

## بررسی کمانش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای ضخیم بر اساس تئوری زیگزاگ و تئوری برشی مرتبه سه به روش نوار محدود

حجت اله تنزاده و حسین عموشاهی\*

دانشکده مهندسی عمران و حمل و نقل، گروه مهندسی عمران، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۱۱/۲۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۰۲/۲۰)

**چکیده-** در این مقاله به بررسی چگونگی استفاده از روش نوار محدود در تحلیل ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای ضخیم پرداخته می‌شود. در این روش، از توابع مثلثاتی در جهت طولی نوارها برای شرایط مرزی مفصلی و از توابع هرمیتی و لاگرانژی در جهت عرضی استفاده شده است. تحلیل حاضر بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی و تئوری زیگزاگ مرتبه بالای چوانجام شده است. از مفهوم کار مجازی برای استخراج ماتریس‌های سختی و هندسی استفاده و به کمک روش نوار محدود این ماتریس‌ها گسسته‌سازی شده‌اند. در ادامه به بررسی نتایج حاصل از کمانش ورق‌های تک‌لایه و چندلایه برای انواع شرایط مرزی، نسبت ابعاد به ضخامت، نسبت مدول الاستیسیته و زاویه الیاف مختلف پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کمانش، ورق کامپوزیت لایه‌ای، تئوری زیگزاگ، تئوری برشی مرتبه سوم ردی، روش نوار محدود.

## Buckling of Thick Laminated Composite Plates Based on Zigzag and Third order Shear Deformation Theories using the Finite Strip Method

H. Tanzadeh and H. Amoushahi\*

Department of Civil and Transportation Engineering, University of Isfahan, Iran.

**Abstract:** *A semi-analytical finite strip method was developed for the buckling analysis of laminated composite plates based on zigzag and third order shear deformation theories. The displacement functions of the plates were evaluated using a continuous harmonic function series in the longitudinal direction that satisfied the simply supported boundary conditions and a piecewise interpolation polynomial in the transverse direction. By considering the displacement-strain relations and strain-stress relations, the standard and geometric matrices were evaluated using the virtual work principle. The numerical results related to the buckling of single-layer and multi-layer plates were presented based on two different plate theories. The effects of different*

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: h.amoushahi@eng.ui.ac.ir

boundary conditions, length to thickness ratio, fiber orientation and modulus of elasticity were also investigated through numerical examples.

**Keywords:** Buckling, Laminated Composite Plates, Zigzag Theory, Third order Shear Deformation Plate Theory, Finite Strip Method.

## فهرست علائم

ماتریس کرنش‌های خمشی و برشی برحسب توابع شکل	$B^s$ و $B^b$	طول ورق	a
ماتریس مربوط به اثر کمانش برحسب توابع شکل با توجه به مشتقات نسبت به $x, y$ و $z$	$B^w$ و $B^v$ , $B^u$	ماتریس‌های حاصل از انتگرال صلبیت خمشی نسبت به ضخامت برای سختی استاندارد	$(A_{ij}^b, B_{ij}^b, \dots, Z_{ij}^b)$
ضرائب وابسته به مشخصات لایه‌ها در تئوری زیگزاگ	$[C_1]_k$ و $[C_2]_k$	ماتریس‌های حاصل از انتگرال صلبیت برشی نسبت به ضخامت برای سختی استاندارد	$(A_{ij}^s, \dots, J_{ij}^s)$
بار بحرانی کمانش	$N_{cr}$	ماتریس‌های حاصل از انتگرال ماتریس ضرائب نیرویی نسبت به ضخامت برای سختی هندسی برای مشتق نسبت به $x$	$(A_{ij}^{gu}, B_{ij}^{gu}, \dots, J_{ij}^{gu})$
نیروهای اعمالی درون صفحه	$n_{xy}$ و $n_y, n_x$	ماتریس‌های حاصل از انتگرال ماتریس ضرائب نیرویی نسبت به ضخامت برای سختی هندسی برای مشتق نسبت به $y$	$(A_{ij}^{gv}, B_{ij}^{gv}, \dots, J_{ij}^{gv})$
ماتریس صلبیت خمشی و برشی ورق	$S_s$ و $S_b$	ماتریس‌های حاصل از انتگرال ماتریس ضرائب نیرویی نسبت به ضخامت برای سختی هندسی برای مشتق نسبت به $z$	$A_{ij}^{gw}$
توابع شکل هرمیتی	$W_i, R_i$	عرض نوار	b
مؤلفه جابه‌جایی در راستای محور $x, y$ و $z$	$w$ و $v, u$		
کار مجازی داخلی و خارجی	$W_{ext}^c$ و $W_{int}^c$		
توابع شکل مثلثاتی	$Y_{1m}$ و $Y_{2m}$		
مؤلفه چرخش‌های برشی در راستای محور $y$ و $x$	$\gamma_y$ و $\gamma_x$		
بردار کرنش برشی	$\gamma$		

## ۱- مقدمه

در پیش‌بینی پاسخ سازه‌های آنها دارد. بدین ترتیب توسعه مدل ریاضی دو بعدی مناسب به منظور ارائه رفتار ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای توجه زیادی را به خود معطوف کرده است. به منظور حل چنین مسائلی روش‌های حل و تئوری‌های مختلف به مرور زمان ارائه شدند به نحوی که شناخت این تئوری‌ها باعث بهبود و دقت در روند حل و همچنین نتایج می‌شود. در تحقیق پیش رو حل مسئله کمانش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای به روش نوار محدود انجام می‌گیرد که به عنوان یکی از روش‌های عددی از محبوبیت زیادی در بین مهندسان برخوردار است.

تئوری‌های تغییر شکل برشی ورق می‌توانند به تئوری‌هایی

ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای در صنایع حساس و مهمی همچون هوافضا، تجهیزات دریایی و همچنین ساخت و سازه‌های مهندسی عمران و مکانیک به دلیل نسبت سختی و مقاومت به وزن بالا، توانایی جذب انرژی بالا و انعطاف در طراحی‌ها نسبت به مصالح سنتی رشد قابل توجهی پیدا کردند. بنابراین ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای و کاربردهای آن در صنایع مختلف می‌توانند موضوع قابل توجهی باشند. مواد کامپوزیت خصوصیات مطلوب فراوانی دارند که مسائل چالش برانگیزی را نیز در رفتار سازه‌هایشان به وجود می‌آورند. بنابراین مطالعات مربوط به کمانش ساختار این گونه مواد، اهمیت مهم و اساسی

بر اساس جابه‌جایی و یا تنش دسته‌بندی شوند. رایسنر [۱] و میندلین [۲] تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را که به‌عنوان تئوری ورق رایسنر- میندلین نیز شناخته می‌شد، توسعه دادند. این تئوری بار کمانش و ارتعاش آزاد را بیشتر از مقادیر حقیقی تخمین می‌زند و این بدان علت بود که کرنش برشی عرضی در ضخامت ورق را ثابت در نظر می‌گرفت و تئوری برشی مرتبه اول نیاز به یک ضریب اصلاح برش به‌منظور جبران تغییرات سهموی واقعی تنش برشی داشت که این ضریب بر اساس پارامترهای هندسی، بارگذاری و شرایط مرزی تغییر می‌کرد و همین امر سبب می‌شد تا نتوان به‌راحتی برای هر مسئله آن را محاسبه کرد. به‌منظور غلبه بر مشکل بالا یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا توسط ردی [۳] در سال‌های ۱۹۸۴ و ۱۹۸۵ ارائه شد که در آن علاوه بر در نظر گرفتن تغییر شکل برشی عرضی در راستای ضخامت تغییرات، آن را به‌صورت سهمی در نظر می‌گرفت و تنش‌های برشی عرضی در سطوح بالایی و پایینی ورق صفر در نظر گرفته می‌شد. در نتیجه دیگر نیازی به استفاده از ضریب اصلاح برش در محاسبه انرژی کرنشی برشی نبود. بر اساس این تئوری، حل‌های تحلیلی برای ورق‌های لایه‌ای با لایه‌های متعامد و مورب نامتقارن با شرایط تکیه‌گاهی مفصلی به‌دست آمد. در این تئوری تعداد درجات آزادی همانند تئوری برشی مرتبه اول است اما نتایج دقیق‌تری نسبت به تئوری قبل می‌دهد.

تئوری‌های فوق نتایج مناسبی را برای پاسخ‌های کلی سازه همچون فرکانس ارتعاشی و بار بحرانی کمانش ارائه می‌کنند، اما به‌دلیل عدم پیوستگی تنش‌های برشی در این تئوری‌ها، تئوری لایه مجزا به‌منظور غلبه بر این موضوع ارائه شد که مجهولاتی را برای بیان تغییر شکل برشی در هر لایه به‌منظور نمایش پاسخ محلی لایه‌ها به‌صورت دقیق‌تر و با نتایج بهتر استفاده می‌کرد. اما این تئوری علی‌رغم اینکه دقت خوبی در محاسبات خود داشت ولی در صورت تمرکز بر رفتار کلی سازه‌ها، استفاده از تئوری لایه مجزا به‌منظور تحلیل رفتار کلی معمولاً نیاز به تلاش‌های محاسباتی بیشتری نسبت به تئوری تک‌لایه معادل

داشت. به این دلیل که تعداد درجات آزادی به‌کار برده شده در تئوری لایه مجزا با تعداد لایه‌ها افزایش می‌یافت. به همین منظور تئوری زیگزگانه ارائه شد، که در این تئوری با وجود اینکه شرایط پیوستگی تنش بین لایه‌ها و شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی در سطوح بالا و پایین ورق را ارضا می‌کرد، مجهولات جابه‌جایی مستقل از تعداد لایه‌ها بودند. بدین ترتیب چو [۴] در سال ۱۹۹۳ از جمله کسانی بود که تئوری با نام تئوری زیگزگانه مرتبه بالا ارائه داد. به‌طوری‌که متغیر خطی زیگزگانه به میدان جابه‌جایی مرتبه سه برای جابه‌جایی‌های درون صفحه اضافه کرد. در این تئوری قسمت مرتبه سه مشابه تئوری ردی، به‌منظور نمایش میدان جابه‌جایی رفتار کلی لایه‌ها و قسمت زیگزگانه، رفتار بین لایه‌ها را در راستای برآورده کردن پیوستگی تنش برشی در نظر می‌گرفت. لازم به ذکر است که تعداد مجهولات جابه‌جایی در تئوری تغییر شکل زیگزگانه استفاده شده با تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم برابر بود و بنابراین هزینه محاسباتی تحلیل ورق‌های کامپوزیت در مقایسه با این دو نوع تئوری افزایش نمی‌یافت.

شو و سان [۵] در سال ۱۹۹۴ یک تئوری برشی مرتبه بالاتر ساده بهبود یافته برای تغییر مکان ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای در نظر گرفتند. در این تئوری تعداد متغیرهای وابسته با تئوری برشی مرتبه اول برابر بود و علاوه بر آنکه توزیع سهموی برای کرنش‌های برشی عرضی<sup>۱</sup> در راستای ضخامت در نظر می‌گرفت یک پیوستگی بین تنش‌های برشی عرضی در بین لایه‌ها ایجاد می‌کرد. فارس و زنکور [۶] در سال ۱۹۹۹ تئوری‌های مختلف ورق‌های لایه‌ای همگن را به‌منظور مطالعه رفتار کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی لایه‌ای ناهمگن مورد مطالعه قرار دادند. آنها معادلات حاکم بر پاسخ دینامیکی ورق‌های لایه‌ای ناهمگن را بر اساس یک تئوری مرتبه بالای سازگار در حالت کلی استخراج کردند به‌طوری‌که این معادلات بر اساس هر تئوری مرتبه پایین‌تر نیز قابل به‌دست آوردن بودند. تپدار و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۳ یک مدل اجزا محدود برای آنالیز

ورق‌های کامپوزیت و ساندویچی توسعه دادند. مدل آنها بر اساس یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای اصلاح شده بود که شرایط صفر بودن تنش برشی در بالا و پایین سطح ورق و پیوستگی تنش‌های برشی در بین لایه‌ها را ارضا می‌کرد. در این تئوری تعداد مجهولات به تعداد لایه‌ها وابسته نبوده و همانند تئوری‌های تک‌لایه معادل<sup>۲</sup> تعداد مجهولات نسبت به صفحه میانی محاسبه می‌شدند. بنابر این تئوری، هم شرایط تک‌لایه معادل را شامل می‌شد و هم بر اساس مفهوم تئوری لایه مجزای ورق بود. آنها برای پیاده‌سازی اجزاء محدود این تئوری ورق، یک المان مستطیلی چهار گرهی به کار بردند. زنگور [۸] در سال ۲۰۰۴ از یک تئوری یکپارچه ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای که شامل تئوری کلاسیک، برشی مرتبه اول، مرتبه سوم و تئوری برشی با تابع سینوسی می‌شد، به منظور بررسی پاسخ خمشی ورق‌های لایه‌ای تحت یک بار مکانیکی عرضی، توزیع شده به صورت سینوسی و تحت یک دما با توزیع غیر یکنواخت سینوسی استفاده کرد و حل تحلیلی را برای ورق‌های لایه‌ای با تکیه‌گاه مفصلی با استفاده از حل ناویر و تکنیک جداسازی متغیرها توسعه داد. ژونگ و گيو [۹] در سال ۲۰۰۷ حل دقیقی به منظور بررسی رفتار کمانش ورق‌های مستطیلی با لایه‌های متقارن و با الیاف متعامد و شرایط تکیه‌گاهی مفصلی در معرض بارهای درون صفحه با تغییرات خطی و در یک راستا و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول ارائه کردند. کلکارنی و کپوریا [۱۰] در سال ۲۰۰۸ با استفاده از یک المان چهار ضلعی به کمک روش اجزاء محدود و بر اساس تئوری مرتبه بالاتر زیگزاگ، ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای با الیاف متعامد و مورب ورق‌های مایل و ورق‌های ساندویچی را بررسی کردند. کیم و همکاران از دو نوع تئوری اصلاح شده ورق<sup>۳</sup> در سال ۲۰۰۹ برای بررسی تغییر مکان و کمانش [۱۱] و در سال ۲۰۱۰ برای ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای [۱۲]، با ترکیب لایه‌های نامتقارن و با الیاف متعامد و مورب به کمک حل ناویر استفاده کردند. سورش کومار و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۱ پارامترهای ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌ای مختلف را برای ورق‌های لایه‌ای

با الیاف متعامد و مورب تحت یک نوع شرایط مرزی با تکیه‌گاه مفصلی مشخص و بر اساس مدل جابه‌جایی برشی مرتبه بالاتر همراه با تابع زیگزاگ بررسی کردند که این تابع ناپوستگی شیب در میان لایه‌های ورق کامپوزیت را بهبود می‌بخشید. آنها توابع مرتبط را با استفاده از حالت دینامیکی اصل کار مجازی و یا اصل همیلتون و به کمک حل ناویر و روش‌های عددی به دست آوردند. سوهو و سینگ [۱۴] در سال ۲۰۱۳ یک تئوری زیگزاگ با تابع معکوس مثلثاتی با یک المان چهارضلعی هشت گرهی با هفت درجه آزادی بر هر گره، برای آنالیز استاتیکی ورق‌های لایه‌ای و ساندویچی ارائه دادند. در آن تئوری فرض می‌شد که میدان جابه‌جایی مرتبه بالا در راستای ضخامت ورق، شرایط پیوستگی میان لایه‌ها و همچنین صفر بودن تنش‌های برشی عرضی در سطوح بالا و پایین ورق را ارضا می‌کند. سیاد و گیوگل در سال ۲۰۱۴ از تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی تک‌لایه معادل به منظور در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی و اثر کرنش نرمال جانبی<sup>۴</sup> ( $\epsilon_z$ )، برای تحلیل خمشی ورق‌های لایه‌ای و ساندویچی با ترکیب الیاف با جهت‌گیری متعامد [۱۵] و برای کمانش ورق‌های مستطیلی لایه‌ای با الیاف متقارن و با جهت‌گیری متعامد و همچنین ورق‌های ایزوتروپیک، ایزوتروپیک عرضی و ارتوتروپیک تحت بارهای درون صفحه در یک و دو راستا [۱۶] استفاده کردند. ایشان معادلات حاکم و شرایط مرزی را با استفاده از اصل کار مجازی و حل تحلیلی ناویر به دست آورده و تابع کسینوس را در راستای مؤلفه ضخامت در جابه‌جایی عرضی به منظور در نظر گرفتن اثر کرنش نرمال جانبی استفاده کردند. به عبارت دیگر ایشان یک جمله به مؤلفه تغییر مکان  $w$  در راستای ضخامت با تغییرات تابع کسینوسی راستای ضخامت، اضافه کردند تا به کمک آن بتوانند اثرات تغییرات  $\epsilon_z$  را در محاسبه تغییر شکل جانبی ارزیابی کنند.

در بخش دوم تحقیق پیش رو سینماتیک تغییر شکل ورق بر اساس دو تئوری مذکور بیان شده و روابط مربوط به کمانش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای با استفاده از اصل کار مجازی و به کمک روش عددی نوار محدود استخراج شده است. در بخش

سوم نتایج حاصل از کمانش ورق تحت شرایط مرزی، نسبت بعد به ضخامت، ترکیب لایه و زوایای مختلف الیاف ارائه شده است و در نهایت در بخش چهارم جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از تحقیق پیش رو ذکر شده است.

## ۲- استخراج روابط

تحلیل حاضر بر اساس تئوری لایه‌ای زیگزاگ مرتبه بالای چو<sup>۵</sup> و تئوری برشی مرتبه سوم ردی<sup>۶</sup> بیان شده است. بر اساس این دو تئوری جابه‌جایی‌های  $u$ ،  $v$  و  $w$  در هر نقطه‌ای از  $(z, y, x)$  لایه‌ها، با جابه‌جایی‌های صفحه میانی ارتباط دارند. میدان جابه‌جایی بر اساس تئوری زیگزاگ بدین گونه است:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + [\mathbf{F}(z)] \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}; \\ [\mathbf{F}(z)] &= \begin{bmatrix} F(z)_{11} & F(z)_{12} \\ F(z)_{21} & F(z)_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$$w = w_0(x, y)$$

در رابطه فوق،  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب جابه‌جایی در راستای محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  و در زمان مشخصی هستند که  $z$  محور عمود بر صفحه ورق و در راستای ضخامت آن است. در واقع هدف اصلی بررسی ورق‌ها تحت شرایطی است که بارهای وارده جابه‌جایی‌های بزرگی در ورق ایجاد نکنند.  $[\mathbf{F}(z)]$  یک ماتریس  $2 \times 2$  است که تغییرات تغییر شکل برشی در ضخامت ورق را نشان می‌دهد. تئوری زیگزاگ چو، یک تغییر خطی زیگزاگ برای جابه‌جایی درون صفحه روی یک میدان جابه‌جایی با تغییرات مرتبه سه فرض می‌کند که این امر موجب توزیع پیوسته تنش‌های برشی عرضی در راستای ضخامت ورق می‌شود.  $[\mathbf{F}(z)]_k$  بر اساس این تئوری فرم پیچیده‌ای مطابق رابطه (۲) پیدا می‌کند [۱۷]:

$$[\mathbf{F}(z)]_k = [\mathbf{F}_1]_k + z[\mathbf{F}_2]_k + z^2[\mathbf{F}_3]_k + z^3[\mathbf{F}_4]_k \quad (2)$$

که در آن اندیس  $k$  نشان‌دهنده شماره لایه است و  $[\mathbf{F}_1]_k$ ،  $[\mathbf{F}_2]_k$ ،  $[\mathbf{F}_3]_k$  و  $[\mathbf{F}_4]_k$  بر اساس خصوصیات مواد و ضخامت لایه‌ها به فرم زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_1]_k &= \nu \left[ h[\mathbf{C}_1]_N + \nu[\mathbf{C}_\nu]_N \right]^{-1} [\mathbf{C}_\nu]_N / h \\ [\mathbf{F}_2]_k &= -\nu \left[ h[\mathbf{C}_1]_N + \nu[\mathbf{C}_\nu]_N \right]^{-1} [\mathbf{C}_1]_N / \nu h \\ [\mathbf{F}_3]_k &= \nu \left( [\mathbf{Q}_{sk}]^{-1} [\mathbf{C}_1]_k - z_k [\mathbf{I}] \right) [\mathbf{F}_\nu] + \\ &\quad \nu \left( \nu \left( [\mathbf{Q}_{sk}]^{-1} [\mathbf{C}_\nu]_k - z_k^2 [\mathbf{I}] \right) [\mathbf{F}_\nu] \right) \\ [\mathbf{F}_4]_k &= \sum_{l=2}^k z_{l-1} \left( [\mathbf{F}_\nu]_{l-1} - [\mathbf{F}_\nu]_l \right) - \\ &\quad \sum_{l=2}^m z_{l-1} \left( [\mathbf{F}_\nu]_{l-1} - [\mathbf{F}_\nu]_l \right) \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $h$  ضخامت ورق بوده و ماتریس‌های  $[\mathbf{C}_1]_k$  و  $[\mathbf{C}_\nu]_k$  نیز بدین صورت محاسبه می‌شوند:

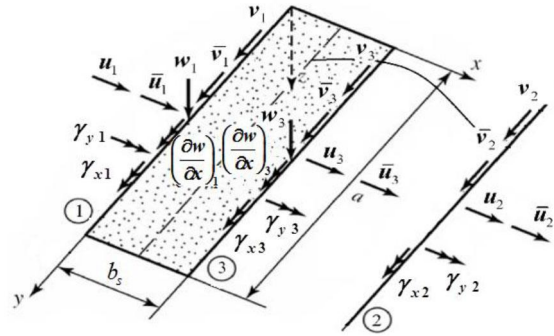
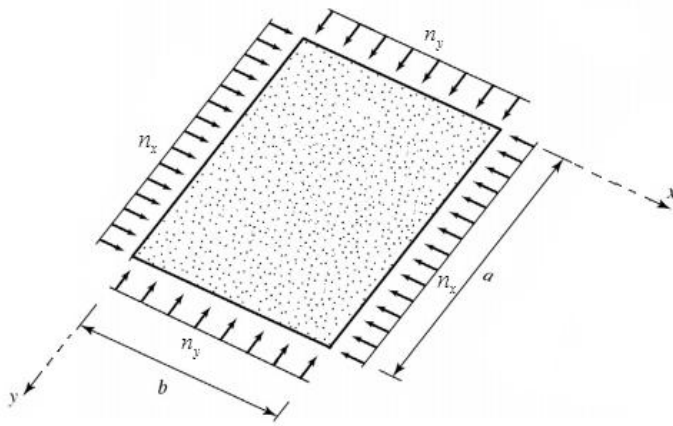
$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_1]_k &= \sum_{l=1}^k [\mathbf{Q}_{sk}] (z_l - z_{l-1}) \\ [\mathbf{C}_\nu]_k &= \sum_{l=1}^k [\mathbf{Q}_{sk}] (z_l^2 - z_{l-1}^2) \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن  $N$  تعداد لایه‌ها،  $z_k$  مختصات  $z$  در فاصله میانی بین لایه  $k$  و  $k+1$  است.  $[\mathbf{I}]$  ماتریس واحد،  $m$  شماره لایه میانی یا اولین شماره بعد از صفحه میانی، به صورتی که  $(z_m = 0 \text{ or } z_m z_{m+1} < 0)$  باشد.  $[\mathbf{Q}_{sk}]$  ماتریس سختی برشی لایه  $k$  ام نیز به صورت  $[\gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T = [\mathbf{Q}_{sk}] [\tau_{xz}, \tau_{yz}]^T$  تعریف می‌شود. از سوی دیگر ماتریس  $[\mathbf{F}(z)]$  می‌تواند بر اساس تئوری برشی ردی که در آن تغییرات کرنش‌های برشی در ضخامت ورق به صورت سهمی نشان داده شده‌اند به فرم زیر نیز بیان شود:

$$\begin{aligned} F(z)_{11} = F(z)_{22} &= z \left( 1 - \frac{\nu z^2}{3h^2} \right) \\ F(z)_{12} = F(z)_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

## ۲-۱- روش نوار محدود

طبق روش نوار محدود یک ورق کامپوزیت لایه‌ای به تعدادی نوار مطابق شکل (۱) با سه خط گرهی با فواصل یکسان مشخص شده‌اند، تقسیم می‌شوند. در این مورد جابه‌جایی‌های صفحه میانی، شامل جابه‌جایی‌های درون و بیرون از صفحه  $u$ ،  $v$  و  $w$  همچنین چرخش‌های نرمال  $\gamma_x$  و  $\gamma_y$  می‌توانند بر حسب درجات آزادی مطابق روابط (۶) تا (۱۰) بیان شوند:



شکل ۱- المان نوار محدود و درجات آزادی در خطوط گره‌ای یک المان

$$\begin{aligned} N_i(x) &= 1 - \frac{x}{b_s} + \frac{x^2}{b_s^2} \\ N_r(x) &= \frac{x}{b_s} - \frac{x^2}{b_s^2} \\ N_r(x) &= \frac{x^2}{b_s^2} - \frac{x}{b_s} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{cases} W_i(x) = 1 - \frac{x}{b_s} + \frac{x^2}{b_s^2}, & R_i(x) = -x + \frac{x^2}{b_s} - \frac{x^3}{b_s^2} \\ W_r(x) = \frac{x}{b_s} - \frac{x^2}{b_s^2}, & R_r(x) = \frac{x^2}{b_s} - \frac{x^3}{b_s^2} \end{cases} \quad (12)$$

در روابط فوق  $b_s$  عرض نوار است. بردار درجات آزادی مربوط به یک المان نوار محدود با بردار  $\Delta_m$ ، که در آن  $m$  تعداد هارمونیک‌ها (مودها) است و به تعداد  $r$  و برای مقادیر مختلف  $m = 1 \sim r$  نوشته می‌شود، مطابق رابطه (۱۳) نمایش داده می‌شود:

$$\Delta_m = [\Delta_{1m} \quad \Delta_{2m} \quad \Delta_{3m}]^T \quad (13)$$

هر یک از بردارهای  $\Delta_m$ ،  $\Delta_{2m}$  و  $\Delta_{3m}$  در رابطه (۱۳) به فرم زیر نوشته می‌شوند که بر اساس تئوری‌های برشی مرتبه بالای زیگزاگ و تئوری برشی مرتبه سوم ردی، بردار درجات آزادی برای یک المان با سه خط گرهی مطابق رابطه (۱۴) است:

$$\begin{cases} \Delta_{1m} = \left[ u_1 \quad \bar{u}_1 \quad v_1 \quad \bar{v}_1 \quad w_1 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \quad \gamma_{x1} \quad \gamma_{y1} \right]_m^T \\ \Delta_{2m} = \left[ u_2 \quad \bar{u}_2 \quad v_2 \quad \bar{v}_2 \quad w_2 \quad \gamma_{x2} \quad \gamma_{y2} \right]_m^T \\ \Delta_{3m} = \left[ u_3 \quad \bar{u}_3 \quad v_3 \quad \bar{v}_3 \quad w_3 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \quad \gamma_{x3} \quad \gamma_{y3} \right]_m^T \end{cases} \quad (14)$$

$$u_o = \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^r [N_i(x) Y_{im}(y) u_{im} + N_i(x) Y_{im}(y) \bar{u}_{im}] \quad (6)$$

$$v_o = \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^r [N_i(x) Y_{im}(y) v_{im} + N_i(x) Y_{im}(y) \bar{v}_{im}] \quad (7)$$

$$w_o = \sum_{m=1}^r \sum_{i=1,2,3} [W_i(x) Y_{im}(y) w_{im} + R_i(x) Y_{im}(y) (\partial w / \partial x)_{im}] \quad (8)$$

$$\gamma_x = \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^r N_i(x) Y_{im}(y) \gamma_{xim} \quad (9)$$

$$\gamma_y = \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^r N_i(x) Y_{im}(y) \gamma_{yim} \quad (10)$$

در روابط فوق  $u_o$  و  $v_o$  جابه‌جایی‌های درون صفحه ورق در نقطه  $(x, y, 0)$  روی میان صفحه،  $w_o$  تغییر مکان ورق که فرض می‌شود در راستای ضخامت ثابت است،  $\gamma_x$  و  $\gamma_y$  چرخش‌های عمود به صفحه میانی به ترتیب حول محورهای  $X$  و  $Y$  ورق بوده و  $Y_{im}$  و  $Y_{im}$  به ترتیب  $\sin(m\pi y/a)$  و  $\cos(m\pi y/a)$  هستند که در آنها  $a$  طول نوار و مطابق شکل (۱) است.

برای جابه‌جایی‌های درون صفحه  $u_o$  و  $v_o$  و چرخش‌های  $\gamma_x$  و  $\gamma_y$  از توابع شکل لاگرانژ مطابق رابطه (۱۱) و برای جابه‌جایی برون صفحه ورق  $w_o$  از توابع هریمیتی مطابق رابطه (۱۲) استفاده شده است:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{bmatrix}^T + z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T + F(z)_{\gamma_{11}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \end{bmatrix}^T + F(z)_{\gamma_{22}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} & \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \end{bmatrix}^T + F(z)_{\gamma_{12}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

$$\gamma = \frac{\partial F(z)_{\gamma_{11}}}{\partial z} \begin{bmatrix} \gamma_x \end{bmatrix}^T + \frac{\partial F(z)_{\gamma_{22}}}{\partial z} \begin{bmatrix} \gamma_y \end{bmatrix}^T + \frac{\partial F(z)_{\gamma_{12}}}{\partial z} \begin{bmatrix} \gamma_x \end{bmatrix}^T + \frac{\partial F(z)_{\gamma_{21}}}{\partial z} \begin{bmatrix} \gamma_y \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

که می‌توان آن را به فرم زیر نمایش داد:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + z \kappa + F(z)_{\gamma_{11}} \chi_a + F(z)_{\gamma_{22}} \chi_b + F(z)_{\gamma_{12}} \chi_c + F(z)_{\gamma_{21}} \chi_d \quad (21)$$

$$\gamma = \frac{\partial F(z)_{\gamma_{11}}}{\partial z} \gamma_a + \frac{\partial F(z)_{\gamma_{22}}}{\partial z} \gamma_b + \frac{\partial F(z)_{\gamma_{12}}}{\partial z} \gamma_c + \frac{\partial F(z)_{\gamma_{21}}}{\partial z} \gamma_d \quad (22)$$

بردار کرنش خمشی و برشی بر اساس تئوری زیگزاک و به کمک روش نوار محدود را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa \\ \chi_a \\ \chi_b \\ \chi_c \\ \chi_d \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_m^{b-\varepsilon} \\ \mathbf{B}_m^{b-\kappa} \\ \mathbf{B}_m^{b-\chi_a} \\ \mathbf{B}_m^{b-\chi_b} \\ \mathbf{B}_m^{b-\chi_c} \\ \mathbf{B}_m^{b-\chi_d} \end{Bmatrix} \Delta_m = \mathbf{B}^b \Delta \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \\ \gamma_c \\ \gamma_d \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_m^{s-\gamma_a} \\ \mathbf{B}_m^{s-\gamma_b} \\ \mathbf{B}_m^{s-\gamma_c} \\ \mathbf{B}_m^{s-\gamma_d} \end{Bmatrix} \Delta_m = \mathbf{B}^s \Delta \quad (24)$$

که در آن هر یک از بردارهای  $\mathbf{B}_m^{b-\varepsilon}$ ،  $\mathbf{B}_m^{b-\kappa}$ ،  $\mathbf{B}_m^{b-\chi_a}$ ،  $\mathbf{B}_m^{s-\gamma_b}$  و ... از سه بردار دیگر تشکیل شده‌اند که هر کدام مربوط به یک خط گرهی در المان نوار محدود بوده و مطابق روابط زیر

در رابطه فوق  $u_i$  و  $\bar{u}_i$  بردار درجات آزادی درون صفحه در راستای محور  $x$ ، و  $v_i$  و  $\bar{v}_i$  بردار درجات آزادی درون صفحه در راستای محور  $y$  هستند که اختلاف فاز  $90^\circ$  درجه‌ای با هم دارند. همچنین درجه آزادی  $u_i$  با  $\bar{u}_i$  همچنین  $v_i$  با  $\bar{v}_i$  نیز اختلاف فاز  $90^\circ$  درجه‌ای با یکدیگر دارند.  $w_i$  و  $(\partial w / \partial x)_i$  به ترتیب بردار درجات آزادی تغییر مکان و چرخش برون صفحه و  $\gamma_{xi}$  و  $\gamma_{yi}$  بردار درجات آزادی مربوط به چرخش‌های عمود به صفحه میانی به ترتیب حول محورهای  $y$  و  $x$  هستند.

نهایتاً بردار درجات آزادی مربوط به یک نوار و به تعداد  $r$  هارمونیک به صورت رابطه (15) تعریف می‌شود:

$$\Delta = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_r]^T \quad (15)$$

برای ورق لایه‌ای با دو تکیه‌گاه روبه‌روی هم با تکیه‌گاه مفصلی، شرایط مرزی در هر دو انتهای نوار، بر اساس تئوری‌های مذکور مطابق رابطه (16) تعریف می‌شود:

$$w = \gamma_x = 0, \quad M_y = 0, \quad N_y = N_{xy} = 0; \quad y = 0, \quad y = a \quad (16)$$

برای بررسی رفتار مکانیکی یک سیستم لازم است در ابتدا مقادیر تنش و کرنش سازه مرتبط با تغییر شکل‌های مورد نظر تعریف شوند. بنابراین مقادیر کرنش‌ها بایستی به گونه‌ای منظور شوند که سازگار با تغییر شکل‌های مورد انتظار باشند. به همین منظور باید فرضیات اولیه به خوبی روشن شوند. در اینجا بردارهای کرنش در نظر گرفته شده برای استفاده در روابط ورق در حالت کلی و برای خمش و برش مطابق روابط (17) و (18) نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (17)$$

$$\gamma = [\gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}]^T = \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^T \quad (18)$$

کرنش‌های خمشی و برشی ایجاد شده بر اساس تئوری زیگزاک می‌توانند از قرار گرفتن رابطه (1) در روابط (17) و (18) به صورت زیر نوشته شوند:

نشان داده می‌شوند:

$$\begin{cases} \bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + \\ \quad 2(Q_{12} + 2Q_{\phi\phi}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{\phi\phi}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \\ \quad Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + \\ \quad 2(Q_{12} + 2Q_{\phi\phi}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{1\phi} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{\phi\phi}) \sin \theta \cos^3 \theta + \\ \quad (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{\phi\phi}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{2\phi} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{\phi\phi}) \sin^3 \theta \cos \theta + \\ \quad (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{\phi\phi}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{\phi\phi} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{\phi\phi}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \\ \quad Q_{\phi\phi} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \bar{Q}_{\phi\phi} = Q_{\phi\phi} \cos^2 \theta + Q_{\phi\phi} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{\phi\phi} = (Q_{\phi\phi} - Q_{\phi\phi}) \sin \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{\phi\phi} = Q_{\phi\phi} \sin^2 \theta + Q_{\phi\phi} \cos^2 \theta \end{cases} \quad (32)$$

در روابط (۳۱) و (۳۲)،  $\theta$  زاویه اندازه‌گیری شده از مختصه  $x$  (مختصات کلی) تا مختصه  $x_1$  (مختصات ماده) در خلاف جهت عقربه ساعت است. باید توجه داشت که تغییرات تنش‌ها در هر لایه مستقل از لایه دیگر بوده که دلیل آن تغییر  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  از یک لایه به لایه دیگر است. ثابت مواد در دو رابطه فوق بدین صورت بیان شده‌اند:

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{\phi\phi} = G_{12} \\ Q_{\phi\phi} = G_{23}, Q_{\phi\phi} = G_{13} \end{cases} \quad (33)$$

که در آنها،  $E_1$  و  $E_2$  مدول الاستیسیته،  $G_{12}$ ،  $G_{13}$  و  $G_{23}$  مدول برشی،  $\nu_{12}$  و  $\nu_{21}$  ضرائب پواسون هستند. اندیس‌های یک و دو به ترتیب، جهات الیاف و عمود بر آن در داخل صفحه ورق و اندیس سه جهت عمود بر صفحه ورق و خارج از صفحه را نشان می‌دهند. به عبارتی محورهای یک، دو و سه محورهای محلی لایه‌ها بر اساس جهت قرارگیری الیاف هستند.

### ۳-۲- کار مجازی

جهت استخراج ماتریس‌های سختی، هندسی و جرم از رابطه کار مجازی استفاده می‌شود. به این ترتیب که پس از درونیابی تغییر شکل‌ها، لازم است تا رابطه کار مجازی برای هر المان مطابق رابطه (۳۴) نوشته شود:

$$\mathbf{B}_m^{b-\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^{b-\alpha} & \mathbf{B}_{\nu m}^{b-\alpha} & \mathbf{B}_{\nu m}^{b-\alpha} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_m^{s-\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^{s-\beta} & \mathbf{B}_{\nu m}^{s-\beta} & \mathbf{B}_{\nu m}^{s-\beta} \end{bmatrix} \quad (26)$$

در رابطه فوق پارامتر  $\alpha$  شامل هر یک از پارامترهای  $\epsilon$ ،  $\kappa$ ،  $\gamma_a$ ،  $\gamma_b$ ،  $\gamma_c$  و  $\gamma_d$  شامل هر یک از پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  است و هر یک از ماتریس‌ها برحسب توابع مثلثاتی در راستای محور  $y$  و توابع لاگرانژ و هرمیتی در راستای محور  $x$  به صورتی که در پیوست آمده است نمایش داده می‌شوند.

### ۲-۲- روابط تنش - کرنش

گام بعدی تعیین رابطه تنش و کرنش برای مواد کامپوزیت لایه‌ای است. به همین منظور معادله بنیادین برای  $k$  امین لایه ارتوتروپیک در دستگاه مختصات ماده استخراج شده و با تبعیت از قانون هوک برای وضعیت تنش مسطح و با صرف نظر از  $\sigma_z$ ، برای دو بخش خمشی و برشی به صورت روابط (۲۷) و (۲۸) به فرم فشرده بیان می‌شود:

$$\sigma = \bar{Q}_{ij} \epsilon \quad i, j = 1, 2, \phi \quad (27)$$

$$\tau = \bar{Q}_{ij} \gamma \quad i, j = \phi, \phi \quad (28)$$

از آنجایی که ورق‌های لایه‌ای معمولاً از چندین ورق ارتوتروپیک تشکیل شده‌اند، با توجه به محورهای مواد هر لایه جهت‌گیری‌های متفاوتی را نسبت به مختصات کلی ورق دارند، بنابراین معادلات هر لایه باید به مختصات کلی  $(z, y, x)$  انتقال یابند و بدین گونه مؤلفه‌های تنش و کرنش برحسب مختصات کلی به صورت روابط (۲۹) و (۳۰) بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{1\phi} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{2\phi} \\ \bar{Q}_{1\phi} & \bar{Q}_{2\phi} & \bar{Q}_{\phi\phi} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{\phi\phi} & \bar{Q}_{\phi\phi} \\ \bar{Q}_{\phi\phi} & \bar{Q}_{\phi\phi} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (30)$$

ضرائب  $\bar{Q}_{ij}$  به کمک استفاده از ماتریس‌های دوران بدین صورت نوشته می‌شوند [۶]:



$$W_{int}^s = \frac{1}{V} \int \gamma^T \tau dV \quad (38)$$

با ترکیب رابطه (۲۲) و رابطه (۲۸) و قرار دادن هر دو رابطه در رابطه (۳۷) و انجام روند ذکر شده در محاسبه کار مجازی مربوط به خمش، کار مجازی داخلی مربوط به برش با منظم کردن بردارهای کرنش، به فرم ماتریسی زیر نشان داده می‌شود:

$$W_{int}^s = \frac{1}{V} \int \begin{bmatrix} \gamma_a^T & \gamma_b^T & \gamma_c^T & \gamma_d^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}^s & \mathbf{B}^s & \mathbf{D}^s & \mathbf{G}^s \\ & \mathbf{C}^s & \mathbf{E}^s & \mathbf{H}^s \\ & \text{sym.} & \mathbf{F}^s & \mathbf{I}^s \\ & & & \mathbf{J}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \\ \gamma_c \\ \gamma_d \end{bmatrix} dA \quad (39)$$

ماتریس‌های  $\mathbf{A}^s$ ،  $\mathbf{B}^s$  و ... در پیوست ذکر شده‌اند.

در ادامه به منظور حل مسئله کمانش نیاز به استخراج روابط کار مجازی توسط نیروهای درون صفحه است که هر یک از جزءهای کار مجازی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$W_{ext}^u = \frac{1}{V} \int \mathbf{G}_u^T \sigma \cdot \mathbf{G}_u dV \quad (40)$$

$$W_{ext}^v = \frac{1}{V} \int \mathbf{G}_v^T \sigma \cdot \mathbf{G}_v dV \quad (41)$$

$$W_{ext}^w = \frac{1}{V} \int \mathbf{G}_w^T \sigma \cdot \mathbf{G}_w dV \quad (42)$$

که در آن بردارهای  $\mathbf{G}_u$ ،  $\mathbf{G}_v$  و  $\mathbf{G}_w$  با ترکیب با رابطه (۱) برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت روابط زیر نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{G}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_s}{\partial x} & \frac{\partial u_s}{\partial y} \end{bmatrix}^T + z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^r w_s}{\partial x^r} & -\frac{\partial^r w_s}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T + F(z)_{\gamma_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \end{bmatrix}^T + F(z)_{\gamma_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (43)$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_s}{\partial x} & \frac{\partial v_s}{\partial y} \end{bmatrix}^T + z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^r w_s}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^r w_s}{\partial y^r} \end{bmatrix}^T + F(z)_{\gamma_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \end{bmatrix}^T + F(z)_{\gamma_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (44)$$

$$\delta W_{int}^e = \delta W_{ext}^e \quad (34)$$

که در این رابطه  $\delta$  عملگر تابع تغییراتی است و  $W_{int}^e$  و  $W_{ext}^e$  به ترتیب مقادیر کار انجام شده داخلی و کار انجام شده خارجی بر المان هستند که برای استخراج ماتریس‌های لازم جهت حل مسائل مختلف ورق نوشته می‌شوند. به همین منظور این بخش شامل دو زیر بخش می‌شود که در هریک از این زیر بخش‌ها به ترتیب روابط کار مجازی داخلی و کار مجازی خارجی مربوط به نیروهای اعمالی درون صفحه مربوط به تحلیل کمانش ورق‌ها بیان می‌شود. در این بخش کار مجازی داخلی شامل دو قسمت، یکی مربوط به خمش ورق و دیگری مربوط به برش می‌شود. بدین منظور می‌توان مقادیر کار مجازی داخلی سیستم را به صورت رابطه (۳۵) نوشت:

$$W_{int}^e = W_{int}^b + W_{int}^s \quad (35)$$

کار مجازی مربوط به خمش به صورت رابطه (۳۶) محاسبه می‌شود:

$$W_{int}^b = \frac{1}{V} \int \varepsilon^T \sigma dV \quad (36)$$

با ترکیب دو رابطه (۲۱) و (۲۷) قرار دادن هر دو رابطه در رابطه (۳۶) و ضرب جمله به جمله هر یک از بردارهای مربوط به کرنش در بردارهای مربوط به تنش و تفکیک انتگرال  $dV$  (جزء حجم المان) به  $dA$  (جزء سطح) و  $dz$ ، کار مجازی داخلی مربوط به خمش با منظم کردن بردارهای کرنش به فرم زیر نشان داده می‌شود:

$$W_{int}^b = \frac{1}{V} \int \begin{bmatrix} \varepsilon^T & \kappa^T & \chi_a^T & \chi_b^T & \chi_c^T & \chi_d^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}^b & \mathbf{B}^b & \mathbf{D}^b & \mathbf{G}^b & \mathbf{L}^b & \mathbf{T}^b \\ & \mathbf{C}^b & \mathbf{E}^b & \mathbf{H}^b & \mathbf{O}^b & \mathbf{U}^b \\ & & \mathbf{F}^b & \mathbf{I}^b & \mathbf{P}^b & \mathbf{V}^b \\ \text{sym.} & & & \mathbf{J}^b & \mathbf{R}^b & \mathbf{W}^b \\ & & & & \mathbf{S}^b & \mathbf{X}^b \\ & & & & & \mathbf{Z}^b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \\ \chi_a \\ \chi_b \\ \chi_c \\ \chi_d \end{bmatrix} dA \quad (37)$$

در رابطه فوق بالانویس  $T$ ، به معنای ترانپوز ماتریس است و ماتریس‌های  $\mathbf{A}^b$ ،  $\mathbf{B}^b$  و ... در پیوست ذکر شده‌اند.

در ادامه کار مجازی داخلی مربوط به برش نیز به شرح رابطه (۳۸) محاسبه می‌شود:

$$W_{ext}^w = \frac{1}{\gamma} \int \varepsilon_r^T A^{gw} \varepsilon_r dA \quad (52)$$

در روابط فوق ماتریس‌های  $A^{gw}$ ،  $A^{gv}$ ،  $A^{gu}$  و ... در پیوست آورده شده‌اند.

ماتریس‌های مربوط به نیروهای درون صفحه جهت حل مسئله کمانش به کمک روش نوار محدود و همانند روند استخراج بردارهای کرنش خمشی و برشی به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \kappa_1 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} B_m^{u-\varepsilon_1} \\ B_m^{u-\kappa_1} \\ B_m^{\chi_1} \\ B_m^{\chi_2} \end{Bmatrix} \Delta_m = B^u \Delta \quad (53)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_2 \\ \kappa_2 \\ \chi_2 \\ \chi_1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} B_m^{v-\varepsilon_2} \\ B_m^{v-\kappa_2} \\ B_m^{\chi_2} \\ B_m^{\chi_1} \end{Bmatrix} \Delta_m = B^v \Delta \quad (54)$$

$$\varepsilon_r = \sum_{m=1}^r B_m^{w-\varepsilon_r} \Delta_m = B^w \Delta \quad (55)$$

ماتریس‌های  $B^u$ ،  $B^v$  و  $B^w$  که به کمک روش نوار محدود برحسب توابع شکل بر اساس تئوری زیگزاگ استخراج شده‌اند در پیوست آورده شده‌اند.

در اینجا، روش اجزاء محدود استاندارد بر اساس کار مجازی جهت استخراج ماتریس‌های سختی و ماتریس هندسی به کار رفته است که روابط اجزاء محدود می‌توانند بر اساس معادله (۳۴) به دست آیند و به صورت روابط (۵۶) و (۵۷) تعریف می‌شوند:

$$W_{int}^e = W_{int}^b + W_{int}^s \quad (56)$$

$$W_{ext}^e = W_{ext}^u + W_{ext}^v + W_{ext}^w \quad (57)$$

هر یک از کارهای داخلی و خارجی ذکر شده در روابط (۵۶) و (۵۷) در محاسبات قبل ذکر شده‌اند. حال با جای‌گذاری روابط مربوط به هر یک از این کارهای مجازی در رابطه (۳۴)، این رابطه به صورت رابطه (۵۸) بازنویسی می‌شود:

$$\delta W_{int}^b + \delta W_{int}^s = \delta W_{ext}^u + \delta W_{ext}^v + \delta W_{ext}^w \quad (58)$$

$$G_w = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} & \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (45)$$

که می‌توان به فرم زیر نیز بیان کرد:

$$G_u = \varepsilon_1 + z \kappa_1 + F(z)_{11} \chi_1 + F(z)_{12} \chi_2 \quad (46)$$

$$G_v = \varepsilon_2 + z \kappa_2 + F(z)_{22} \chi_2 + F(z)_{21} \chi_1 \quad (47)$$

$$G_w = \varepsilon_3 \quad (48)$$

ماتریس تنش درون صفحه‌ای اولیه بر اساس نیروهای محوری اعمالی به صورت رابطه (۴۹) بیان شده است. که در آن  $n_x$  و  $n_y$  نیروهای محوری اعمالی به ورق در واحد عرض آن در راستای  $x$  و  $y$  هستند و  $n_{xy}$  نیروی برشی اعمالی در واحد عرض ورق است:

$$\sigma_0 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} n_x & n_{xy} \\ n_{xy} & n_y \end{bmatrix} \quad (49)$$

در صورتی که هر یک از روابط (۴۶) تا (۴۸) به ترتیب در روابط (۴۰) تا (۴۲) جای‌گذاری شوند، کار مجازی داخلی نیروهای اعمالی درون صفحه، برای  $W_{ext}^u$ ،  $W_{ext}^v$  و  $W_{ext}^w$  به دست خواهند آمد که برای جداسازی جملات شامل متغیر  $z$  از سایر جملات و ساده‌تر شدن انتگرال‌گیری می‌توان با ضرب جمله به جمله پیرانتز اول در پیرانتز دوم در  $W_{ext}^u$  و محاسبه انتگرال‌ها روی  $z$  و همچنین منظم کردن آنها مطابق رابطه زیر نشان داد:

$$W_{ext}^u = \frac{1}{\gamma} \int \begin{bmatrix} \varepsilon_1^T & \kappa_1^T & \chi_1^T & \chi_2^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{gu} & B^{gu} & D^{gu} & G^{gu} \\ C^{gu} & E^{gu} & H^{gu} & \\ \text{sym.} & F^{gu} & I^{gu} & \\ & & J^{gu} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \kappa_1 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} dA \quad (50)$$

مطابق روند ذکر شده برای  $W_{ext}^u$  در روابط مربوط به آن،  $W_{ext}^v$  و  $W_{ext}^w$  نیز به ترتیب مطابق روابط (۵۱) و (۵۲) تعریف می‌شوند:

$$W_{ext}^v = \frac{1}{\gamma} \int \begin{bmatrix} \varepsilon_2^T & \kappa_2^T & \chi_2^T & \chi_1^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{gv} & B^{gv} & D^{gv} & G^{gv} \\ C^{gv} & E^{gv} & H^{gv} & \\ \text{sym.} & F^{gv} & I^{gv} & \\ & & J^{gv} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \kappa_2 \\ \chi_2 \\ \chi_1 \end{bmatrix} dA \quad (51)$$

هر یک از جملات رابطه (۵۸) به صورت روابط (۵۹) تا (۶۳) تعریف می‌شوند:

$$\delta W_{int}^b = \delta \Delta^T \left( \int_A (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}^b dA \right) \Delta \quad (59)$$

$$\delta W_{int}^s = \delta \Delta^T \left( \int_A (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}^s dA \right) \Delta \quad (60)$$

$$\delta W_{ext}^u = \delta \Delta^T \left( \int_A (\mathbf{B}^u)^T \mathbf{S}_u \mathbf{B}^u dA \right) \Delta \quad (61)$$

$$\delta W_{ext}^v = \delta \Delta^T \left( \int_A (\mathbf{B}^v)^T \mathbf{S}_v \mathbf{B}^v dA \right) \Delta \quad (62)$$

$$\delta W_{ext}^w = \delta \Delta^T \left( \int_A (\mathbf{B}^w)^T \mathbf{S}_w \mathbf{B}^w dA \right) \Delta \quad (63)$$

روابط فوق برای هر تغییری از  $\delta \Delta^T$  معتبر است، بنابراین روابط اجزاء محدود می‌توانند به فرم ماتریسی و برای مسائل کمانش ورق مطابق رابطه (۶۴) بیان شود:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_g) \Delta = 0 \quad (64)$$

ماتریس سختی  $\mathbf{K}$  و ماتریس هندسی  $\mathbf{K}_g$  به صورت رابطه (۶۵) و (۶۶) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{K} = \int_A (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}^b dA + \int_A (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}^s dA \quad (65)$$

$$\mathbf{K}_g = \int_A (\mathbf{B}^u)^T \mathbf{S}_u \mathbf{B}^u dA + \int_A (\mathbf{B}^v)^T \mathbf{S}_v \mathbf{B}^v dA + \int_A (\mathbf{B}^w)^T \mathbf{S}_w \mathbf{B}^w dA \quad (66)$$

در روابط (۶۵) و (۶۶)،  $\mathbf{S}_s$  و  $\mathbf{S}_b$  به ترتیب ماتریس‌های شامل مؤلفه‌های صلبیت خمشی و برشی ورق هستند که بر اساس تئوری‌های مختلف تغییر می‌کنند. به عنوان نمونه در رابطه (۳۷)، ماتریس شامل مؤلفه‌های  $\mathbf{A}^b$ ،  $\mathbf{B}^b$  و ... تشکیل ماتریس  $\mathbf{S}_b$  و در رابطه (۳۹)، ماتریس شامل مؤلفه‌های  $\mathbf{A}^s$ ،  $\mathbf{B}^s$  و ... تشکیل ماتریس  $\mathbf{S}_s$  را بر اساس تئوری زیگزاگ می‌دهند و بر اساس تئوری ردی به همین منوال است. در رابطه (۶۶)،  $\mathbf{S}_u$ ،  $\mathbf{S}_v$  و  $\mathbf{S}_w$  به عنوان نمونه بر اساس تئوری زیگزاگ ماتریس‌های شامل ضرائب نیرویی در روابط (۵۰)، (۵۱) و (۵۲) هستند که بر اساس تئوری ردی نیز همین گونه هستند.

به منظور برآورد دقت تحلیل حاضر، بار بحرانی با استفاده از حل مقادیر ویژه به صورت رابطه (۶۷) به دست می‌آید:

$$\det[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_g] = 0 \quad (67)$$

که در آن  $\lambda$  ضریب بار بحرانی کمانش ورق است.

### ۳- بررسی عددی نتایج

در ادامه تحقیق پیش رو به تحلیل عددی چند مثال بر اساس روش ارائه شده و دو تئوری مذکور پرداخته می‌شود. بدین منظور ابتدا مشخصات مصالح، ضرائب بدون بعد تعریف شده برای کمانش ورق تک‌لایه و چندلایه و همچنین شرایط مرزی ورق مشخص شده و در ادامه جداول و نمودارهایی ارائه می‌شود که در میان آنها برخی از نتایج جهت صحت‌سنجی با نتایج مقالات دیگر مقایسه شده‌اند.

#### ۳-۱- مشخصات مصالح بر بار بحرانی کمانش

در ابتدا لازم است خصوصیات مواد و همچنین شرایط مرزی مختلف مشخص شوند. برای مواد ایزوتروپیک خصوصیات مواد به شرح زیر است:

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3$$

بنابراین ضریب کمانش ورق به فرم کمیت بدون بعد به صورت رابطه (۶۸) تعریف می‌شود:

$$k = N_{cr} a^2 / \pi^2 D, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (68)$$

در روابط فوق  $h$  ضخامت ورق،  $a$  طول ورق و  $N_{cr}$  نیروی بحرانی کمانش حاصل از حل مسئله مقدار ویژه هستند. خصوصیات ماده برای ورق‌های ارتوتروپیک لایه‌ای برای تمامی لایه‌ها یکسان بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E_1 = 40 E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2, \\ G_{23} = 0.6 E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

ضریب بدون بعد کمانش ورق برای ورق‌های ارتوتروپیک به صورت رابطه (۶۹) تعریف می‌شود:

$$\bar{N} = N_{cr} a^2 / E_2 h^2 \quad (69)$$

در رابطه (۶۹)، مدول الاستیسیته ماده در راستای محور محلی دو است که مقدار آن واحد در نظر گرفته شده است و بقیه پارامترها قبلاً معرفی شده‌اند. در ادامه لازم است تا شرایط مرزی ورق مشخص شود، در روش نوار محدود استفاده شده در این مقاله دو تکیه‌گاه موازی محور  $x$  مفصلی و دو تکیه‌گاه موازی محور  $y$  شرایط مختلفی را اتخاذ می‌کنند که هر یک از

جدول ۱- درجات آزادی مقید بر اساس شرایط مرزی مختلف

نوع شرط مرزی برای لبه ابتدایی و انتهایی	قیود درجات آزادی
مفصلی (S)	الیاف متعامد (Cross-Ply) $\begin{cases} v = \bar{v} = w = \gamma_y = 0 \\ u = \bar{u} = w = \gamma_y = 0 \end{cases}$ الیاف مورب (Angle-Ply)
گیردار (C)	$u = \bar{u} = v = \bar{v} = w = \partial w / \partial x = \gamma_x = \gamma_y = 0$
آزاد (F)	باز و غیر صفر بودن تمامی درجات آزادی

جدول ۲- ضریب بدون بعد کمانش تک‌محوره برای ورق مربعی ایزوتروپیک

ضریب بدون بعد کمانش ( $k = N_{cr} a^2 / \pi^2 D$ )			نسبت عرض به ضخامت
تئوری			
ردی [۱۸]	ردی (مطالعه حاضر)	زیگزاگ (مطالعه حاضر)	
۱/۶۷۶۰	۱/۶۷۶۰	۱/۶۷۶۰	۲
۲/۹۶۰۷	۲/۹۶۰۷	۲/۹۶۰۷	۴
۳/۲۶۵۳	۳/۲۶۵۴	۳/۲۶۵۴	۵
۳/۷۸۶۶	۳/۷۸۶۶	۳/۷۸۶۶	۱۰
۳/۹۴۴۴	۳/۹۴۴۴	۳/۹۴۴۴	۲۰
۳/۹۹۱۰	۳/۹۹۱۰	۳/۹۹۱۰	۵۰

است.

همان‌گونه که از نتایج جدول (۲) قابل مشاهده است، نتایج ارائه شده به روش نوار محدود با ۱۰ نوار دقیقاً مشابه نتایج زنکور [۱۸] در نتایج کمانش ورق مذکور تحت بار درون صفحه اعمال شده در راستای محور  $y$  است.

این شرایط و نحوه پیاده‌سازی درجات آزادی مرتبط با آن شرط مرزی در ادامه ذکر می‌شوند. شرایط بردار درجات آزادی بر اساس شرایط مرزی مختلف به شرح نشان داده شده در جدول (۱) است. لازم به ذکر است که نتایج برای ۱۰ نوار و یک مود ارائه شده‌اند مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

### ۳-۳- کمانش ورق مربعی با ترکیب لایه $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ برای

نسبت بعد به ضخامت و نسبت مدول الاستیسیته مختلف

یک ورق چندلایه مربعی چهار طرف مفصل با ترکیب لایه با الیاف با جهت‌گیری  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  با ضخامت کل  $h$  درحالی‌که ضخامت و خصوصیات لایه‌ها یکسان است و خصوصیات ماده از نوع ارتوتروپیک است تحت کمانش در راستای محور  $y$  قرار گرفته است. نتایج این ورق لایه‌ای بر اساس تئوری زیگزاگ و تئوری برشی مرتبه سوم ردی برای نسبت بعد به ضخامت و نسبت مدول الاستیسیته مختلف

### ۳-۲- کمانش ورق تک‌لایه

یک ورق مربعی تک‌لایه با شرایط تکیه‌گاهی مفصلی در هر چهار طرف و با خصوصیات مواد ایزوتروپیک تحت کمانش در راستای محور  $y$  برای نسبت‌های بعد به ضخامت مختلف در جدول (۲) بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی و تئوری زیگزاگ ارائه شده و نتایج با زنکور [۱۸] به‌منظور تأییدی بر عملکرد روش ارائه شده مقایسه شده‌اند. نتایج ارائه شده به‌منظور مقایسه با مرجع مذکور برای حالتی بیان شده‌اند که در رابطه (۶۶) تنها شامل جمله سوم، یعنی تنها اثر  $w$

جدول ۳- ضریب بدون بعد کمانش ورق مربعی با ترکیب لایه  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$

$(\bar{N} = N_{cr} a^2 / E_T h^3)$ ضریب بدون بعد کمانش								
۵۰		۲۰		۱۰		۵		نسبت عرض به ضخامت (a/h)
تئوری								
ردی		ردی		ردی		ردی		نسبت مدول الاستیسیته $(E_1/E_2)$
زیگزاگ	۵/۷۳۴۷	زیگزاگ	۵/۶۳۶۶	زیگزاگ	۵/۳۱۵۷	زیگزاگ	۴/۳۵۹۶	۳
۵/۷۳۴۷	۵/۷۳۴۷	۵/۶۳۶۶	۵/۶۳۶۶	۵/۳۱۵۷	۵/۳۱۵۷	۴/۳۵۹۶	۴/۳۵۹۸	
۱۱/۴۱۲۶	۱۱/۴۱۲۳	۱۱/۰۱۵۴	۱۱/۰۱۴۱	۹/۸۱۷۱	۹/۸۱۲۵	۶/۹۴۵۱	۶/۹۳۲۷	۱۰
۱۹/۴۷۰۶	۱۹/۴۶۹۶	۱۸/۳۰۰۸	۱۸/۲۹۵۵	۱۵/۱۴۲۳	۱۵/۱۲۵۳	۹/۲۳۱۸	۹/۱۹۴۹	۲۰
۲۷/۴۴۲۶	۲۷/۴۴۰۵	۲۵/۱۳۸۷	۲۵/۱۲۷۱	۱۹/۵۰۸۷	۱۹/۴۷۴۹	۱۰/۷۵۴۹	۱۰/۶۹۰۵	۳۰
۳۵/۳۲۸۲	۳۵/۳۲۴۶	۳۱/۵۷۱۶	۳۱/۵۵۱۸	۲۳/۱۷۸۵	۲۳/۱۲۴۶	۱۱/۸۸۳۳	۱۱/۷۹۰۳	۴۰

برشی مرتبه سوم ردی و تئوری زیگزاگ برای نسبت‌های مختلف  $E_1/E_2$  و  $a/h=10$  ارائه شده و با نتایج مرجع [۶] مقایسه شده است. در جدول (۴) نتایج ارائه شده برای  $(K_g - w)$  برای حالتی بیان شده‌اند که  $K_g$  در رابطه (۶۶) تنها شامل جمله سوم، یعنی تنها اثر  $w$  است و نتایج  $(K_g - u, v, w)$  برای حالتی بیان شده‌اند که  $K_g$  در رابطه (۶۶) شامل هر سه جمله آن می‌شود، یعنی اثر هر سه مؤلفه  $u, v$  و  $w$  در نظر گرفته شده است. نیاز به توضیح است که نتایج ارائه شده در مرجع [۶]، همانند حالت اول یعنی حالتی که  $K_g$  تنها شامل جمله سوم، یعنی اثر  $w$  باشد، است.

در جدول (۴) نتایج ارائه شده در  $(K_g - w)$  در مقایسه با نتایج مرجع مذکور برای مقدار ضریب بدون بعد کمانش مشابه هم است، در حالی که نتایج  $(K_g - u, v, w)$  به دلیل در نظر گرفتن هر سه مؤلفه  $u, v$  و  $w$  در ماتریس هندسی  $K_g$  مقدار ضریب کمانش را دقیق‌تر محاسبه کرده و مقدار کمتری برای آن ارائه می‌دهد.

### ۳-۵- کمانش ورق مربعی با ترکیب لایه $[0^\circ/90^\circ]_n$ برای شرایط مرزی مختلف

کمانش تک‌محوره تحت نیروی  $n_y$  یک ورق چندلایه مربعی

مطابق جدول (۳) ارائه شده است. نتایج ارائه شده برای حالتی بیان شده‌اند که  $K_g$  در رابطه (۶۶) شامل هر سه جمله آن می‌شود، یعنی اثر هر سه مؤلفه  $u, v$  و  $w$  در نظر گرفته شده است.

با توجه به جدول (۳) می‌توان دریافت که با افزایش نسبت مدول الاستیسیته  $E_1/E_2$  ضریب کمانش با نرخ کاهشی افزایش می‌یابد، همچنین با افزایش نسبت  $a/h$  ضریب کمانش افزایش می‌یابد. البته این افزایش ضریب کمانش با افزایش نسبت بعد به ضخامت روندی کاهشی دارد، نتایج ارائه شده برای ضریب کمانش بر اساس دو تئوری برشی مرتبه سوم ردی و تئوری زیگزاگ نزدیک به یکدیگر بوده و با وجود افزایش نسبت مدول الاستیسیته و نسبت بعد به ضخامت اختلاف بین نتایج این دو تئوری افزایش چندانی نمی‌یابد.

### ۳-۴- کمانش ورق مربعی با ترکیب لایه $[0^\circ/90^\circ]_n$ برای تعداد لایه‌های مختلف

کمانش تک‌محوره تحت نیروی  $n_y$  یک ورق چندلایه مربعی چهار طرف مفصل با ضخامت و خصوصیات یکسان در لایه‌ها و با ترکیب لایه با الیاف  $[0^\circ/90^\circ]_n$  برای سه، پنج و نه لایه به عبارتی با  $(n=1,2,4)$  بر اساس تئوری

جدول ۴- ضریب بدون بعد کماتش ورق مربعی با ترکیب لایه  $[(90^\circ/90^\circ)_n/0^\circ]$

$(\bar{N} = N_{cr} a^2 / E_T h^3)$ ضریب بدون بعد کماتش						جمالات استفاده شده برای	تعداد لایه‌ها
نسبت مدول الاستیسیته $(E_1/E_T)$						محاسبه ماتریس سختی هندسی	
۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	۳	تئوری	(Kg)	
۲۲/۱۲۰۹	۱۸/۸۷۷۷	۱۴/۸۸۹۷	۹/۸۳۲۶	۵/۳۸۹۹	ردی		
۲۲/۱۳۴۳	۱۸/۸۸۲۶	۱۴/۸۸۹۵	۹/۸۳۰۷	۵/۳۸۸۳	زیگزاگ	w	
۲۲/۱۲۰۷	۱۸/۸۷۷۶	۱۴/۸۸۹۶	۹/۸۳۲۵	۵/۳۸۹۹	مرجع [۶]		۳
۲۱/۹۰۱۹	۱۸/۶۷۷۲	۱۴/۷۱۶۹	۹/۷۰۴۷	۵/۳۱۲۴	ردی		
۲۱/۹۱۴۸	۱۸/۶۸۱۹	۱۴/۷۱۶۷	۹/۷۰۲۹	۵/۳۱۰۹	زیگزاگ	$u, v, w$	
۲۴/۶۷۵۷	۲۰/۵۷۸۲	۱۵/۷۸۸۰	۱۰/۰۸۹۷	۵/۴۰۶۷	ردی		
۲۴/۵۴۷۶	۲۰/۴۹۱۱	۱۵/۷۳۸۹	۱۰/۰۷۱۹	۵/۴۰۳۰	زیگزاگ	w	
۲۴/۶۷۵۵	۲۰/۵۷۸۱	۱۵/۷۸۸۹	۱۰/۰۸۹۷	۵/۴۰۶۶	مرجع [۶]		۵
۲۴/۴۵۶۳	۲۰/۳۷۳۹	۱۵/۶۱۰۷	۹/۹۵۹۶	۵/۳۲۹۰	ردی		
۲۴/۳۳۰۶	۲۰/۲۸۸۶	۱۵/۵۶۲۸	۹/۹۴۲۳	۵/۳۲۵۵	زیگزاگ	$u, v, w$	
۲۵/۵۸۴۶	۲۱/۱۷۸۴	۱۶/۱۰۰۹	۱۰/۱۷۷۳	۵/۴۱۲۰	ردی		
۲۵/۴۸۷۸	۲۱/۱۱۳۰	۱۶/۰۶۴۳	۱۰/۱۶۳۷	۵/۴۰۸۹	زیگزاگ	w	
۲۵/۵۸۴۵	۲۱/۱۷۸۳	۱۶/۱۰۰۹	۱۰/۱۷۷۲	۵/۴۱۲۰	مرجع [۶]		۹
۲۵/۳۶۵۲	۲۱/۹۷۲۷	۱۶/۹۲۲۱	۱۰/۰۴۶۴	۵/۳۳۴۳	ردی		
۲۵/۲۷۰۳	۲۱/۹۰۸۹	۱۶/۸۸۶۴	۱۰/۰۳۳۲	۵/۳۳۱۳	زیگزاگ	$u, v, w$	

کرد که نتایج در حالت شرایط مرزی آزاد- آزاد کمترین مقدار ضریب کماتش را داراست و این روند افزایشی در ضریب کماتش با بیشتر شدن قیدهای تکیه‌گاهی ادامه می‌یابد تا اینکه به بیشترین مقدار خود در شرایط مرزی گیردار- گیردار می‌رسد.

### ۳-۶- کماتش ورق مربعی با ترکیب لایه $[\theta^\circ / -\theta^\circ]_n$ برای زوایای مختلف

یک ورق چندلایه مربعی با شرایط تکیه‌گاهی چهار طرف مفصل با ترکیب لایه با الیاف با جهت‌گیری  $[\theta^\circ / -\theta^\circ]_n$  برای دو و شش لایه با ضخامت کل  $h$  که ضخامت و خصوصیات لایه‌ها یکسان است تحت کماتش در راستای محور  $y$  قرار گرفته است. نتایج این ورق لایه‌ای بر اساس تئوری برشی مرتبه

چهار طرف مفصل با ضخامت و خصوصیات یکسان در لایه‌ها و با ترکیب لایه با الیاف  $[\theta^\circ / 90^\circ]_n$  برای دو و ۱۰ لایه در جدول (۵) بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی و تئوری زیگزاگ برای  $a/h = 5, 10$  و نسبت  $E_1/E_T = 40$  برای شرایط مرزی مختلف برای دو حالتی که  $K_g$  تنها شامل  $w$  باشد ( $K_g - w$ ) و حالتی دیگر که شامل هر سه مؤلفه  $u, v, w$  و یعنی حالت ( $K_g - u, v, w$ ) است، ارائه شده و با نتایج مراجع دیگر مقایسه شده‌اند. قابل ذکر است که نتایج ارائه شده برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی و گیردار- گیردار برای مود دوم در جدول آورده شده‌اند.

هر چه قید مرزهای ورق بیشتر شود ضریب کماتش افزایش می‌یابد این امر را می‌توان مطابق جدول (۵) مشاهده

جدول ۵- ضریب بدون بعد کمانش ورق مربعی با ترکیب لایه  $[90^\circ/90^\circ]_n$

$(\bar{N} = N_{cr} a^2 / E_T h^3)$ ضریب بدون بعد کمانش						تئوری	جملات استفاده شده برای محاسبه ماتریس سختی هندسی (Kg)	نسبت عرض به ضخامت (a/h)	تعداد لایه‌ها
شرایط مرزی									
CC	SC	SS	FC	FS	FF				
۱۱/۴۹۹	۱۰/۷۵۵	۸/۷۷۰	۴/۹۱۳	۴/۲۸۶	۳/۹۰۶	ردی			
۱۲/۰۹۶	۱۱/۲۸۴	۸/۹۶۸	۵/۰۲۲	۴/۳۸۱	۳/۹۹۹	زیگزاگ			
۱۱/۴۹۰	۱۰/۷۵۴	۸/۷۶۹	۴/۹۰۸	۴/۲۸۳	۳/۹۰۵	مرجع [۱۹] - حل دقیق	w	۵	
۱۲/۳۱۸	۱۱/۲۴۱	۸/۹۸۵	۵/۰۲۲	۴/۳۷۵	۳/۹۷۹	مرجع [۱۹] - اجزاء محدود			
۱۱/۱۵۴	۱۰/۳۵۶	۸/۳۶۷	۴/۷۲۸	۴/۱۳۰	۳/۸۰۴	ردی			
۱۱/۷۴۷	۱۰/۸۷۳	۸/۵۵۱	۴/۸۳۰	۴/۲۲۰	۳/۸۹۴	زیگزاگ	u, v, w	۲	
۲۱/۴۹۰	۱۷/۱۵۳	۱۱/۵۶۳	۶/۲۸۱	۵/۴۴۵	۴/۹۴۰	ردی			
۲۲/۰۱۲	۱۷/۳۹۲	۱۱/۶۴۸	۶/۳۲۶	۵/۴۸۴	۴/۹۷۷	زیگزاگ			
۲۱/۴۶۴	۱۷/۱۳۳	۱۱/۵۶۲	۶/۲۷۴	۵/۴۴۲	۴/۹۴۰	مرجع [۱۹] - حل دقیق	w	۱۰	
۲۴/۲۶۲	۱۸/۲۵۷	۱۲/۰۱۱	۶/۴۸۷	۵/۶۲۱	۵/۰۹۰	مرجع [۱۹] - اجزاء محدود			
۲۰/۸۱۶	۱۶/۸۰۱	۱۱/۳۱۶	۶/۱۸۳	۵/۳۶۷	۴/۸۸۵	ردی			
۲۱/۳۱۱	۱۷/۰۳۳	۱۱/۳۹۷	۶/۲۲۶	۵/۴۰۴	۴/۸۷۹	زیگزاگ	u, v, w		
۱۳/۲۶۳	۱۲/۶۱۱	۱۳/۹۶۳	۸/۲۲۵	۷/۰۵۳	۶/۷۸۰	ردی			
۱۳/۰۷۰	۱۲/۴۳۴	۱۳/۸۳۶	۸/۱۵۳	۶/۹۹۰	۶/۷۱۸	زیگزاگ			
۱۳/۲۵۴	۱۲/۶۰۷	۱۲/۱۰۹	۸/۲۲۱	۷/۰۵۰	۶/۷۸۰	مرجع [۱۹] - حل دقیق	w	۵	
۱۳/۶۵۹	۱۲/۸۰۰	۱۲/۲۲۴	۸/۲۷۸	۷/۰۸۹	۶/۸۰۲	مرجع [۱۹] - اجزاء محدود			
۱۳/۱۸۶	۱۲/۵۰۱	۱۳/۸۰۶	۸/۱۳۵	۶/۹۵۰	۶/۷۳۹	ردی			
۱۲/۹۹۲	۱۲/۳۲۶	۱۳/۶۸۱	۸/۰۶۵	۶/۸۸۹	۶/۶۷۸	زیگزاگ	u, v, w	۱۰	
۳۵/۴۲۹	۳۲/۹۰۳	۲۵/۴۲۳	۱۴/۳۵۹	۱۲/۵۱۰	۱۲/۰۷۷	ردی			
۳۵/۰۹۵	۳۲/۶۰۹	۲۵/۳۱۸	۱۴/۳۰۳	۱۲/۴۶۰	۱۲/۰۲۹	زیگزاگ			
۳۵/۳۷۶	۳۲/۸۸۵	۲۵/۴۲۳	۱۴/۳۵۱	۱۲/۵۰۶	۱۲/۰۷۷	مرجع [۱۹] - حل دقیق	w	۱۰	
۳۶/۶۵۷	۳۳/۶۶۲	۲۵/۸۲۸	۱۴/۵۶۸	۱۲/۶۹۹	۱۲/۲۴۸	مرجع [۱۹] - اجزاء محدود			
۳۵/۱۶۸	۳۲/۶۰۹	۲۵/۱۹۸	۱۴/۲۵۶	۱۲/۴۲۳	۱۲/۰۲۲	ردی			
۳۴/۸۳۹	۳۲/۳۲۰	۲۵/۰۹۶	۱۴/۲۰۱	۱۲/۳۷۴	۱۱/۹۷۵	زیگزاگ	u, v, w		

می‌یابند. با توجه به نتایج جدول می‌توان مشاهده کرد که افزایش تعداد لایه‌ها با توجه به زاویه الیاف می‌تواند تأثیر متفاوتی بر ضریب کمانش داشته باشد، به گونه‌ای که تأثیر تعداد لایه‌ها برای الیاف با  $\theta = 5^\circ$  در مقایسه با حالتی که زاویه الیاف افزایش می‌یابند و به  $\theta = 45^\circ$  می‌رسند، قابل توجه است. البته بایستی دقت کرد که در نسبت  $a/h = 5$  نتایج برای زوایای مختلف به گونه‌ای که انتظار می‌رود نیست. در جدول (۶) نتایج ارائه

سوم ردی و تئوری زیگزاگ برای  $a/h$  مختلف و نسبت  $E_1/E_T = 40$  مطابق جدول (۶) ارائه شده و با نتایج مرجع [۱۹] مقایسه شده است. نتایج ارائه شده به منظور مقایسه با مرجع مذکور برای حالتی بیان شده‌اند که  $K_g$  در رابطه (۶۶) تنها شامل جمله سوم، یعنی تنها اثر  $w$  است.

در جدول (۶) می‌توان دریافت که با افزایش نسبت بعد به ضخامت و همچنین تغییر زاویه الیاف، ضریب کمانش افزایش

جدول ۶- ضریب بدون بعد کمانش ورق مربعی با ترکیب لایه  $[\theta^\circ / -\theta^\circ]_n$

$(\bar{N} = N_{cr} a^2 / E_T h^3)$ ضریب بدون بعد کمانش						تئوری	نسبت عرض به ضخامت (a/h)
$\theta=45^\circ$		$\theta=30^\circ$		$\theta=5^\circ$			
n=3	n=1	n=3	n=1	n=3	n=1		
۱۱/۸۹۹	۱۱/۳۹۹	۹/۴۸۰	۱۱/۸۸۶	۱۱/۰۷۷	۱۰/۶۸۴	زیگزاگ	
۱۲/۱۶۹	۱۰/۸۷۷	۹/۶۲۱	۱۱/۵۴۷	۱۱/۰۸۲	۱۰/۶۷۴	ردی	۵
۱۲/۱۶۹۳	۱۰/۸۸۱۲	۱۱۳/۵۴۶	۱۱/۵۴۷	۱۱/۰۸۲	۱۰/۶۷۴	مرجع [۱۹]	
۳۱/۹۴۹	۱۸/۴۰۰	۳۳/۴۶۶	۱۷/۳۰۵	۲۲/۵۸۷	۲۰/۹۰۷	زیگزاگ	
۳۲/۴۰۵	۱۸/۱۵۵	۳۳/۷۰۱	۱۷/۱۲۷	۲۲/۵۹۲	۲۰/۸۹۸	ردی	۱۰
۳۲/۴۰۵۴	۱۸/۱۵۴	۳۳/۷۰۱	۱۷/۱۲۷	۲۲/۵۹۲	۲۰/۸۹۸	مرجع [۱۹]	
۵۳/۰۱۵	۲۰/۷۷۰	۴۷/۵۲۵	۱۹/۶۱۹	۳۱/۵۷۵	۲۸/۳۱۲	زیگزاگ	
۵۳/۱۹۸	۲۰/۶۹۲	۴۷/۶۴۳	۱۹/۵۶۲	۳۱/۵۷۷	۲۸/۳۰۸	ردی	۲۰
۵۳/۱۹۸	۲۰/۶۹۱	۴۷/۶۴۳	۱۹/۵۶۱	۳۱/۵۷۷	۲۸/۳۰۸	مرجع [۱۹]	
۶۰/۷۲۲	۲۱/۵۵۳	۵۳/۹۲۷	۲۰/۳۸۹	۳۵/۶۵۷	۳۱/۵۲۰	زیگزاگ	
۶۰/۷۶۰	۲۱/۵۳۹	۵۳/۹۵۱	۲۰/۳۷۹	۳۵/۶۵۷	۳۱/۵۲۰	ردی	۵۰
۶۰/۷۶۰	۲۱/۵۳۹	۵۳/۹۵۱	۲۰/۳۷۹	۳۵/۶۵۷	۳۱/۵۱۹	مرجع [۱۹]	
۶۲/۰۱۲۲	۲۱/۶۷۰	۵۴/۹۸۷	۲۰/۵۰۴	۳۶/۳۳۳	۳۲/۰۴۳	زیگزاگ	
۶۲/۰۲۲	۲۱/۶۶۶	۵۴/۹۹۴	۲۰/۵۰۲	۳۶/۳۳۳	۳۲/۰۴۲	ردی	۱۰۰
۶۲/۰۲۲	۲۱/۶۶۶	۵۴/۹۹۳	۲۰/۵۰۲	۳۶/۳۳۲	۳۲/۰۴۲	مرجع [۱۹]	

۱،۲،۴ مقدار ضریب بدون بعد کمانش در مود دوم ( $I=2$ )

۳ مقدار ضریب بدون بعد کمانش در مود سوم ( $I=3$ )

ضخامت a/h برای شرایط مرزی مختلف بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی تحت کمانش در راستای محور y در شکل (۲) ارائه شده است. نتایج کمانش برای این مسئله و مسائل بعدی ارائه شده برای حالتی بیان شده‌اند که  $K_g$  در رابطه (۶۶) شامل هر سه جمله آن می‌شود، یعنی اثر هر سه مؤلفه u، v و w در نظر گرفته شده است.

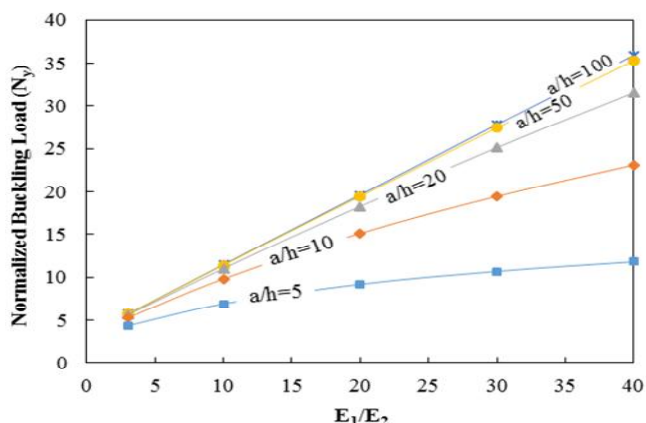
همان‌طور که از شکل (۲) مشاهده می‌شود برای ورق‌هایی که حداقل یکی از مرزهای تکیه‌گاهی آن شرایط مرزی آزاد دارد اثر افزایش بعد به ضخامت a/h تأثیر ناچیزی بر ضریب کمانش

شده مربوط به موارد توضیحی که در زیر جدول مشخص شده‌اند برای مودهای بالاتر ارائه شده‌اند تا جواب بحرانی در مقایسه با نتایج مرجع [۱۹] که با استفاده از روش ناویر حل شده است، به دست آید.

### ۳-۷- کمانش ورق مربعی تک‌لایه برای شرایط مرزی مختلف

ضریب بدون بعد کمانش ورق تک‌لایه ایزوتروپیک مربعی با شرایط مرزی چهار طرف مفصل برحسب نسبت بعد به





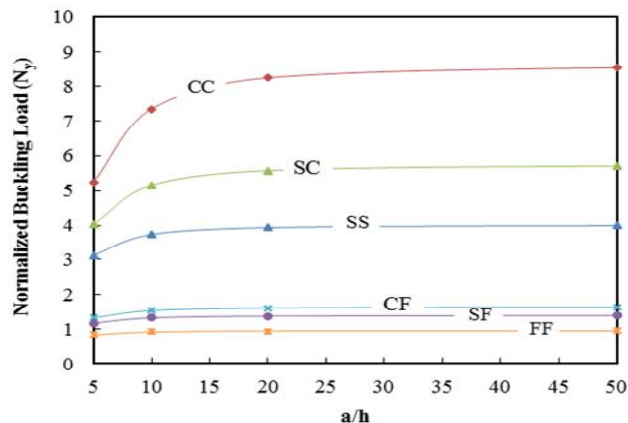
شکل ۳- ضریب بدون بعد کمانش در مقابل نسبت مدول الاستیسیته  $E_1/E_2$  یک ورق چندلایه مربعی با شرایط مرزی چهار طرف مفصل با ترکیب لایه  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  برای نسبت‌های مختلف  $a/h$

میزان ناهمسانگردی ماده تأثیر بیشتری بر ضریب کمانش برای ورق‌های نازک در مقایسه با ورق‌های نسبتاً ضخیم دارد.

### ۳-۹- کمانش ورق مربعی با ترکیب لایه $[0^\circ/90^\circ]_n$ برای تعداد لایه‌های مختلف

ضریب بدون بعد کمانش ورق چندلایه ارتوتروپیک مربعی با ترکیب لایه  $[0^\circ/90^\circ]_n$  در مقابل تعداد لایه‌ها با دو، چهار، شش، هشت و ده لایه برای نسبت  $a/h$  مختلف و  $E_1/E_2 = 40$  تحت کمانش در راستای محور  $y$  بر اساس تئوری زیگزاگ در شکل (۴) ارائه شده است.

با توجه به شکل (۴) بدون در نظر گرفتن تعداد لایه‌ها، افزایش نسبت بعد به ضخامت تا نسبت  $a/h = 20$  موجب افزایش قابل توجه ضریب کمانش می‌شود، اما پس از آن علی‌رغم افزایش نسبت  $a/h$  ضریب کمانش تغییر چندانی نمی‌کند. افزایش تعداد لایه‌ها از دو لایه به چهار لایه به‌طور قابل ملاحظه‌ای موجب افزایش ضریب کمانش می‌شود اما تأثیر افزایش تعداد لایه‌ها از چهار لایه به بعد با یک نرخ افزایشی کاهش می‌یابد.



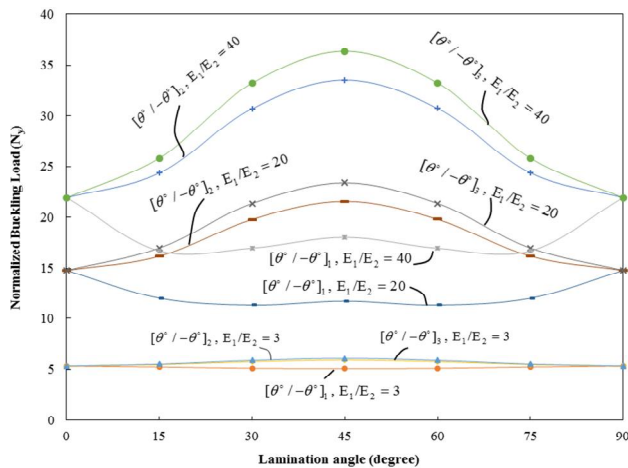
شکل ۲- ضریب بدون بعد کمانش ورق مربعی ایزوتروپیک برای شرایط مرزی مختلف

دارد اما در مقایسه با شرایط مرزی مفصلی و گیردار مقادیر ضریب کمانش تا نسبت بعد به ضخامت  $a/h = 20$  افزایش یافته و پس از آن تقریباً ثابت می‌مانند و تأثیر بسیار ناچیزی دارند. با بالا رفتن قیود تکیه‌گاهی این ضرائب افزایش می‌یابند که بیشترین مقدار را در شرایط مرزی گیردار-گیردار و کمترین مقدار را در شرایط مرزی آزاد-آزاد می‌توان مشاهده کرد.

### ۳-۸- کمانش ورق مربعی با ترکیب لایه $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ برای نسبت بعد به ضخامت و نسبت مدول الاستیسیته مختلف

ضریب بدون بعد کمانش ورق چندلایه ارتوتروپیک مربعی با ترکیب لایه  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  با شرایط مرزی چهار طرف مفصل در مقابل نسبت مدول الاستیسیته  $E_1/E_2$  برای نسبت‌های مختلف بعد به ضخامت  $a/h$  تحت کمانش در راستای محور  $y$  در شکل (۳) بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی ارائه شده است.

با توجه به شکل (۳) که بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی است، ضریب بدون بعد کمانش با افزایش نسبت مدول الاستیسیته  $E_1/E_2$  و همچنین نسبت بعد به ضخامت  $a/h$  افزایش می‌یابد اما اثر افزایش مدول الاستیسیته با پایین آمدن نسبت بعد به ضخامت کاهش می‌یابد به عبارتی افزایش



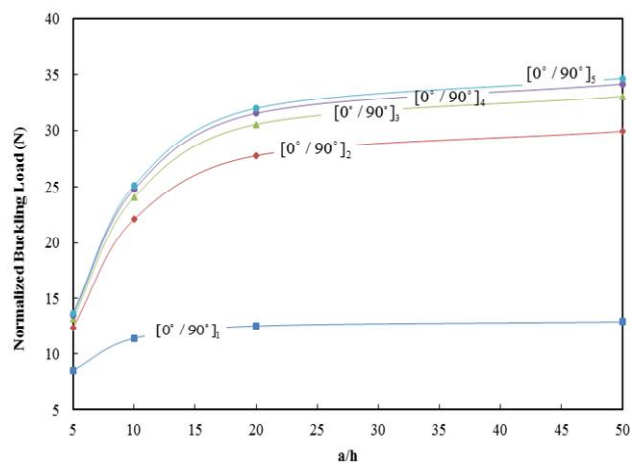
شکل ۵- ضریب بدون بعد کماتش در مقابل زوایای مختلف الیاف یک ورق چندلایه ارتوترپیک مربعی با شرایط مرزی چهار طرف مفصل با ترکیب لایه  $[\theta^0 / -\theta^0]_n$  برای  $n = 1, 2, 3$  با نسبت  $E_1 / E_2$  مختلف و  $a/h = 10$

همانند صفر تا ۴۵ درجه است که به عبارتی تقارن دارند.

### ۳-۱۱- کماتش ورق مربعی با ترکیب لایه $[\theta^0 / -\theta^0]$ برای زوایای مختلف

ضریب بدون بعد کماتش ورق چندلایه ارتوترپیک مربعی با ترکیب لایه  $[\theta^0 / -\theta^0]$  با شرایط مرزی چهار طرف مفصلی برای زوایای صفر تا ۹۰ درجه برای نسبت بعد به ضخامت  $a/h$  مختلف و مدول الاستیسیته  $E_1 / E_2 = 40$  بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی و تحت کماتش در راستای محور  $y$  در شکل (۶) ارائه شده است.

با توجه به شکل (۶) ضریب کماتش در نسبت  $a/h = 5$  با تغییر زاویه الیاف از صفر تا ۱۵ درجه کاهش می‌یابد و پس از آن یعنی از زاویه ۱۵ تا ۴۵ درجه ضریب کماتش افزایش می‌یابد و از زاویه ۴۵ تا ۹۰ متقارن نسبت به ۴۵ درجه اول است. موارد ذکر شده در نسبت  $a/h = 10$  نیز صدق می‌کند، اما در نسبت بعد به ضخامت  $a/h \geq 20$  روند تغییرات ضریب کماتش بدین صورت است که از زاویه صفر تا ۳۰ درجه مقدار ضریب کماتش کاهش و از ۳۰ تا ۴۵ درجه افزایش می‌یابد و از

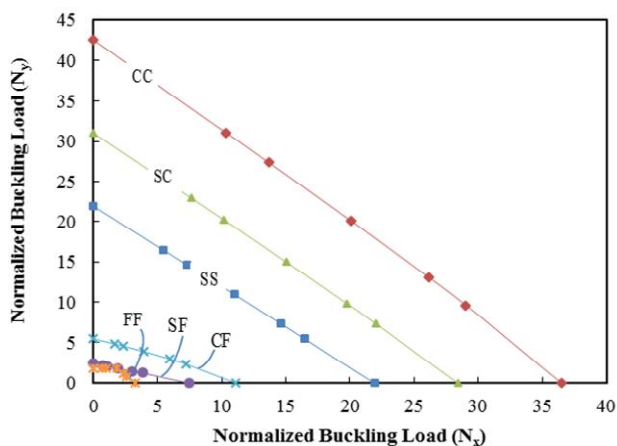


شکل ۴- ضریب بدون بعد کماتش در مقابل نسبت بعد به ضخامت  $a/h$  یک ورق چندلایه ارتوترپیک مربعی با شرایط مرزی چهار طرف مفصل با ترکیب لایه  $[0^0 / 90^0]_n$  برای  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  بر حسب تعداد لایه‌ها با  $E_1 / E_2 = 40$

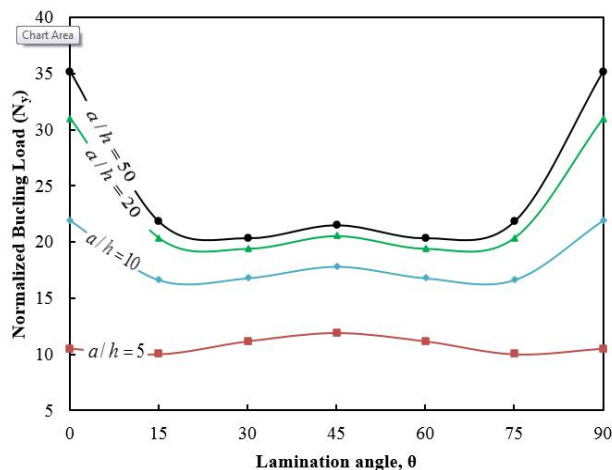
### ۳-۱۰- کماتش ورق مربعی با ترکیب لایه $[\theta^0 / -\theta^0]_n$ برای زوایای مختلف

ضریب بدون بعد کماتش ورق چندلایه ارتوترپیک مربعی با ترکیب لایه  $[\theta^0 / -\theta^0]_n$  در مقابل تعداد لایه‌ها با دو، چهار و شش لایه بر اساس تئوری زیگزاگ برای نسبت  $E_1 / E_2$  مختلف و  $a/h = 10$  تحت کماتش در راستای محور  $y$  در شکل (۵) برای زوایای صفر تا ۹۰ درجه ارائه شده است.

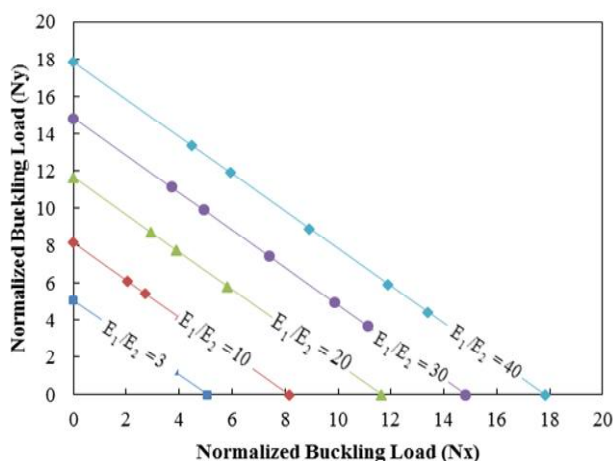
با توجه به شکل (۵) با افزایش مدول الاستیسیته بدون توجه به افزایش تعداد لایه‌ها ضریب کماتش افزایش می‌یابد البته بایستی دقت کرد که در نسبت مدول الاستیسیته پایین  $E_1 / E_2 = 3$  افزایش تعداد لایه‌ها تأثیر ناچیزی بر ضریب کماتش دارد علی‌رغم آنکه با افزایش نسبت مدول الاستیسیته تأثیر افزایش تعداد لایه‌ها مشهود است. در ورق با ترکیب لایه  $[\theta^0 / -\theta^0]$  با دو لایه با افزایش زاویه الیاف از صفر تا ۳۰ درجه ضریب کماتش کاهش یافته و از ۳۰ تا ۴۵ افزایش می‌یابد اما برای ترکیب لایه  $[\theta^0 / -\theta^0]_2$  با چهار لایه و  $[\theta^0 / -\theta^0]_3$  با شش لایه از صفر تا ۴۵ درجه ضریب کماتش افزایش می‌یابد. روند ذکر شده برای ورق‌ها از ۴۵ تا ۹۰ درجه



شکل ۷- نمودار اندرکنش کمانش ورق چندلایه مربعی ارتوتروپیک با ترکیب لایه  $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  برای نسبت مدول الاستیسته مختلف و  $E_1/E_2 = 40$  و  $a/h = 10$  تحت شرایط مرزی مختلف



شکل ۶- ضرب بدون بعد کمانش در مقابل زوایای مختلف الیاف یک ورق چندلایه ارتوتروپیک مربعی با شرایط مرزی چهار طرف مفصل با ترکیب لایه  $[\theta^\circ / -\theta^\circ]$  برای نسبت بعد به ضخامت  $a/h$  مختلف و مدول الاستیسته  $E_1/E_2 = 40$



شکل ۸- نمودار اندرکنش کمانش ورق چندلایه مربعی ارتوتروپیک با ترکیب لایه  $[45^\circ / -45^\circ]$  با  $a/h = 10$  برای نسبت مدول الاستیسته مختلف

شرایط مرزی مختلف و بر اساس تئوری زیگزاگ و در شکل (۸) نمودار اندرکنش کمانش ورق چندلایه مربعی چهار طرف مفصل ارتوتروپیک با ترکیب لایه  $[45^\circ / -45^\circ]$  با نسبت بعد به ضخامت  $a/h = 10$  برای نسبت مدول الاستیسته  $E_1/E_2$  مختلف و تحت نیروهای درون صفحه و بر اساس تئوری برشی ردی ارائه شده است.

شکل (۷) نشان می‌دهد که در صورتی که از شرایط مرزی مفصلی-مفصلی برخی از درجات آزادی مقید شوند به عبارتی

زاویه  $45^\circ$  تا  $90^\circ$  درجه نسبت به  $45^\circ$  درجه اول تقارن دارد.

### ۱۲-۳- بررسی اثر اندرکنش کمانش دو جهته ورق‌های لایه‌ای

در این بخش اثر هم‌زمان نیروهای درون صفحه اعمالی در دو راستا مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل (۷) نمودار اندرکنش کمانش ورق چندلایه مربعی ارتوتروپیک با ترکیب لایه  $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  برای نسبت بعد به ضخامت  $a/h = 10$  و مدول الاستیسته  $E_1/E_2 = 40$  تحت نیروهای درون صفحه برای

قیود تکیه‌گاهی افزایش یابد موجب افزایش ضریب کمانش در هر دو راستا و به یک میزان می‌شود اما اگر برخی از درجات آزادی از مقید بودن بیرون آیند موجب کاهش ضریب کمانش می‌شود ولی برخلاف حالت قبل تغییرات ضریب کمانش در دو راستا به یک اندازه نیست و نمودار آن به صورت غیرخطی در می‌آید.

با توجه به شکل (۸)، با افزایش نسبت مدول الاستیسیته  $E_1/E_2$ ، ضریب کمانش در دو راستا افزایش می‌یابد و حاصل مجموع بارهای درون صفحه راستاهای طولی و عرضی که به ورق اعمال می‌شود در لحظه کمانش مقدار ثابتی دارد که این امر را می‌توان با توجه به خطی بودن نمودار دریافت.

#### ۴- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر به بررسی کمانش ورق‌های لایه‌ای ضخیم پرداخته شده و همچنین روش نوار محدود به‌عنوان روش تحقیق انتخاب شده است که در جهت طولی نوار دارای ترکیبات سینوس و کسینوس برای ارضاء شرایط مرزی لبه‌های عرضی ورق و در جهت عرضی دارای توابع مثلثاتی در راستای محور  $Y$  و صفحه و توابع لاگرانژی برای جابه‌جایی‌های درون صفحه است. جهت استخراج ماتریس‌های سختی و ماتریس‌های هندسی از رابطه کار مجازی استفاده شده است. به این ترتیب پس از درون‌یابی تغییر شکل‌ها، رابطه کار مجازی برای هر المان نوشته شده و ماتریس‌های سختی استاندارد و سختی هندسی بر اساس آن استخراج شده و در نهایت مسئله کمانش مدنظر به کمک حل یک مسئله مقادیر ویژه بررسی شد. از نتایج حاصل از تحقیق حاضر می‌توان دریافت که افزایش تعداد لایه‌ها موجب افزایش ضریب کمانش می‌شود اما تأثیر افزایش تعداد لایه‌ها نرخ کاهشی پیدا می‌کند. نتایج ارائه شده برای حالتی که  $K_g$  در رابطه (۶۶) شامل هر سه جمله آن می‌شود، یعنی اثر هر سه مؤلفه  $u$ ،  $v$  و  $w$  در نظر گرفته شده است، مقدار کمتری برای ضریب کمانش در مقایسه با حالتی که  $K_g$  در رابطه (۶۶) تنها شامل جمله سوم آن می‌شود، یعنی تنها اثر مؤلفه  $w$  ارائه می‌کند که تأثیر این موضوع در

ورق‌های ضخیم و نسبتاً ضخیم نسبت به ورق‌ها نازک مشهودتر است. نمودارهای اندرکنش ارائه شده در صورتی که از شرایط مرزی مفصلی-مفصلی برخی از درجات آزادی مقید شوند به عبارتی قیود تکیه‌گاهی افزایش یابد موجب افزایش ضریب کمانش در هر دو راستا و به یک میزان می‌شود اما اگر برخی از درجات آزادی از مقید بودن بیرون آیند موجب کاهش ضریب کمانش می‌شود ولی برخلاف حالت قبل تغییرات ضریب کمانش در دو راستا به یک اندازه نیست و نمودار آن به صورت غیرخطی در می‌آید.

#### پیوست‌ها

پیوست ۱- در رابطه (۲۳) هر یک از ماتریس‌های مرتبط با کرنش خمشی برحسب توابع مثلثاتی در راستای محور  $Y$  و توابع لاگرانژ و هرمیتی در راستای محور  $X$  به کمک روش نوار محدود و برای  $i=1,2,3$  به صورت زیر بیان شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{im}^{b-\varepsilon} &= \begin{bmatrix} N'_i Y_{im} & N'_i Y'_{im} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i Y'_{im} & N_i Y_{im} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i Y_{im} & N_i Y'_{im} & N'_i Y_{im} & N'_i Y'_{im} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 8}; \\
 \mathbf{B}_{im}^{b-\kappa} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -W''_i Y_{im} & -R''_i Y_{im} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -W_i Y'_{im} & -R_i Y'_{im} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2W'_i Y'_{im} & -2R'_i Y'_{im} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 8}; \\
 \mathbf{B}_{im}^{b-\chi_a} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i Y'_{im} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_i Y_{im} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 8}; \\
 \mathbf{B}_{im}^{b-\chi_b} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i Y'_{im} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_i Y_{im} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 8}; \\
 \mathbf{B}_{im}^{b-\chi_c} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_i Y_{im} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i Y'_{im} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 8}; \\
 \mathbf{B}_{im}^{b-\chi_d} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_i Y_{im} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_i Y_{im} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 8} \quad (\text{پ-۱})
 \end{aligned}$$

در ماتریس‌های (پ-۱) و ماتریس‌هایی که در ادامه ذکر

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{ij}^s) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (F'(z)_{\lambda_1})^T dz; \\
(\mathbf{B}_{ij}^s, \mathbf{C}_{ij}^s) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} F'(z)_{\gamma_2} (F'(z)_{\lambda_1}, F'(z)_{\gamma_2}) dz \\
(\mathbf{D}_{ij}^s, \mathbf{E}_{ij}^s, \mathbf{F}_{ij}^s) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} F'(z)_{\lambda_2} (F'(z)_{\lambda_1}, F'(z)_{\gamma_2}, F'(z)_{\lambda_2}) dz \\
(\mathbf{G}_{ij}^s, \mathbf{H}_{ij}^s, \mathbf{I}_{ij}^s, \mathbf{J}_{ij}^s) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} F'(z)_{\gamma_1} (F'(z)_{\lambda_1}, F'(z)_{\gamma_2}, F'(z)_{\lambda_2}, F'(z)_{\gamma_1}) dz
\end{aligned}$$

(پ-۴)

بالانویس (۴) به عنوان نمونه در  $F'(z)_{\lambda_1}$  مشتق نسبت به مختصه  $Z$  بوده و  $i, j = 4, 5$  هستند.

**پیوست ۳-** در رابطه (۵۰) که مرتبط با کار مجازی خارجی مربوط به نیروهای درون صفحه است،  $\mathbf{A}^{gu}$ ،  $\mathbf{B}^{gu}$  و ... ماتریس ضرایب نیرویی به ابعاد  $2 \times 2$  هستند و به فرم روابط زیر بیان شده‌اند:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{ij}^{gu}, \mathbf{B}_{ij}^{gu}, \mathbf{C}_{ij}^{gu}) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \sigma_z (\lambda, z, z^T) dz; \\
(\mathbf{D}_{ij}^{gu}, \mathbf{E}_{ij}^{gu}, \mathbf{F}_{ij}^{gu}) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \sigma_z F(z)_{\lambda_1} (\lambda, z, F(z)_{\lambda_1}) dz \\
(\mathbf{G}_{ij}^{gu}, \mathbf{H}_{ij}^{gu}, \mathbf{I}_{ij}^{gu}, \mathbf{J}_{ij}^{gu}) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \sigma_z F(z)_{\lambda_2} (\lambda, z, F(z)_{\lambda_1}, F(z)_{\lambda_2}) dz
\end{aligned}$$

(پ-۵)

به همین ترتیب در روابط (۵۱) و (۵۲)،  $\mathbf{A}^{gv}$ ،  $\mathbf{B}^{gv}$  و ... همچنین  $\mathbf{A}^{gw}$  ماتریس ضرایب نیرویی به ابعاد  $2 \times 2$  هستند و به فرم زیر بیان شده‌اند:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{ij}^{gv}, \mathbf{B}_{ij}^{gv}, \mathbf{C}_{ij}^{gv}) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \sigma_z (\lambda, z, z^T) dz; \\
(\mathbf{D}_{ij}^{gv}, \mathbf{E}_{ij}^{gv}, \mathbf{F}_{ij}^{gv}) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \sigma_z F(z)_{\gamma_2} (\lambda, z, F(z)_{\gamma_2}) dz \\
(\mathbf{G}_{ij}^{gv}, \mathbf{H}_{ij}^{gv}, \mathbf{I}_{ij}^{gv}, \mathbf{J}_{ij}^{gv}) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \sigma_z F(z)_{\gamma_1} (\lambda, z, F(z)_{\gamma_2}, F(z)_{\gamma_1}) dz
\end{aligned}$$

خواهد شد، ماتریس‌ها برای  $i=2$  با حذف ستون پنجم و ششم به دست می‌آیند. همانند روند ذکر شده در محاسبات مربوط به ماتریس‌های کرنش خمشی، ماتریس‌های مرتبط با کرنش برشی در رابطه (۲۴) به صورت زیر نمایش داده شده‌اند:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{im}^{s-\gamma_a} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_i Y_{1m} & \circ \end{bmatrix}_{2 \times 8}; \\
\mathbf{B}_{im}^{s-\gamma_b} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_i Y_{2m} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}_{2 \times 8}; \\
\mathbf{B}_{im}^{s-\gamma_c} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_i Y_{3m} & \circ \end{bmatrix}_{2 \times 8}; \\
\mathbf{B}_{im}^{s-\gamma_d} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_i Y_{4m} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}_{2 \times 8}
\end{aligned}$$

(پ-۲)

**پیوست ۲-** در رابطه (۳۷) که مربوط به کار مجازی داخلی مرتبط به خمش است،  $\mathbf{A}^b$ ،  $\mathbf{B}^b$  و ... ماتریس ضرایب سختی  $3 \times 3$  مربوط به خمش و برحسب سختی لایه‌ها هستند و به فرم روابط زیر بیان شده‌اند:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{ij}^b, \mathbf{B}_{ij}^b, \mathbf{C}_{ij}^b) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (\lambda, z, z^T) dz; \\
(\mathbf{D}_{ij}^b, \mathbf{E}_{ij}^b, \mathbf{F}_{ij}^b) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} F(z)_{\lambda_1} (\lambda, z, F(z)_{\lambda_1}) dz \\
(\mathbf{G}_{ij}^b, \mathbf{H}_{ij}^b, \mathbf{I}_{ij}^b, \mathbf{J}_{ij}^b) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} F(z)_{\gamma_2} (\lambda, z, F(z)_{\lambda_1}, F(z)_{\gamma_2}) dz \\
(\mathbf{L}_{ij}^b, \mathbf{O}_{ij}^b, \mathbf{P}_{ij}^b, \mathbf{R}_{ij}^b, \mathbf{S}_{ij}^b) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} F(z)_{\gamma_1} (\lambda, z, F(z)_{\lambda_1}, F(z)_{\gamma_2}, F(z)_{\lambda_2}) dz \\
(\mathbf{T}_{ij}^b, \mathbf{U}_{ij}^b, \mathbf{V}_{ij}^b, \mathbf{W}_{ij}^b, \mathbf{X}_{ij}^b, \mathbf{Z}_{ij}^b) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} F(z)_{\gamma_1} (\lambda, z, F(z)_{\lambda_1}, F(z)_{\gamma_2}, F(z)_{\lambda_2}, F(z)_{\gamma_1}) dz
\end{aligned}$$

(پ-۳)

در روابط (پ-۳)،  $i, j = 1, 2, 6$  هستند. همچنین در رابطه (۳۹) که مربوط به کار مجازی داخلی مرتبط به برش است،  $\mathbf{A}^s$ ،  $\mathbf{B}^s$  و ... ماتریس ضرایب سختی  $2 \times 2$  مربوط به برش هستند و برحسب سختی لایه‌ها به فرم روابط زیر بیان شده‌اند:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{im}^{u-\kappa_1} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & -W_i'' Y_{1m} & -R_i'' Y_{1m} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -W_i' Y_{1m}' & -R_i' Y_{1m}' & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -W_i Y_{1m} & -R_i Y_{1m} & \circ & \circ \end{bmatrix}_{7 \times 8} \\
\mathbf{B}_{im}^{v-\kappa_2} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & -W_i' Y_{1m}' & -R_i' Y_{1m}' & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -W_i Y_{1m} & -R_i Y_{1m} & \circ & \circ \end{bmatrix}_{7 \times 8} \\
\mathbf{B}_{im}^{\lambda_1} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_i' Y_{1m} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_i Y_{1m}' & \circ \end{bmatrix}_{7 \times 8} ; \\
\mathbf{B}_{im}^{\lambda_2} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_i' Y_{1m} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_i Y_{1m}' \end{bmatrix}_{7 \times 8} \\
\mathbf{B}_{im}^{w-\varepsilon_3} &= \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & W_i' Y_{1m} & R_i' Y_{1m} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & W_i Y_{1m} & R_i Y_{1m} & \circ & \circ \end{bmatrix}_{7 \times 8}
\end{aligned}$$

(V-پ)

$$\mathbf{A}_{ij}^{gw} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \boldsymbol{\sigma}_s dz = \begin{bmatrix} n_x & n_{xy} \\ n_{xy} & n_y \end{bmatrix} \quad (\text{پ-۶})$$

در روابط (پ-۵) و (پ-۶)،  $i, j = 1, 2$  هستند. همچنین ماتریس‌های  $\mathbf{B}_m^{u-\varepsilon_1}, \dots, \mathbf{B}_m^{v-\varepsilon_2}$  و  $\dots$  و  $\mathbf{B}_m^{w-\varepsilon_3}$  در روابط (۵۳) تا (۵۵) که مرتبط با سختی هندسی ورق هستند و برحسب توابع شکل مثلثاتی و چندجمله‌ای با توجه به روش نوار محدود استخراج شدند به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mathbf{B}_{im}^{u-\varepsilon_1} = \begin{bmatrix} N_i' Y_{1m} & N_i' Y_{1m}' & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ N_i Y_{1m} & N_i Y_{1m}' & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}_{7 \times 8} ;$$

## واژه‌نامه

- |                                  |  |  |
|----------------------------------|--|--|
| 1. transverse shear strains      | 4. normal shear strain                       | 6. Reddy's third-order shear deformation theory (TSDT) |
| 2. Equivalent Single Layer (ESL) | 5. Cho's higher-order zigzag laminate theory |  |
| 3. Refined plate theory          |  |  |

## مراجع

- Reissner, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on The Bending of Elastic Plates", *Journal of Applied Mechanics (American Society of Mechanical Engineers: ASME)*, Vol. 12, pp. 69-77, 1945.
- Mindlin, R. D., "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", *Journal of Applied Mechanics (American Society of Mechanical Engineers: ASME)*, Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- Reddy, J. N., "A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- Cho, M., and Parmerter, R., "Efficient Higher order Composite Plate Theory for General Lamination Configurations", *AIAA Journal*, Vol. 31, pp. 1299-1306, 1993.
- Xiaoping, S., and Liangxin, S., "An Improved Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates", *Computers & Structures*, Vol. 50, pp. 231-236, 1994.
- Zenkour, A., and Fares, M., "Buckling and Free Vibration of Non-homogeneous Composite Cross-Ply Laminated Plates with Various Plate Theories", *Composite Structures*, Vol. 44, pp. 279-287, 1999.
- Topdar, P., Sheikh, A., and Dhang, N., "Finite Element Analysis of Composite and Sandwich Plates using a Continuous Inter-laminar Shear Stress Model", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 5, pp. 207-231, 2003.
- Zenkour, A., "Analytical Solution for Bending of Cross-ply Laminated Plates under Thermo-mechanical Loading", *Composite Structures*, Vol. 65, pp. 367-379, 2004.
- Zhong, H., and Gu, C., "Buckling of Symmetrical Cross-ply Composite Rectangular Plates under A Linearly Varying In-Plane Load", *Composite Structures*, Vol. 80, pp. 42-48, 2007.
- Kulkarni, S., and Kapuria, S., "Free Vibration Analysis of Composite and Sandwich Plates using An Improved Discrete Kirchhoff Quadrilateral Element Based on Third-order Zigzag Theory", *Computational Mechanics*, Vol. 42, pp. 803-824, 2008.
- Kim, S. E., Thai, H. T., and Lee, J., "A Two Variable Refined Plate Theory for Laminated Composite Plates", *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 197-205, 2009.
- Thai, H. T., and Kim, S. E., "Free Vibration of Laminated Composite Plates using Two Variable Refined Plate Theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, pp. 626-633, 2010.
- Kumar, J. S., Raju, T. D., and Reddy, K. V. K., "Vibration Analysis of Composite Laminated Plates using Higher-order Shear Deformation Theory With Zig-Zag Function", *Indian Journal of Science and*

- Technology*, Vol. 4, pp. 960-966, 2011.
14. Sahoo, R., and Singh, B., "A New Shear Deformation Theory for the Static Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 75, pp. 324-336, 2013.
  15. Sayyad, A. S., and Ghugal, Y. M., "Flexure of Cross-ply Laminated Plates using Equivalent Single Layer Trigonometric Shear Deformation Theory", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 51, pp. 867-891, 2014.
  16. Sayyad, A. S., and Ghugal, Y. M., "On the Buckling of Isotropic, Transversely Isotropic and Laminated Composite Rectangular Plates", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 14, p. 1450020, 2014.
  17. Akhras, G., and Li, W., "Spline Finite Strip Analysis of Composite Plates Based on Higher-order Zigzag Composite Plate Theory", *Composite Structures*, Vol. 78, pp. 112-118, 2007.
  18. Zenkour, A., "Buckling of Fiber-Reinforced Viscoelastic Composite Plates Using Various Plate Theories", *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 50, pp. 75-93, 2004.
  19. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd ed., CRC Press, 2004.