimensional Problems of the  $J_2$  Flow Theory with Non-linear Isotropic Hardening", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 49-63, 2002.
  23. Duster, A., Niggel, A., Nubel, V., and Rank, E., "A Numerical Investigation of High-order Finite Elements for Problems of Elastoplasticity", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 17, pp. 429-437, 2002.
  24. Tin-Loi, F., and Ngo, N. S., "Performance of the p-version Finite Element Method for Limit Analysis", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, pp. 1149-1166, 2003.
  25. Tin-Loi F., and Ngo, N. S., "Performance of a p-Adaptive Finite Element Method for Shakedown Analysis", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, pp. 1166-1178, 2007.
  26. Heisserer, U., Hartmann, S., Duster, A. D., Bier, W., Yosibash, Z., and Rank, E., "p-fem for Finite Deformation Powder Compaction", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 727-740, 2008.
  27. Yosibash, Z., Hartmann, S., Heisserer, U., Duster, A., Rank, E., and Szanto, M., "Axisymmetric Pressure Boundary Loading for Finite Deformation

- Analysis using p-FEM”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 1261-1277, 2007.
28. Parvizian, J., Duster, A., and Rank, E. “Finite Cell Method - h- and p-extension for Embedded Domain Problems in Solid Mechanics”, *Computational Mechanics*, Vol. 41, pp. 121-133, 2007.
  29. Duster, A., Parvizian, J., Yang, Z., and Rank, E., “The Finite Cell Method for Three-dimensional Problems of Solid Mechanics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 3768-3782, 2008.
  30. Dauge, M., Duster, A., and Rank, E., “Theoretical and Numerical Investigation of the Finite Cell Method”, *Journal of Scientific Computing*, doi: 10.1007/s10915-015-9997-3, 2015.
  31. Zander, N., Bog, T., Elhaddad, M., Espinoza, R., Hu, H., Joly, A., Wu, C., Zerbe, P., Duster, A., Kollmannsberger, S., Parvizian, J., Ruess, M., Schillinger, D., and Rank, E., “FCMLab: a Finite Cell Research Toolbox for MATLAB”, *Advances in Engineering Software*, Vol. 74, pp. 49-63, 2014.
  32. Rank, E., Ruess, M., Kollmannsberger, S., Schillinger, D., and Duster, A., “Geometric Modeling, Isogeometric Analysis and the Finite Cell Method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 249-252, pp. 104-115, 2012.
  33. Schillinger, D., and Rank, E., “An unfitted hp Adaptive Finite Element Method Based on Hierarchical B-splines for Interface Problems of Complex Geometry”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, pp. 3358-3380, 2011.
  34. Schillinger, D., Ruess, M., Zander, N., Bazilevs, Y., Duster, A., and Rank, E., “Small and Large Deformation Analysis with the Pand B-spline Versions of the Finite Cell Method”, *Computational Mechanics*, Vol. 50, pp. 445-478, 2012.
  35. Abedian, A., Parvizian, J., Duster, A., and Rank, E., “The Finite Cell Method for the J2 Flow Theory of Plasticity”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 69, pp. 37-47, 2013.
  36. Abedian, A., Parvizian, J., Duster, A., and Rank, E., “Finite Cell Method Compared to h-version Finite Element Method for Elasto-plastic Problems”, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 35, No. 10, pp. 1239-1248, 2014.
  37. Ranjbar, M., Mashayekhi, M., Parvizian, J., Duster, A., and Rank, E., “Using the Finite Cell Method to Predict Crack Initiation in Ductile Materials”, *Computational Material Science*, Vol. 82, pp. 427-434, 2014.
  38. Ranjbar, M., Mashayekhi, M., Parvizian, J., Duster, A., and Rank, E., “The Finite Cell Method Applied to Nonlocal Damage Mechanics”, *World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*, Barcelona, Spain, 2014.
  39. حدادگر، ا.، مشایخی م.، و جمشید پرویزیان، ج.، “کاربرد روش سلول محدود در پیش‌بینی آسیب نرم با در نظر گرفتن اثر بسته شدن ترک‌ها”، *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، دوره ۱۴، شماره ۱۳، صص. ۱۱۸-۱۰۷.
  40. de Souza Neto, E. A., Peric, D., Dutko, M., and Owen, D. R. J., “Design of Simple Low Order Finite Elements for Large Strain Analysis of Nearly Incompressible Solids”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 3277-3296, 1996.
  41. Duster, A., Broker, H., and Rank, E., “The p-version of the Finite Element Method for Three-dimensional Curved Thin Walled Structures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 52, pp. 673-703, 2001.
  42. Ruess, M., Tal, D., Trabelsi, N., Yosibash, Z., and Rank, E., “The Finite Cell Method for Bone Simulations: Verification and Validation”, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, Vol. 11, pp. 425-437, 2012.
  43. Abedian, A., Parvizian, J., Duster, A., Khademyzadeh, H., and Rank, E., “Performance of Different Integration Schemes in Facing Discontinuities in the Finite Cell Method”, *International Journal of Computational Methods*, Vol. 10, No. 3, 1350002/1-24, 2013.
  44. Duster, A., and Kollmannsberger, S., *AdhoC 4 - User's Guide. Lehrstuhl für Computation in Engineering*, TU München, Numerische Strukturanalyse mit Anwendungen in der Schiffstechnik, TU Hamburg-Harburg, 2010.
  45. <http://www.pardiso-project.org/>.
  46. <http://www.paraview.org/>.
  47. Simo J. C., and Miehe, C., “Geometrically Non-linear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 98, pp. 41-104, 1992.
  48. de Souza Neto, E. A., Peric, D., Dutko, M., and Owen, D. R. J., “Design of Simple Low Order Finite Elements for Large Strain Analysis of Nearly Incompressible Solids”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 3277-3296, 1996.
  49. Elguedj, T., and Hughes, T. J. R., “Isogeometric Analysis of Nearly Incompressible Large Strain Plasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 268, pp. 388-416, 2014.
  50. Crisfield, M. A., “A Fast Incremental/iterative Solution Procedure that Handles snap-through”, *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 55-62, 1981.