

ارزیابی احتمالاتی ارتعاش آزاد ورق مدرج تابعی با استفاده از روش حل سه‌بعدی و روش‌های پیش‌بینی پاسخ

ناصر چراقی، محمود میری* و محسن راشکی^۱

گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۳/۲۰)

چکیده - در این مقاله با استفاده از یک روش حل سه‌بعدی و روش‌های پیش‌بینی پاسخ، ارزیابی احتمالاتی ارتعاش آزاد ورق‌های مدرج هدفمند با لایه‌هایی دارای خواص مگنتو الکتروالاستیک، ارائه شده است. ورق مورد نظر بر روی بستر ارتجاعی قرار گرفته و اثرات لغزش بین لایه‌ای با مدل فتر بین لایه‌ای تعمیم‌یافته لحاظ می‌شود. به‌علت بالا بودن هزینه محاسباتی در محاسبه بسامدهای ارتعاش آزاد ورق، از روش‌های پیش‌بینی پاسخ استفاده می‌شود. از روش‌های پیش‌بینی پاسخ کریجینگ، تابع پایه شعاعی و سطح پاسخ با تابع چندجمله‌ای برای ساخت مدل جانشین استفاده می‌شود. برای آموزش مدل‌های پیش‌بینی، از نتایج روش حل سه‌بعدی استفاده می‌شود. پارامترهای سفتی بستر ارتجاعی، لغزش بین لایه‌ای، شاخص خواص مواد و چگالی لایه‌ها به‌عنوان متغیرهای دارای عدم قطعیت در نظر گرفته می‌شود. فرمولاسیون روش حل سه‌بعدی از طریق مقایسه با سایر نتایج موجود اعتبارسنجی می‌شود. نتایج حاصل از مدل‌های پیش‌بینی پاسخ با نتایج روش حل سه‌بعدی مقایسه و تطابق خوبی مشاهده شده است. تأثیر پارامترهای مربوط به سفتی بستر ارتجاعی، شاخص تغییرات خواص مواد، لغزش بین لایه‌ای و چگالی لایه‌ها بر روی بسامد طبیعی مود اول ورق مدرج تابعی، با استفاده از روش حل سه‌بعدی و مدل جانشین کریجینگ مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای چگالی لایه‌ها، سفتی برشی و عرضی بستر ارتجاعی بیشترین تأثیر را بر روی بسامد مود اول ورق سه لایه دارند.

واژه‌های کلیدی: ارتعاش آزاد، مواد مدرج هدفمند، حل سه‌بعدی، مدل‌های پیش‌بینی، عدم قطعیت پارامترها، تحلیل قابلیت اطمینان، مونت-کارلو.

Probabilistic Evaluation on the Free Vibration of Functionally Graded Material Plates Using 3D Solution and Meta-Model Methods

N. Cheraghi, M. Miri*, and M. Rashki¹

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.

Abstract: This paper presents a probabilistic assessment on the free vibration analysis of functionally graded material plates, including layers with magneto-electro-elastic properties, using the 3D solution and surrogate models. The plate is located on an elastic foundation and the intra-layer slipping effect is also considered in the analysis by employing the generalized intra-layer spring model. Due to the high computational cost of the 3D solution in calculating the free vibration frequency of the plate,

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Mmiri@eng.usb.ac.ir

surrogate models are used. The meta models including kriging method, radial fundamental function method and polynomial response surface method are used to construct the surrogate model. For surrogate models training, the results of the three-dimensional solving method are used. The elastic foundation hardness, the intra-layer slipping effect, the material properties index, and the layer densities are considered as the variables with uncertainty. The three-dimensional solution method is validated through a comparison with other available reference. The results obtained through the surrogate models have been compared to those of the 3D solution formulation, showing a good agreement. The effects of some parameters including the elastic foundation hardness, the intra-layer slipping effect, the density of each layer, and the material properties index on the fundamental frequency of functionally graded material plates are investigated. By using three-dimensional solution method and Kriging Surrogate Model, it is shown that the shear and transverse components of elastic foundation hardness and the density of each layer have the greatest effect on the fundamental frequency of the functionally graded material plates.

Keywords: Free vibration, Functionally graded material, Three-dimensional Solution, surrogate models, Uncertainty, Reliability analysis, Monte Carlo simulation.

فهرست علائم

$B^{(n)}$	مؤلفه‌های جابه‌جایی مغناطیسی (Wb/m^2)	$R_i^{(n)}$	ضرایب مؤلفه‌های لغزش بین لایه‌ای n امین لایه
$c^{(n)}$	ضرایب الاستیک خواص مواد (N/m^2)	t	زمان (s)
$D^{(n)}$	مؤلفه‌های جابه‌جایی الکتریکی (C/m^2)	u_i	مؤلفه‌های جابه‌جایی در سه راستا (m)
$d^{(n)}$	ضرایب کوپلینگ الکترومگنت	w	بسامد (rad/s)
$e^{(n)}$	ضرایب پیزوالکتریک (m/v)	x	راستای افقی محور مختصات
$E^{(n)}$	مؤلفه‌های میدان الکتریکی	$x^{(n)}$	ضرایب دی‌الکتریک ($C^2/(N.m^2)$)
$H^{(n)}$	مؤلفه‌های میدان مغناطیسی	y	راستای عمودی محور مختصات
K_w	ضرایب مؤلفه عرضی سفتی بستر ارتجاعی	z	راستای عمود بر ورق مدرج تابعی
K_p	ضرایب مؤلفه برشی سفتی بستر ارتجاعی	α_i	شاخص خواص مواد (m^{-1})
L_x	طول ورق در راستای x (m)	$\varepsilon^{(n)}$	تانسور کرنش‌های n امین لایه
L_y	طول ورق در راستای y (m)	ρ	چگالی (kg/m^3)
N_l	تعداد لایه‌ها	$\sigma^{(n)}$	تانسور تنش n امین لایه (N/m^2)
$p^{(n)}$	ضرایب نفوذپذیری مغناطیسی (Ns^2/C^2)	φ	پتانسیل الکتریکی (v)
$q^{(n)}$	ضرایب پیزومگنت ($N/(A.m)$)	ψ	پتانسیل مغناطیسی (C/s)

۱- مقدمه

به‌تازگی مطالعه بر روی صفحات مگنتو-الکترو-الاستیک مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته است. لحاظ کردن اثر مگنت در تحلیل صفحات مدرج تابعی توسط هارش، نان و بینوسیتیه و همکاران با در نظر گرفتن عباراتی مشخص برای اثر پیزوالکتریک و مگنتیک وارد مطالعات در این زمینه شده است [۱-۳]. یک روش حل سه‌بعدی به فرم بسته برای صفحات مدرج تابعی دارای خواص مگنتو-الکتروالاستیک که به‌صورت ساده در لبه‌ها مقید شده است بر اساس فرمولاسیون کوشی و ماتریس گسترش یافته توسط پان [۴] ارائه شده است. در این

مواد مدرج تابعی (FGM)^۱ از جمله موادی هستند که به‌دلیل تغییر تدریجی خواص مواد در یک یا چند راستا، خواص متفاوتی را در نقاط مختلف از خود نشان می‌دهند. توابع توزیع خواص این مواد می‌تواند خطی، توانی و یا نمایی باشد. این تغییر تدریجی ساختار و خواص، منجر به گسترش کاربرد این گونه مواد در صنایع هوایی، نظامی و دفاعی شده است. از این‌رو بررسی رفتار دقیق و تکنیک‌های ساخت این مواد از اهمیت و ضرورت بالایی برخوردار است.

مقاله اثر نسبت طول به ضخامت ورق روی مؤلفه‌های تنش، جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی بررسی شده است. در مطالعه‌ای دیگر پان و هایلجر [۵] روش حل ارائه شده را برای تحلیل ارتعاش آزاد و خمش استوانه‌ای از صفحات مگنتو الکتروالاستیک با هندسه مستطیلی و به صورت ساده مقید شده، بسط دادند و مقدار بسامد حاصل از ارتعاش آزاد را برای حالت‌های متفاوت چینش لایه‌ها به دست آوردند. پان و هایلجر [۶] در تحقیقی دیگر برای حل معادلات سه بعدی صفحات مستطیلی چندلایه مگنتو الکتروالاستیک خطی با قیدهای ساده، از ترم‌های ماتریس گسترش یافته استفاده کرد. پان و هان [۷] یک روش حل سه بعدی برای ورق مستطیلی چندلایه ساخته شده از مواد مگنتو الکتروالاستیک غیرهمگن مدرج تابعی ارائه کردند. در این مطالعه نویسندگان ورق مستطیلی مورد نظر را تحت بار الکتریکی و مکانیکی قرار دادند و مؤلفه‌های جابه‌جایی، تنش، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی و جابه‌جایی الکتریکی و مغناطیسی را در راستای ضخامت ورق به ازای مقادیر متفاوت شاخص خواص مواد لایه‌ها مورد بررسی قرار دادند. چراقی و لزگی [۸] نیز در تحقیقی به تحلیل استاتیکی صفحات مگنتو الکتروالاستیک چندلایه واقع بر بستر ارتجاعی و با لحاظ لغزش بین لایه‌ای پرداختند. نویسندگان در این مقاله از یک روش حل دقیق برای تحلیل استاتیکی استفاده کردند و اثر لغزش بین لایه‌ای، تغییرات شاخص خواص مواد و سفتی بستر ارتجاعی را روی پاسخ استاتیکی ورق سه لایه (FGME)^۲ مورد بررسی قرار دادند. جیانگی و همکاران [۹] یک روش حل تحلیلی برای بررسی رفتار ارتعاش آزاد صفحات چندلایه مگنتو الکتروالاستیک ارائه دادند و اثر تغییرات شاخص خواص مواد را روی پنج مود اول ورق مگنتو الکتروالاستیک مورد بررسی قرار دادند. لزگی نظریه [۱۰] برای تحلیل ورق‌های مدرج تابعی گون دارای خواص پیزو الکتریک (FGP)^۳، یک روش حل سه بعدی ارائه کرد. فرمولاسیون ارائه شده با استفاده از روش سری پیانو برای تحلیل ارتعاش آزاد یک ورق استوانه‌ای توسعه داده شده است. این فرمولاسیون به طور دقیق معادلات حرکت،

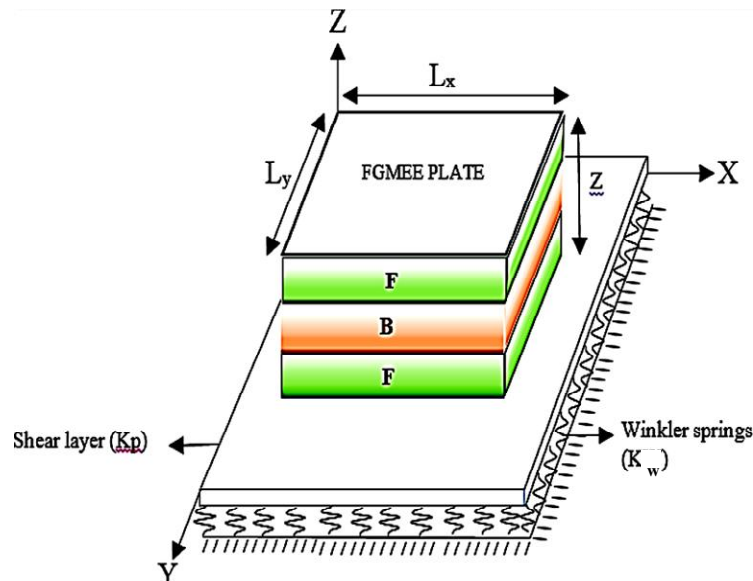
معادلات جریان و شرایط مرزی را بدون توجه به تعداد لایه‌ها، بیان می‌کند. در تحقیق دیگر نیز با روش ارائه شده، تأثیر انواع توابع شاخص تغییرات خواص مواد روی بسامد طبیعی ورق استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصل شده با نتایج نرم افزار ABAQOS مقایسه شده و تطابق خوبی نشان داده شده است [۱۱]. یک تیر مدرج تابعی در دو جهت تحت بارگذاری کوپل مکانیکی و حرارتی با استفاده از یک مدل اجزای محدود کارا، توسط لزگی [۱۲] نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. در این تحقیق میدان جابه‌جایی با استفاده از دو عبارت، تابع چندجمله‌ای و تابع نمایی تعریف شده است. نتایج حاصل از این تحقیق برای شرایط بارگذاری متفاوت مکانیکی، حرارتی و کوپل مکانیکی - حرارتی به دست آمده است. وفاخواه و نوایی نیا [۱۳] با استفاده از تابع پتانسیل جابه‌جایی، یک روش حل دقیق برای ورق‌های مدرج تابعی گون ارائه دادند. برای یک ورق مستطیلی ایزوتروپیک و غیرهمگن که تابع تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت تحت تابع نمایی تغییر می‌کند با استفاده از تابع پتانسیل جابه‌جایی معادلات مشتقات مرتبه دوم و چهارم حاصل شده است که با روش جداسازی متغیرها و شرایط مرزی دقیق حل کرده‌اند. روش حل ارائه شده توسط وفاخواه و نوایی نیا برای هر صفحه‌ای، بدون هیچ فرضی و صفحات مدرج تابعی، قابل استفاده است. تأثیر غیرهمگن بودن و نسبت‌های مختلف ضخامت به طول صفحه، روی پاسخ صفحات نیز نشان داده شده است. هونگ [۱۴] نیز به تازگی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روش مربع دیفرانسیل تعمیم یافته یک ورق مدرج تابعی گون را تحت ارتعاش حرارتی مورد بررسی قرار داده است که برای نشان دادن غیرخطی بودن از یک ضریب C_1 در ترم‌های میدان جابه‌جایی مرتبه سوم استفاده شده است. اثر پارامترهای ضریب تصحیح برش، دمای محیط و شاخص توانی خواص مواد روی تنش حرارتی و جابه‌جایی عرضی مرکز ورق، در حضور ترم غیرخطی و عدم حضور ترم غیرخطی مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است.

با توجه به خطاها در مرحله ساخت و طراحی مواد FGM، عدم قطعیت در مقادیر پارامترهای این مواد ظاهر می‌شود که باعث تأثیر بر رفتار استاتیکی و دینامیکی صفحات ساخته شده از مواد مدرج تابعی می‌شود. در مواد FGM خواص ماکرومکانیکی، میکرومکانیکی و هندسی صفحات مدرج تابعی با عدم قطعیت همراه است. فرایند ساخت مواد FGM از ترکیب دو فاز متفاوت از مواد تشکیل شده است. برای مثال از ترکیب دو فاز فلز و سرامیک یک FGM ساخته می‌شود. در این مواد اطلاعات دقیقی از نحوه توزیع و شکل ذرات مواد در دسترس نیست، بنابراین مقادیر پارامترهای مشخصه مواد همچون مدول الاستیک، مدول برشی، چگالی و... با استفاده از نوع فازهای ترکیبی و شکل تقریبی از ترکیب فازها حاصل می‌شود که به همین دلیل حضور عدم قطعیت در این مواد غیرقابل چشم‌پوشی است [۱۵].

در اغلب مطالعات انجام شده روی صفحات FGM ابعاد هندسی و خواص مواد و شرایط مرزی و بین لایه‌ای به صورت مشخص و معین در نظر گرفته شده است. با توجه به تحقیقات انجام شده، تعداد مطالعات اندکی وجود دارد که عدم قطعیت در مقادیر پارامترهای صفحات مگنتو الکتروالاستیک را در نظر گرفته باشند. یانگ و همکاران [۱۶] با استفاده از تئوری تغییرشکل مرتبه اول (FSDT) یک تحلیل کمانش آماری بر روی صفحات مدرج تابعی ارائه دادند، که در این مطالعه مدول الاستیسیته، ضریب پواسون، شاخص خواص مواد و پارامترهای هندسی به عنوان متغیر تصادفی غیر وابسته در نظر گرفته شده است. داماسیو و همکاران [۱۷] با استفاده از تغییرات در ورودی‌ها و پاسخ‌های حاصل شده از تحلیل اجزای محدود، یک رابطه آماری به دست آوردند. در مطالعه انجام شده از یک مدل رگرسیون چند متغیره برای به دست آوردن رابطه بین پارامترهای ورودی و پاسخ استفاده شده و مقایسه بین رابطه حاصل شده از همبستگی بین متغیرها از دو روش لاگرانژ و کریجینگ انجام شده است. کاروالو و همکاران [۱۸] به بررسی تأثیر پارامترهای هندسی و شاخص خواص مواد روی پاسخ ورق مدرج تابعی پرداختند. در این مطالعه متغیرهای مدل را

به صورت متغیر تصادفی دارای ۷/۵ درصد انحراف از مقادیر میانگین در نظر گرفته‌اند و با استفاده از یک رگرسیون خطی چند متغیره یک مدل آماری بین متغیرهای ورودی و پاسخ مکانیکی صفحه به دست آمده است. گارسیا-ماسیس و همکاران [۱۹] با استفاده از روش‌های متا مدل به تحلیل ارتعاش آزاد صفحات مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداختند که با استفاده از دو روش کریجینگ و مدل مرتبه بالا پیشنهاد شده (RS-HDMR) یک مدل جایگزین برای مدل اجزای محدود به دست آوردند و با استفاده از روش مونت کارلو به تحلیل آماری صفحه مدرج تابعی تقویت شده با نانو لوله کربنی پرداختند. حسینی و شهبان [۲۰] یک تحلیل قابلیت اطمینان از میدان تنش برای سیلندر توخالی مدرج تابعی $Al-Al_2O_3$ ، تحت بارگذاری ناگهانی انجام دادند، که در تحلیل انجام شده، پارامترهای خواص مکانیکی سیلندر توخالی به عنوان متغیر دارای عدم قطعیت در نظر گرفته شده است. برای حل مسئله سیلندر تو خالی مدرج تابعی از یک روش عددی هیبریدی اجزای محدود گالرکین و تفاضل محدود نیومارک استفاده شده است. نوح و همکاران [۲۱] یک بهینه‌سازی براساس قابلیت اطمینان برای شاخص توان تابع خواص مواد صفحات مدرج تابعی ارائه دادند که در مطالعه انجام شده از یک روش سطح پاسخ برای مدل جایگزین و کاهش هزینه زمانی تحلیل استفاده شده است. شاکر و همکاران [۲۲] به تحلیل قابلیت اطمینان و آنالیز حساسیت یک صفحه مدرج تابعی پرداختند که در مطالعه انجام شده خواص مکانیکی صفحه به عنوان پارامتر عدم قطعیت در نظر گرفته شده است و برای تحلیل ارتعاش آزاد صفحه مدرج تابعی از روش تغییر شکل برش مرتبه بالا استفاده شده است.

با توجه به توسعه روز افزون کاربرد مواد مدرج تابعی، شناخت رفتار این مواد در حضور عدم قطعیت پارامترها، به طراحی این مواد کمک زیادی خواهد کرد. تحلیل قابلیت اطمینان صفحات مدرج تابعی اطلاعات مناسبی از ناحیه خرابی این صفحات در اختیار طراحان این سازه‌ها قرار خواهد داد. در



شکل ۱- طرح نمادین از ورق FGMEE چندلایه، روی بستر ارتجاعی دارای دو پارامتر سفتی عرضی و برشی، پارامترهای هندسی در دستگاه مختصات هندسی نشان داده شده است)

ورق N_l لایه‌ای از روش حل سه‌بعدی در فضای حالت استفاده شده است [۸]. شرایط هندسی و روابط حاکم بر مساله در بخش‌های جداگانه توضیح داده می‌شود.

۱-۲- هندسه و دستگاه مختصات

ورق چندلایه مورد مطالعه شامل N_l لایه است که هر لایه آن از مواد FGMEE ساخته شده است. در بین لایه‌ها، لغزش بین لایه‌ای از نوع الاستیک و الکترومگنت لحاظ می‌شود. ورق مورد نظر روی بستر ارتجاعی از نوع وینکلر- پاسترناک^۹ قرار گرفته است که سفتی وینکلر با K_w و سفتی برشی با K_p نمایش داده می‌شود. ابعاد ورق مورد نظر در دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z) به صورت $L_x \times L_y \times h$ است، شرایط تکیه‌گاهی ورق به صورت ساده برای چهار لبه فرض می‌شود. در این مقاله کران‌های n امین لایه به این صورت معرفی می‌شود که سطح پایین آن در $z = z_n$ و سطح بالایی آن لایه در $(z = z_{n+1})$ قرار دارد و همچنین سطح پایینی لایه اول در $z = z_1 = 0$ و سطح بالایی لایه N_l در $z = z((N_l + 1)) = h$ قرار دارد. پارامترهای هندسی ورق FGMEE در دستگاه مختصات کارتزین در شکل (۱) نشان داده شده است.

مطالعه حاضر به ارزیابی احتمالاتی و تحلیل قابلیت اطمینان پارامترهای مؤثر بر مقادیر بسامد طبیعی مود اول حاصل از ارتعاش آزاد صفحه سه لایه مدرج تابعی پرداخته شده است. پارامترهای شاخص خواص مواد لایه‌ها، لغزش بین لایه‌ای در دو جهت درون صفحه‌ای، نفوذپذیری مغناطیسی بین لایه‌ای، نفوذپذیری الکتریکی بین لایه‌ای، سفتی برشی و عرضی بستر ارتجاعی و چگالی به عنوان متغیرهای دارای عدم قطعیت در نظر گرفته می‌شود. همچنین از یک روش حل سه‌بعدی، برای تحلیل ارتعاش آزاد صفحه سه لایه FGMEE استفاده شده است. با توجه به هزینه زمانی بالا برای محاسبه بسامدها به روش حل سه‌بعدی، از روش‌های پیش‌بینی پاسخ استفاده می‌شود. روش‌های کریجینگ^۶، تابع پایه شعاعی^۷ و روش سطح پاسخ تابع چندجمله‌ای^۸، به عنوان روش‌های پیش‌بینی پاسخ به کار می‌رود. مقایسه بین نتایج حاصل شده از روش‌های پیش‌بینی با روش حل سه‌بعدی انجام شده و نتایج ارائه شده است.

۲- روش حل سه‌بعدی به کار رفته برای تحلیل ارتعاش آزاد

برای حل دقیق معادلات حرکت و محاسبه بسامد مود اول از هر

۲-۲- معادلات ساختاری

معادله ساختاری کوپل شده سه بعدی و خطی برای k امین لایه ورق FGME به این صورت بیان می شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{(n)} \\ D^{(n)} \\ B^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(n)} & -e^{(n)} & -q^{(n)} \\ e^{(n)} & x^{(n)} & d^{(n)} \\ q^{(n)} & d^{(n)} & p^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(n)} \\ E^{(n)} \\ H^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در آن $\sigma^{(n)}$ ، $\varepsilon^{(n)}$ ، $E^{(n)}$ و $H^{(n)}$ به ترتیب نشان دهنده مؤلفه های تانسور تنش، تانسور کرنش های بسیار کوچک، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی است. $D^{(n)}$ مؤلفه های بردار جابه جایی الکتریکی و $B^{(n)}$ مؤلفه های بردار جابه جایی مغناطیسی است. $C^{(n)}$ ، $e^{(n)}$ ، $x^{(n)}$ ، $q^{(n)}$ ، $d^{(n)}$ و $p^{(n)}$ به ترتیب ضرایب الاستیک، پیزوالکتریک، دی الکتریک، پیزومگنت، کوپلینگ الکترومگنت و نفوذپذیری مغناطیسی مواد هستند. برخلاف مواد همگن مگنتو الکتروالاستیک (*MEE)، $C^{(n)}$ ، $e^{(n)}$ ، $x^{(n)}$ ، $q^{(n)}$ ، $d^{(n)}$ و $p^{(n)}$ نشان داده شده در رابطه (۱) مقادیری ثابت نیستند، این ضرایب تحت یک تابع توانی (تابع نمایی یا هر تابع اختیاری دیگر) در راستای ضخامت لایه های ورق FGME قابل تغییر هستند. شکل ماتریسی این مقادیر در پیوست نشان داده شده است.

۲-۳- معادلات اساسی

مؤلفه های میدان جابه جایی (u_i) با استفاده از رابطه کرنش - جابه جایی با مؤلفه های میدان کرنش به این صورت با هم رابطه دارند:

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\gamma} \left(u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)} \right) \quad (2)$$

مؤلفه های میدان الکتریکی نیز می توانند طبق رابطه (۳) با پتانسیل الکتریکی (ϕ) مرتبط شوند:

$$E_i^{(n)} = -\phi_{,i}^{(n)} \quad (3)$$

رابطه (۴) نیز بین مؤلفه های میدان مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی (ψ) برقرار است:

$$H_i^{(n)} = -\psi_{,i}^{(n)} \quad (4)$$

معادلات تعادل در صورت عدم حضور نیروهای حجمی برای n امین لایه ساخته شده از مواد MEE برای حالت دینامیکی چنین

است:

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5)$$

قوانین گوس^{۱۱} در حالت الکترومگنت از ورق، برای الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن بر ورق حاکم است. در صورت عدم حضور چگالی شارژ الکتریکی و مغناطیسی قانون گوس^{۱۱} به این شکل نوشته می شود:

$$D_{i,i}^{(n)} = 0, \quad B_{i,i}^{(n)} = 0 \quad (6)$$

برای ورق FGME دارای تکیه گاه ساده در چهار لبه، شرایط مرزی برای چهار لبه عمودی، شرایط مرزی مکانیکی و الکترومگنت روی سطح پایین و سطح بالای ورق و شرایط اتصال بین لایه ها در مرجع [۸] قابل مشاهده است.

۲-۴- روش حل سه بعدی ارتعاش آزاد

در این روش حل مؤلفه های جابه جایی و پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی چنین فرض می شود:

$$\begin{aligned} u_1^{(n)}(x, y, z, t) &= U^{(n)}(z) \cos(mx) \sin(ly) \sin(\omega t + \phi_0) \\ u_2^{(n)}(x, y, z, t) &= V^{(n)}(z) \sin(mx) \cos(ly) \sin(\omega t + \phi_0) \\ u_3^{(n)}(x, y, z, t) &= W^{(n)}(z) \sin(mx) \sin(ly) \sin(\omega t + \phi_0) \\ \phi^{(n)}(x, y, z, t) &= \Phi^{(n)}(z) \sin(mx) \sin(ly) \sin(\omega t + \phi_0) \\ \psi^{(n)}(x, y, z, t) &= \Psi^{(n)}(z) \sin(mx) \sin(ly) \sin(\omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (7)$$

روابط (۷) شرایط مرزی در چهار لبه ورق FGME را ارضاء می کند. باید توجه شود که هیچ فرضی برای $U^{(n)}(z)$ ، $V^{(n)}(z)$ ، $W^{(n)}(z)$ ، $\Phi^{(n)}(z)$ و $\Psi^{(n)}(z)$ در معادله (۷) در نظر گرفته نشده است، آنها توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. با قرار دادن روابط (۷) در روابط (۲) تا (۴)، و جای گذاری نتایج حاصل در رابطه (۱)، عبارتی برای مؤلفه های تنش، جابه جایی الکتریکی و جابه جایی مغناطیسی حاصل می شود.

با جایگزینی معادلات حاصل شده در روابط (۵) و (۶)، دستگاه معادلات حاصل شده شامل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود که می توان آن را به صورت معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نوشت و مانند مرجع [۸] قابل حل است.

با صفر کردن دترمینان ماتریس ضرایب حاصل شده، بسامدهای حاصل از ارتعاش آزاد ورق چندلایه FGMEE حاصل می‌شود. برای پیدا کردن بسامدهایی که به‌ازای آن دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود، ابتدا باید بازه‌ای که در آن بازه جواب وجود داشته باشد جستجو شود سپس با استفاده از روش تنصیف، بسامدی که به‌ازای آن دترمینان ماتریس ضرایب صفر می‌شود، پیدا کرد. این روش هزینه زمانی خیلی زیادی خواهد داشت و انجام ارزیابی احتمالاتی و تحلیل قابلیت اطمینان با این روش امکان‌پذیر نیست. به‌همین دلیل روش‌های متا مدل برای کاهش هزینه محاسباتی به‌کار می‌رود که در بخش بعد توضیحات مربوط به روش‌های پیش‌بینی پاسخ آمده است.

۳- روش‌های پیش‌بینی پاسخ

۳-۱- روش کریجینگ

مدل کریجینگ یک روش درونیابی برای ساخت یک مدل جایگزین، به‌جای تابع اصلی است. روش کریجینگ، یک تابع را با استفاده از ترکیبی از توابع مبنا تقریب می‌زند. در این روش تابع پاسخ مجهول مورد نظر $y(x)$ که از n متغیر با دامنه $x \in D \subseteq R^n$ ، تشکیل شده است، حاصل مجموع یک تابع رگرسیون $y_r(x)$ و یک تابع آماری $F(x)$ است:

$$y(x) = y_r(x) + F(x) \quad (8)$$

که در اینجا تابع $F(x)$ از یک فرایند آماری با میانگین صفر، واریانس σ و کواریانس غیرصفر قابل محاسبه است. $y_r(x)$ یک تابع رگرسیون مشخص برای p پارامتر تابع رگرسیون که وابسته به $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_p]$ و تابع مشخص f با شرایط $f: R^n \rightarrow R$ است، یعنی:

$$y_r(\beta, x) = f(x)^T \beta \quad (9)$$

که در اینجا $y_r(x)$ تقریب‌های کلی از فضای طراحی است، درحالی که $F(x)$ انحرافات محلی شده برای درونیابی‌های حاصل شده از مدل کریجینگ برای داده‌ها است. کواریانس ماتریس $F(x)$ بین هر دو نمونه از فضای m نمونه ورودی

به‌صورت زیر است:

$$\text{cov}[F(x^i), F(x^j)] = \sigma^2 R[R(\theta, x^i, x^j)] \quad (10)$$

R یک ماتریس $m \times m$ قطری است. $R_{ij} = R(\theta, x^i, x^j)$ مدل همبستگی با پارامترهای $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_i]$ است. کاربر می‌تواند برای همبستگی مدل از توابع متفاوت که در مراجع [۲۳ و ۲۴] وجود دارند، استفاده کند. در تحقیق حاضر از تابع همبستگی گوسی استفاده می‌شود:

$$R(x^i, x^j, \theta) = \exp \left[- \sum_{k=1}^l \theta_k |x_k^i - x_k^j|^2 \right] \quad (11)$$

مقادیر پاسخ پیش‌بینی شده توسط مدل کریجینگ $\hat{y}(x)$ در نقاط تعریف شده ورودی، از رابطه (۱۲) به‌دست آمده است:

$$\hat{y}(x) = f(x)^T \beta^* + r(x)^T (Y - F \beta^*) \quad (12)$$

که در اینجا Y یک ماتریس ستونی با m مؤلفه که حاوی مقادیر بسامدهای نمونه‌های ورودی حاصل شده از حل دقیق سه‌بعدی است. F ماتریس $m \times p$ از ورودی‌ها است یعنی $F_{ij} = f_j(x_i)$. $r(x)$ نیز یک بردار است که همبستگی بین نقاط طراحی و x را مشخص می‌کند:

$$r(x)^T = [R(\theta, x_1, x), \dots, R(\theta, x_m, x)]^T \quad (13)$$

رگرسیون $F, \beta \equiv Y$ به روش حداقل کردن مربعات تعمیم یافته حاصل شده است:

$$\beta^* = (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} Y \quad (14)$$

واریانس تخمین زده شده از رابطه (۱۵) حاصل شده است:

$$\sigma^2 = \frac{1}{m} (Y - F \beta^*)^T R^{-1} (Y - F \beta^*) \quad (15)$$

ماتریس R و در نتیجه β^* و σ^2 وابسته به θ هستند.

در مطالعه حاضر برای رگرسیون مدل از یک تابع درجه دوم و برای همبستگی بین متغیرهای مدل، از تابع گوسی استفاده شده است.

۳-۲- روش تابع پایه شعاعی

روش پیش‌بینی تابع پایه شعاعی (RBF) برای حالت‌هایی که تعداد داده‌های ورودی زیاد باشد قابل کاربرد است. در سال‌های

است [۲۷-۳۰]. این روش با استفاده از تکنیک‌های ریاضیات و آمار به تخمین پاسخ بر اساس آموزش یک تابع چندجمله‌ای برحسب متغیرهای ورودی می‌پردازد. پاسخ در روش PRSM بر اساس پاسخ‌هایی که به‌ازای متغیرهای ورودی از تابع اصلی حاصل شده است چنین بیان می‌شود:

$$y = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_y \quad (19)$$

در این رابطه $\mathbf{X}$ برداری از پارامترهای ورودی، $\boldsymbol{\beta}$ بردار ضرایب مجهول و ε_y بردار خطا است.

روش PRSM برای حالتی که تابع اساسی پیش‌بینی از یک چندجمله‌ای درجه دو استفاده شود به این صورت زیر خواهد بود:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{ij} x_i x_j \quad (20)$$

که در این معادله ضرایب چندجمله‌ای مجهول با استفاده از حداقل کردن مربعات خطاها تخمین زده می‌شود:

$$e(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{ij} x_i x_j \right)^2 \quad (21)$$

$$= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

مطابق با روش حداقل کردن مربعات $\boldsymbol{\beta}$ چنین حاصل می‌شود:

$$\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \{ \mathbf{X}^T \mathbf{y} \} \quad (22)$$

در روش PRSM، بردار داده‌های ورودی جهت آموزش مدل PRSM، یعنی (x, y) ‌ها باید با دقت انتخاب شوند تا این روش یک تابع با دقت خوب جهت پیش‌بینی پاسخ تخمین بزند.

۴- ساخت مدل پیش‌بینی

مراحل ساخت مدل جایگزین با استفاده از روش‌های پیش‌بینی در شکل (۲) نشان داده شده است و به این شرح است:

گام اول: مشخص نمودن پارامترهای دارای عدم قطعیت و مشخصات آماری آنها، یعنی نوع توزیع آماری، میانگین و واریانس متغیرها؛

گام دوم: تولید تعداد محدود نمونه با توجه به بازه تغییرات هر متغیر به‌طور یکنواخت و محاسبه مقدار بسامدهای مود اول

اخیر تحقیقاتی برای ساخت یک مدل پیش‌بینی به روش RBF با تعداد محدود داده ورودی انجام شده است. یک مدل RBF به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(x - x_i) \quad (16)$$

در رابطه (۱۶) n تعداد نمونه‌های ورودی، x بردار متغیرهای ورودی، x_i متغیرهای طراحی در هر نقطه، $\|x - x_i\|$ اندازه هندسی فاصله هر نقطه و λ_i ضریبی مجهول برای آامین تابع اساسی است.

تابع تقریبی f در واقع یک ترکیب خطی از توابع اساسی شعاعی با وزن‌های متفاوت است. برخی از رایج‌ترین توابع اساسی به‌کار رفته در روش RBF شامل توابع خطی، مکعبی، نوار صفحه‌ای باریک، گوسی، چند گانه و عکس چند گانه است که در مرجع [۲۵] قابل مشاهده است.

با جایگزینی x و $f'(x)$ در معادله (۱۶) با n بردار از متغیرهای ورودی و مقادیر تابع اصلی، n معادله تشکیل می‌شود:

$$f'(x_1) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(x_1 - x_i) \quad (17)$$

$$f'(x_r) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(x_r - x_i)$$

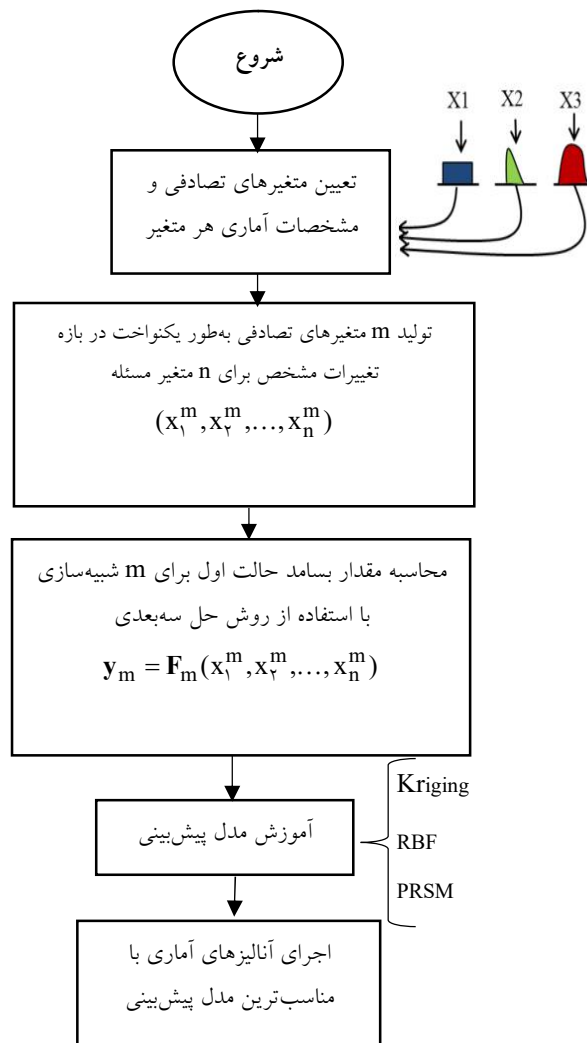
شکل ماتریسی رابطه (۱۷) به این صورت نشان داده می‌شود:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \quad (18)$$

که $A_{i,j} = \phi(\|x_i - x_j\|)$ $i, j = (1, 2, \dots, n)$ ، $\mathbf{f} = [f'(x_1) f'(x_r) f'(x_n)]^T$ و $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]^T$ است. ضرایب λ با استفاده از حل رابطه (۱۸) حاصل می‌شود.

۳-۳ روش سطح پاسخ چندجمله‌ای

روش سطح پاسخ چندجمله‌ای (PRSM) برای حالت‌هایی که یک تابع مشخصی جهت تحلیل وجود ندارد به‌طور گسترده قابل کاربرد است. روش PRSM برای اولین بار توسط باکس و ویلسون [۲۶] ارائه شده است و تحقیقات گسترده‌ای برای استفاده از روش PRSM در تحلیل قابلیت اطمینان به‌کار رفته



شکل ۲- الگوریتم مراحل ساخت مدل های پیش بینی با استفاده از روش حل سه بعدی

برای محاسبه احتمال خرابی توضیح داده شده است. روش های شبیه سازی، دقیق ترین روش های ارزیابی قابلیت اطمینان سازه ای هستند. پرکاربردترین و قدیمی ترین روش شبیه سازی که می توان از آن جهت حل مسائل قابلیت اطمینان استفاده نمود، روش مونت کارلو است که در سال ۱۹۴۹ توسط متروپولیس و یولام [۳۱] ارائه شده است. روش مونت کارلو به سادگی قادر به برآورد مقدار صحیح احتمال خرابی است. روش حصول پاسخ از رابطه احتمال خرابی، براساس شبیه سازی مونت کارلو مطابق رابطه (۲۳) است:

$$P_f = \int \dots \int I[g(x) < 0] f_x(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n I[g(x_i) < 0] \approx \frac{n_f}{N} \quad (23)$$

در این مقاله برای محاسبه احتمال خرابی از روش مونت کارلو استفاده شده است. بسامد خرابی برای ورق سه لایه FGME استفاده شده است. بسامد خرابی برای ورق سه لایه FGME، ۶۰۰۰ در نظر گرفته شده است، یعنی کمتر از این بسامد باعث

به ازای متغیرهای ورودی تولید شده با استفاده از روش حل سه بعدی؛

گام سوم: آموزش مدل پیش بینی پاسخ با استفاده از متغیرهای ورودی و پاسخ های حاصل شده در گام دوم؛

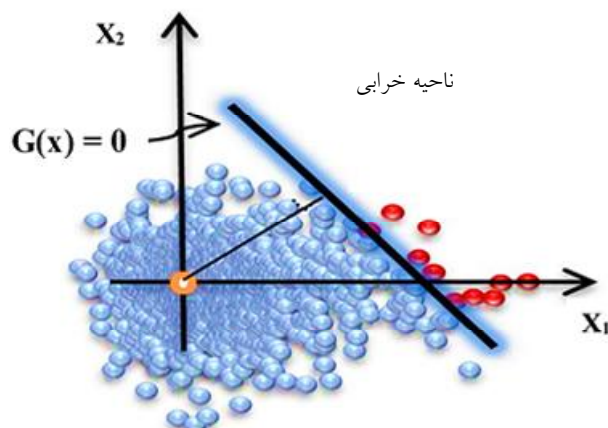
گام چهارم: پیش بینی پاسخ با استفاده از روش های پیش بینی کریجینگ، RBF و PRSM به ازای نمونه های ورودی دلخواه؛

گام چهارم: ارزیابی دقت روش های پیش بینی پاسخ و انتخاب روشی با کمترین خطا؛

گام پنجم: انجام ارزیابی های احتمالاتی با استفاده از مناسب ترین مدل پیش بینی.

۵- تحلیل قابلیت اطمینان

در این قسمت تحلیل قابلیت اطمینان به روش مونت کارلو



شکل ۳- برآورد احتمال خرابی با استفاده از روش مونت کارلو.

پارامترهای دارای عدم قطعیت و محاسبه بسامد اساسی با استفاده از روش حل سه بعدی برای ورق FGMEE مورد نظر، مدل‌های پیش‌بینی ساخته شده است. نتایج حاصل از مدل‌های پیش‌بینی به سه روش کریجینگ، تابع پایه شعاعی (RBF) و سطح پاسخ با استفاده از تابع چندجمله‌ای (PRSM)، با روش حل سه بعدی مقایسه شده است. در بخش بعدی نیز برای یک ورق سه لایه مدرج هدفمند دارای خواص مگنتو الکتروالاستیک با دوازده پارامتر دارای عدم قطعیت، مدل‌های پیش‌بینی ساخته شده است و ارزیابی احتمالاتی و تحلیل قابلیت اطمینان روی نتایج انجام شده است.

۶-۱- ارزیابی صحت نتایج

در این قسمت یک ورق سه لایه FGMEE در نظر گرفته شده، که به صورت ساده در چهار لبه مقید است. این ورق از مواد پیزوالکتریک، به نام BaTiO_3 و مواد دارای خواص مغناطیسی به نام CoFe_2O_4 ساخته شده است. ابعاد افقی ورق در دو جهت برابر با $L_x = L_y = 1\text{m}$ و ضخامت هر لایه مساوی با 0.1 متر و ضخامت کل ورق 0.3 متر است. در این مقاله مواد مورد استفاده در ورق سه لایه FGMEE، BaTiO_3 و CoFe_2O_4 هستند که به ترتیب با B و F نشان داده می‌شوند. ترتیب لایه‌ها در شکل (۴) قابل مشاهده است. لایه‌های ورق سه لایه از مواد مدرج تابعی هدفمند که

خرابی ورق برای عملکرد مورد انتظار خواهد شد. تابع $g(x)$ در رابطه (۲۳) چنین تعریف می‌شود:

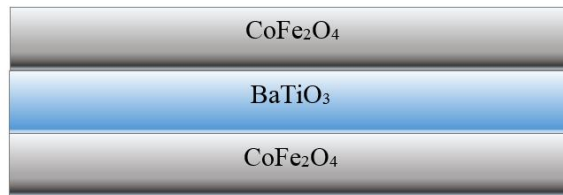
$$g(x) = y(x) - 6000 \quad (24)$$

رابطه (۲۴) تابع حالت حدی تعریف شده برای تحلیل قابلیت اطمینان را نشان می‌دهد. در رابطه (۲۴)، $y(x)$ بسامد مود اول از ورق سه لایه FGMEE است که توسط مدل جانشین کریجینگ پیش‌بینی شده است.

بدین ترتیب در این روش احتمال خرابی به صورت "نسبت تعداد نقاط موجود در ناحیه خرابی (n_f) به تعداد کل نقاط تولید شده بر اساس تابع چگالی متغیرها (N) تعریف شده است". در رابطه (۲۳)، مقدار تابع شمارنده (I)، برای نمونه‌های تولید شده در نواحی خرابی برابر یک و در نواحی سلامت برابر صفر است [۳۲]. در شکل (۳) نیز نحوه برآورد احتمال خرابی در روش شبیه‌سازی مونت کارلو نشان داده شده است.

۶- بحث و بررسی نتایج

در این بخش ابتدا با استفاده از روش حل سه بعدی به کار رفته جهت تحلیل ارتعاش آزاد صفحات مدرج هدفمند دارای خواص مگنتو الکتروالاستیک، بسامد مود اول (بسامد اساسی) برای یک مثال عددی محاسبه می‌شود و سپس صحت نتایج حاصل، ارزیابی شده است. در مرحله بعد با در نظر گرفتن



شکل ۴- نوع چینش لایه‌های ورق سه لایه FGME و شرایط تکیه‌گاهی ساده.

جدول ۱- مقایسه بسامدهای نرمال شده مود اول از ورق سه لایه FGME از روش حل سه‌بعدی و روش حل جیانگی و

همکاران [۹] برای چینش لایه‌ها به صورت B/F/B

$\alpha_1 = -10^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = -10^\circ$	$\alpha_1 = -5^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = -5^\circ$	$\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = 0^\circ$	$\alpha_1 = 5^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = 5^\circ$	$\alpha_1 = 10^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = 10^\circ$	بسامد
۰/۷۸۷۰	۰/۸۶۸۷	۰/۹۶۵۱	۰/۹۹۰۹	۱/۰۹۱۸	روش حل سه‌بعدی
۰/۷۵۱۹	۰/۸۴۴۰	۰/۹۵۱۶	۱/۰۷۴۷	۱/۲۱۱۸	جیانگی و همکاران مرجع [۹]

جدول ۲- مقایسه بسامدهای نرمال شده مود اول از ورق سه لایه FGME از روش حل سه‌بعدی و روش حل جیانگی و

همکاران [۹] برای چینش لایه‌ها به صورت F/B/F

$\alpha_1 = -10^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = -10^\circ$	$\alpha_1 = -5^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = -5^\circ$	$\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = 0^\circ$	$\alpha_1 = 5^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = 5^\circ$	$\alpha_1 = 10^\circ$ $\alpha_2 = 0^\circ$ $\alpha_3 = 10^\circ$	بسامد
۰/۸۷۱۶	۱/۰۱۲۶	۱/۰۵۱۰	۱/۰۹۹۶	۱/۲۸۴۹	روش حل سه‌بعدی
۰/۸۲۱۹	۰/۹۲۱۲	۱/۰۳۶۰	۱/۱۶۶۲	۱/۳۱۰۴	جیانگی و همکاران مرجع [۹]

در مطالعه حاضر ابتدا برای مقادیر مشخص $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, -5^\circ, -10^\circ$ بسامد مود اول از ارتعاش آزاد ورق سه لایه FGME با استفاده از روش حل سه‌بعدی برای دو نوع چینش متفاوت لایه‌ها به دست آمده است و سپس برای بررسی صحت نتایج حاصل پاسخ‌ها با بسامدهای مود اول به دست آمده از مرجع [۹] مقایسه و در جداول (۱) و (۲) آمده است. بسامدهای نشان داده شده در جدول‌های (۱) و (۲) مشابه مرجع [۹]، با استفاده از رابطه $\omega = \bar{\omega} L_x \sqrt{C_{\max} / \rho_{\max}}$ نرمال شده است.

نتایج ارئه شده در این دو جدول نشان می‌دهد که بسامد حاصل از روش حل سه‌بعدی تطابق خوبی با نتایج حاصل مرجع [۹] دارد. تفاوت جزئی موجود بین نتایج روش حل سه‌بعدی با مرجع [۹] به‌خاطر خطا در گرد کردن اعداد و تعداد جملات در نظر گرفته شده از سری پیانو در روش حل سه‌بعدی است. همچنین برای پیدا کردن بسامدی که

تغییرات خواص آن به صورت تابع نمایی در نظر گرفته می‌شود، ساخته شده است:

$$\begin{aligned} C_{kl} &= C_{kl}^0 e^{\alpha z}, & e_{ik} &= e_{ik}^0 e^{\alpha z}, & x_{ij} &= x_{ij}^0 e^{\alpha z} \\ q_{ik} &= q_{ik}^0 e^{\alpha z}, & d_{ij} &= d_{ij}^0 e^{\alpha z}, & p_{ij} &= p_{ij}^0 e^{\alpha z} \end{aligned} \quad (25)$$

که در اینجا α معرف تغییرات خواص مواد در راستای z هستند. $C_{kl}^0, e_{ik}^0, x_{ij}^0, q_{ik}^0, d_{ij}^0$ و p_{ij}^0 مقادیر خواص مواد پایه هر لایه هستند که مقادیر آنها در مراجع قابل مشاهده است.

۶-۱-۱- ارزیابی صحت نتایج روش حل سه‌بعدی

این مثال با شرایط ذکر شده قبلاً توسط جیانگی و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته است [۹]. جیانگی و همکاران با توسعه روش فضای حالت و ماتریس گسترش یافته یک تحلیل ارتعاش آزاد برای یک ورق سه لایه که خواص مواد به صورت تابع نمایی در راستای ضخامت تغییر می‌کند، انجام دادند [۹].

جدول ۳- مشخصات آماری و نوع تابع توزیع متغیرها

شاخص خواص لایه‌ها	نوع توزیع	میانگین	انحراف معیار
α_1	نرمال	۰	۵
α_2	نرمال	۰	۱
α_3	نرمال	۰	۵

α_i نشان‌دهنده شاخص خواص مواد برای هر لایه است.

به‌ازای آن دترمینان ماتریس ضرایب صفر می‌شود از روش تنصیف استفاده شده است که زمان‌بر است و باعث ایجاد خطا می‌شود.

۶-۱-۲- ارزیابی نتایج روش‌های پیش‌بینی

با ارزیابی صحت نتایج حاصل شده از روش حل سه‌بعدی، برای آموزش روش‌های پیش‌بینی کریجینگ، تابع پایه شعاعی (RBF) و روش سطح پاسخ چندجمله‌ای (PRSM) از نتایج روش حل سه‌بعدی استفاده می‌شود. مدل‌های جانشین با استفاده از نتایج روش حل سه‌بعدی آموزش داده می‌شود. بسامد مود اول از ورق سه لایه FGMEE تحت ارتعاش آزاد، به‌عنوان پاسخ سازه $(y(x))$ در نظر گرفته شده است. شاخص تغییرات خواص مواد (α_i) ، برای هر لایه از ورق سه لایه FGMEE به‌عنوان متغیرهای دارای عدم قطعیت فرض می‌شود که در جدول (۳) نوع تابع توزیع و مشخصات آماری برای هر متغیر قابل مشاهده است. برای ساخت مدل‌های جانشین جهت پیش‌بینی بسامد اساسی، ابتدا برای ۳۰ نمونه تصادفی از متغیرها با توزیع یکنواخت در بازه مشخص از هر متغیر نمونه‌گیری می‌شود و با استفاده از روش حل سه‌بعدی ۳۰ پاسخ به‌دست می‌آید. با نتایج حاصل شده از روش حل سه‌بعدی، روش‌های پیش‌بینی آموزش داده می‌شود. برای ارزیابی نتایج حاصل شده از روش‌های پیش‌بینی کریجینگ، تابع پایه شعاعی (RBF)، روش سطح پاسخ چندجمله‌ای (PRSM)، ابتدا به‌طور تصادفی ۲۰۰۰ نمونه تصادفی با توجه به نوع توزیع آماری مشخص شده برای هر متغیر، نمونه‌گیری شده است. بسامدهای مود اول از ورق مورد نظر با استفاده از روش‌های پیش‌بینی به‌دست

می‌آید. به‌طور تصادفی ۲۰ نمونه از ۲۰۰۰ نمونه تولید شده، انتخاب می‌شود (مقادیر نمونه‌های انتخاب شده برای بیست شبیه‌سازی انتخاب شده در جدول (۴) آمده است) و نتایج به‌دست آمده از روش‌های پیش‌بینی و روش حل سه‌بعدی در نمودار میله‌ای در شکل (۵) برای هر شبیه‌سازی نشان داده شده است. خطای هر یک از روش‌های پیش‌بینی کریجینگ، تابع پایه شعاعی (RBF)، روش سطح پاسخ چندجمله‌ای (PRSM) نیز نسبت به روش حل سه‌بعدی در شکل (۶) قابل مشاهده است. همان‌طور که از نتایج حاصل شده از شکل (۵) مشاهده می‌شود، برای پیش‌بینی بسامد اساسی ورق سه لایه FGMEE با سه متغیر، روش پیش‌بینی PRSM و کریجینگ نزدیک‌ترین پاسخ را به پاسخ روش حل سه‌بعدی پیش‌بینی کردند. در این مثال برای پیش‌بینی پاسخ به روش PRSM از تابع چندجمله‌ای درجه ۳ استفاده شده است. با مشاهده شکل (۶) نیز قابل مشاهده است که روش PRSM و کریجینگ کمترین خطا در پیش‌بینی بسامد مود اول از ورق سه لایه FGMEE برای بیست شبیه‌سازی که به‌صورت تصادفی انتخاب شده را داشته‌اند.

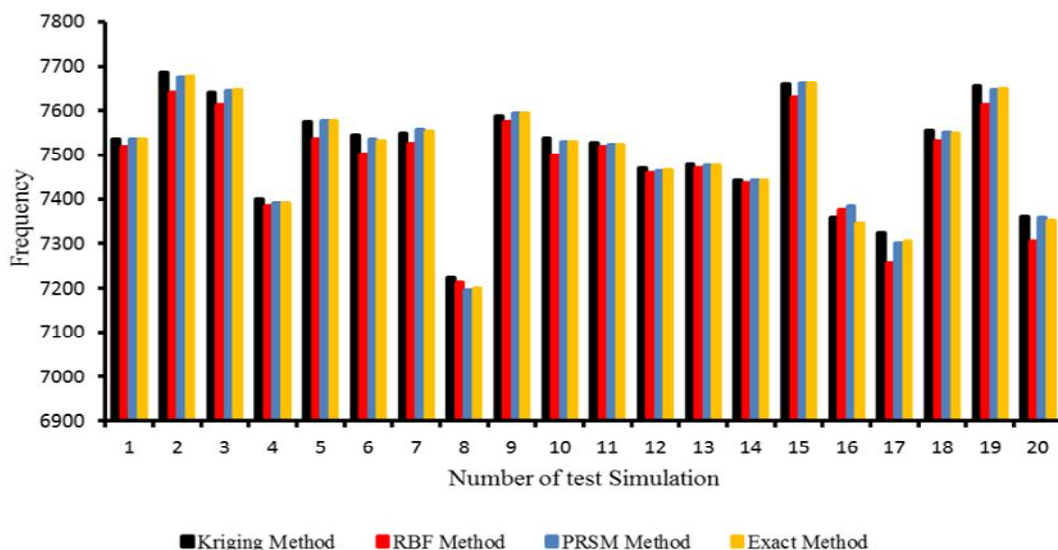
۶-۲- ورق سه لایه FGMEE با ۱۲ پارامتر دارای عدم قطعیت

در این قسمت برای ورق سه لایه FGMEE با لحاظ اثر لغزش بین لایه‌ای، واقع بر بستر ارتجاعی (که طرح نمادین آن در شکل (۴) نشان داده شده است) ابتدا با استفاده از روش حل سه‌بعدی، تأثیر پارامترها روی بسامد طبیعی مود اول نشان داده شده است. سپس با استفاده از روش‌های پیش‌بینی پاسخ کریجینگ، به ارزیابی احتمالاتی تأثیر عدم قطعیت پارامترها بر

جدول ۴. مقادیر عددی سه متغیر ورودی α_1 ، α_2 و α_3 از بیست نمونه تصادفی انتخاب شده برای ارزیابی

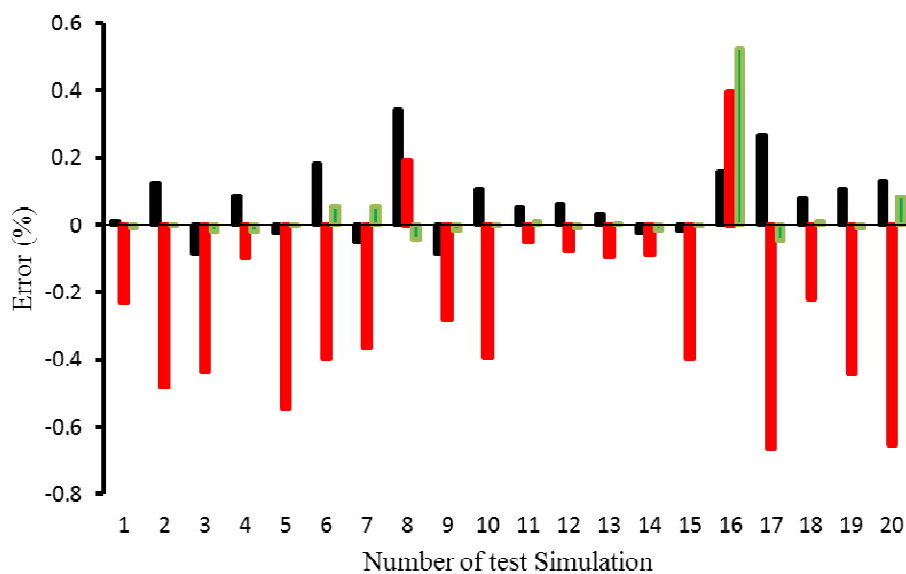
صحت نتایج روش‌های پیش‌بینی

نمونه‌ها	α_1	α_2	α_3
۱	۳/۲۶۸۸۱۹	- ۱/۴۵۱۳۹	- ۲/۰۷۳۱۴
۲	۳/۱۶۰۱۳۹	- ۰/۷۲۲۳۹	۳/۸۸۲۰۴
۳	۲/۵۷۶۹۱	۰/۸۹۵۹۱۱	۴/۶۶۹۱۳۲
۴	۰/۷۳۸۴۴۵	- ۰/۱۸۰۰۴	- ۳/۹۶۵۸۷
۵	۰/۰۲۷۴۱۳	۰/۵۶۰۴۱	۴/۳۹۴۷۲۳
۶	۹/۹۳۷۰۰۶	- ۰/۸۳۲۶۷	- ۲/۰۴۸۴۵
۷	۱۰/۴۲۸۶۵	۰/۱۳۸۱۰۵	- ۱/۰۶۹۲۹
۸	- ۰/۲۸۰۲۶	۰/۲۶۶۸۹۶	- ۸/۰۶۴۲۳
۹	۴/۲۹۷۷۰۷	۱/۰۷۶۰۶۷	۱/۱۳۹۸۴۵
۱۰	۰/۵۶۶۶۰۹	- ۰/۷۷۱۳۵	۰/۰۱۰۲۶۳
۱۱	۵/۰۶۹۰۲۶	- ۱/۰۷۷۹۱	- ۲/۸۱۸۸۵
۱۲	۲/۸۲۴۶۴۷	- ۰/۳۰۷۰۹	- ۳/۱۴۸۴۶
۱۳	- ۲/۱۰۴۴۵	- ۰/۳۵۷۲۵	۱/۴۸۸۱۴۹
۱۴	- ۱/۴۳۲۹۱	۰/۲۴۵۶۱۷	- ۰/۰۰۱۵
۱۵	۶/۳۵۴۴۱۱	- ۰/۲۳۰۴	۱/۵۴۹۰۷۲
۱۶	- ۷/۴۶۵۳۲	۰/۲۶۳۳۰۶	۶/۷۳۵۰۲۹
۱۷	۳/۹۴۵۸۶۵	۰/۳۹۲۴۰۲	- ۷/۲۷۱۱۹
۱۸	۵/۵۱۲۶۳۱	- ۰/۷۵۹۶۹	- ۱/۹۸۱۴۵
۱۹	۳/۹۱۰۲۷۱	- ۰/۵۹۹۹۷	۱/۹۵۰۴۸۸
۲۰	- ۶/۷۸۶۰۵	- ۰/۸۲۱۷۱	۸/۶۸۰۱۴۴



شکل ۵- مقایسه بین بسامدهای مود اول حاصل شده از ارتعاش آزاد صفحه سه لایه FGME با استفاده از روش‌های

پیش‌بینی پاسخ و روش حل سه‌بعدی



شکل ۶- خطای پاسخ‌های پیش‌بینی شده با استفاده از روش‌های Kriging، RBF و PRSM نسبت به روش حل سه‌بعدی برای بیست شبیه‌سازی تصادفی.

لایه FGME، لغزش‌های بین لایه‌ای (R_{xz} , R_{xy})، نفوذپذیری مغناطیسی (R_{magnet})، نفوذپذیری الکتریکی ($R_{electrical}$) و سفتی‌های برشی و عرضی بستر ارتجاعی (K_w, K_p) و چگالی لایه‌ها ($\rho_F^1, \rho_B^1, \rho_F^3$) است. نوع توزیع و مشخصات آماری این متغیرها در جدول (۵) نشان داده شده است. ρ_B^1 و ρ_F^3 به ترتیب چگالی مواد $BaTiO_3$ ، $CoFe_2O_4$ و $CoFe_2O_4$ به کار رفته در ساخت هر لایه از ورق سه لایه FGME است. ورق سه لایه مورد مطالعه به صورت ساده مقید شده است. طول ورق در دو راستای x و y برابر ۱ متر است ($L_x = L_y = 1m$). ضخامت ورق نیز ۰/۳ متر است ($h = 0.3m$).

تأثیر تغییر پارامترها در اطراف مقدار میانگین روی بسامد طبیعی مود اول ورق با استفاده از روش حل سه‌بعدی، در شکل (۷) تا (۱۰) نشان داده شده است. میانگین هر یک از پارامترها به مقدار $\pm 0.25\mu$ و $\pm 0.5\mu$ تغییر نموده و تأثیر این تغییرات روی بسامد طبیعی مود اول ورق سه لایه با استفاده از روش حل سه‌بعدی، مورد مقایسه قرار گرفته است. بسامدهای حاصل شده با استفاده از رابطه $\omega = \bar{\omega} L_x \sqrt{C_{max} / \rho_{max}}$ نرمال شده است.

بسامد طبیعی مود اول ورق و تحلیل قابلیت اطمینان از ورق، پرداخته شده است. قابل ذکر است که برای پیش‌بینی پاسخ ورق مورد مطالعه در این بخش به علت زیاد بودن تعداد متغیرهای تصادفی مسئله روش کریجینگ بهترین پیش‌بینی را نسبت به روش‌های RBF و PRSM داشته است و به همین دلیل در این بخش برای ارزیابی احتمالاتی از روش کریجینگ استفاده می‌شود.

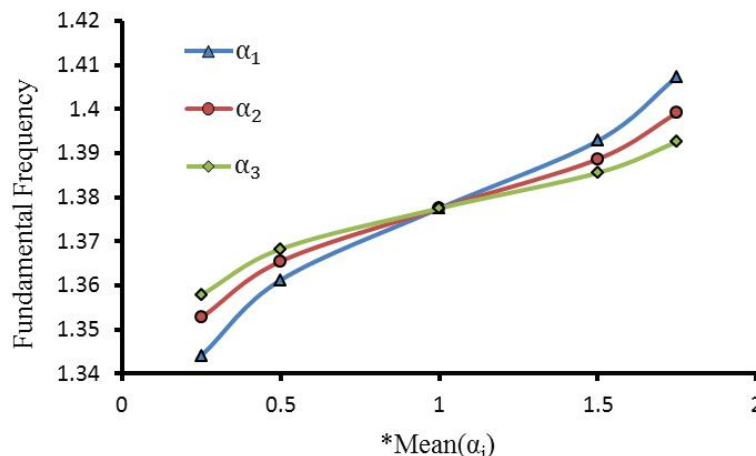
اثر لغزش بین لایه‌ای، ضریب سفتی بستر ارتجاعی و ضریب سفتی الاستیک بین لایه‌ای به صورت زیر نرمال می‌شوند:

$$K_w = \frac{k_w}{C_{\varphi\varphi}^B}, \quad K_p = \frac{k_p}{C_{\varphi\varphi}^B} \quad (26)$$

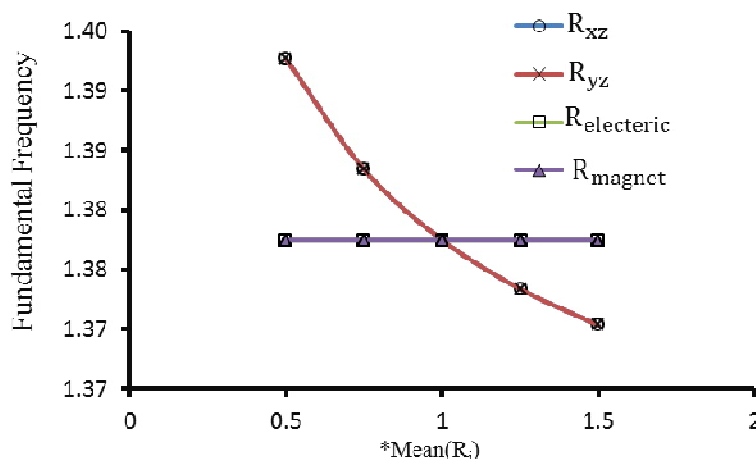
$$R_i^{(n)} = \bar{R}_i^{(n)} C_{\varphi\varphi}^B, \quad R_{\varphi}^{(n)} = \bar{R}_{\varphi}^{(n)} x_{\varphi\varphi}^B, \quad R_{\delta}^{(n)} = \bar{R}_{\delta}^{(n)} p_{\varphi\varphi}^B$$

در اینجا بالا نویس B نشان‌دهنده $BaTiO_3$ است و $i = 1, 2, 3$ بیانگر راستای ضریب سفتی تعمیم‌یافته بین لایه‌ای در سه جهت است.

برای جلوگیری از پدیده توی هم‌رفتگی لایه‌ها مقدار $R_{\varphi}^{(n)} = 0$ فرض می‌شود. پارامترهایی که دارای عدم قطعیت در نظر گرفته می‌شود شامل شاخص خواص مواد (α_i) ورق سه



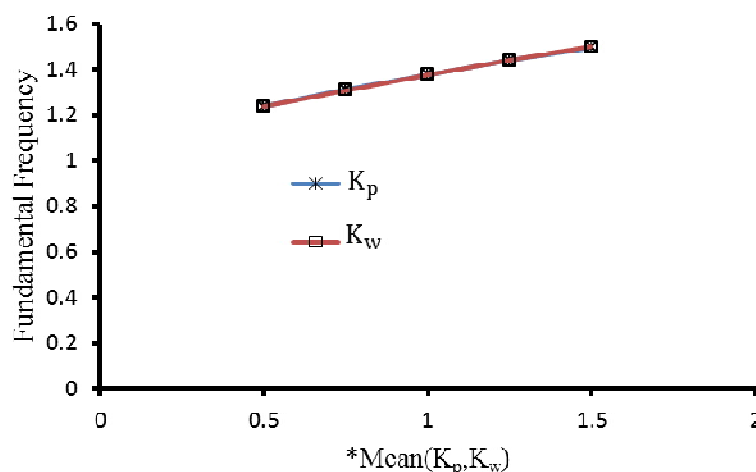
شکل ۷- نمودار تغییرات بسامد طبیعی مود اول ورق سه لایه مدرج FGME به ازای تغییرات شاخص خواص مواد هر لایه (α_i) حول مقدار میانگین متغیرها با استفاده از روش حل سه بعدی



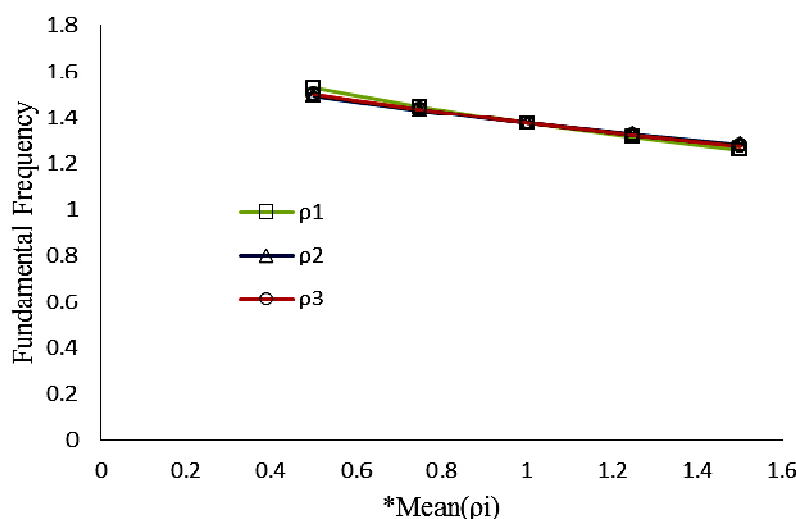
شکل ۸- نمودار تغییرات بسامد طبیعی مود اول ورق سه لایه مدرج FGME به ازای تغییرات لغزش‌های بین لایه‌ای (R_i) حول مقدار میانگین متغیرها با استفاده از روش حل سه بعدی

افزایش لغزش بین لایه‌ای باعث کاهش بسامد طبیعی مود اول شده است. با توجه به شکل (۹) نیز افزایش مؤلفه‌های برشی و عرضی سفتی بستر باعث افزایش بسامد طبیعی مود اول می‌شود. در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود که افزایش چگالی لایه‌ها باعث کاهش بسامد طبیعی مود اول می‌شود و چگالی لایه اول تأثیر بیشتری بر روی بسامد طبیعی مود اول داشته است. با مشاهده شکل‌های (۷) تا (۱۰) این نتیجه حاصل شده است که چگالی لایه‌ها و سپس مؤلفه‌های سفتی برشی و عرضی بستر ارتجاعی بیشترین تأثیر را روی

با توجه به شکل (۷) تغییرات شاخص خواص مواد لایه اول (α_1) از ورق سه لایه FGME بیشترین تأثیر را بر بسامد طبیعی مود اول دارد. و افزایش شاخص خواص مواد (α_i) باعث افزایش بسامد طبیعی مود اول شده است. با مشاهده شکل (۸) نیز تأثیر تغییرات لغزش‌های بین لایه‌ای ($R_{xx}, R_{xy}, R_{electric}, R_{magnet}$) روی بسامد طبیعی مود اول نشان داده شده است، همان‌طور که قابل مشاهده است، تغییرات R_{xx} و R_{xy} بیشترین تأثیر و تغییرات $R_{electric}$ و R_{magnet} کمترین تأثیر را بر روی بسامد طبیعی مود اول داشته است که



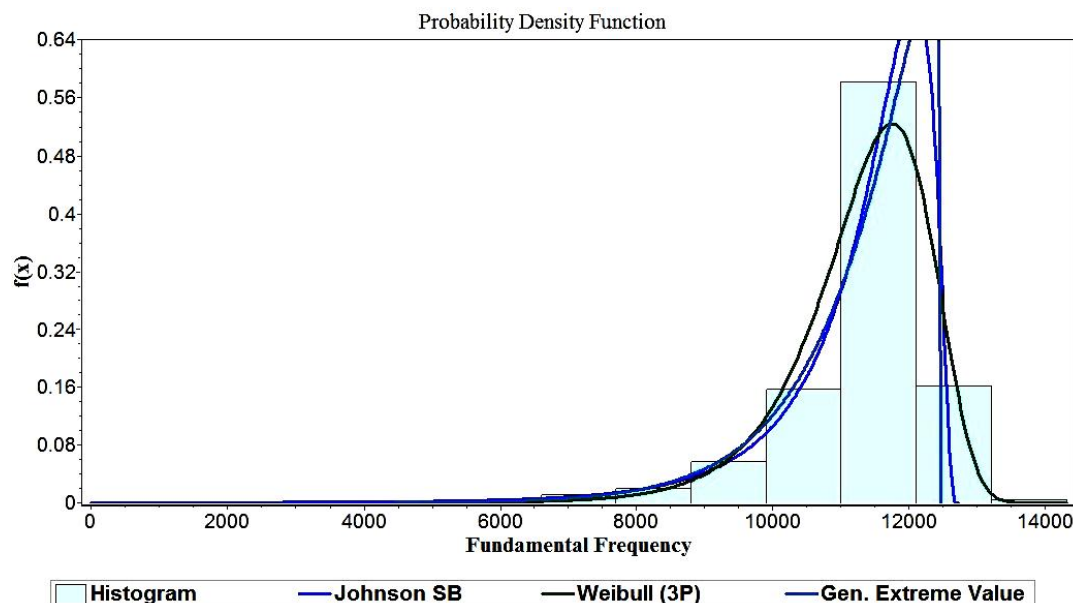
شکل ۹- نمودار تغییرات بسامد طبیعی مود اول ورق سه لایه مدرج FGMEE به ازای تغییرات مؤلفه‌های سفتی بستر ارتجاعی (K_w, K_p) حول مقدار میانگین متغیرها با استفاده از روش حل سه بعدی.



شکل ۱۰- نمودار تغییرات بسامد طبیعی مود اول ورق سه لایه مدرج FGMEE به ازای تغییرات چگالی هر لایه (ρ_i) حول مقدار میانگین متغیرها با استفاده از روش حل سه بعدی

می‌شود. هیستوگرام فراوانی برای ۱۰۰۰۰ پاسخ پیش‌بینی شده توسط روش کریجینگ در شکل (۱۱) آمده است. همان‌طور که در شکل (۱۱) نشان داده شده است، بهترین تابع توزیع که با پاسخ‌های پیش‌بینی شده بیشترین هماهنگی را دارد، تابع توزیع ویبول^{۱۲} است. با حاصل شدن مدل جانشین کریجینگ، برای بررسی تأثیر متغیرهای دارای عدم قطعیت روی بسامد طبیعی مود اول از ورق سه لایه FGMEE، هر بار مقدار میانگین هر پارامتر ۲۵ درصد کاهش و ۲۵ درصد افزایش یافته و نمودار توزیع فراوانی و توزیع تجمعی از بسامد طبیعی

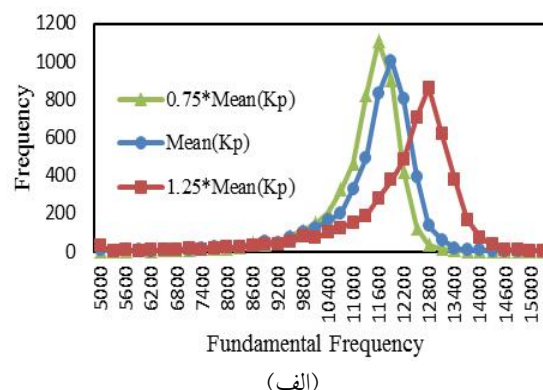
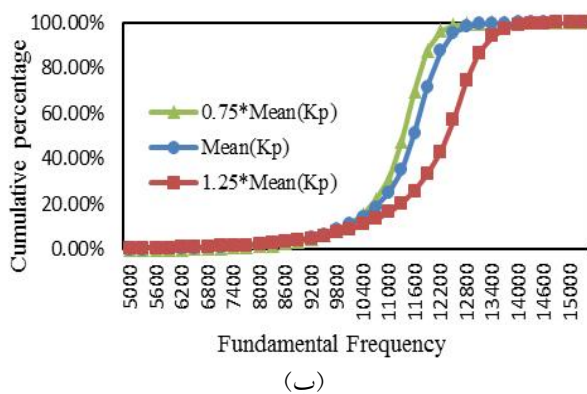
بسامد طبیعی مود اول داشته‌اند. برای ساخت مدل پیش‌بینی، ابتدا به ازای ۱۲۵ نمونه تصادفی از هر متغیر، مقدار بسامدهای مربوط به هر شبیه‌سازی با استفاده از روش حل سه بعدی به دست می‌آید. با استفاده از مقادیر ورودی از متغیرها و پاسخ حاصل شده از روش حل سه بعدی، مدل‌های پیش‌بینی کریجینگ آموزش می‌یابد. برای انجام تحلیل قابلیت اطمینان ورق سه لایه FGMEE با استفاده از مدل‌های جانشین، برای ۱۰۰۰۰ نمونه تصادفی ورودی از هر متغیر تعریف شده، بسامد مربوط به آن متغیرها پیش‌بینی



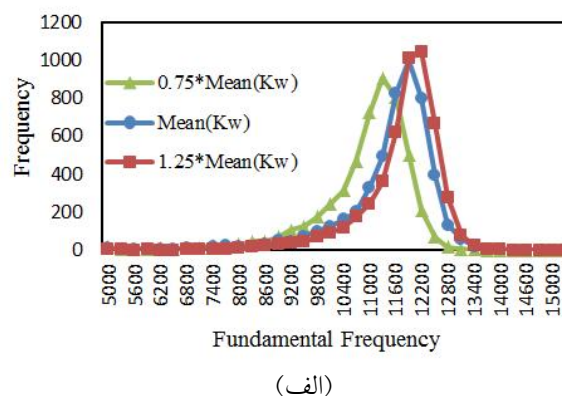
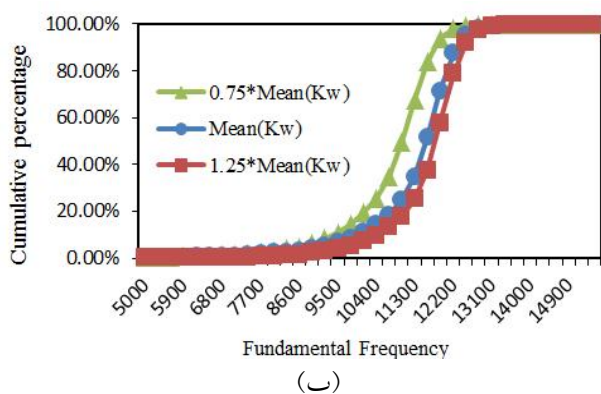
شکل ۱۱- هیستوگرام پاسخ‌های پیش‌بینی شده با استفاده از مدل جانشین کریجینگ

(۱۳) نیز نتیجه‌ای تقریباً مشابه شکل (۱۲) برای پارامتر سفتی عرضی بستر ارتجاعی K_w قابل مشاهده است. همان‌طور که از شکل‌های (۱۲) و (۱۳) مشاهده می‌شود، کاهش ۲۵ درصدی مقادیر میانگین سفتی‌های برشی و عرضی، تأثیر بیشتری روی بسامد مود اول ورق سه لایه FGMEE نسبت به ۲۵ درصد افزایش مقادیر میانگین سفتی‌های برشی و عرضی داشته است، یعنی افزایش از یک حد مشخص برای پارامترهای سفتی بستر ارتجاعی (K_p ، K_w) تأثیر چندانی روی بسامد طبیعی مود اول ورق نخواهد داشت. در شکل (۱۴-الف) مشاهده می‌شود که با افزایش چگالی لایه اول مقادیر بسامدهای کمتر، دارای فراوانی بیشتری خواهند بود و با کاهش ۲۵ درصدی چگالی لایه اول، بسامد مود اول از ورق سه لایه FGMEE در ناحیه‌ای با مقادیر بیشتر، فراوان‌تر خواهد بود. یعنی کاهش چگالی باعث افزایش بسامد طبیعی مود اول ورق سه لایه FGMEE شده است، و بالعکس. نتیجه‌ای مشابه پارامتر چگالی لایه اول برای متغیر نفوذپذیری الکتریکی در شکل (۱۵) نشان داده شده است، با این تفاوت که با افزایش و کاهش ۲۵ درصدی پارامتر نفوذپذیری الکتریکی، تغییرات کمتری نسبت به شکل (۱۴) روی بسامد طبیعی مود اول ورق

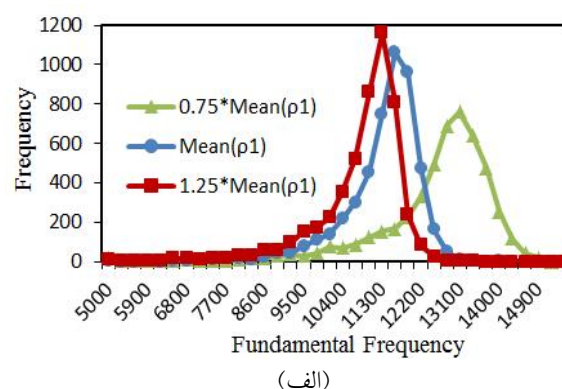
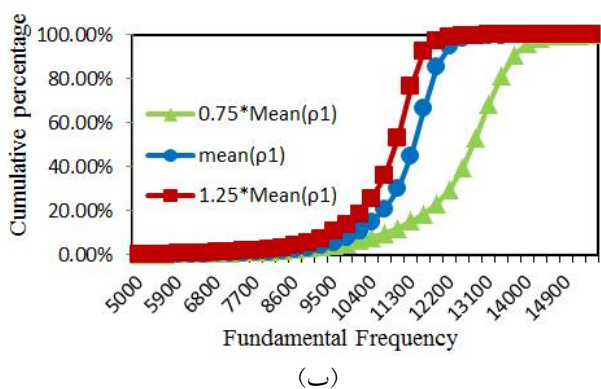
مود اول پیش‌بینی شده توسط مدل جایگزین کریجینگ برای هر حالت در شکل‌های (۱۲) تا (۱۶) رسم شده است. با توجه به نمودار فراوانی شکل (۱۲-الف)، مشاهده می‌شود که با افزایش ۲۵ درصدی مقدار میانگین پارامتر سفتی برشی، فراوانی داده‌های پیش‌بینی شده در نواحی با بسامد بیشتر، افزایش پیدا کرده است، یعنی افزایش سفتی برشی بستر ارتجاعی باعث افزایش بسامد طبیعی مود اول ورق سه لایه FGMEE شده است، عکس این نیز برقرار است، یعنی با کاهش ۲۵ درصدی مقدار میانگین پارامتر سفتی برشی بستر ارتجاعی، فراوانی داده‌ها در نواحی با بسامد کمتر، افزایش یافته است. در نمودار توزیع تجمعی از شکل (۱۲-ب) نیز همین نتیجه استنتاج می‌شود. برای مثال در حالتی که مقدار میانگین پارامتر سفتی برشی بستر ارتجاعی ۲۵ درصد افزایش یافته است، ۷۶/۷۲ درصد از پاسخ‌های پیش‌بینی شده کمتر از بسامد ۱۲۲۰۰ است که در مقدار میانگین پارامتر K_p ، ۸۷/۶۲ درصد کمتر از بسامد ۱۲۲۰۰ و در حالت ۲۵ درصد کاهش مقدار میانگین پارامتر K_p ، ۹۹/۲۲ درصد پاسخ‌ها کمتر از ۱۲۲۰۰ است که این یعنی با افزایش مقدار میانگین متغیر K_p بسامدهای پیش‌بینی شده به سمت بسامدی با مقادیر بیشتر حرکت کرده‌اند و بالعکس. در شکل



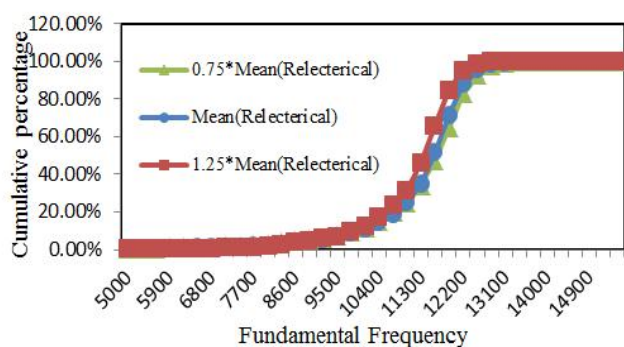
شکل ۱۲- نمودارهای: (الف) توزیع فراوانی و (ب) توزیع تجمعی، برای بسامدهای مود اول پیش‌بینی شده با استفاده از مدل جایگزین کریجینگ برای مقادیر $\mu_{K_p} \times 0.75$ ، μ_{K_p} ، $\mu_{K_p} \times 1.25$ از پارامتر سفتی برشی (K_p).



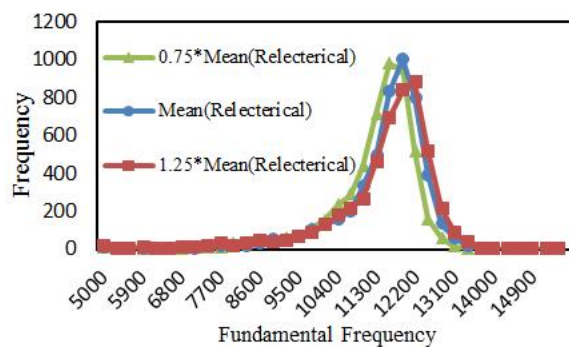
شکل ۱۳- نمودارهای: (الف) توزیع فراوانی و (ب) توزیع تجمعی، برای بسامدهای مود اول پیش‌بینی شده با استفاده از مدل جایگزین کریجینگ برای مقادیر $\mu_{K_w} \times 0.75$ ، μ_{K_w} ، $\mu_{K_w} \times 1.25$ از پارامتر سفتی برشی (K_w).



شکل ۱۴- نمودارهای: (الف) توزیع فراوانی و (ب) توزیع تجمعی، برای بسامدهای مود اول پیش‌بینی شده با استفاده از مدل جایگزین کریجینگ برای مقادیر $\mu_{p_1} \times 0.75$ ، μ_{p_1} ، $\mu_{p_1} \times 1.25$ از پارامتر چگالی لایه اول (p_1).

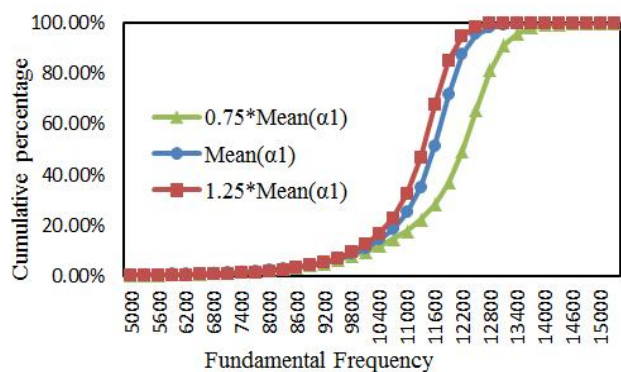


(ب) توزیع تجمعی

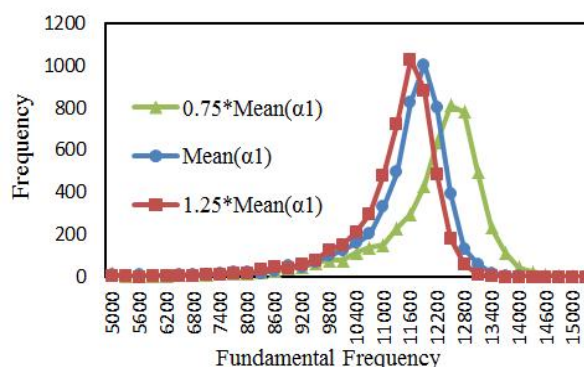


(الف) توزیع فراوانی

شکل ۱۵- نمودارهای: (الف) توزیع فراوانی و (ب) توزیع تجمعی، برای بسامدهای مود اول پیش‌بینی شده با استفاده از مدل جایگزین کریجینگ برای مقادیر $\mu_{R_{electrical}}/25$ ، $\mu_{R_{electrical}}$ ، $\mu_{R_{electrical}}/75$ از پارامتر نفوذپذیری الکتریکی ($R_{electrical}$).



(ب)



(الف)

شکل ۱۶- نمودارهای: (الف) توزیع فراوانی و (ب) توزیع تجمعی، برای بسامدهای مود اول پیش‌بینی شده با استفاده از مدل جایگزین کریجینگ برای مقادیر $\mu_{\alpha_1}/25$ ، μ_{α_1} ، $\mu_{\alpha_1}/75$ از پارامتر شاخص خواص مواد لایه اول (α_1).

متناظر با استفاده از مدل جانشین کریجینگ، احتمال خرابی برای ورق سه لایه FGMEE مورد مطالعه، برای تابع حالت حدی رابطه (۲۴) و با استفاده از ۱۰۰۰۰ شبیه‌سازی به روش مونت کارلو، مقدار ۰/۰۰۵۴ محاسبه شده است ($P_f = 0/0054$).

۷- نتیجه‌گیری

برای اولین بار، ارزیابی احتمالاتی و تحلیل قابلیت اطمینان از رفتار ارتعاش آزاد از یک ورق چندلایه FGMEE، که روی بستر ارتجاعی قرار گرفته، با لحاظ کردن لغزش بین لایه‌ای

سه لایه FGMEE حاصل شده است. در شکل (۱۶) مشاهده می‌شود که با افزایش ۲۵ درصدی میانگین شاخص خواص مواد از لایه اول، باعث افزایش فراوانی بسامدهایی با مقادیر کمتر شده است و بالعکس. با توجه به شکل‌های (۱۲) تا (۱۶) این نتیجه حاصل شده است که تغییرات چگالی لایه اول باعث ایجاد بیشترین تغییرات در میانگین بسامدهای پیش‌بینی شده توسط مدل کریجینگ شده است که همین نتیجه از شکل‌های (۷) تا (۱۰) نیز حاصل شده است.

با تعریف مشخصات آماری متغیرها و پارامترهای دارای عدم قطعیت در جدول (۵) و پیش‌بینی پاسخ به‌ازای متغیرهای

جدول ۵- مشخصات آماری و نوع توزیع پارامترهای دارای عدم قطعیت در ورق سه لایه مدرج تابعی

متغیرها	نوع توزیع	میانگین	انحراف معیار
α_1	نرمال	۵	۰/۳۷۵
α_2	نرمال	۰	۰/۳۷۵
α_3	نرمال	۵	۰/۳۷۵
K_w	نرمال	۲	۰/۱۵
K_p	نرمال	۰/۱	۰/۰۰۷۵
R_{xz}	نرمال	۱	۰/۰۷۵
R_{xy}	نرمال	۱	۰/۰۷۵
R_{magnet}	نرمال	۱	۰/۰۷۵
$R_{electrical}$	نرمال	۱	۰/۰۷۵
ρ_F^1	نرمال	۵۳۰۰	۳۹۷/۵
ρ_B	نرمال	۵۸۰۰	۴۳۵
ρ_F^2	نرمال	۵۳۰۰	۳۹۷/۵

بر بسامد طبیعی مود اول ورق FGME سه لایه، مورد بررسی قرار گرفته است. احتمال خرابی با استفاده از روش مونت کارلو به دست آمده است. همچنین با بررسی نتایج حاصل، تأثیر افزایش و کاهش ۲۵ درصدی میانگین پارامترهای دارای عدم قطعیت روی مقدار بسامد طبیعی مود اول پیش‌بینی شده نشان داده شده است. پارامترهای چگالی لایه‌ها و مؤلفه‌های سفتی برشی و عرضی بستر ارتجاعی بیشترین تأثیر را روی بسامد طبیعی مود اول ورق سه لایه دارند.

مورد بررسی قرار گرفته شده است. با استفاده از روش فضای حالت، معادلات دیفرانسیلی جزئی حاکم بر ورق FGME حل شده است. صحت روش حل سه‌بعدی معرفی شده در این مقاله با استفاده از مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج حاصل شده از مقالات منتشر شده و در دسترس ارزیابی شده است. با استفاده از روش کریجینگ یک مدل جایگزین برای روش حل سه‌بعدی، حاصل شده است. صحت مدل جانشین کریجینگ بررسی شده است. در بخش نتایج عددی تأثیر پارامترهای دارای عدم قطعیت

واژه‌نامه

- | | | |
|--|--|----------------------------------|
| 1. functionally graded material | 5. response surface - high dimensional model representations | method |
| 2. functionally graded magneto electro elastic | 6. kriging method | 9. winkler- pasternak foundation |
| 3. functionally graded piezoelectric | 7. radial basis function | 10. magneto electro elastic |
| 4. first- order shear deformation theory | 8. polynomial response surface | 11. gauss' laws |
| | | 12. weibull(3p) |

مراجع

- Harshe, G., Dougherty, J. P., and Newnham, R. E., "Theoretical Modeling of Multilayer Magnetoelectric Composites", *International Journal of Applied Electromagnetics*, Vol. 4, pp. 145–159, 1993.
- Nan, C. W., "Magnetoelectric Effect in Composites of Piezoelectric and Piezomagnetic Phases", *Physics Review B*, Vol. 50, pp. 6082–6088, 1994.
- Benviste, Y., "Magnetoelectric Effect in fibrous

- Composites with Piezoelectric and Piezomagnetic Phases”, *Physics Review B*, Vol. 51, pp. 16424–16427, 1995.
4. Pan, E., “Exact Solution for Simply Supported and Multilayered Magneto- Electro- Elastic Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, pp. 608–618, 2001.
 5. Pan, E., and Heyliger, P. R., “Exact Solutions for Magneto-electroelastic Laminates in Cylindrical Bending”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 6859–6876, 2003.
 6. Pan, E., and Heyliger, P. R., “Free Vibration of Simply- Supported and Multilayered Magneto- Electro- Elastic Plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 252, pp. 429–442, 2002.
 7. Pan, E., and Han, F., “Exact Solution for Functionally Graded and Layered-Magneto- Electro- Elastic Plates”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 43, No. 3, pp. 321– 339, 2005.
 8. Cheraghi, N., and Lazgy Nazargah, M., “An Exact Bending Solution for Functionally Graded Magneto- Electro- Elastic Plates Resting on Elastic Foundations with Considering Interfacial Imperfections”, *Modares Mechanical Engineering*; Vol. 15, No. 12, pp. 346–356, 2016 (in persian).
 9. Jiangyi, C., Hualing, C., and Ernian, P., “Free Vibration of Functionally Graded, Magneto- Electro- Elastic and Multilayered Plates”, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 19, No. 2, pp. 160– 166, 2006.
 10. Lezgy- Nazargah, M., “A Three- Dimensional Exact State- Space Solution for Cylindrical Bending of Continuously Non- Homogenous Piezoelectric Laminated Plates with Arbitrary Gradient Composition”, *Archive of Mechanics*, Vol. 67, No. 1, pp. 25– 51, 2015.
 11. Lezgy- Nazargah, M., “A Three- Dimensional Peano Series Solution for the Vibration of Functionally Graded Piezoelectric Laminates in Cylindrical Bending”, *Scientia Iranica* , Vol. 23, No. 3, pp. 788– 801, 2016.
 12. Lezgy- Nazargah, M., “Fully Coupled Thermo- Mechanical Analysis of Bi- Directional FGM Beams Using NURBS Isogeometric Finite Element Approach”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 45, pp. 154–164, 2015.
 13. Vafakhah, Z., and Navayi Neya, B., “An Exact Three Dimensional Solution for Bending of Thick Rectangular FGM Plate”, *Composites Part B: Engineering* Vol. 156, No. 1, pp. 72– 87, 2019.
 14. Hong, C.C., “GDQ Computation for Thermal Vibration of Thick FGM Plates by Using Fully Homogeneous Equation and TSDT”, *Thin- Walled Structures*, Vol. 135, pp. 78– 88, 2019.
 15. Jha, D.K., Tarun Kant, and Singh, R.K., “A Critical Review of Recent Research on Functionally Graded Plates”, *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 833–849, 2013.
 16. Yang, J., Liew, K.M., and Kitipornchai, S., “Second- Order Statistics of The Elastic Buckling of Functionally Graded Rectangular Plates”, *Composites Science and Technology*, Vol. 65, pp. 1165–1175, 2005.
 17. Damásio, F.R., Silva, T.A.N., Carvalho, A., and Loja, M.A.R., “on The Characterization of Parametric Uncertainty on FGM Plates”, *10th International Conference on Composite Science and Technology*, Lisboa, Portugal, 2015.
 18. Carvalho, A., Silva, T., Ramos Loja, M.A., and Damgsio, F.R., “Assessing the Influence of Material and Geometrical Uncertainty on The Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates”. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 24, No. 5, pp. 417- 426, 2017.
 19. García- Macías, E., Castro- Triguero, R.I., Friswell, M., Adhikari, S., and Saez, A., “Metamodel- Based Approach for Stochastic Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Plates”, *Composite Structures*, Vol. 152, pp. 183– 198, 2016.
 20. Hosseini, S.M., and Shahabian, F., “Reliability of Stress Field In Al–Al₂O₃ Functionally Graded Thick Hollow Cylinder Subjected to Sudden Unloading, Considering Uncertain Mechanical Properties”. *Materials & Design*, Vol. 31, No. 8, pp. 3748– 3760, 2010.
 21. Noh, Y.J., Kang, Y.J., Youn, S.J., Cho, J.R., and Lim, O.K., “Reliability- Based Design Optimization of Volume Fraction Distribution in Functionally Graded Composites”, *Computational Materials Science*, Vol. 69, pp. 435– 442, 2013.
 22. Shaker, A., Wael, A., Tawfik, M., and Sadek, E., “Stochastic Finite Element Analysis of the Free Vibration of Functionally Graded Material Plates”, *Computational Mechanics*, Vol. 41, No. 5, pp. 707– 714, 2008.
 23. Koehler, J. R., Owen, A. B., “9 Computer experiments”, *Handbook of Statistics Elsevier*, Vol. 13, pp. 261–308, 1996.
 24. Mitchell, T.J., and Morris, M.D., “Bayesian Design and Analysis of Computer Experiments: Two Examples”, *Statistica Sinica*, Vol. 2, pp. 359–79, 1992.
 25. Fang, H., and Horstemeyer, M., “Global Response Approximation with Radial Basis Functions”, *Engineering Optimization*, Vol. 38, No. 4, pp. 407– 424, 2006.
 26. Box, GEP., and Wilson KB, “The Exploration and Exploitation of Response Surfaces: Some General Considerations and Examples”, *Biometrics*, Vol. 10, pp. 16–60, 1954.
 27. Das, P.K., and Zheng Y., “Improved Response Surface Method and its Application to Stiffened Plate Reliability Analysis”, *Engineering Structures*,

- Vol. 22, No. 5, pp. 544–51, 2000.
28. Roussouly, N., Petitjean, F., and Salaun, M., “A New Adaptive Response Surface Method for Reliability Analysis”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 32, pp. 103–15, 2013.
29. Khuri, A.I., and Mukhopadhyay, S., “Response Surface Methodology”, *WIREs Computational Statistics*, Vol. 2, pp.128–49, 2010.
30. Gaxiola-Camacho, J. R., Haldar, A., Azizsoltani, H., Valenzuela-Beltran, F., and Reyes-Salazar, A., “Performance-Based Seismic Design of Steel Buildings Using Rigidities of Connections”, *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, Vol. 4, No. 1, pp. 1–14, 2018.
31. Metropolis, N., and Ulam, S., “The Monte Carlo Method”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 44, pp. 335–41, 1949.
32. Nowak, A.S., and Collins, K.R., *Reliability of Structures*, McGraw- Hill, New York, 2000.

۹- پیوست

ماتریس مؤلفه‌های رابطه (۱) به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\sigma^{(n)} &= \left\{ \sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}, \sigma_{13}^{(n)}, \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{33}^{(n)} \right\} \\ \varepsilon^{(n)} &= \left\{ \varepsilon_{11}^{(n)}, \varepsilon_{12}^{(n)}, \varepsilon_{13}^{(n)}, \gamma_{12}^{(n)}, \gamma_{13}^{(n)}, \gamma_{23}^{(n)} \right\} \\ E^{(n)} &= \left\{ E_{11}^{(n)}, E_{12}^{(n)}, E_{13}^{(n)} \right\} \\ H^{(n)} &= \left\{ H_{11}^{(n)}, H_{12}^{(n)}, H_{13}^{(n)} \right\} \\ C^{(n)} &= \begin{bmatrix} c_{11}^{(n)}(z) & c_{12}^{(n)}(z) & c_{13}^{(n)}(z) & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{12}^{(n)}(z) & c_{22}^{(n)}(z) & c_{23}^{(n)}(z) & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{13}^{(n)}(z) & c_{23}^{(n)}(z) & c_{33}^{(n)}(z) & c_{14}^{(n)}(z) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & c_{24}^{(n)}(z) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & c_{34}^{(n)}(z) \end{bmatrix} \\ e^{(n)} &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & e_{14}^{(n)}(z) & \vdots \\ e_{11}^{(n)}(z) & e_{12}^{(n)}(z) & e_{13}^{(n)}(z) & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ d^{(n)} &= \begin{bmatrix} d_{11}^{(n)}(z) & \vdots & \vdots \\ \vdots & d_{22}^{(n)}(z) & \vdots \\ \vdots & \vdots & d_{33}^{(n)}(z) \end{bmatrix} \\ q^{(n)} &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & q_{14}^{(n)}(z) & \vdots \\ q_{11}^{(n)}(z) & q_{12}^{(n)}(z) & q_{13}^{(n)}(z) & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ x^{(n)} &= \begin{bmatrix} x_{11}^{(n)}(z) & \vdots & \vdots \\ \vdots & x_{22}^{(n)}(z) & \vdots \\ \vdots & \vdots & x_{33}^{(n)}(z) \end{bmatrix} \\ p^{(n)} &= \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)}(z) & \vdots & \vdots \\ \vdots & p_{22}^{(n)}(z) & \vdots \\ \vdots & \vdots & p_{33}^{(n)}(z) \end{bmatrix}\end{aligned}$$