نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

اجزای محدود غنی‌سازی شده تطبیقی اتوماتیک به‌وسیله توابع غنی‌ساز پوششی

حامد ارزانی* و الهام خوش‌باور راد
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۶/۲۰ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۱۲/۲۲)

چکیده– در این مقاله روشی برای بهبود جواب‌های اجزای محدود استاندارد ارائه شده است. روش نرم خطای L_2 برای تعیین خطای گرهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس متناسب با خطای گرهی، مرتبه مناسبی از توابع درون‌یاب غنی‌ساز پوششی به‌طور خودکار انتخاب شده و در فرایند حل مجدد پاسخ‌های اولیه، اصلاح می‌شوند. چرخه تعیین خطا و استفاده از توابع غنی‌سازی پوششی تا رسیدن خطای حوزه به مقدار مجاز از پیش تعیین شده ادامه خواهد یافت. از مزایای توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوششی آنکه، علاوه‌بر مقادیر به‌دست آمده از درون‌یابی استاندارد برای هر المان، تأثیر نتایج المان‌های مجاور هر گره را نیز درنظر خواهند گرفت. روال محاسباتی روش پیشنهادی با به‌کارگیری نرم خطای معرفی شده در محیط متلب برنامه‌نویسی شده و برای مثال‌های متنوعی مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه جواب‌های حاصل از روش پیشنهادی با جواب دقیق و روش‌های دیگر محققان در حوزه مسائل الاستیسیته خطی، حکایت از کارایی و دقت قابل قبول روش پیشنهادی دارد.

واژه‌های کلیدی: اجزای محدود غنی شده، تولید مش، توابع درون‌یاب پوشش، تحلیل تطبیقی.

Automatic Adaptive Finite Element Enrichement using Interpolation Cover Functions

H. Arzani* **and E. Khoshbavar Rad**

Faculty of Civil Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Lavizan, Tehran, Iran.

Abstract: ***In this paper, a method is proposed to improve the results of the standard finite element method. L_2 norm is used to determine the nodal error. In the next step, the appropriate order of the interpolation cover is seclected to be proportional to the nodal error and the results are corrected. The error computation procedure and the use of covering enrichment functions will continue until the error reaches the specified value. Cover enrichment interpolation functions will consider the effects of the adjacent elements of each node, in addition to the values obtained from the standard interpolation for each element. Computation rules are programmed in the matlab program and considered for the same examples. Comparison of the results of the proposed***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: h.arzani@sru.ac.ir

method with the exact solutions and the results of the methods proposed by the other researchers in the field of linear elasticity indicates the efficiency and accuracy of the proposed method.

Keywords: ***Mesh refinement, Enriched finite element, Mesh generation, Interpolation cover functions, Adaptive analysis.***

فهرست علائم

$\mathbf{a}_i$	درجات آزادی اضافی مرتبط با گره i	p_i^p	متغیر میدانی به اضافه درجات آزادی مربوط به توابع پوشش
C_i	ناحیه پوشش گره i ام (m^2)	R	صفحه دوبعدی (m)
D_h	نرخ تغییرات	u	جواب‌های مسئله
E	مدول یانگ	u	متغیر میدانی
E(K)	خطای عددی	u_0	شرایط مرزی مسئله
e	خطا	u_h	جواب‌های اصلاح شده
e_u	خطا	x	متغیر (m)
f	تابع	$(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$	فاصله از گره i (m)
Hi	دورن‌یاب غنی‌ساز	α	شرایط هندسی مسئله
h	شرایط هندسی مسئله	β	شرایط هندسی مسئله
h_i	درون‌یاب خطی	γ	۵۰ درصد بزرگ‌ترین خطای گرهی موجود
h_τ	طول یال (m)	ν	ضریب پواسون
I	ممان اینرسی (m^4)	σ_x	تنش در راستای x (N/m^2)
L	طول (m)	σ_y	تنش در راستای y (N/m^2)
n	تعداد گره‌ها	τ_{xy}	تنش برشی (N/m^2)
n_i	خطای گره i ام	Ω	حوزه مسئله (m^2)
$\mathbf{n}_\tau$	بردار یکه نرمال بر یال	$\partial\Omega$	مرز حوزه (m)
P	نیرو (N)	∇	گرادیان
p	مرتبه تابع غنی‌سازی پوشش		

۱- مقدمه

امروزه نیاز روزافزون فناوری، به حل سریع و دقیق مسائل پیچیده، روش‌های عددی را به یکی از مهم‌ترین مباحث در حوزه علوم مهندسی تبدیل کرده است. روش اجزای محدود به‌عنوان یکی از قوی‌ترین این روش‌ها، جایگاه ویژه‌ای در حل مسائل مهندسی و به‌خصوص مسائل مکانیک جامدات را دارد. به‌تدریج با نیاز به حل مسائل پیچیده‌تر به‌کمک این روش و لزوم حل سریع‌تر و اقتصادی‌تر، آنالیز تطبیقی اهمیت ویژه‌ای یافته است. در روش آنالیز تطبیقی، نخستین گام تعیین خطای حوزه مورد بررسی است. به‌عنوان یکی از روش‌های توانمند در این زمینه، رویکرد براورد خطا بر اساس نرم L_2 را می‌توان نام برد. جانسون و اریکسون در سال ۱۹۸۷ براورد کننده خطا بر اساس نرم L_2 برای معادلات دیفرانسیل جزئی را معرفی کرده و در سال ۱۹۹۱ این روش را برای معادلات سهموی- بیضوی که زیر شاخه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی هستند، تعمیم دادند [۱ و ۲]. دلیل استفاده از براورد کننده خطا، تعیین زیر حوزه‌های دارای خطای بالاتر از معیار تعیین شده است که به‌وسیله آن می‌توان با اصلاح

موضعی حوزه مورد بررسی، از افزایش حجم محاسباتی جلوگیری کرده و به دقت مورد نظر دست یافت. بعد از مشخص شدن زیرحوزه‌های دارای خطای بالاتر از معیار تعیین شده، راهکارهای گوناگونی برای اعمال اصلاحات بر شبکه‌بندی مورد بررسی ارائه شد که مهم‌ترین این روش‌ها شامل روش افزایش تعداد المان، افزایش مرتبه المان و جابه‌جایی گره‌ها هستند. از آخرین نسخه‌های موجود ارائه شده برای برخی از این روش‌ها، می‌توان به مراجع [۵-۳] اشاره کرد. از معایب این‌گونه روش‌ها، می‌توان به بسیار ریزشدن شبکه‌بندی در نقاط دارای گرادیان بالای تنش اشاره کرد. در این روش‌ها، با وجود اینکه تمام حوزه مورد تظریف قرار نمی‌گیرد، همان بخش‌هایی که مورد تظریف قرار خواهند گرفت نیز به تعداد زیادی المان جهت رسیدن به خطای مجاز نیاز خواهند داشت. روش عددی منیفلد از دیگر راهکارهای مؤثر در راستای افزایش دقت نتایج روش المان محدود است. شی و همکاران در سال ۱۹۸۵ در راستای توسعه روش اجزای محدود، روش عددی منیفلد را که ترکیبی از مزایای روش اجزای محدود استاندارد و روش عددی DDA (تحلیل تغییر شکل‌های ناپیوسته) است، را ارائه کردند [۶]. روش عددی منیفلد یک تکنیک مؤثر عددی، برای حل مسائل در حوزه مکانیک جامدات است که در سال‌های اخیر مورد توجه محققین قرار گرفته است [۷]. در سال ۲۰۱۳ کیم و بته روش غنی‌سازی به‌وسیله توابع درون‌یاب پوشش که از روش منیفلد الهام گرفته را معرفی کردند. آنها به‌منظور بالا بردن نرخ همگرایی در روش پیشنهادی خود از شبکه‌بندی حوزه مسئله با استفاده از المان‌های اجزای محدود مرتبه پایین، بهره بردند. مبنای این روش استفاده از اجزای محدود غنی شده به‌وسیله توابع درون‌یاب پوشش بر روی هر المان است. در این روش، تأثیر پاسخ المان‌های مجاور هر گره، در نتایج گره مورد بررسی درنظر گرفته می‌شود. این روش قابلیت استفاده برای المان‌های اعوجاجی را نیز دارد [۸ و ۹]. در اولین مرحله معرفی روش ارائه شده توسط کیم و بته، با وجود دست‌یابی به نتایج با دقت کافی، استفاده از توابع درون‌یاب با معایبی همراه بوده که از جمله آن می‌توان به اعمال مرتبه توابع به‌صورت دستی، عدم به‌کارگیری معیار بهتری برای خطا، بالا بودن درجات آزادی و سایر این موارد را نام برد. در فعالیت‌های پژوهشی بعدی این محققان، تلاش‌هایی برای رفع مشکلات گفته شده ارائه کردند و اصلاحات صورت گرفته منجر به تبدیل روش به یک روش جامع و کامل‌تر نشد و ایراداتی به آن وارد است. به‌عنوان مثال، برای شبکه‌بندی حوزه حل مسائل از همان ابتدا نیاز به شبکه تقریباً متراکمی بوده تا به‌وسیله آن از افزایش بی‌رویه مرتبه توابع درون‌یاب جلوگیری به‌عمل آید. از دیگر موارد با اهمیت می‌توان عدم ارائه فرمول‌بندی جامع و خودکار برای به‌کارگیری مرتبه مناسب و حداقلی از توابع درون‌یاب را نام برد. در واقع در هر مسئله، با توجه به شرایط حاکم بر مسئله نیاز به انتخاب ضرایب ثابتی بوده که بتواند شرایط مسئله را شبیه‌سازی کند.

نویسندگان این مقاله پس از مدل‌سازی فعالیت‌های انجام شده قبلی و بررسی مزایا و معایب روش استفاده از توابع درون‌یاب، راهکاری برای بهبود روش و ارتقای قابلیت‌های الگوریتم به‌صورت خودکار و به‌کارگیری اتوماتیک معیار خطای استاندارد برای گزینش المان‌های پرخطا را ارائه کردند. هدف دیگر الگوریتم پیشنهادی کاهش پیچیدگی‌های محاسبات مربوط به المان‌های چهار ضلعی و بیشتر در فرایند تعیین خطا است. فرایندهای مختلف روش پیشنهادی در بخش‌های بعدی به‌طور کامل ارائه شده است.

از دیگر تلاش‌های صورت گرفته در راستای بالا بردن دقت نتایج، در روش اجزای محدود و روش بدون شبکه، که هریک با رویکردی نوین به حل مسائل الاستیسیته پرداخته‌اند، می‌توان به روش‌های ارائه شده در مراجع [۱۲-۱۰] اشاره کرد.

در بخش دوم این مقاله براورد کننده خطای المانی و نحوه تخمین خطای حوزه ارائه شده است. بخش سوم مربوط به حل تطبیقی در روش اجزای محدود غنی شده با

توابع درون‌یاب پوشش است. در بخش چهارم الگوریتم روش پیشنهادی و در بخش پنجم مثال‌هایی در حوزه مسائل الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. درنهایت مقایسه‌ای بین نتایج روش پیشنهادی و روش سایر محققین ارائه شده است.

۲- تخمین خطا برای حل اجزای محدود

در حالت ساده برای یک مسئله استاندارد در فضای بیضوی- سهموی، که زیر مجموعه معادلات دیفرانسیل جزئی هستند، معادلات حاکم بر حوزه مسئله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &= f(x) \qquad x \in \Omega, \\ u(x) &= u_{۰} \qquad\quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن Ω حوزه مورد نظر، $\partial\Omega$ محدوده مرز حوزه، $\nabla = (\partial^{۲} u / \partial x_{۱}^{۲}) + (\partial^{۲} u / \partial x_{۲}^{۲})$ و تابع f مقدار سمت راست معادله و $u_{۰}$ به‌عنوان شرایط مرزی مسئله هستند.

خطای حل تغییرمکان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_u = u - u_h \tag{۲}$$

که در آن u جواب‌های به‌دست آمده از روش اجزای محدود و u_h جواب‌های اصلاح شده (تقریبی) است. برای محاسبه خطا نیاز به استفاده از یک تابع تخمین‌زن خطا است. تابع تخمین‌زننده خطای استفاده شده در روش پیشنهادی این مقاله بر اساس نرم خطای $L_۲$ ارائه شده توسط جانسون و اریکسون است [۱ و ۲]. رابطه خطا برای حل خطی و تقریبی اجزای محدود u_h به‌روش نرم $L_۲$ به‌صورت زیر است:

$$\|\nabla(u - u_h)\| \le \alpha \|hf\| + \beta D_h(u_h) \tag{۳}$$

مقادیر α، β و h مربوط به شرایط هندسی المان‌های تشکیل‌دهنده حوزه بوده که در مرجع گفته شده نحوه محاسبه آنها به‌صورت کامل تشریح شده است و D_h بیانگر نرخ تغییرات کمیت مورد بررسی روی یال یک المان بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_h(v) = (\sum_{\tau \in E_i} h_\tau^{۲} [\frac{\partial v}{\partial n_\tau}]^{۲})^{۱/۲} \tag{۴}$$

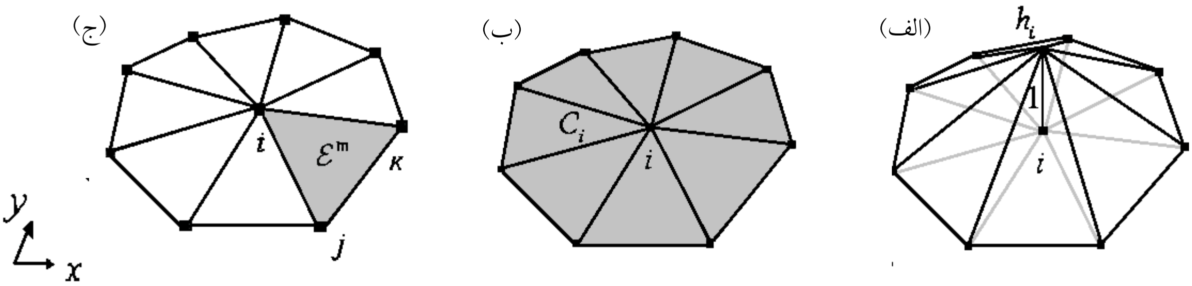
که در آن h_τ طول یال τ و n_τ بردار یکه نرمال بر یال مربوطه بوده و عبارت داخل کروشه نشان‌دهنده نرخ تغییرات کمیت مورد بررسی در طول یال مورد نظر است، که برای همه یال‌های المان E_i این مقادیر با یکدیگر جمع می‌شوند. درنهایت با درنظر گرفتن شرایط تنش صفحه‌ای و روابط حاکم بر حوزه مسئله، فرم کلی تابع تخمین خطا برای یک المان در معادلات بیضوی برابر است با:

$$E(K) = \alpha \|h(f - \alpha u)\|_K + \beta(\frac{۱}{۲} \sum_{\tau \in k} h_\tau^{۲} (n_\tau . c\nabla u_h)^{۲})^{۱/۲} \tag{۵}$$

که در آن $E(K)$ بیانگر خطای عددی به‌دست آمده به‌روش نرم $L_۲$ برای المان Kام است. بدین ترتیب با استفاده از رابطه اخیر مقدار خطا برای هر المان تعیین می‌شود، که از آن در هردو روش تظریف h و p استفاده می‌شود. در تظریف به‌روش h از مقادیر المانی خطا استفاده شده در حالی که در تظریف به‌روش p ابتدا مقادیر المانی با استفاده از درون‌یابی به مقادیر گره‌ای تبدیل شده و سپس مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳- غنی‌سازی به‌روش توابع درون‌یاب پوشش

در این قسمت فرمولاسیون اجزای محدود غنی شده با استفاده از توابع درون‌یاب پوشش برای المان‌های مرتبه پایین اجزای محدود آورده شده است. چنانچه برای گسسته‌سازی یک حوزه از شبکه‌بندی با المان‌های استاندارد استفاده شود، دقت پاسخ‌ها به نوع و ابعاد المان وابسته است. در این نوع غنی‌سازی، برای هر گره یک زیرحوزه پوششی درنظر گرفته می‌شود. هر زیر حوزه دارای یک تابع درون‌یاب با مرتبه مشخص است. در این زیر حوزه‌ها در صورت به‌کارگیری توابع مرتبه بالاتر نسبت به حالت استاندارد، نتایج منجر به دقت بالاتر می‌شود. مطابق شکل (۱- الف) تابع h_i یک درون‌یاب خطی برای گره i است که مقدار آن در گره i برابر یک و در سایر نقاط وابسته به این گره برابر صفر است و المان‌های متصل به گره i به‌عنوان زیر حوزه این گره محسوب می‌شوند. استفاده از توابع خطی برای درون‌یابی زیر حوزه‌ها، تقریب‌های خطی با حجم کم محاسباتی و سرعت بالا را به‌دنبال خواهد داشت. ناحیه‌ای که برای گره i توسط تابع خطی h_i مورد درون‌یابی قرار می‌گیرد، ناحیه پوشش گره i ام نامیده شده و با C_i نمایش داده می‌شود (شکل ۱- ب).



شکل ۱- توصیف نحوه ارتباط زیرحوزه‌های غنی شده با استفاده از توابع درون‌یاب پوشش: الف) تابع شکل خطی متداول، ب) ناحیه پوشش یا المان‌های تحت تأثیر توابع درون‌یاب پوشش و ج) یک المان غنی شده

برای المان مثلثی m ام، با ۳ گره i و j و k، همان‌طور که در شکل (۱- ج) مشاهده می‌شود، ناحیه پوششی المان برابر با اشتراک بین نواحی پوشش‌های C_i، C_j و C_k است. بعد از تعیین ناحیه پوشش گره‌ها، نوبت به درون‌یابی ناحیه‌های پوششی خواهد رسید. درون‌یابی با استفاده از چند جمله‌ایی با مرتبه p صورت می‌گیرد. مقدار درون‌یابی شده مجهول u در گره i با توجه به ناحیه پوششی این گره در رابطه (۶) نمایش داده شده است:

$$P_i^p[u] = u_i + \left[\bar{x}_i \;\; \bar{y}_i \;\; \bar{x}_i^2 \;\; \bar{x}_i\bar{y}_i \;\; \bar{y}_i^2 \;\; \ldots \;\; \bar{y}_i^p\right] a_i \qquad (۶)$$

در رابطه (۶) متغیرهای $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ بیانگر فاصله از گره i و بردار $\mathbf{a}_i$ نشان‌دهنده درجات آزادی اضافی مرتبط با گره i در ناحیه پوششی C_i است. با توجه به توضیحات ارائه شده تقریب غنی‌سازی پوششی مربوط به متغیر میدانی u برای یک المان به‌صورت رابطه (۷) بیان می‌شود:

$$u = \sum_{i=1}^{3} h_i u_i + H_i a_i \qquad (۷)$$

که در آن:

$$H_i = h_i\left[\bar{x}_i \;\; \bar{y}_i \;\; \bar{x}_i^2 \;\; \bar{x}_i\bar{y}_i \;\; \bar{y}_i^2 \;\; \ldots \;\; \bar{y}_i^p\right] \qquad (۸)$$

با جمع مقادیر رابطه (۷) برای گره‌های موجود در یک المان و ادغام روابط (۷) و (۸) رابطه (۶) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$u = \sum_{i=1}^{3} h_i P_i^p \qquad (۹)$$

به این ترتیب به‌جای استفاده از روش استاندارد درون‌یابی از روش درون‌یابی به‌وسیله $h_i p_i^p$ استفاده شده است، که در آن P_i^p شامل مقادیر متداول متغیر میدانی u_i به اضافه درجات آزادی مربوط به توابع پوشش است. مزیت این روش آن است که علاوه بر مقادیر درون‌یابی به‌روش استاندارد می‌توان با داشتن تابع غنی‌ساز پوشش به نتایج بهتری دست یافت.

از دیگر برتری این روش آنکه در مناطقی که دقت مورد نظر تأمین نشده با افزایش مرتبه می‌توان در جهت تأمین دقت مورد نیاز گام برداشت و نیازی به استفاده از تظریف شبکه نیست. لازم به ذکر است که تعیین مرتبه تابع غنی‌ساز از اهمیت بالایی برخوردار بوده و اگر این مرتبه برابر صفر درنظر گرفته شود، هیچ درون‌یابی اضافی صورت نگرفته و همان نتایج درون‌یابی استاندارد به‌دست خواهد آمد. کیم و بته [۸] مشکل تکنیک پیشنهادی خودشان را ایجاد تکینکی برای المان‌های چهارضلعی اعلام می‌کنند.

۴- الگوریتم روش پیشنهادی

در این بخش نحوه عملکرد روش پیشنهادی نویسندگان این مقاله ارائه شده است. بعد از تعیین میزان خطای هر المان طبق رابطه (۵)، خطای کل حاکم بر حوزه مسئله که از جمع مقادیر المانی حاصل می‌شود، در دسترس است. لازم به ذکر است که در روش تعیین خطا با معیار L_2، به‌جای استفاده از خطای نرم شده، از مقدار ۵۰ درصد بزرگ‌ترین مقدار عددی خطای المانی

در یک تحلیل استفاده شده است. به این معنی که تمام المان‌هایی که دارای خطای بزرگ‌تر از نصف مقدار خطای بیشینه در حوزه هستند، به‌عنوان اولین گزینه جهت اصلاح حوزه معرفی می‌شوند.

معرفی میزان خطا به‌صورت مقدار عددی، مطابق با رابطه (۵) که در بخش‌های پیشین مورد بررسی قرار گرفت، شاخص مناسبی برای مقایسه بین شبکه‌های گوناگون یک حوزه نبوده و از این‌رو استفاده از شاخص بدون بعد که خطای حوزه را برحسب درصد ارائه می‌کند، توصیه می‌شود. به‌منظور دستیابی به این شاخص بدون بعد، مطابق روش معرفی شده توسط زینکویچ و ژو [۱۳]، باید مجموع خطای حوزه را نسبت به مجموع انرژی کرنشی حوزه، نرمال کرد لذا مطابق با رابطه (۱۰) خواهیم داشت:

$$E(\text{total})=\frac{(\sum_{i=۱}^{n} e_i)}{(\sum_{i=۱}^{n} e_i+\sum_{i=۱}^{n} U_i)} \qquad (۱۰)$$

که در آن $E(\text{total})$ برابر خطای نرم شده کل حوزه، e_i خطای المانی به‌دست آمده از رابطه (۵) و U_i معادل با انرژی کرنشی المانی است.

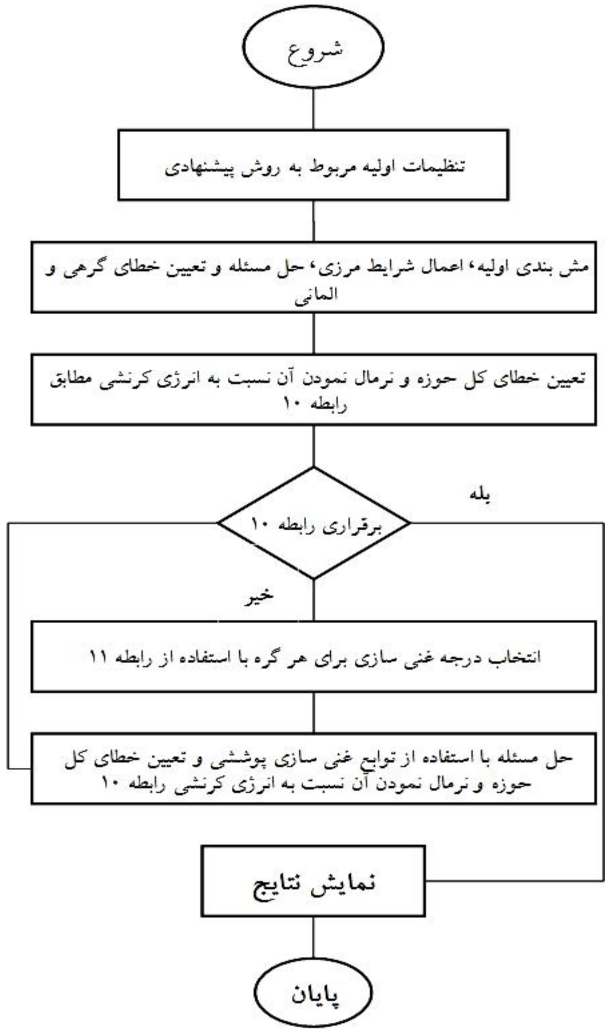
رابطه (۱۰) به‌عنوان معیاری برای نیاز یا عدم نیاز به عملیات تظریف توسط توابع درون‌یاب غنی‌سازی است. به این معنی که اگر مقدار به‌دست آمده از یک حد مجاز از پیش مشخص شده کمتر باشد، حل مسئله به پایان رسیده و نتایج قابل قبول هستند و در صورت بزرگ‌تر بودن مقدار به‌دست آمده از رابطه (۱۰) از حد مجاز، ادامه عملیات تظریف و غنی‌سازی در گام‌های بعدی دنبال می‌شود. مقدار حد مجاز مورد استفاده، با توجه به روشی که برای تظریف استفاده می‌شود، دارای مقادیر متفاوتی است. در روش پیشنهادی تنها مشخص شدن اولیه زیر حوزه‌های دارای گرادیان بسیار بالا در پاسخ‌ها کافی بوده و نیازی به استفاده از حد مجاز پایین برای گزینش المان‌ها نیست، زیرا با استفاده از توابع درون‌یاب با همین تعداد کم المان انتخاب شده از مرحله قبل، در بخش‌هایی از حوزه که دارای خطای بسیار زیاد هستند، می‌توان از مرتبه‌های مناسبی برای به‌دست آوردن نتایج کاملاً مطلوب دست یافت. در این روش به‌جای استفاده از مقدار حدی مجاز ۱۰ درصد در روشی که توسط زینکویچ و ژو [۱۳] ارائه شده، از مقدار ۲۰ درصد برای مقایسه با رابطه (۱۰) استفاده شده است. دلیل اصلی این افزایش از ۱۰ درصد در روش مرجع به ۲۰ درصد در روش پیشنهادی این مقاله، تفاوت در روش به‌کار گرفته شده در مرحله تظریف است. در روش مرجع تنها با کوچک کردن المان‌ها، تظریف حوزه صورت می‌پذیرد، درحالی که در روش پیشنهادی، تظریف به‌وسیله توابع درون‌یاب غنی‌ساز صورت پذیرفته و همین حد بالای معیار خطا به‌منظور شروع عملیات تظریف کافی بوده و نیازی به استفاده از مقادیر کوچک‌تر که منجر به افزایش بی‌رویه تعداد المان‌ها و درجات آزادی می‌شود، نیست. تخمینی از مرتبه غنی‌سازی مطابق رابطه زیر انجام می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \text{if} & \{n_i \le ۰/۳\times\gamma\} \rightarrow p=۰ \\ \text{else} & \{۰/۳\times\gamma < n_i \le ۰/۶\times\gamma\} \rightarrow p=۱ \\ \text{else} & \{۰/۶\times\gamma < n_i \le ۰/۸\times\gamma\} \rightarrow p=۲ \\ \text{else} & \{n_i > ۰/۸\times\gamma\} \rightarrow p=۳ \end{array} \qquad (۱۱)$$

در رابطه بالا مقدار n_i بیانگر خطای گره iام، γ برابر ۵۰ درصد بزرگ‌ترین خطای گرهی موجود و p مرتبه تابع غنی‌سازی پوشش، برای گره مورد بررسی است.

مقدار p=۰ در رابطه (۱۱) به این معنی است که نیازی به درون‌یابی در گره مورد بررسی نیست و همان درون‌یابی استاندارد صورت گرفته کافی است. فرمولاسیون ارائه شده در رابطه (۱۱)، یک فرمولاسیون جامع برای مسائل حوزه خطی بوده که برای تمام گره‌های موجود در حوزه مسئله یک راهکار ارائه می‌دهد. حدود مرزی موجود در این رابطه به نحوی تعیین شده است که روش پیشنهادی با کمترین مرتبه اختصاصی به توابع درون‌یاب پوششی به حل مسئله ادامه دهد.

در ادامه فرایند با درون‌یابی مقادیر خطای المانی به‌دست آمده از رابطه (۱۰) و تعمیم آن به گره‌ها، خطای تمامی گره‌ها تعیین می‌شود. سپس با توجه به رابطه (۱۱) مرتبه مناسب برای توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوشش مرتبط با هر گره تعیین شده



شکل ۲- روندنمای روش پیشنهادی

و در غنی‌سازی به روش پیشنهادی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

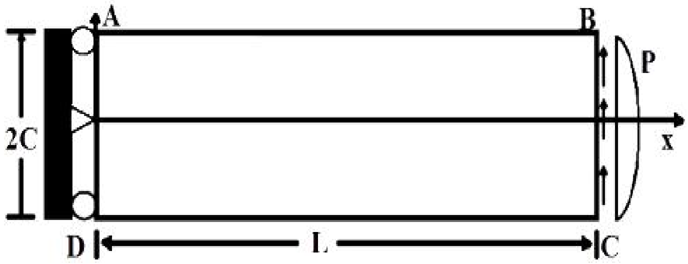
در شکل (۲) روند نمای روش پیشنهادی در این مقاله به‌منظور درک بهتر ارائه شده است. با توجه به میزان دقت حاصل در هر گره از توابع پوشش غنی‌ساز با مرتبه‌های مختلف استفاده می‌شود. لذا به‌نظر می‌رسد به‌کارگیری این استراتژی از افزایش بی‌رویه حجم محاسباتی جلوگیری کرده و پاسخ‌هایی با دقت بالاتر به‌دست خواهند داد که نتایج مثال‌های عددی بخش بعدی مؤید این مطلب است.

۵- مثال‌های عددی

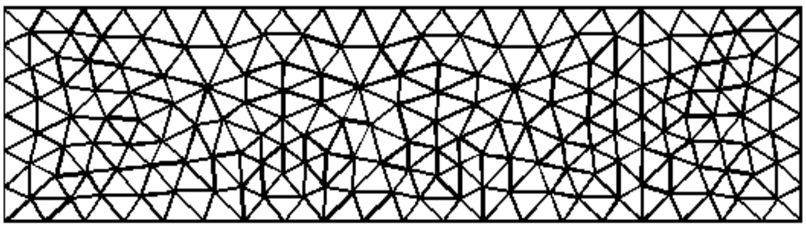
در این بخش سه مثال استاندارد دو بعدی در حوزه مسائل الاستیک از مراجع [۸ و ۱۳] با شرایط مرزی مربوطه ارائه شده و با روش پیشنهادی این مقاله تحلیل و نتایج حاصل با روش‌های سایر محققین مورد مقایسه قرار گرفته است. مثال اول مربوط به تیر طره تحت بار با توزیع سهمی‌گون در انتهای آزاد، مثال دوم یک تیر طره تحت بار متمرکز در انتهای آزاد که در قسمت تکیه‌گاهی خود دارای مرز منحنی شکل است، و در مثال سوم یک صفحه به شکل L، که در راستای سمت چپ تحت بار کششی گسترده قرار دارد، مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۱- مثال تیر طره تحت بار گذاری در انتهای آزاد

در این مثال یک تیر طره در اثر نیرو با توزیع سهمی‌گون در



شکل ۳- شرایط حاکم بر تیر طره تحت نیرو با توزیع سهمی گون در انتهای آزاد



شکل ۴- شبکه‌بندی ارائه شده طی روند حل مسئله به‌روش پیشنهادی

انتهای تیر و شرایط مرزی مطابق شکل (۳) مورد بررسی قرار گرفته است. جواب تحلیلی این مسئله که توسط تیموشنکو و گودیر معرفی شده [۱۴] در روابط (۱۲) تا (۱۷) ارائه شده است:

$$u = (Py / ۶EI)[۳x(۲L - x) + (۲ + \nu)(y^۲ - c^۲)] \quad (۱۲)$$

$$v = (Py / ۶EI)\left[x^۲(۳L - x) + ۳\nu(L - x)y^۲ + (۴ + ۵\nu)c^۲x \right] \quad (۱۳)$$

$$\sigma_x = -Py\left(L - x\right) / I \quad (۱۴)$$

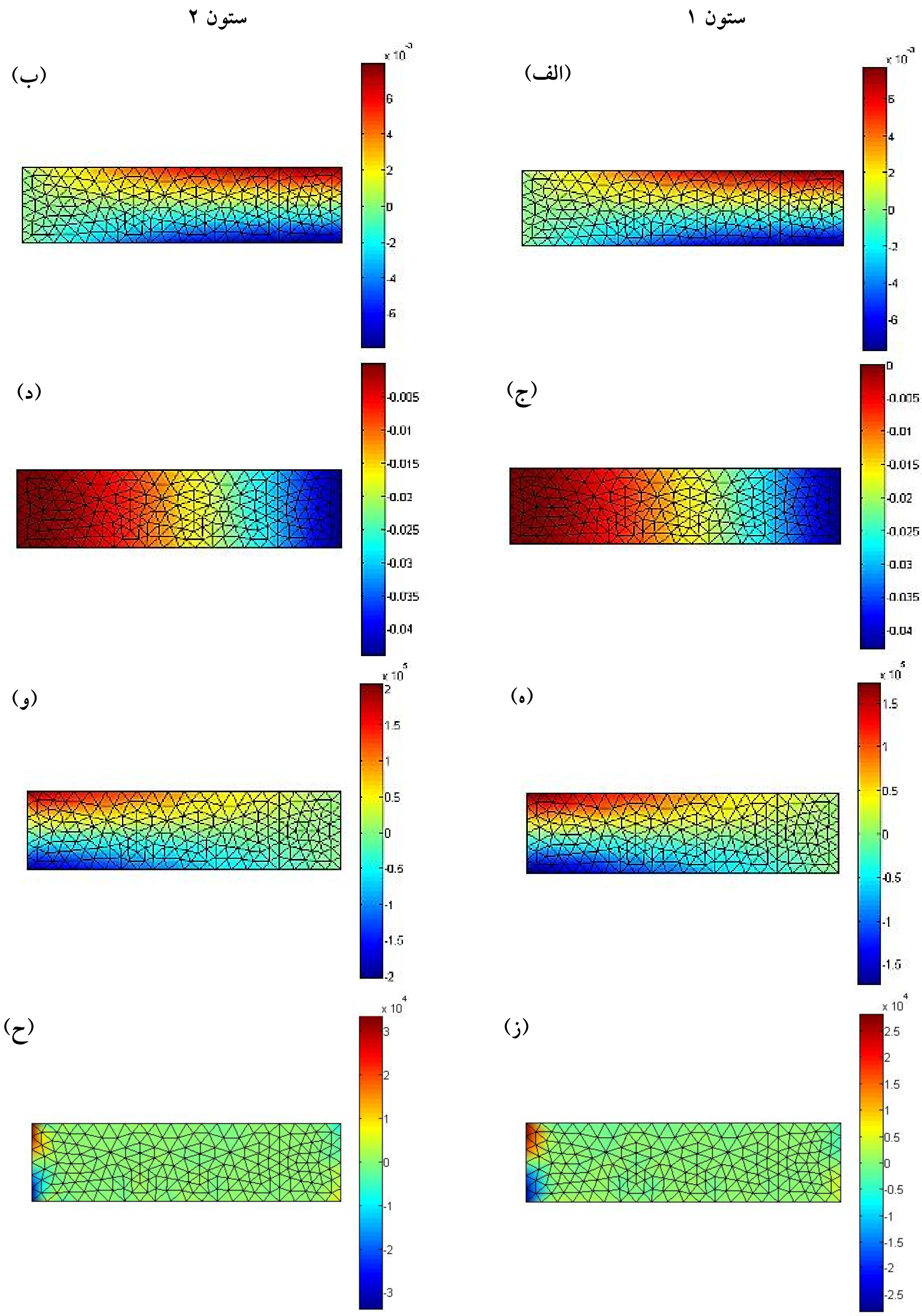
$$\sigma_y = ۰ \quad (۱۵)$$

$$\tau_{xy} = P\left(c^۲ - y^۲\right) / ۲I \quad (۱۶)$$

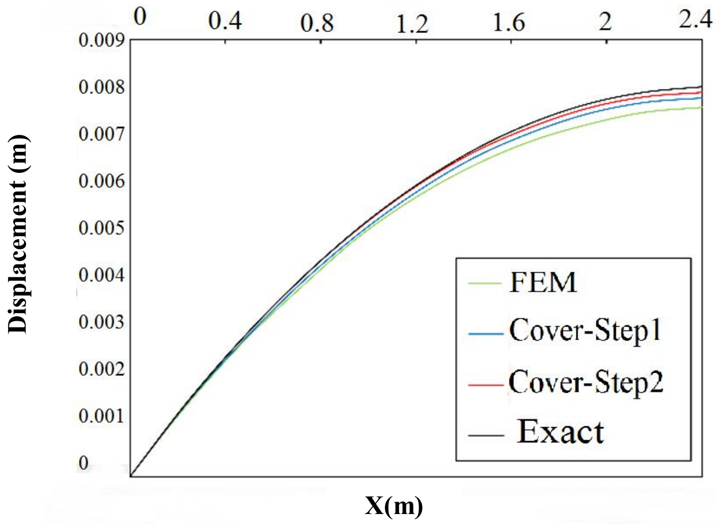
$$I = ۲c^۳ / ۳ \quad (۱۷)$$

در مرز سمت راست بار متمرکز با توزیع سهمی‌گون در جهت y وارد شده و در جهت x تنش مساوی صفر است. دو مرز بالا و پایین، مرزهای بدون تنش و در مرز سمت چپ شرط مرزی تغییر مکانی با استفاده از جواب تحلیلی منظور شده است. این مسئله با درنظر گرفتن شرایط تنش صفحه‌ای و با فرض E=۱۰۰۰(Pa)، P=۱(N) و L=۲/۴(m)، c=۰/۳(m) و ضریب پواسون v=۰/۳ حل شده است. شبکه موجود در شکل (۴) برای حل مسئله با روش پیشنهادی ارائه شده است. برای شبکه‌بندی ارائه شده، ابتدا مسئله با روش اجزای محدود استاندارد تحلیل شده و میزان خطا در تمامی گره‌ها محاسبه می‌شود. بعد از تعیین خطا و مقایسه نتیجه رابطه (۱۰) با مقدار حدی معرفی شده، گره‌های دارای خطای بالاتر از حد مجاز شناسایی می‌شوند و با توجه به رابطه (۱۱) مرتبه توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوشش مرتبط با آن گره‌ها تعیین شده و در غنی‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌طور که اشاره شد یکی از قابلیت‌های روش پیشنهادی توانایی استفاده از توابع پوشش با مرتبه‌های مختلف جهت غنی‌سازی در نقاط مختلف حوزه حل مسئله است. مرتبه‌های تابع پوشش در این مثال بین صفر تا سه فرض شده است. درجه تابع غنی‌ساز متناسب با میزان خطای محاسبه شده انتخاب می‌شود. این چرخه تا برقراری رابطه (۱۰) ادامه خواهد داشت.

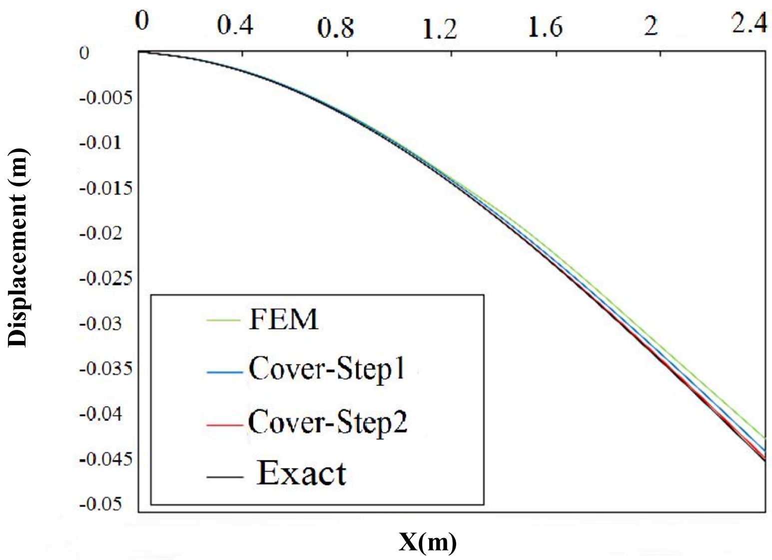
نتایج مربوط به حل مسئله فوق در شکل (۵) آمده است. مقادیر هر دو ستون یک و دو برای شبکه‌بندی شکل (۴) است. مقادیر ستون یک مربوط به حل اجزای محدود استاندارد و مقادیر ستون دو مربوط به حل با اعمال توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوشش در طی چند مرحله با روش پیشنهادی است. در شکل‌های (۵- الف) و (۵- ب) تغییرمکان در جهت x، در



شکل ۵- نتایج مربوط به توزیع تغییرمکان‌ها و تنش‌ها در مثال اول



شکل ۶- نتایج مربوط به تغییر مکان افقی راستای بالای تیر طره (رنگی در نسخه الکترونیکی)



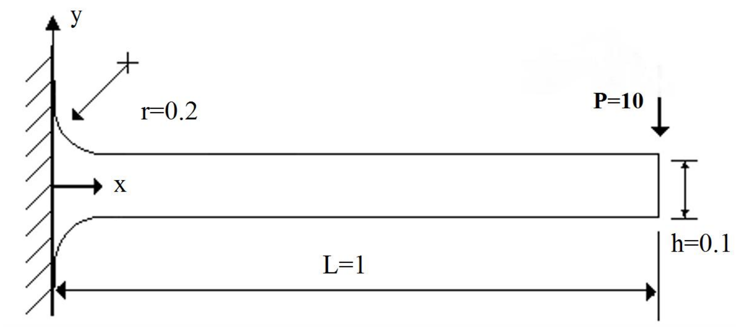
شکل ۷- نتایج مربوط به تغییر مکان قائم راستای بالای تیر طره (رنگی در نسخه الکترونیکی)

شکل‌های (۵- ج) و (۵- د) تغییر مکان در جهت y، در شکل‌های (۵- ه) و (۵- و)، توزیع تنش در جهت x و در شکل‌های (۵- ز) و (۵- ح) توزیع تنش در جهت y ارائه شده است.

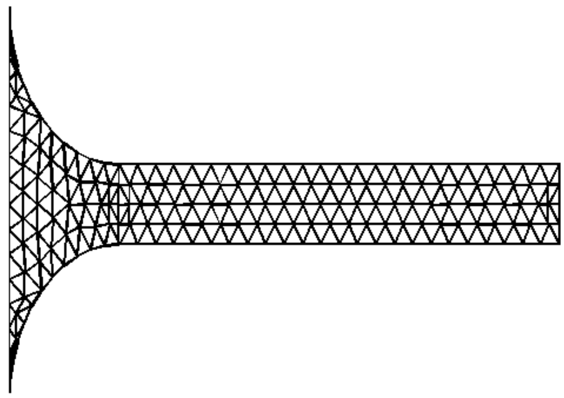
در شکل‌های (۶) و (۷) به‌ترتیب نتایج مربوط به تغییر مکان‌های افقی و قائم راستای فوقانی تیر طره (امتداد AB) با روش اجزای محدود استاندارد و گام‌های مختلف روش پیشنهادی تا رسیدن نتایج مطلوب و نیز جواب دقیق آمده است. در این شکل‌ها روند بهبود نتایج طی حل مسئله با روش پیشنهادی، به‌وضوح نمایان است. ابتدا جواب به‌دست آمده از اجزای محدود استاندارد با شبکه‌بندی ثابت نمایش داده شده است. سپس با استفاده از توابع غنی‌ساز پوشش به اصلاح نتایج موجود در شرایط رابطه (۱۱) پرداخته شده است و نتیجه آن دست‌یابی به جواب‌های با دقت و کیفیت بسیار مناسب است.

۵-۲- مثال تیر طره دارای مرزهای منحنی شکل

در این مثال یک تیر طره در حالت تنش مسطح با بار متمرکز در



شکل ۸- شرایط حاکم بر تیر طره دارای مرزهای منحنی شکل

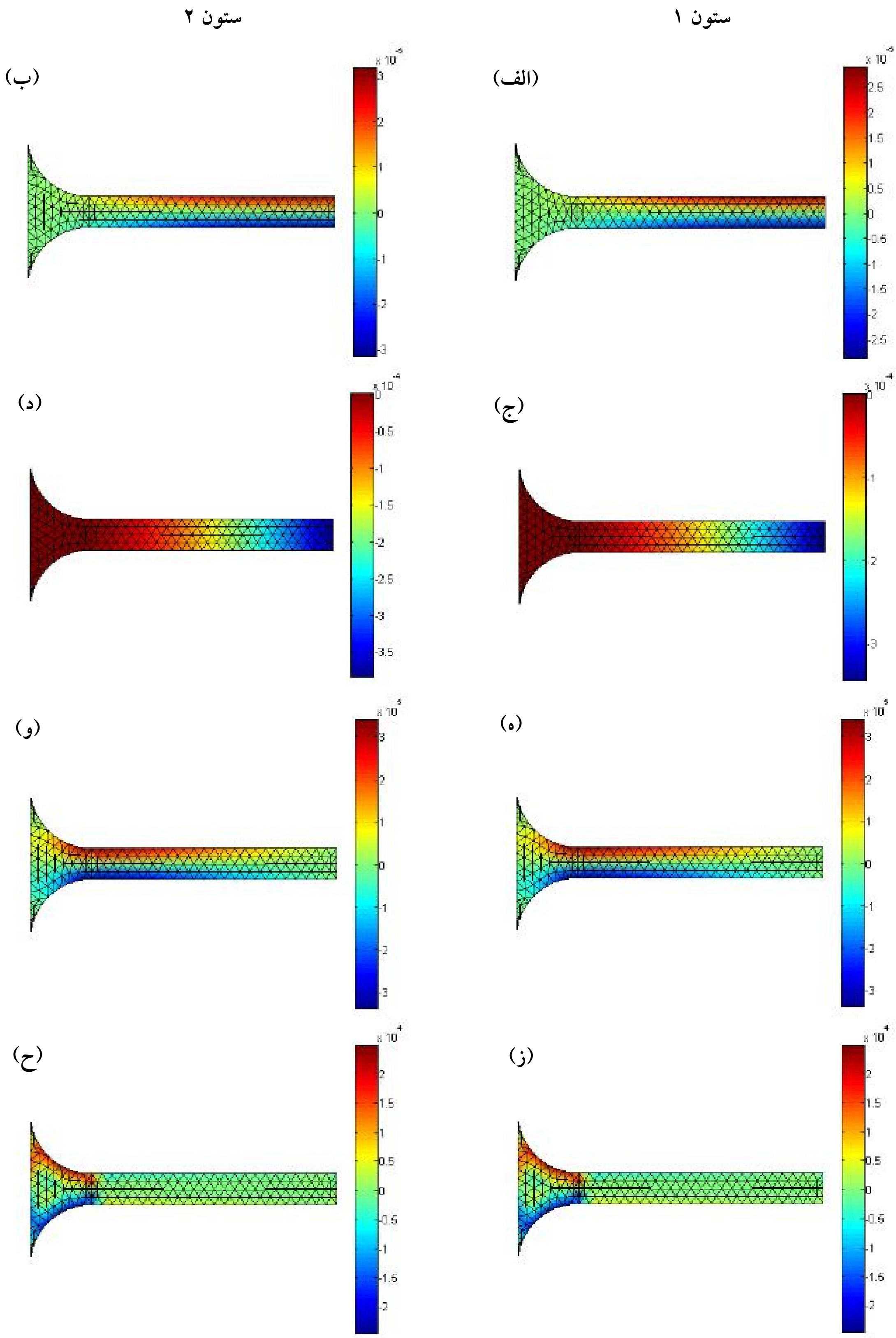


شکل ۹- شبکه‌بندی ارائه شده طی روند حل مسئله به‌روش پیشنهادی

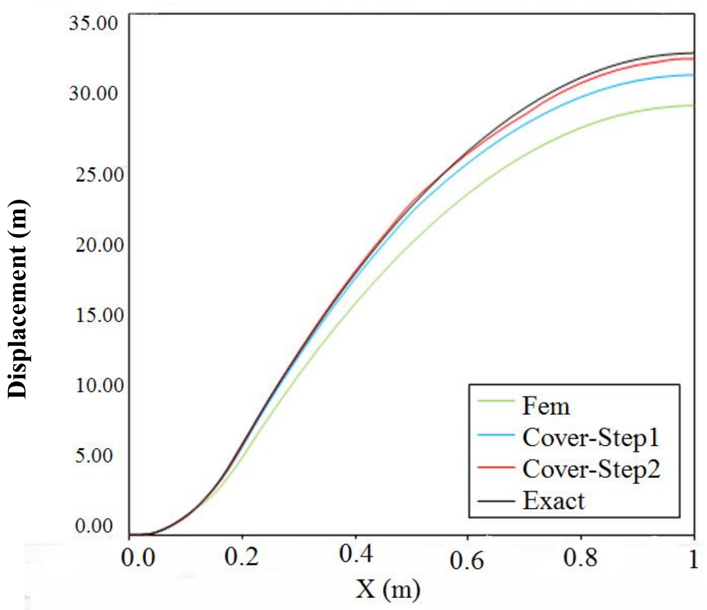
انتهای آزاد و شرایط مرزی مطابق شکل (۸) مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به اینکه جواب دقیق برای مسئله مورد نظر موجود نیست، مرجع [۸] از یک شبکه‌بندی بسیار ریز شامل ۲۴۶۰ المان چهار ضلعی ۹ گره‌ای برای محاسبه جواب دقیق استفاده کرده است. در این مسئله مقدار مدول الاستیسیته $E=7/2\times10^{9}$ Pa و شدت بار وارده $P=10$ kN و ضریب پواسون $\nu=0/3$ و شعاع قسمت منحنی شکل $r=0/2$ m است. در شکل (۹) شبکه‌بندی ارائه شده طی روند حل مسئله به روش پیشنهادی ارائه شده است. نتایج مربوط به حل مسئله فوق در شکل (۱۰) قابل مشاهده است. مقادیر ستون یک مربوط به شبکه‌بندی ارائه شده در شکل (۹) (حل اجزای محدود استاندارد) و مقادیر ستون دو مربوط به شبکه‌بندی ارائه شده در شکل (۹) با اعمال توابع درون‌یاب غنی‌سازی طی چند مرحله هستند. در شکل‌های (۱۰- الف) و (۱۰- ب) تغییر مکان در جهت x، شکل‌های (۱۰- ج) و (۱۰- د) تغییر مکان در جهت y، شکل‌های (۱۰- ه) و (۱۰- و) توزیع تنش در جهت x و شکل‌های (۱۰- ز) و (۱۰- ح) توزیع تنش در جهت y ارائه شده است. در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) مراحل رسیدن به پاسخ مناسب توسط روش پیشنهادی به‌ترتیب برای تغییر مکان افقی و قائم برای راستای بالای تیر و در شکل (۱۳) به‌منظور مقایسه روش پیشنهادی با روش سایر محققین، توزیع تنش ون- مایسز برای مسئله گفته شده ارائه شده است. شکل (۱۳- الف) مربوط به روش پیشنهادی در این مقاله با ۲۴۵۶ درجه آزادی و شکل (۱۳- ب) مربوط به روش ارائه شده در مرجع [۸] با ۲۹۸۸ درجه آزادی است.

۵-۳- مثال صفحه L شکل

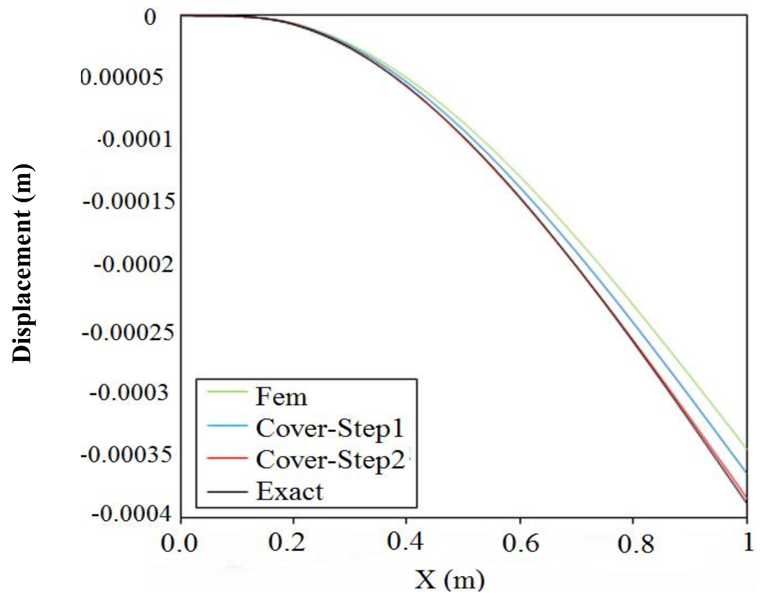
در این مثال یک صفحه به شکل L در حالت تنش مسطح تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی و نیرویی نشان داده شده در شکل (۱۴) مورد بررسی قرار گرفته است. جواب دقیق این مسئله از طریق یک شبکه‌بندی بسیار ریز شامل ۳۹۶۸ المان سه گره‌ای



شکل ۱۰- نتایج مربوط به توزیع تغییرمکان‌ها وتنش‌ها در مثال دوم



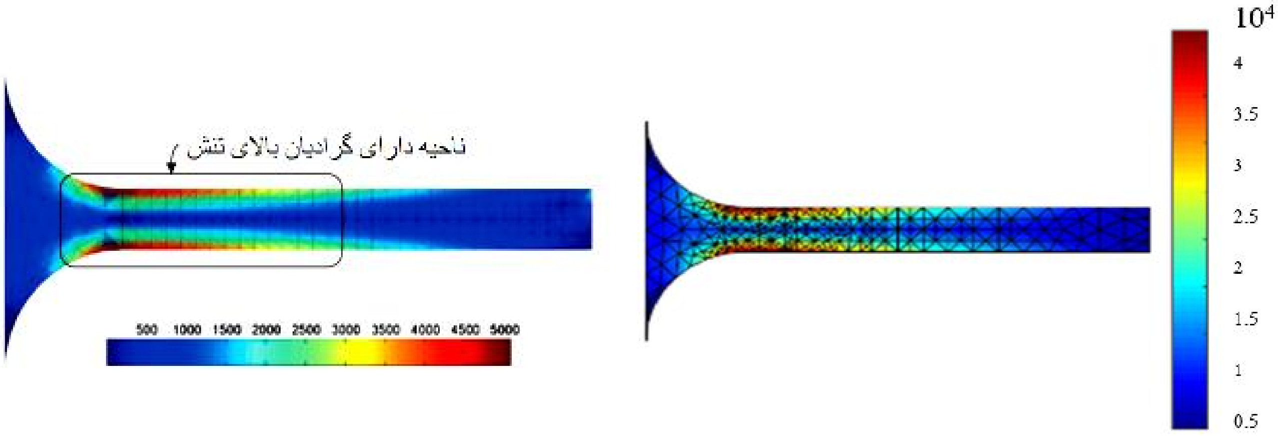
شکل ۱۱- مقایسه نتایج مربوط به تغییر مکان افقی راستای بالای تیر (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۲- مقایسه نتایج مربوط به تغییر مکان قائم راستای بالای تیر (رنگی در نسخه الکترونیکی)

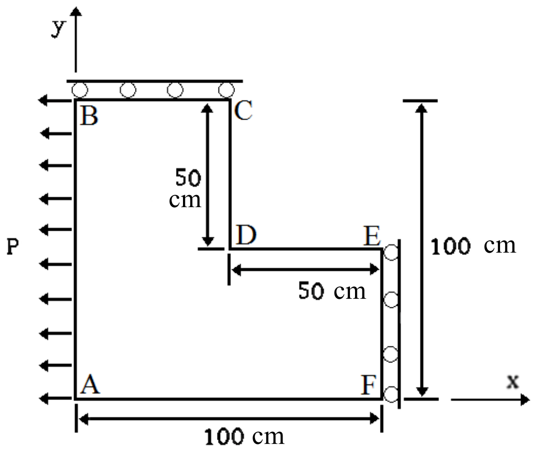
که منجر به ۴۱۶۴ درجه آزادی می‌شود به‌دست آمده است. در حل این مسئله مقدار مدول الاستیسیته E=۱۰^{5}(N/cm^{2})، شدت بار وارده P=۱۰۰(N/cm^{2}) و ضریب پواسون ν=۰/۳ است. در شکل (۱۵) شبکه‌بندی استفاده شده برای حل مسئله به روش پیشنهادی، ارائه شده است.

نتایج مربوط به حل مسئله فوق در شکل (۱۶) آمده است. مقادیر ستون یک مربوط به شبکه‌بندی ارائه شده در شکل (۱۵) (حل اجزای محدود استاندارد) و مقادیر ستون دو مربوط به شبکه‌بندی ارائه شده در شکل (۱۵) با اعمال توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوشش است. در شکل‌های (۱۶- الف) و (۱۶- ب) تغییرمکان در جهت x، در شکل‌های (۱۶- ج) و (۱۶- د) تغییرمکان در جهت y، در شکل‌های (۱۶- ه) و (۱۶- و) توزیع

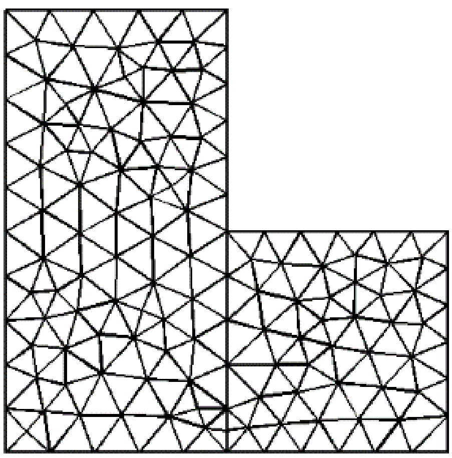


(ب) (الف)

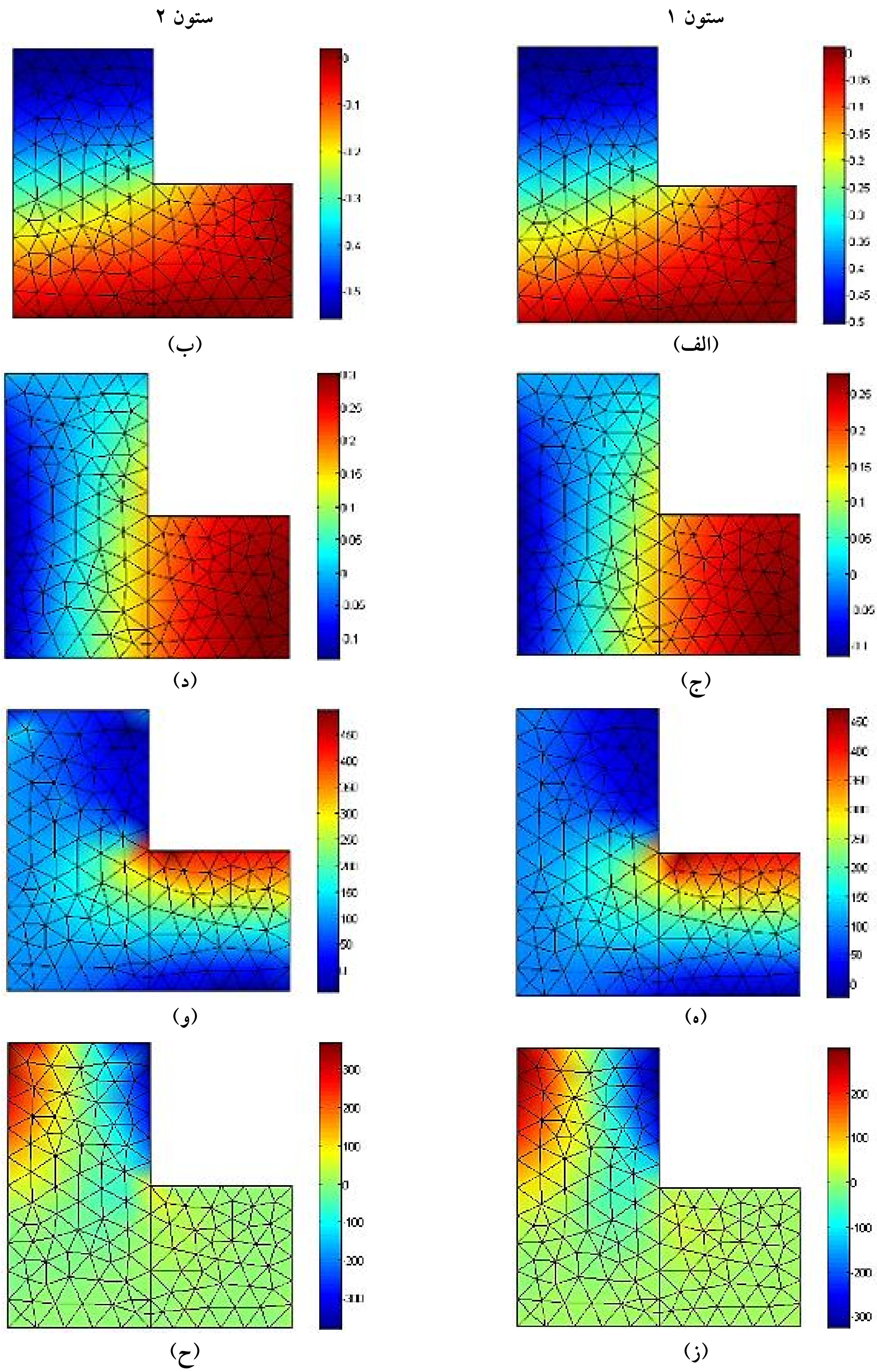
شکل ۱۳- مقایسه نتایج مربوط به توزیع تنش ون-مایسز



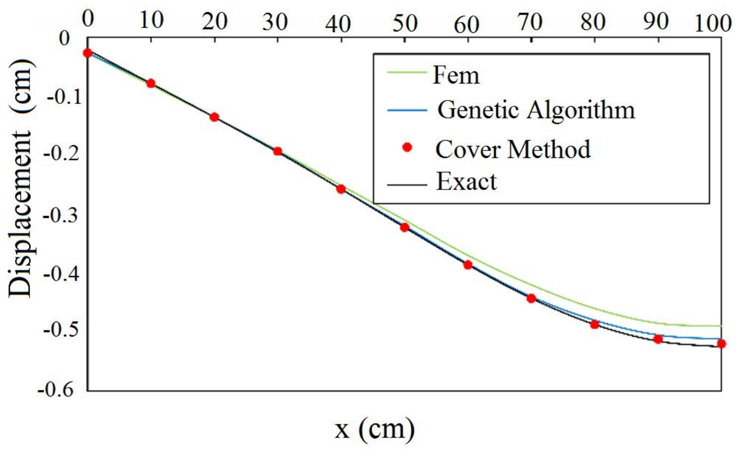
شکل ۱۴- شرایط حاکم بر صفحه L شکل



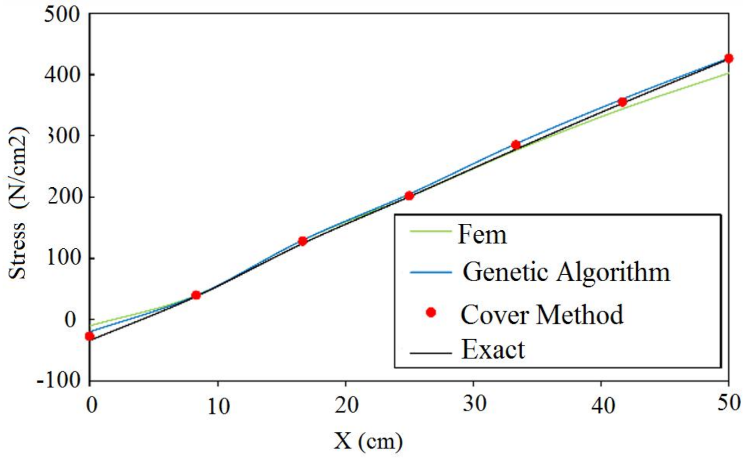
شکل ۱۵- شبکه‌بندی‌های ارائه شده مسئله به‌روش پیشنهادی



شکل ۱۶- نتایج مربوط به توزیع تغییرمکان‌ها و تنش‌ها در مثال سوم



شکل ۱۷- نتایج مربوط به تغییر مکان (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۸- نتایج مربوط به تنش (رنگی در نسخه الکترونیکی)

تنش در جهت x و در شکل‌های (۱۶- ز) و (۱۶- ح) توزیع تنش در جهت y آمده است.

در شکل‌های (۱۷) و (۱۸) نتایج به‌دست آمده برای تغییر مکان افقی راستای AB و تنش قائم در راستای افقی از روش پیشنهادی با نتایج ارائه شده توسط مرجع [۱۵] شامل روش اجزای محدود استاندارد، روش کنترل (DE) روش کنترل حجم متکی بر الگوریتم ژنتیک و جواب دقیق تحلیلی، مورد مقایسه قرار گرفته است. مبانی و تکنیک‌های مربوط به روش‌های یاد شده در این مرجع به‌طور کامل توضیح داده شده است.

۷- نتیجه‌گیری

از روال معمول در روش اجزای محدود استاندارد، جهت دستیابی به نتایج با دقت کافی و مطلوب، ریز کردن شبکه با صرف هزینه محاسباتی و متناسب با دقت مورد نیاز است. بزرگ‌ترین مزیت توابع درون‌یاب غنی‌ساز پوششی لحاظ کردن اثر المان‌های مجاور هر گره علاوه‌بر درون‌یابی استاندارد معمول اجزای محدود است. به این منظور ابتدا تخمین خطا به روش نرم L_2 و بعد از آن توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوششی با مرتبه‌های مختلف به‌عنوان یک ابزار قوی برای غلبه بر محدودیت‌های روش اجزای محدود استاندارد معرفی شد. سپس

متناسب با خطای گرهی، مرتبه مناسبی از توابع درون‌یاب غنی‌ساز پوششی به‌طور خودکار انتخاب شده و در فرایند حل مجدد پاسخ‌های اولیه، اصلاح می‌شوند. چرخه تعیین خطا و استفاده از توابع غنی‌سازی پوششی تا رسیدن خطای حوزه به مقدار مجاز تعیین شده ادامه خواهد یافت. از مزایای روش پیشنهادی در این مقاله می‌توان به استفاده از نرم استاندارد تعیین خطا، فراگیر بودن آن برای مسائل دوبعدی در حوزه الاستیک با پیچیدگی‌های هندسی در حوزه اصلاح موضعی شبکه مورد بررسی به‌وسیله تعیین اتوماتیک مرتبه تابع غنی‌ساز متناسب با خطای گرهی اشاره کرد. استفاده از این روش بر اساس نتایج حل مثال‌های ارائه شده، منجر به کاهش قابل ملاحظه تلاش محاسباتی شده و دقت نتایج نهایی تحلیل را تا حد بسیار مطلوبی افزایش می‌دهد. فرایندهای محاسباتی روش ارائه شده در این مقاله در محیط متلب برنامه‌نویسی شده و صحت‌یابی فرایند روش پیشنهادی با حل چند مسئله مختلف آزموده شده است.

از نتایج ارائه شده برای مثال‌های متعدد، بهبود میدان تنش و جابه‌جایی حاکم بر حوزه مسئله به‌وضوح قابل رویت است. اگرچه امکان بررسی زمان حل مسئله و نیز حافظه تخصیصی، به‌دلیل عدم در دسترس بودن آن برای فعالیت‌های پژوهشی سایر محققین ممکن نبوده ولی بررسی نتایج حل مثال‌های استاندارد و مقایسه آن با نتایج سایر محققین، حکایت از کارایی خوب روش پیشنهادی دارد. مقایسه نتایج مثال‌های این تحقیق با روش‌های دیگر محققین از جمله بنیانگذاران روش درون‌یاب پوششی، حکایت از تأمین دقت کافی مورد نیاز با درجات آزادی متعارف و پایین‌تر نسبت به روش اجزای محدود استاندارد و سایر روش‌ها دارد.

مراجع

1. Johnson, C., “Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method”, Studentlitteratur, Lund, Sweden, 1987.
2. Johnson, C., and Eriksson, K., “Adaptive Finite Element Methods for Parabolic Problems I: A Linear Model Problem”, *SIAM Journal*, Vol. 28, pp. 43-77, 1991.
3. Yang, R., and Yuan, G., “h-Refinement for Simple Corner Balance Scheme of SN Transport Equation on Distorted Meshes”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 184, pp. 241-253, 2016.
4. Zander, N., Bog, T., Elhaddad, M., Frischmann, F., Kollmannsberger, S., and Rank, E., “The Multi-level -Method for Three-dimensional Problems: Dynamically Changing High-order Mesh Refinement with Arbitrary Hanging Nodes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 310, pp. 252-277, 2016.
5. Yang, J., Zhang, B., Liang, C., and Rong, Y., “A High-order Flux Reconstruction Method with Adaptive Mesh Refinement and Artificial Diffusivity on Unstructured Moving/deforming Mesh for Shock Capturing”, *Computers & Fluids*, Vol. 139, pp. 17-35, 2016.
6. Shi, G. H., *Block System Modeling by Discontinuous Deformation Analysis, Southampton*, UK: Computational Mechanics Publications, 1993.
7. Ghasemzadeh, H., Ramezanpour, M. A., and Bodaghpour, S., “Dynamic High Order Numerical Manifold Method Based on Weighted Residual Method”, International *Journal for Numerical Methods in Engineering*, Published online in Wiley Online Library, Vol. 100, No. 8, pp. 596-619, 2014.
8. Kim, J,. and Bathe, K. J., “The Finite Element Method Enriched by Interpolation Covers”, *Computers & Structures*, Vol. 116, pp. 35-49, 2013.
9. Kim, J,. and Bathe, K. J., “Towards a Procedure to Automatically Improve Finite Element Solutions by Interpolation Covers”, *Computers & Structures*, Vol. 131, pp. 81-97, 2014.
10. Arzani, H., Kaveh, A., and Dehghana, M., “Adaptive Node Moving Refinement in Discrete Least Squares Meshless Method using Charged System Searc”, International *Journal of Science & Technology, Transaction A, Civil Engineering*, Vol. 21, pp. 1529-1538, 2014.
11. Zeng, W., Liu, G. R., Li, D., and Dong, X. W., “A Smoothing Technique Based Beta Finite Element Method (βFEM) for Crystal Plasticity Modeling”, *Computers & Structures*, Vol. 162, pp. 48-67, 2016.
12. Arzani, H., Kaveh, A., and Taheri Taromsari, M., “Optimum Two-dimensional Crack Modeling in Discrete Least Square Meshless Method by Charged System Search Algorithm”, *International Journal of Science & Technology*. Transaction A, Civil Engineering, Vol. 24, pp. 143-152, 2017.

13. Zienkiewicz, O. C., and Zhu, J. Z., “A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineerng Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 337-357, 1987.
14. Timoshenko, S., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3th ed, New York: McGraw- Hill book, 1970.
15. Ebrahimnejad, M., Fallah, N., and Khoei, A. R., “Adaptive Refinement in the Meshless Finite Volume Method for Elasticity Problems”, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 69, pp. 1420-1443, 2015.