

مقاله پژوهشی

# تحلیل خمش ورق های کامپوزیت لایه ای غیر همگن در صفحه با استفاده از توابع پایه متعادل شده بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

## محمد عزیزپوریان و نیما نورمحمدی\* دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۶ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۴/۸)

چکیده- در این مقاله تحلیل خمش ورق کامپوزیت لایهای غیرهمگن در صفحه بهصورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه بـه ضـخامت نسبتاً زیاد، از تئوری میندلین که تغییر شکل برشی در ضخامت را بهصورت خطی در نظر می گیرد استفاده می شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل مسئله بهصورت انتگرال وزنی ارضاء می شود. توابع پایه برای تخمین پاسخ، چند جملهای های چبی شف نوع اول بوده و وزنهای مـورد اسـتفاده نیـز از جـنس توابع نمایی هستند. با توسعه فرمول ندی در یک ناحیه مجازی مستطیلی در برگیرنده سطح ورق، امکان محاسبه انتگرال وزنی بـهصورت ترکیب خطی تعدادی انتگرال یک بعدی و نرمال شده وجود دارد که سرعت عملیات را بسیار بالا می برد. به منظور صحت سنجی روش ارائه شـده، مثاله ایی از ورق کامپوزیت لایهای همگن و ناهمگن با انواع جهت گیری الیاف و شرایط تکیه گاهی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست از روش های تحلیلی و نیز حل عددی از نرمافزارهای تجاری تطابق خوبی دارد که کارایی روش پیشنهادی را نشان می ده.

واژههای کلیدی: توابع پایه متعادل شده، ورق نسبتاً ضخیم، کامپوزیت، غیرهمگن، چبی شف.

## Static Analysis of in-Plane Heterogeneous Laminated Composite Plates Using Equilibrated Basis Functions Based on FSDT

M. Azizpooryan and N. Noormohammadi\*

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

**Abstract**: In this paper, static analysis of in-plane heterogeneous laminated composite plates is numerically studied. The Mindlin's theory which considers linear transverse shear deformation has been implemented. The governing partial differential equation is satisfied by a weighted residual integration. Chebyshev polynomials of the first kind are used as basis functions and exponential functions make up the weight functions of the integration. The emerging integrals may be composed of some pre-evaluated 1D normalized ones, which effectively paces up the solution progress. To verify the method, several examples of

فهرست علائم

homogeneous as well as heterogeneous plates with various lamination schemes and boundary conditions have been solved. Results are compared with those from the literature or by commercial codes, which reveal excellent accuracy of the proposed method.

Keywords: Equilibrated basis functions, Moderately thick plate, Heterogeneous, Composite, Chebyshev.

ضرايب سختي تبديل يافته تنش مستوى	$\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{ij}}$	ماتریس ضرایب در ارضای تعادل	Α
بردار نیروی گسترده خارجی	q	ابعاد دامنه مجازى مسئله	b ,a
نیروهای برشی عرضی	$Q_y, Q_x$	عملگر شرایط مرزی	В
بردار مقادیر مرزی	UB	بردار ضرايب مجهول پاسخ	c
دوران میان صفحه در راستای عمود و مماس بر مرز	$\phi_s, \phi_n$	ضرایب سختی محوری، خمشی-محوری، خمشی	$D_{ij}, B_{ij}, A_{ij}$
دوران میان صفحه در راستای x,y	$\phi_y, \phi_x$	مدول الاستيسيته در راستاي الياف و عمود بر الياف	$E_{7}, E_{1}$
بردار جابهجايي	u	ماتريس توابع پايه متعادل شده	F
پاسخ همگن و خصوصی مسئله	$u_p, u_h$	تابع پایه اولیه j ام	$\mathbf{f}_{\mathbf{j}}$
جابهجایی در راستای z,y,x	w,v,u	مدول برشی	G <sub>ij</sub>
جابهجایی عمود و مماس بر مرز	u <sub>s</sub> ,u <sub>n</sub>	ماتریس همانی	I
تابع وزن j ام	wj	شماره لايه	k
کرنشهای محوری	$\epsilon_y, \epsilon_x$	ضريب اصلاح برشمي	K <sub>s</sub>
کرنش های برشی	$\gamma_{xz},\gamma_{yz},\gamma_{xy}$	عملگر معادله ديفرانسيل	L
تنشهای محوری	$\sigma_y, \sigma_x$	لنگرهای خمشی و پیچشی	$\mathbf{M}_{xy}, \mathbf{M}_{yy}, \mathbf{M}_{xx}$
تنشهای برشی	$\sigma_{xz},\sigma_{yz},\sigma_{xy}$	نیروهای محوری و برشی درون صفحه	$N_{xy}, N_{yy}, N_{xx}$
دامنه مسئله	Ω	تعداد سطر و ستون شبکه وزن	$n_{wy}, n_{wy}$
مرز مسئله	$\partial \Omega$	درجه تقریب در راستای x و y	$o_y, o_x$
دامنه تصوري مسئله	$\Omega_{_{\circ}}$	ضرايب سختي تنش مستوى	Q <sub>ij</sub>

#### ۱– مقدمه

با توجه به پیشرفت صنعت، ساخت و تحلیل مصالح با مقاومت مناسب در برابر تنشها و خوردگی مورد توجه قرار گرفته است. ورقهای کامپوزیت را میتوان از مهمترین مصالحی دانست که در صنایع با تکنولوژی بالا همانند هوافضا، خودرو، کشتی سازی و مهندسی پزشکی مورد استفاده قرار می گیرند. بررسی سازههای متشکل از اعضای پوسته مانند نشان میدهد که همواره الگوی بزرگی و راستای تنشها در آنها ثابت نیست، لذا می توان با ایجاد تغییر در مدول الاستیسیته یا ضخامت

کامپوزیتهای مورد استفاده در صنعت، مواد الیافی هستند که بهدلیل مقاومت بالاتر در راستای الیاف نسبت به راستای عمود

مكانيكي مجزا تشكيل شدهاند. از جمله يركاربردترين

مواد کامپوزیت از تلفیق دو یا چند ماده با خواص فیزیکی و

ساختاری در صفحه، سازه را از نظر اقتصادی بهبنیه کرد. از

ایــزرو توسـعه روش.هـای مناسـب بــرای تحلیـل ورق.هـای

كاميوزيت داراي ناهمگني در صفحه موجه و لازم است.

بر آنها، رفتاری مشابه با مواد ارتوتروپیک دارنـد. از روی هـم گذاری لایههای متعـدد ایـن مـواد بـا زوایـای متفـاوت الیـاف،



شکل ۱– نمایی از ورق کامپوزیت غیرهمگن در صفحه

ساختار کامپوزیت لایهای به دست میآید. با توجه به پیچیـدگی در خواص مکانیکی و فیزیکی، روشهای متعددی برای بررسی رفتار این نوع مواد توسعه داده شده است. شکل (۱) نمونهای از ورقهای کامپوزیت غیرهمگن در صفحه را نمایش میدهد.

تمام پدیده های فیزیکی تابعی از قوانین ریاضی هستند؛ در بسیاری از موارد معادل دیفرانسیل حاکم بر رفتار آنها قابل استخراج است که تحت شرایط خاصی دارای حل دقیق هستند. به دلیل تنوع و پیچیدگی معادلات حاکم بر اصول مهندسی، عموماً راه عملی برای حل آنها استفاده از روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل است. در بین این روش ها، روش اجزا محدود<sup>۱</sup> قوی ترین و پرکاربردترین شیوه درحل مسائل مکانیک جامدات است که در آن، دامنه مسئله با مجموعهای از المانها که در توانایی روش اجزا محدود، بعضی از ویژگی های ذاتی آن باعث طولانی شدن و کاهش دقت حل مساله می شود. به طور مشخص این روش به دلیل استفاده از تقریبات مرتبه پایین (عموماً خطی یا مرتبه دو) قادر به دستیابی به دقت های بسیار بالا و پیوستگی

در کنار روش های مبتنی بر شبکه همانند روش اجزاء محدود، می توان روش های بدون شبکه را نیز به کار گرفت. از مزایای این روش ها می توان به سرعت بالای حل، کاهش هزینه محاسبات، نرخ همگرایی بالاتر، توانایی ارائه حل با درجات بالاتری از پیوستگی و سازگاری بهتر با تغییرمکان های بزرگ اشاره کرد.

همچنین در بعضی از مسائل ویـژه همچـون ناپیوسـتگی تـرک، عملکرد روشهای بدون شبکه در ارائه میدانهای تنش بهتر از روش اجزا محدود است. روش های بدون شبکه را می توان به دو دسته محلی و مرزی تقسیم کرد. از جمله روش های بدون شبکه محلی در حل مسائل ورق می توان روش بدون شبکه گالرکین ٔ را نام برد [۱]. در این روش امکان ارضاء شرایط دریشله بـهصـورت مستقیم فراهم نبوده و بنابراین در فرم ضعیف وزنے گالرکین از ضرایب لاگرانژ برای این منظور استفاده می شود. لـزوم اسـتفاده از شبکه المان پس زمینه برای محاسبه انتگرال عـددی از سـرعت و سهولت این روش میکاهد. آتلوری روش بدون شبکه پترو گالرکین 7 را ابداع کرد [۲] که بر خلاف روش قبل، صورت ضعیف معادلات حاکم را در محدوده پیرامون یک گره اعمال میکند. در کنار روش های فوق، تکنیک های بدون شبکه مرزی نيز مورد توجه بودهاند. اين تكنيكها بهعنوان روش هـاي اسـتفاده از توابع پایه نیز شناخته می شوند. فرایند حل توسط آنها، ارضای دقیق معادله با انتخاب مناسب توابع پایـه تشـکیل دهنـده سـري پاسخ تقریبی، و سپس اعمال شرایط مرزی به ترکیب مذکور بهمنظور برآورد ضرایب مجهول آن است. از جمله روش های بدون شبکه مرزی می توان به روش ترفتز <sup>۴</sup> اشاره کرد [۳]. اسـاس کار در این روش تخمین پاسخ با مجموعهای از پایههای حل است که قادر به ارضای دقیق صورت همگن معادله دیفرانسیل هستند. از جمله کاستی های این روش عدم توانایی در حل معادلات با ضرایب متغیر و همچنین محدودیت در انتخاب توابع

قابل حل بهطور قابل توجهی گسترش یافت. ارسالر و ردی از جمله محققانی هستند که با استفاده از روش اجزا محدود و با در نظر گرفتن کرنشهای برشی مرتبه اول به تحلیل ورقهای کامپوزیت پرداختند [۱۴]. بر و همکاران نیز با بهرهگیری از روش اجزاء محدود و تئوری کرنش،ای برشی مرتبه اول و سوم، ورقهای کامپوزیت ضخیم تقویت شده را تحلیل کردند [10]. چنانکه پیشتر بیان شد، روش اجزاء محدود نیز علیرغم همه مزایا، دارای نقایصی در تحلیل مسائل ورق است. در این راستا روشهای بدون شبکه توانستهاند جایگزین مناسبی برای روش اجزا محدود باشند. اسلادک و همکاران تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق ناهمسانگرد<sup>۶</sup> در تئوری میندلین– رینسنر را با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروگالرکین مورد بررسی قرار دادند [۱۶]. جابرزاده و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین به بحث ارتعاش آزاد ورق، ای کامیوزیت پرداختند [۱۷]. شهبازی و برومند با بهرهگیری از روش بـدون شبکه توابع پایه نمایی، حل مسائل استاتیک ورق های کامپوزیت لایهای را مورد توجـه قـرار دادنـد [۱۸]. ازهـری و برومند با استفاده از تئوری زیگزاگ مرتبه بالا، تحلیل مسائل خمشی ورق،های کامپوزیت ضخیم را به روش توابع پایه نمایی بررسی کردند [۱۹]. معتمدی و برومند با بهره جستن از توابع پایه نمایی هموار به شکل بدون شبکه محلی، رفتار خمشی ورق های کامپوزیت لایهای نسبتاً ضخیم را براساس تئوریهای خمش کلاسیک و تغییر شکل برشی مراتب اول و سوم مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. همچنین نورمحمدی و برومند به حل معادله بایهارمونیک و مسئله ورق نازک به روش توابع پایه متعادل شده پرداختند [۲۱]. روش انرژی یا ریتز از دیگر تکنیکهایی است که در تحلیـل ورق.هـا بـهکـار گرفته میشود. داو و رافائل از جمله محققانی هستند که ارتعاش ورق میندلین را بـا اسـتفاده از تئـوری رایلـی- ریتـز بررسی کردند [۲۲]. تانگ و وانگ توانستند با تخمین تابع تنش ایری با استفاده از چند جملهای های چبی شف، مسئله کمانش ورق کامیوزیت نازک تحت بار سهموی را با

پایه صدق کننده در صورت همگن معادله دیفرانسیل است. روش حلهای اساسی<sup>۵</sup> نیز یک روش بدون شبکه مرزی است کـه ابتـدا توسط الكسيدزه و كوپرادزه ارائه شد [۴]. در ايـن روش حاصـل اعمال اپراتور معادله دیفرانسیل بر پایههای جواب همگن برابر با تابع دلتای دیراک بـه مرکزیـت خـارج از محـدوده حـل در نظـر گرفته میشود تا پایه حاصل درون ناحیه حل در عملگر معادله صدق کند. لازم به ذکر است که یافتن این پایهها که به توابع گرین معروف هستند ساده نبوده و در کلیه حالات موجود نیستند. در اقدامی جایگزین برومند و همکاران با استفاده از سری متشکل از توابع پایه نمایی، یک روش بدون شبکه محلی را توسعه دادنـد که برای ارضای معادله دیفرانسیل از روابط صریح در عبارت توان تابع نمایی در قالب معادلات مشخصه استفاده میکند [۵ و ۶]. از این رو روش مذکور صرفاً قادر به برآورد معادلات دیفرانسـیل در محیطهای همگن (دارای ضرایب ثابت مادی) است. در راستای رفع محدودیت روش،های توابع پایه یعنی نیاز به توابعی که صورت همگن معادله دیفرانسیل را بـ مطور دقیـق ارضـا کننـد، نورمحمدی و برومند ایده توابع پایه متعادل شده را ارائـه کردنـد [۷ و ۸]. نگرش این شیوه برآوردن فرم انتگرال وزنی صورت همگن معادله بهجای ارضای دقیق آن است. حاصل این کار پایههای جدیدی است کـه صورت همگـن معادلـه را در شـکل انتگرال وزنی ارضا کرده و بهعنوان توابع پایه متعادل شده شناخته میشوند. روند حل با پایههای جدید مشابه سایر روشهای توابع پایه است. هدف تحقیق حاضر بهکارگیری توابع مـذکور در حـل مسائل خمـش ورق. ای کامپوزیـت لایـهای دارای نـاهمگنی در صفحه است.

در زمینه تحلیل مسائل ورق، نخستین بار ناویر توانست یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی مفصلی را تحلیل کند [۹ و ۱۰]. در ادامه لوی یک ورق مستطیلی با دو ضلع مفصلی مقابل یکدیگر را بررسی کرد [۱۱ و ۱۲]. لیو و لی با استفاده از فرم همیلتونی معادلات تعادل ورق نازک اقدام به حل دقیق ورق هایی با دو ضلع مجاور آزاد و دو ضلع دیگر مفصلی و یا گیردار کردند [۱۳]. با توسعه روش های عددی، گستره مسائل



شکل ۲– مؤلفههای تغییر شکل ورق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

دوران های مستقل در میان صفحه حول محورهای x و y هستند. در این تئوری المانهای خطی عمود بر میان صفحه پس از تغییر شکل ورق همچنان بهصورت خطی میمانند، اما بر خلاف نظریه کلاسیک عمود بر میان صفحه نخواهند بود، بلکه نسبت به صفحه قائم بر محور x زاویه ¢ و نسبت به صفحه قائم بر محور y زاویه y میسازند (شکل ۲). ایـن تئـوری منجر به بروز تنشهای برشی عرضی ثابت در ضخامت ورق می شود که در تناقض با صفر بودن تنش های برشی در سطوح بالایی و پایینی ورق است. برای جبران ایـن نقـص در محاسـبه تنش های برشی عرضی از ضریب اصلاح برشی K<sub>s</sub> استفاده میشود. البته برآورد ضریب اصلاح برشبی برای یک ورق کامپوزیت لایهای بسیار دشوار است، زیرا به آرایش لایهای ورق، شکل هندسی آن، بارگذاری و شرایط مرزی وابسته است؛ اما می توان به طور تقریبی از مقدار 🏑 استفاده کرد. کرنش های خطی مرتبط با میدان جابه جایی رابطه (۱) در شکل برداری بەصورت زير هستند

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{yy} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_{xx}^{(x)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{yy}^{(x)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz}^{(x)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz}^{(x)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{(x)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{(x)} \end{cases} + \begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_{yy}^{(x)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{yy}^{(y)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz}^{(y)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz}^{(y)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{(y)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{(y)} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u_{*}}{\partial y} \\ \frac{\partial v_{*}}{\partial y} + \phi_{y} \\ \frac{\partial w_{*}}{\partial x} + \phi_{x} \\ \frac{\partial v_{*}}{\partial x} + \partial u_{*} / \partial y \end{cases} + \\ z \begin{cases} \frac{\partial \phi_{x}}{\partial \phi_{y}} / \partial x \\ \frac{\partial \phi_{y}}{\partial y} + \partial \phi_{y} / \partial y \\ \frac{\omega}{\partial \phi_{y}} / \partial y \end{pmatrix} \end{cases}$$
(Y)

بهرهگیری از روش انرژی تحلیل نمایند [۲۳].

همان طور که بیان شد تحقیقات فراونی در زمینه تحلیل ورقها انجام شده است، ولی تحلیل ورقهای کامپوزیت غیرهمگن در صفحه کمتر مورد توجه بوده است. نتایج این پژوهش به خوبی نشان دهنده کارایی روش توابع پایه متعادل شده در تحلیل این نوع ورقها است. در ادامه، ابتدا معادلات تعادل برحسب جابه جایی حاکم بر ورق کامپوزیت دارای ناهمگنی درون صفحه استخراج می شود و سپس معادلات دیفرانسیل مذکور به فرم انتگرال وزنی ارضاء خواهند شد. با در نظر گرفتن تعداد کافی از نقاط در امتداد مرزها و اعمال شرایط می شوند. در انتها با ارائه چندین مثال از مراجع معتبر و یا مقایسه با نتایج حاصل از نرمافزارهای تجاری، دقت و کارآیی روش مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲- معادلات حاکم بر ورق کامپوزیت لایهای
بر اساس تئوری تغیر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابهجایی ورق بهصورت زیر تعریف می شود،
u(x, y, z, t) = u<sub>\*</sub>(x, y, t) + zφ<sub>x</sub>(x, y, t)
v(x, y, z, t) = v<sub>\*</sub>(x, y, t) + zφ<sub>y</sub>(x, y, t)
(1)
w(x, y, z, t) = w<sub>\*</sub>(x, y, t)
×(x, y, t)
w(x, y, z, t) = w<sub>\*</sub>(x, y, t)
×(x, y, t)</l

$$\begin{split} \overline{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^{\varphi} \theta + r(Q_{1\gamma} + rQ_{\varphi\varphi}) \\ & \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta + Q_{\gamma\gamma} \sin^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{1\gamma} &= (Q_{11} + Q_{\gamma\gamma} - rQ_{\varphi\varphi}) \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta \\ &+ Q_{1\gamma} (\sin^{\gamma} \theta + r(Q_{1\gamma} + rQ_{\varphi\varphi})) \\ & \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta + Q_{\gamma\gamma} \cos^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{\gamma\gamma} &= Q_{11} \sin^{\gamma} \theta + r(Q_{1\gamma} + rQ_{\varphi\varphi}) \\ & \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta + Q_{\gamma\gamma} \cos^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{1\varphi} &= (Q_{11} - Q_{\gamma\gamma} - rQ_{\varphi\varphi}) \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta \\ &+ (Q_{1\gamma} - Q_{\gamma\gamma} - rQ_{\varphi\varphi}) \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{\gamma\varphi} &= (Q_{11} - Q_{\gamma\gamma} - rQ_{\varphi\varphi}) \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{\varphi\varphi} &= (Q_{11} + Q_{\gamma\gamma} - rQ_{\varphi\varphi}) \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{\varphi\varphi} &= (Q_{11} + Q_{\gamma\gamma} - rQ_{\varphi\varphi}) \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{\varphi\varphi} &= (Q_{\gamma\gamma} - Q_{0\lambda}) \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{\varphi\varphi} &= (Q_{\gamma\gamma} - Q_{0\lambda}) \sin^{\gamma} \theta \cos^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{\varphi\lambda} &= Q_{\lambda\lambda} \cos^{\gamma} \theta + Q_{\lambda\gamma} \sin^{\gamma} \theta \\ \overline{Q}_{\lambda\lambda} &= Q_{\lambda\lambda} \cos^{\gamma} \theta + Q_{\gamma\gamma} \sin^{\gamma} \theta \\ iu_{z} &= \lim_{z} \lim$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_{XY}^{(\circ)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{YY}^{(\circ)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{Xy}^{(\circ)} \end{cases} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1Y} & \mathbf{B}_{1Y} \\ \mathbf{B}_{1Y} & \mathbf{B}_{YY} \\ \mathbf{B}_{1F} & \mathbf{B}_{YF} & \mathbf{B}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{XY}^{(1)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{YY}^{(1)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{YY}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad ( \mathbf{-} \mathbf{A} )$$

$$\begin{cases} Q_{x}^{y} \\ Q_{x}^{y} \end{cases} = K_{s} \sum_{k=1}^{n} \int_{Z_{k}} \begin{cases} O_{yz} \\ \sigma_{xz}^{y} \end{cases} dz \\ = K_{s} \begin{bmatrix} A_{\gamma\gamma} & A_{\gamma\delta} \\ A_{\gamma\delta} & A_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz}^{(*)} \\ \gamma_{xz}^{(*)} \end{cases} \qquad (\downarrow -\Lambda) \end{cases}$$

در روابط (۸) n<sub>l</sub> تعداد لایهها است. ضرایب سختی A<sub>ij</sub>,B<sub>ij</sub>,D<sub>ij</sub> بهصورت زیر به دست می آیند

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^{\gamma}) dz$$
(9)

معادلات تعادل به شکلی که در روابط (۳) تا (۹) آمد همراه با انواع شرایط مرزی بر مسئله ورق حاکم هستند. ویژگی انواع تکیهگاه های ساده<sup>۷</sup>، گیردار<sup>۸</sup> و آزاد<sup>۹</sup> بر مبنای تئوری حاضر در جدول (۱) قابل مشاهده است. در توضیح اجزای این جدول لازم

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \circ \qquad ( ( - \pi ) )$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \circ \qquad (- \psi - \psi)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 \qquad (\ddot{\upsilon} - \ddot{\upsilon})$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \circ \qquad (\div - ")$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

روابط بنیادی برای لایه k ام در دستگاه اصلی با فرض آنکه راستای ۱ در امتداد الیاف و راستای ۲ عمود بر آن باشد مطابق زیر است. راستای ۳ عمود بر میان صفحه است

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{\gamma\gamma} \\ \sigma_{\gamma\gamma} \\ \sigma_{\gamma\gamma} \end{cases}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{1\gamma} & Q_{1\beta} \\ Q_{1\gamma} & Q_{\gamma\gamma} & Q_{\gamma\beta} \\ Q_{1\beta} & Q_{\gamma\gamma} & Q_{\beta\beta} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{cases} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{1\gamma} \\ \epsilon_{1\gamma} \end{cases}^{(k)},$$

$$(f)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\gamma\gamma} \\ \sigma_{\gamma\gamma} \\ \sigma_{\gamma\gamma} \end{cases}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{\gamma\gamma} & Q_{\gamma\delta} \\ Q_{\gamma\delta} & Q_{\delta\delta} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{cases} \gamma_{\gamma\gamma} \\ \gamma_{\gamma\gamma} \\ \gamma_{\gamma\gamma} \end{cases}^{(k)}$$

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1}{1 - v_{1Y}v_{Y1}}, \quad Q_{1Y}^{(k)} = \frac{v_{1Y}E_Y}{1 - v_{1Y}v_{Y1}},$$
$$Q_{YY}^{(k)} = \frac{E_Y}{1 - v_{1Y}v_{Y1}}, \quad Q_{SS}^{(k)} = G_{1Y}, \quad (\Delta)$$

$$\begin{split} Q_{\Delta\Delta}^{(k)} &= G_{1r} \ , \qquad Q_{ff}^{(k)} = G_{rr} \\ \text{cr} \quad \text{cr}$$

شرايط تكيهگاهي	مؤلفههاي معلوم				
S-1	$u_s, N_{nn}, w_*, \phi_s, M_{nn}$				
S-7	$u_n, N_{ns}, w_*, \phi_s, M_{nn}$				
С	$u_s, u_n, w_{\circ}, \phi_s, \phi_n$				
F	$N_{ns}, N_{nn}, Q_n, M_{ns}, M_{nn}$				

جدول ۱– مقادیر مرزی معلوم بر اساس نوع شرایط مرزی

در رابطـه (۱۴) **q** بارگـذاری گسـترده عمـود بـر سـطح ورق است. **u**<sub>B</sub>نیز مقادیر معلوم مـرزی (جابـهجـایی، دوران، لنگـر و برش) را شامل میشود. بر مبنـای ایـن معـادلات اجـزای روش پیشنهادی در ادامه تشریح میشوند.

$$\begin{split} \mathbf{u}_{h} &\simeq \hat{\mathbf{u}}_{h} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{j} \mathbf{c}_{j} = \mathbf{f}^{T} \mathbf{c} \\ \mathbf{u}_{h} &\simeq \hat{\mathbf{u}}_{h} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{j} \mathbf{c}_{j} = \mathbf{f}^{T} \mathbf{c} \\ \mathbf{f}_{j} &= \mathbf{f}_{j} \times \mathbf{I}_{\Delta \times \Delta} \\ \mathbf{c}_{j} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{j}^{*} & \mathbf{c}_{j}^{*} & \mathbf{c}_{j}^{*} & \mathbf{c}_{j}^{*} \end{bmatrix}^{T} \end{split}$$
(10)

در رابطه فوق  $f_j$  توابع پایه اولیه متشکل از چند جملهای های چبی شف نوع اول می باشد و I ماتریس همانی است. همچنین ضرایب  $f_j$  مجهولات پاسخ مسئله هستند. از آنجا که پایه های حل لزوماً قادر به ارضای دقیق معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله نیستند، این معادله به صورت باقی مانده وزنی روی دامنه مستطیلی مجازی  $\Omega$  به ابعاد  $d \times a$  که در بردارنده دامنه اصلی  $\Omega$  است اعمال می شود (شکل ۳)

$$\int_{\Omega_{\bullet}} \mathbf{w} \operatorname{Lud}\Omega = \left( \int_{\Omega_{\bullet}} \mathbf{w} \operatorname{Lf}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\Omega_{\bullet} \right) \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{e}$$
(19)

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\Delta} \times \boldsymbol{\Delta}} & \dots & \mathbf{w}_{M} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\Delta} \times \boldsymbol{\Delta}} \end{bmatrix}^{T}$$
(1V)

اضلاع مستطیل مجازی مذکور ۵ درصد بزرگتر از مستطیل محیط بر دامنه اصلی حل در نظر گرفته میشوند تا اثرات نامطلوب در مرز بروز نکنند. پاسخ معادله فوق مترادف با انتخابی از فضای پوچ<sup>°۱</sup> ماتریس Α است که با φ نمایش داده بهذکر است که بیان شرایط در لبههای مفصلی برای ورقهایی با جهتگیری الیاف در امتداد محورهای کلی بهصورت ۱-S و برای جهتگیریهایی در غیر از راستای محورهای کلی از نوع ۲-S است. با داشتن روابط تعادل و شرایط مرزی، در بخش بعد اجزای روش پیشنهادی معرفی خواهد شد.

#### ۳- روش حل مسئله

مهمترین ویژگی روش پیشنهادی، برآورد پاسخ همگن مسئله با ارضای تقریبی معادله تعادل حاکم بر آن در یک ناحیه مجازی در برگیرنده ناحیه اصلی حل است. این ایده روش را بینیاز از داشتن پایههایی میکند که بهطور دقیق معادله دیفرانسیل را ارضا کنند. با این وجود ساختار کلی روش شباهت زیادی به سایر روشهای استفاده از توابع پایه دارد. پاسخ کلی مسئله شامل دو بخش جواب همگن ( uh) و جواب خصوصی ( up

- $\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{q} = \mathbf{o} , \ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{h} + \mathbf{u}_{p} \tag{(10)}$
- $\mathbf{L}\mathbf{u}_{h} = \circ$ ,  $\mathbf{L}\mathbf{u}_{p} + \mathbf{q} = \circ$  in  $\Omega$  (11)
- $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{B}} \quad \text{on} \quad \Gamma = \partial \Omega$  (17)

در روابط اخیر L و B به ترتیب بیانگر عملگر معادله (به صورت ماتریسی با اجزای مطابق پیوست ۱) و عملگر شرایط مرزی هستند.  $\Omega$  دامنه مسئله و  $\Omega = T$  مرز آن هستند. بردار مجه ولات جابه جایی و دوران (u) و نیز بارگذاری خارجی (q) به صورت زیر تعریف می شوند

$$\mathbf{u} = \left\{ w_{\circ} \ \phi_{x} \ \phi_{y} \ u_{\circ} \ v_{\circ} \right\}^{\mathrm{T}}$$
(1°)

 $\mathbf{q} = \left\{ q \cdot \cdot \cdot \cdot \right\}^{\mathrm{T}} \tag{14}$ 



شکل ۴– شبکه نقاط مورد استفاده برای توابع وزن نمایی

$$w_{i} = e^{-W\left[\left(\xi - \xi_{1}\right)^{Y} + \left(\eta - \eta_{k}\right)^{Y}\right]}$$

$$(Y1)$$

مراکز وزن  $(\xi_{I},\eta_{k})$  در  $n_{w1}$  سطر و  $n_{w7}$  ستون در مستطیل مجازی بهصورت منظم توزیع شدهاند (شکل ۴)، به گونهای که فاصله بین اولین سطر (ستون) از مرز مجاور برابر نصف فواصل بین سطرها (ستونها) است. این الگوی توزیع در فضای نرمال شده نیز رعایت می شود. پارامتر وزنی W یک ضریب برای کنترل تمرکز توابع وزن در مجاورت نقطه وزن مورد نظر است که برای مسئله مورد بحث استفاده از مقدار ۳۰ نتایج مطلوبی به همراه دارد. شاخص i با رابطه زیر، معرف توابع وزن در مختصات  $(\xi_{I},\eta_{k})$ در فضای نرمال شده است

$$i = i(k, l), k = 1, ..., n_{W1},$$
  
 $l = 1, ..., n_{W7}$ 
(77)

تعداد سطرها و ستونهای شبکه مورد بحث از روابط صریح زیر تعیین میشود

$$n_{w1} = O_y - 1, \ n_{w1} = O_x - 1 \tag{(YT)}$$

در صورتی که ضرایب معادل دیفرانسیل به عنوان توابعی از مشخصات مادی و هندسی ورق در صفحه متغیر باشند، لازم است که پیش از حل مسئله با یک بسط از جملات غیر کامل مثلث خیام- پاسکال جایگزین شوند. دلیل این جایگزینی اعطای قابلیت تفکیکپذیری به صورت حاصل ضرب دو مجموعه مستقل یک متغیره به ضرایب مذکور است. جملات غیر کامل مذکور در دستگاه مختصات نرمال شده تا مرتبه n به صورت زیر هستند

$$f_{D} = \left[ \mathsf{I}, \boldsymbol{\xi}, ..., \boldsymbol{\xi}^{n_{k}}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}, ..., \boldsymbol{\xi}^{n_{k}}\boldsymbol{\eta}, ..., \boldsymbol{\xi}^{n_{k}}\boldsymbol{\eta}^{n_{k}} \right]$$
(Y\*)



شکل ۳- نواحی اصلی و مجازی حل و موقعیت مبدأ مختصات

$$\mathbf{c} = \sum_{r=1}^{\Delta N - M} \mathbf{d}_r \boldsymbol{\varphi}_r \tag{1A}$$

رابطه (۱۶) را می توان به صورت زیر نوشت که در آن، توابع پایه متعادل شده F<sub>r</sub> توانایی ارضاء تقریبی معادله دیفرانسیل حاکم را در ناحیه مجازی مستطیلی و در نتیجه ناحیه اصلی حل که زیر مجموعه آن است دارند

$$\hat{\mathbf{u}}_{h} = \sum_{r=1}^{\alpha N-\overline{M}} \mathbf{d}_{r} \mathbf{f}^{T} \boldsymbol{\phi}_{r} = \sum_{r=1}^{\alpha N-\overline{M}} \mathbf{F}_{r} \mathbf{d}_{r} = \mathbf{F}^{T} \mathbf{d},$$

$$\mathbf{F}_{r} = \mathbf{f}^{T} \mathbf{\phi}_{r},$$

$$\mathbf{F}^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1} & \dots & \mathbf{F}_{\alpha N-\overline{M}} \end{bmatrix}$$

$$(19)$$

با توجه به دامنه تعریف چندجملهای های چبیشف در بازه نرمال [۱+۱-]، سری پاسخ همگن تقریبی مسئله به این صورت خواهد بود

$$\begin{split} \hat{\boldsymbol{u}}_{h} &= \sum_{m=\circ}^{O_{x}} \sum_{n=\circ}^{O_{y}} T_{m} \left(\frac{\boldsymbol{r}_{x}}{a}\right) T_{n} \left(\frac{\boldsymbol{r}_{y}}{b}\right) \boldsymbol{I}_{(a \times a)} \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ &= \sum_{m=\circ}^{O_{x}} \sum_{n=\circ}^{O_{y}} T_{m} \left(\boldsymbol{\xi}\right) T_{n} \left(\boldsymbol{\eta}\right) \boldsymbol{I}_{(a \times a)} \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ \boldsymbol{c}_{(m,n)} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} \end{bmatrix}^{T} \quad (\boldsymbol{r} \circ) \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} \end{bmatrix}^{T} \quad (\boldsymbol{r} \circ) \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} \end{bmatrix}^{T} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \end{bmatrix}^{T} \\ & \boldsymbol{c}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \end{bmatrix}^{T} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)}^{\prime} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} \\ & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{(m,n)} & \boldsymbol{c}_{($$

با برازش حداقل مربعات در تعداد مناسبی نقطه روی ناحیه حل Ω و در امتداد مرزهای آن میتوان ضرایب مجهول متناسب با پایههای فوق را استخراج کرد. برای بازنویسی عبارت رابطه (۲۴) بهصورت حاصلضرب دو مجموعه یک متغیره، لازم است پایههای تقریب و ضرایب آنها با آرایش زیر با یکدیگر ترکیب شوند

$$\begin{split} \mathbf{D}_{i} &= \mathbf{f}_{D\xi}^{T} \mathbf{C}_{D}^{i} \mathbf{f}_{D\eta} \ , \ \mathbf{f}_{D\xi} = \left[ \mathbf{1}, \xi, ..., \xi^{n_{k}} \right]^{1} \ , \\ \mathbf{f}_{D\eta} &= \left[ \mathbf{1}, \eta, ..., \eta^{n_{k}} \right]^{T} \end{split} \tag{70}$$

ماتریس  $C_D^i$  به ابعاد  $(1+n_k) \times (1+n_k)$  ضرایب بهدست آمده را بهصورتی متناسب با آرایش ارائه شده در خود جای می دهد، به گونهای که درایه سطر i و ستون j از این ماتریس ضریب عبارت  $j^i \eta^j$  در بسط جایگزین باشد [۷]. با توجه به تفکیک پذیری توابع پایه و وزن و نیز بسط جایگزین ضرایب مادی، می توان کلیه انتگرالهای موجود در فرآیند باقی مانده وزنی را به صورت ترکیب انتگرالهای نرمال شده یک بعدی در دو راستای x و y نوشت. ساختار این انتگرالهای جای گرفته در ماتریس هایی سه اندیسی مطابق زیر است

$$(A_{i})_{l,\Delta m+i,p+i} = \frac{r}{a} \int_{-i}^{+i} e^{-W(\xi-\xi_{l})^{r}} \xi^{p} \frac{\partial^{r} T_{m}(\xi)}{\partial \xi^{r}} d\xi$$

$$(B_{i})_{k,\Delta n+i,q+i} = \frac{r}{b} \int_{-i}^{+i} e^{-W(\eta-\eta_{k})^{r}} \eta^{q} \frac{\partial^{r} T_{n}(\eta)}{\partial \eta^{r}} d\eta$$

$$(A_{r})_{l,\Delta m+i,p+i} = \int_{-i}^{+i} e^{-W(\xi-\xi_{l})^{r}} \xi^{p} \frac{\partial T_{m}(\xi)}{\partial \xi} d\xi$$

$$(B_{r})_{k,\Delta n+i,q+i} = \int_{-i}^{+i} e^{-W(\eta-\eta_{k})^{r}} \eta^{q} \frac{\partial T_{n}(\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

$$(A_{r})_{l,\Delta m+i,q+i} = \frac{a}{r} \int_{-i}^{+i} e^{-W(\eta-\eta_{k})^{r}} \eta^{q} T_{n}(\eta) d\eta$$

$$(A_{r})_{l,\Delta m+i,q+i} = \frac{r}{s} \int_{-i}^{+i} e^{-W(\xi-\xi_{l})^{r}} \xi^{p} \frac{\partial T_{m}(\xi)}{\partial \xi} d\xi$$

$$(B_{r})_{k,\Delta n+i,q+i} = \frac{r}{s} \int_{-i}^{+i} e^{-W(\xi-\xi_{l})^{r}} \eta^{q} \frac{\partial T_{n}(\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

$$(A_{s})_{l,\Delta m+i,q+i} = \frac{r}{s} \int_{-i}^{+i} e^{-W(\eta-\eta_{k})^{r}} \eta^{q} \frac{\partial T_{n}(\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

$$(A_{\delta})_{l,\Delta m+i,q+i} = \int_{-i}^{+i} e^{-W(\xi-\xi_{l})^{r}} \xi^{p} T_{m}(\xi) d\xi$$

$$(B_{\delta})_{k,\Delta n+i,q+i} = \int_{-i}^{+i} e^{-W(\eta-\eta_{k})^{r}} \eta^{q} T_{n}(\eta) d\eta$$

$$(Y_{\beta})$$

عملگر معادله دیفرانسیل مطابق با روابط ارائه شده در پیوست (۲) بازسازی می شود. حاصل عبارت مورد اشاره در پیوست مذکور، ماتریس کمکی A<sub>h</sub> به ابعاد ((۲-۱)۵×(۱+۵)۵ است. اگر سطرهای این ماتریس در دسته های پنج تایی به ترتیب از چپ به راست در کنار یک دیگر قرار بگیرند، پنج سطر از ماتریس ضرایب نهایی A متناسب با نقطه وزن روی سطر ام وستون 1 ام شبکه نقاط وزن را خواهند ساخت. با تکرار این عمل به ازای کلیه نقاط شبکه وزن، ماتریس ضرایب نهایی تکمیل می شود. پس از محاسبه فضای پوچ این ماتریس، سری پاسخ همگن تقریبی مسئله با استفاده از توابع پایه متعادل شده مطابق با توضیحات قبلی ساخته خواهد شد.

۳- ۲- پاسخ خصوصی معادله
مشابه روند طی شد برای حل همگن، پاسخ خصوصی رابطه
( up) بهصورت یک سری از توابع پایه همراه با ضرایب
مجهول متناسب آنها در نظر گرفته می شود،

$$\begin{split} \mathbf{u}_{p} &\simeq \hat{\mathbf{u}}_{p} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{j}^{p} \mathbf{c}_{j}^{p} \\ \mathbf{f}_{j}^{p} &= \mathbf{f}_{j}^{p} \times \mathbf{I}_{0 \times 0} \\ \mathbf{c}_{j}^{p} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{c}_{j}^{\mathsf{v}})_{p} & (\mathbf{c}_{j}^{\mathsf{v}})_{p} & (\mathbf{c}_{j}^{\mathsf{v}})_{p} & (\mathbf{c}_{j}^{\mathsf{v}})_{p} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{split} \tag{7V}$$

$$\mathsf{c}_{j} = \mathsf{c}_{j} = \mathsf{c}_{j} \mathsf{c$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{p} = \sum_{m=*}^{O_{x}^{p}} \sum_{n=*}^{O_{y}^{p}} T_{m}\left(\boldsymbol{\xi}\right) T_{n}\left(\boldsymbol{\eta}\right) \boldsymbol{I}_{\left(\boldsymbol{\Delta}\times\boldsymbol{\Delta}\right)} \boldsymbol{c}_{\left(m,n\right)}^{p} \tag{7A}$$

با در نظر گرفتن مجموعهای از نقاط درون دامنه اصلی حل و در امتداد مرزهای آن و با داشتن مقدار تابع بارگذاری مسئله ( q ) در هر یک از نقاط مذکور، مبادرت به اعمال وزنی صورت غیرهمگن معادله به سری پاسخ تقریبی می شود

$$\int_{\Omega_{\circ}} \mathbf{w}_{i} \left\{ \mathbf{L} \left( \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{j}^{p} \mathbf{c}_{j}^{p} \right) + \mathbf{q} \right\} d\Omega_{\circ} = \mathbf{A}_{p} \mathbf{c}_{p} + \mathbf{q} = \mathbf{o}$$

$$i = 1, \dots, \mathbf{M}_{p}$$
(Y4)

انتخابهای گوناگونی بـرای توابـع وزن در رابطـه بـالا ممکـن است. در تحقیق حاضر از توابع دلتای دیراک به مرکزیت شـبکه

نقاط ذکر شده استفاده می شود  

$$\mathbf{w}_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_i)\mathbf{I}_{0\times0}$$
(۳۰)  
حاصل انتگرال فوق یک معادله ماتریسی است که با حل آن،  
ضرایب مجهول سری پاسخ ( $\mathbf{c}_j^p$ ) به دست می آیند. به منظور  
دستیابی به دقت مناسب، لازم است تعداد سطرها و ستونهای  
تشکیل دهنده شبکه نقاط وزن با رابطه زیر به مرتبه تقریب حل  
خصوصی مربوط باشد.

 $n_{w1}^P \ge 1/4O_y^P$  ,  $n_{wY}^P \ge 1/4O_x^P$  (۳۱) بنابراین دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه نامعین خواهد بود که حل آن مستلزم استفاده از برازش حداقل مربعات است. عملگر معادله دیفرانسیل برای جواب خصوصی از طریق ماتریس کمکی  $A_p$  مطابق پیوست (۳) بازسازی می شود.

#### ۳-۳- اعمال شرایط مرزی

بهمنظور ارضای شرایط مرزی در امتداد مرز ناحیـه اصـلی حـل مسأله ( $\partial \Omega$ )، تعداد  $N_B$  نقطه در امتداد مرز بـا مقـادیر مـرزی معلوم در نظر گرفته می شود. بردار مقادیر مرزی  $U_B$  به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{U}_{\mathrm{B}} = \left[ \mathbf{u}_{\mathrm{B}} \middle|_{\mathbf{x}_{1}, \mathbf{y}_{1}}^{-} \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\mathrm{p}}) \middle|_{\mathbf{x}_{1}, \mathbf{y}_{1}}^{-} \cdots \mathbf{u}_{\mathrm{B}} \middle|_{\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathrm{B}}}, \mathbf{y}_{\mathrm{N}_{\mathrm{B}}}}^{-} \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\mathrm{p}}) \middle|_{\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathrm{B}}}, \mathbf{y}_{\mathrm{N}_{\mathrm{B}}}}^{-} \right]^{\mathrm{T}}$$
(YY)

هر یک از درآیههای ماتریس فوق، معادل با اختلاف مقدار ثابت مرزی روی نقطه مربوطه با تأثیر عملگر شرایط مرزی بر حل خصوصی معادله در همان نقطه است که مستقیماً سهم بخش همگن پاسخ را در بازسازی مقادیر مرزی نشان میدهد. بعد بردار مقادیر معلوم **u**B در هر نقطه برابر تعداد اجزای مستقل میدان پتانسیل مسأله یعنی ۵ است. رابطه (۱۸) را می توان برای مقادیر مرزی بازنویسی کرد

$$\begin{split} \mathbf{U}_{B} &= \sum_{r=1}^{\Delta N - \overline{M}} \mathbf{d}_{r} \mathbf{V}_{r} = & \mathbf{V} \mathbf{d} \qquad \mathbf{V}_{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{r} \mid_{x_{1}, y_{1}} & \dots & \mathbf{F}_{r} \mid_{x_{N_{B}}, y_{N_{B}}} \end{bmatrix}^{T} \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1} & \dots & \mathbf{V}_{\Delta N - \overline{M}} \end{bmatrix} \end{split}$$

$$(\mathbf{Y}\mathbf{Y})$$

پیش از اقدام به حل معادله (۳۳)، لازم است از فرآیند هـم پایـه کردن برای بهبود شرایط مـاتریس V در فرآینـد وارونسـازی مطابق زیر استفاده شود

$$\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{V} \tag{(4.4)}$$

اجزای غیرصفر مـاتریس قطـری E بـا ابعـاد ۵N<sub>B</sub>×۵N<sub>B</sub> در رابطه (۳۴) بهصورت زیر هستند

E مدول الاستیسیته در موضع مورد نظر است. با تقریب حداقل مربعات بهصورت زیر میتوان بردار مجهولات نهایی d را تعیین کرد

$$\Pi = \left(\overline{\mathbf{V}}\mathbf{d} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overline{\mathbf{V}}\mathbf{d} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{B}}\right),$$
  
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{d}} = \circ$$
 (**T**\$

با تعیین بردار مجهولات، پاسخ کلی مسئله بهدست میآید. بخش آتی به ارائه نتایجی از روش پیشنهادی در حل مسائل گوناگون خواهد پرداخت.

### ۴– نتایج

این بخش به ارائه چندین مثال منتخب از مراجع معتبر برای نشان دادن کارآیی روش اختصاص دارد. مقادیر جابهجایی یا تنش برای ورقهای لایهای با ترکیبات مختلف در این قسمت آورده شدهاند. به منظور مقایسه از تکنیکهای گوناگون از جمله روش های نیمه تحلیلی و یا نرمافزارهای تجاری استفاده شده است.

#### مثال اول

در این مسئله ورق مربعی به ضلع  $a = r \circ m$  و ضخامت h با آرایش لایه ورق مربعی به ضلع کسان لایه ای اروره ( $\circ^{\circ}, \circ^{\circ}$ ) دارای ضخامت یکسان لایه ای مورد بررسی قرار می گیرد. خصوصیات مکانیکی ناهمسانگرد لایه ا به قرار زیر است Er = E<sub>r</sub> = 1 · GPa E<sub>1</sub> = roE<sub>7</sub>,  $G_{17} = G_{17} = -/\delta E_7$ (۳۷)  $G_{77} = \circ/7E_7$ ,  $v_{17} = v_{77} = v_{17} = -/7\delta$ 

۶٨

					n	$( )_1$	•••	
n	$\frac{a}{h}$	Method	SSSS	SSSC	SCSC	SFSF	SFSS	SFSC
		Ref. [7۴]	۱/V۵A。	١/٤٧٧.	1/7070	۲/۷۷۷ ۰	۲/۳۳۵۰	١/٨٩٧.
,	ω	Present	١/٧۵٨ •	١/٤٧٧.	1/2080	۲/۷۷۷ ۰	۲/۳۳۵۱	1/1917
- 1		Ref. [7۴]	۱/۲۳۷۰	۰/۸۸۳ <i>۰</i>	۰/۶۵۶ <i>۰</i>	۲/ • ۲۸ •	۱/۶AV •	١/٢٢٣٠
	١٠	Present	۱/۲۳۷۰	$\circ/\Lambda\Lambda\Upsilon\circ$	۰ <i>/۶۵۶</i> ۰	۲/ • ۲ <b>۸</b> •	۱/۶AV。	1/2222
		Ref. [74]	۱/۱۳۷۰	1/0400	۰/۹۴۵۰	1/8930	1/4800	۱/۲۵۸۰
	۵	Present	1/1380	1/0400	°/944°	1/8874	1/4093	1/2020
- ω		Ref. [7۴]	۰/۶۱۵۰	۰/۴۸۰ <i>۰</i>	۰/۳۸۵ <i>۰</i>	۰/۹۱۵۰	•/A • • •	°/۶۱۲°
	10	Present	۰ <i>/۶</i> ۱۵۰	۰/۴۷۹۵	۰/٣٨۵۰	°/914°	۰/۸۰۰۲	0/817W

جدول ۲– مقادیر تغییرمکان قائم بیبعد در مرکز ورق مربعی 🌔 (۰٬۹۰ یتحت بار کسینوسی

جدول ۳– مقادیر تنش محوری (-h/ au) (۱) - در مرکز ورق مربعی  $(\circ^\circ, \circ^\circ)$  تحت بار کسینوسی

SFSC	SFSS	SFSF	SCSC	SSSC	SSSS	Method	a / h
•/7 <i>4</i> 74	°/444°	۰/۲۴۶۹	۰/۳۹۱۱	•/2337	۰/VIAV	Ref. [74]	~
•/Y474	•/4479	•/ <b>۲</b> ۴۶۹	°/٣٩١°	•/۵۳۳۸	۰/VIAV	Present	ω
۰/۲۷۹۰	۰/۴۴۳۵	o/7447	۰/۴۴۵۰	•/ <b>۵</b> ۴۹۴	۰/VIAV	Ref. [74]	10
۰/۲۷۹۰	•/4430	o/7447	°/440°	•/۵۴۹۳	•/V\ <b>\</b> \\	Present	10

این ورق تحت بارگذاری کسینوسی نسبت به دستگاه مختصات با مبدأ واقع بر مرکز ورق قرار گرفته است

q(x,y) = q. cos(πx/a)cos(πy/a) (۳۸) کمیتهای فیزیکی شامل تغیرمکان قائم و تنش در کلیه مثالها بهصورت نرمال شده گزارش میشوند،

$$\overline{w} = \frac{1 \circ \cdot h^{r} E_{r}}{q_{a} a^{r}} w(\circ, \circ), \ \overline{\sigma}_{XX}^{(m)} = \frac{h^{r}}{q_{a} a^{r}} \sigma_{XX}(\circ, \circ, z)$$

$$\overline{\sigma}_{Xy}^{(m)} = \frac{h^{r}}{q_{a} a^{r}} \sigma_{Xy}(a/r, a/r, z), \ \overline{\sigma}_{yy}^{(m)} = \frac{h^{r}}{q_{a} a^{r}} \sigma_{yy}(\circ, \circ, z) (rq)$$

$$\overline{\sigma}_{yz}^{(m)} = \frac{h}{q_{a} a} \sigma_{yz}(\circ, -a/r, z), \ \overline{\sigma}_{Xz}^{(m)} = \frac{h}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, \circ, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{h}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{h}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{h}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{h}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{xz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{yz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{yz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{yz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a/r, z), \ \overline{\sigma}_{yz}^{(m)} = \frac{1}{q_{a} a} \sigma_{yz}(-a$$

روش حل، شامل شبکه وزن و نقاط مرزی، براساس توضیحات بخشهای قبل مرتبط با مرتبه پایههای اولیه انتخاب میشوند.

مثال دوم

در این مسئله ورق چهار طرف مفصل دو لایهای با آرایش پادمتقارن ( ۴۵°-, ۴۵°) با ضخامت یکسان لایهها تحت بارگذاری کسینوسی مشابه مثال قبل مورد بررسی قرار میگیرد. مشخصات هندسی ورق و خواص الاستیک هریک از لایهها، و نیز اجزای مورد استفاده در روش حل مشابه با مثال اول است. نتایج در جدول (۴) قابل مشاهده است.

مثال سوم

در این مسئله ورق تکلایه مربع شکل به طول a = ۲m، و ضخامت h تحت بار یکنواخت .q مورد بررسی قرار میگیرد.

					)	(	
a/h	Method	$\overline{\mathrm{W}}$	$\overline{\sigma}_{xx}^{(\mathrm{Y})}\left(h/\mathrm{Y}\right)$	$\overline{\sigma}_{yy}^{(\mathrm{Y})}\left(h/\mathrm{Y}\right)$	$\overline{\sigma}_{xy}^{(\imath)}\left(-h/\tau\right)$	$\sigma_{yz}^{(7)}\left(h/\text{F}\right)$	$\sigma_{xz}^{(\textbf{Y})}\left(h/\textbf{Y}\right)$
10	Ref [74]	•/٨٢٨۴	•/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	•/ <b>\</b> ٩\•	۰/۱۹۱۰
10	Present	•/٨٢٨۴	•/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	•/ <b>\</b> ٩ <b>\</b> •	•/ <b>\\\ \</b>
۲.	Ref [۲۴]	۰ <i>/</i> ۶۹۸۱	•/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰
10	Present	۰ <i>/</i> ۶۹۸۱	•/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	•/ <b>\\</b> \•	•/ <b>\\</b> \•
100	Ref [74]	°/8084	•/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	•/ <b>\</b> ٩\•	۰/۱۹۱۰
, 50	Present	°/9094	•/۲۴۹۸	•/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	°/191°	•/ <b>\\\ \</b>

جدول ۴– مقادیر تغییرمکان و تنش.های بدون بعد ورق چهار طرف مفصل (<sup>°</sup>۴۵<sup>°</sup>, ۴۵<sup>°</sup>) تحت بار کسینوسی

جدول ۵– مقادیر تغییر مکان برون صفحه بدونبعد در مرکز ورق کامپوزیت غیرهمگن در صفحه تحت بار یکنواخت

FSCS	SSFS	SSCS	FSFS	CSCS	SSSS	Method	a/h
1/8808	1/1987	1/0229	1/2002	1/3840	1/1111	COMSOL	١.
٥. ١/٦٢	1/1981	1/0881	1/2000	1/3844	1/1117	Present	١٥
7/4404	2/8221	7/3991	۲/۷۷۰۹	7/1799	7/4951	COMSOL	^
7/4404	۲/۶۳۷۰	2/2891	۲/۷۷۰۹	7/1799	۲/۴۹۶۰	Present	ω

جدول ۶– مقادیر تنشهای بدون بعد در ورق کامپوزیت چهار طرف مفصل غیرهمگن در صفحه تحت بار یکنواخت

$\overline{\sigma}_{xy}(h/r)$	$\overline{\sigma}_{yy}\left(h / r\right)$	$\overline{\sigma}_{xx}\left(h/\tau\right)$	Method	a/h
•/• <b>٩</b> ۵۶	∘/°V۶۸	۰/۶V۶۴	COMSOL	١٠
•/• <b>9</b> &Y	<ul> <li>√&lt;&lt;<p>√</p></li> </ul>	۰/۶V۶۴	Present	
۰/۱۰۲۵	•/• <b>٩</b> •٣	۰/۶۵°۵	COMSOL	۵
0/10Y1	۰/۰ <b>٩</b> ۰۳	۰ <i>/۶</i> ۵۰۵	Present	

نتایج کلیه مثالهای ارائه شده بیانگر کارآیی روش پیشنهادی و دقت بالای آن است. لازم به تذکر است که دقت حاصل نه تنها در مؤلفههای جابهجایی، بلکه در منتجههای تنش که مشتقات توابع مذکور را در خود دارند نیز قابل مشاهده است. از این منظر روش پیشنهادی امتیاز ویژهای نسبت به روشهای دارای پیوستگی مرتبه صفر (همانند روش اجزاء محدود) دارد، زیرا پیوستگی را نه تنها در مقادیر مؤلفههای جابهجایی، بلکه در مشتقات آنها نیز بر آورده می کند.

۵- نتیجه گیری
 روش بدون شبکه توابع پایه متعادل شده ابزاری قدرتمند در

خواص ماده در صفحه متغیر به صورت زیر است  $E_{\tau} = E_{\tau} = a^{\tau}GPa$ ,  $E_{1} = 1 \circ (a^{\tau} - x^{\tau})GPa$   $G_{1\tau} = G_{1\tau} = \circ/\Delta E_{\tau}$ ,  $G_{\tau\tau} = \circ/\tau E_{\tau}$   $v_{1\tau} = v_{\tau\tau} = v_{1\pi} = 0.70$  (۴°) (۴°)  $(\tau)$  (۴°)  $(\tau)$  (۵) e(3) مقادیر تغییر مکان حداکثر قائم و  $\tau$  تنش های محوری و برشی نرمال شده براساس رابطه (۳۹) برای نسبت های مختلف طول به ضخامت ورق و همچنین برای نسبت های مختلف ارائه شده و با نمونه مشابه مدل سازی شده به روش اجزاء محدود در نرمافزار COMSOL با مش بندی بسیار ریز مقایسه شده است. لازم به ذکر است که پایه های حل همگن و اختصاصی تا مرتبه ۱۵ در نظر گرفته شده است. همگن معادله در این شیوه استفاده شده و به این ترتیب نیاز به وجود پایه های صادق در عملگر معادله دیفرانسیل برطرف می شود. با بازنویسی کلیه پارامتر های حل مسئله به صورت تفکیک پذیر، این قابلیت به وجود می آید که انتگر ال های حاصل به صورت ترکیب انتگر ال های یک بعدی هم پایه شده بر آورد شود که به سادگی روش و افزایش قابل توجه سرعت حل آن می انجامد. حل مسائل مکانیک جامدات است و برخلاف بسیاری از روش های استفاده از توابع پایه، توانایی حل انواع معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر را نیز دارد. توزیع ناهمگن الیاف در ورق های کامپوزیت سبب تغییر ضرایب سختی در صفحه ورق میشود. با توجه به نتایج بهدست آمده، دقت بالای روش پیشنهادی در حل این گونه مسائل استنباط می شود؛ این در حالی است که از روش باقی مانده وزنی برای اعمال صورت

9. free (F)

11. rank

10. null space

- 1. finite element method (FEM)
- 2. element free galerkin (EFG)
- solutions (MFS)

5. method

- 3. mesh-less local petrov galerkin 6. orthotropic
  - (MLPG)
- 7. simply supported (S)8. clamped (C)

of

fundamental

- 4. trefftz method
- Belytschko, T. Lu, Y. Y., and Gu, L., "Element Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- Atluri, S. N., and Zhu, T., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", *Computational Mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 117-127, 1998.
- 3. Trefftz, T., "Ein Gegenstuck Zum Ritzschen Verfahren", *Proceedings of 2nd International Congress on Applied Mechanics*, Zurich, 1926.
- 4. Kupradze, V. D. and Aleksidze, M. A., "The Method of Functional Equations for the Approximate Solution of Certain Boundary Value Problems", USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 4, No .4, pp. 82-126, 1964.
- 5. Soghrati, S., "Implementation of Smooth Fundamental Solutions in Solving Some Governing Differential Equations in Solid Mechanics", *M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2007. (in Persian).
- Boroomand, B., Soghrati, S. and Movahedian, B., "Exponential Basis Functions in Solution of Static and Time Harmonic Elastic Problems in a Meshless Style", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, No. 8, pp. 971-1018, 2010.
- Noormohammadi, N., "Solution of Solid Mechanics Problems Using Equilibrated Basis Functions and Mesh-Free Methods", *Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2015. (in Persian).

- 8. Boroomand, B. and Noormohammadi, N., "Weakly Equilibrated Basis Functions for Elasticity Problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, No. 12, pp. 1712-1727, 2013.
- Bert, C. W., and Chen T. L. C., "Effect of Shear Deformation on Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Rectangular Plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No. 6, pp. 465-473, 1978.
- Swaminathan, K., and Ragounadin, D., "Analytical Solutions Using a Higher-Order Refined Theory for the Static Analysis of Antisymmetric Angle-Ply Composite and Sandwich Plates", *Composite Structures*, Vol. 64, No. 3, pp. 405-417, 2004.
- Reddy, J. N., Khdeir, A. A., and Librescu, L., "Le'vy Type Solutions for Symmetrically Laminated Rectangular Plates Using First-Order Shear Deformation Theory", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, No. 3, pp. 740-742, 1987.
- Khdeir, A. A., and Reddy, J. N., "Analytical Solutions of Refined Plate Theories of Cross-Ply Composite Laminates", *Journal of Pressure Vessels Technology*, Vol. 113, No. 4, pp. 570-578, 1991.
- Yuemei, L. and Rui, L., "Accurate Bending Analysis of Rectangular Plates with Two Adjacent Edges Free and the Others Clamped or Simply Supported Based on New Symplectic Approach", *Applied Mathematical Modeling*, Vol.34, No.4, pp.856-865, 2010.
- Urthaler, Y. and Reddy, J. N., "A Mixed Finite Element for the Nonlinear Bending Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT",

## واژەنامە

مراجع

Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 15, No. 5, pp. 355-354, 2008.

- 15. Bhar, A., Phoenix, S. S., and Satsangi, S. K., "Finite Element Analysis of Laminated Composite Stiffened Plates Using FSDT and HSDT: A Comparative Perspective", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 2, pp. 312-321, 2010.
- 16. Sladek, J., Sladek, V., Zhang, Ch., Krivacek, J., Wen, P. H., "Analysis of Orthotropic Thick Plates by Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 13, pp. 1830-1850, 2006.
- 17. Jaberzadeh, E., Azhari, M., and Boroomand, B., "Free Vibration of Moving Laminated Composite Plates with and Without Skew Roller Using the Element-Free Galerkin Method", *Iranian Journal of Science and Technology: Transactions of Civil Engineering*, Vol. 38, pp. 377-393, 2014.
- Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "A Mesh-Free Method Using Exponential Basis Functions for Laminates Modeled by CLPT, FSDT and TSDT-Part I: Formulation." *Composite Structures*, Vol. 93, No. 12, pp. 3112-3119, 2011.
- 19. Azhari, F., Boroomand, B., and Shahbazi, M., "Exponential Basis Functions in the Solution of

$$\begin{split} L_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial B_{\gamma\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma\gamma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\gamma\varphi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial B_{\gamma\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial B_{\varphi\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\varphi\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{\gamma\phi} &= \frac{\partial B_{\gamma\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma\gamma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial B_{\gamma\varphi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \\ &+ \frac{\partial B_{\gamma\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\varphi\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\varphi\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y \partial x} \\ L_{\gamma\gamma} &= -A_{\gamma\gamma} \frac{\partial}{\partial y} - A_{\gamma\phi} \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{\gamma\gamma} &= -A_{\gamma\gamma} \frac{\partial}{\partial y} - A_{\gamma\phi} \frac{\partial}{\partial x} \\ + D_{\gamma\varphi} \frac{\partial}{\partial x} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\varphi\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} - A_{\gamma\phi} \\ L_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial D_{\gamma\varphi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} - A_{\gamma\phi} \\ \\ L_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial D_{\gamma\gamma}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial D_{\gamma\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + D_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} - A_{\gamma\phi} \\ \\ L_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial B_{\gamma\varphi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma\gamma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\gamma\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y \partial y} - A_{\gamma\gamma} \\ \\ L_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial B_{\gamma\varphi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma\gamma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\gamma\varphi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma\varphi} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y \partial y} - A_{\gamma\gamma} \\ \end{array}$$

Laminated Plates Using a Higher-Order Zig–Zag Theory." *Composite Structures*, Vol. 105, pp. 398-407, 2013.

- 20. Motamedi Ghahfarokhi, A., "On Bending Problem of Laminated Composite Plates Using Exponential Basis Functions in Mesh-Less Local Form", *M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2013 (in Persian).
- 21. Noormohammadi, N., and Boroomand, B., "A Fictitious Domain Method Using Equilibrated Basis Functions for Harmonic and Bi-Harmonic Problems in Physics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 272, pp. 189-217, 2014.
- 22. Dawe, D. J., and Roufaeil, O. L., "Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No. 3, pp. 345-359, 1980.
- Yuhua, T., and Wang, X., "Buckling of Symmetrically Laminated Rectangular Plates Under Parabolic Edge Compressions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 2, pp. 91-97, 2011.
- 24. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC press, 2003.

$$\begin{split} L_{11} &= \frac{\partial A_{\tau_{0}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\tau_{0}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial A_{00}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + A_{00} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \\ &+ \frac{\partial A_{\tau\tau}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\tau\tau} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial A_{\tau_{0}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + A_{\tau_{0}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} \\ L_{1\tau} &= \frac{\partial A_{00}}{\partial x} + A_{00} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial A_{\tau_{0}}}{\partial y} + A_{\tau_{0}} \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{1\tau} &= \frac{\partial A_{00}}{\partial x} + A_{00} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial A_{\tau\tau}}{\partial y} + A_{\tau_{0}} \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{1\tau} &= \frac{\partial A_{00}}{\partial x} + A_{00} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial A_{\tau\tau}}{\partial y} + A_{\tau_{0}} \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{1\tau} &= -A_{\tau_{0}} \frac{\partial}{\partial x} - A_{00} \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{\tau\tau} &= -A_{\tau_{0}} \frac{\partial}{\partial y} - A_{00} \frac{\partial}{\partial x} \\ + \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\partial y}} \\ + \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} - A_{00} \\ L_{\tau\tau} &= \frac{\partial D_{1T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} - A_{00} \\ L_{\tau\tau} &= \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} - A_{00} \\ L_{\tau\tau} &= \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} - A_{00} \\ L_{\tau\tau} &= \frac{\partial D_{1r}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1r} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1r} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial}{\partial x} + D_{1r} \frac{\partial}{\partial y} + D_{1$$

پيوست ۲ بهمنظور بازسازی عملگر معادله، ابتـدا بـا اسـتفاده از مـاتريس های معرفی شده در رابطه (۲۶)، ماتریس های مشابه زیر تشکیل می شوند. نکته بارز در روابط زیر، تغییر مؤلف دوم ماتريس ها است.  $(\mathbf{A}_{i})_{l, \diamond m+\flat, p+\flat} = (\mathbf{A}_{ii})_{l, \diamond m+\flat, p+\flat} = (\mathbf{A}_{iii})_{l, \diamond m+\flat, p+\flat}$  $= (\mathbf{A}_{iiii})_{1 \land m+\Upsilon} = (\mathbf{A}_{iiiii})_{1 \land m+\Lambda} = (\mathbf{A}_{iiiii})_{1 \land m+\Lambda} = (\mathbf{A}_{iiii})_{1 \land m+\Lambda} = (\mathbf{A}_{iiiii})_{1 \land m+\Lambda} = (\mathbf{A}_{iiii})_{1 \land m+\Lambda} = (\mathbf{A}_{iii})_{1 \land m$ i = 1,..., ۵ (پ\_ ۲)  $\left(\mathbf{B}_{i}\right)_{k,\diamond n+\flat,q+\flat}=\left(\mathbf{B}_{ii}\right)_{k,\diamond n+\Upsilon,q+\flat}=\left(\mathbf{B}_{iii}\right)_{k,\diamond n+\Upsilon,q+\flat}$  $= \left( \mathbf{B}_{iiii} \right)_{k, \diamond n + \flat, q + \flat} = \left( \mathbf{B}_{iiiii} \right)_{k, \diamond n + \diamond, q + \flat}$ i = ۱,...,۵ (پ – ۳) عملگر معادله در قالب ماتریس کمکی زیر ساخته میشود. [X] بیانگر کلیه درایههای ماتریس سه اندیسی X است کـه[ مؤلفه نخست آن برابر i باشد (متناسب با مرکز وزنی واقع بـر سطر يا ستون i ام).  $\mathbf{A}_{h} = \sum_{i=1}^{\Delta} \sum_{j=1}^{\Delta} \mathbf{L}_{ij} , \quad i, j = 1, ..., \Delta$  $\mathbf{L}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Delta} \end{bmatrix}_{I} \mathbf{m}_{X} \mathbf{C}_{\mathbf{f}\Delta}^{A} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{Y} \end{bmatrix}_{k}^{T} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Y} \end{bmatrix}_{I} \mathbf{C}_{\mathbf{f}\Delta}^{A} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{Y} \end{bmatrix}_{k}^{T}$ + $[\mathbf{A}_{\mathbf{r}}]_{\mathbf{I}} \mathbf{m}_{\mathbf{X}} \mathbf{C}_{\Delta\Delta}^{\mathbf{A}} [\mathbf{B}_{\mathbf{r}}]_{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} + [\mathbf{A}_{\mathbf{v}}]_{\mathbf{I}} \mathbf{C}_{\Delta\Delta}^{\mathbf{A}} [\mathbf{B}_{\mathbf{r}}]_{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}$ + $[\mathbf{A}_{r}]_{l}\mathbf{C}_{rr}^{A}\mathbf{m}_{v}[\mathbf{B}_{r}]_{k}^{T}$ + $[\mathbf{A}_{r}]_{l}\mathbf{C}_{rr}^{A}[\mathbf{B}_{v}]_{k}^{T}$ +  $[\mathbf{A}_{\tau}]_{I} \mathbf{C}_{\tau \Delta}^{A} \mathbf{m}_{V} [\mathbf{B}_{\Delta}]_{L}^{T} + [\mathbf{A}_{\tau}]_{I} \mathbf{C}_{\tau \Delta}^{A} [\mathbf{B}_{\tau}]_{L}^{T}$  $\mathbf{L}_{\mathsf{V}\mathsf{V}} = \left[\mathbf{A}_{\mathsf{D}}\right]_{\mathsf{I}} \mathbf{m}_{\mathsf{X}} \mathbf{C}_{\mathsf{D}\mathsf{D}}^{\mathsf{A}} \left[\mathbf{B}_{\mathsf{V}\mathsf{V}}\right]_{\mathsf{k}}^{\mathsf{T}} + \left[\mathbf{A}_{\mathsf{V}}\right]_{\mathsf{I}} \mathbf{C}_{\mathsf{D}\mathsf{D}}^{\mathsf{A}} \left[\mathbf{B}_{\mathsf{V}\mathsf{V}}\right]_{\mathsf{k}}^{\mathsf{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r} \end{bmatrix}_{l} \mathbf{C}_{r \diamond}^{A} \mathbf{m}_{v} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\diamond \diamond} \end{bmatrix}_{l}^{T} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r} \end{bmatrix}_{l} \mathbf{C}_{r \diamond}^{A} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{r \gamma} \end{bmatrix}_{l}^{T}$  $\mathbf{L}_{\mathsf{V}\mathsf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathsf{D}} \end{bmatrix}_{\mathsf{I}} \mathbf{m}_{\mathsf{X}} \mathbf{C}_{\mathsf{f}\mathsf{D}}^{\mathsf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathsf{Y}\mathsf{Y}\mathsf{Y}} \end{bmatrix}_{k}^{\mathsf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathsf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathsf{I}} \mathbf{C}_{\mathsf{f}\mathsf{D}}^{\mathsf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathsf{Y}\mathsf{Y}\mathsf{Y}} \end{bmatrix}_{k}^{\mathsf{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r} \end{bmatrix}_{l} \mathbf{C}_{rr}^{A} \mathbf{m}_{v} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Delta\Delta\Delta} \end{bmatrix}_{lr}^{T} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r} \end{bmatrix}_{l} \mathbf{C}_{rr}^{A} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{rrr} \end{bmatrix}_{lr}^{T}$  $\mathbf{L}_{\mathbf{y}_{1}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{2}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$ 

$$\begin{split} L_{\gamma_{0}} &= \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{0}y} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{0}x} \\ &+ \frac{\partial B_{\gamma_{T}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{T}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{0}x} \\ L_{\gamma_{1}} &= * \\ L_{\gamma_{T}} &= \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{0}y} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{0}y} \\ &+ \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{0}y} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{\gamma_{T}} &= \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{0}y} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{\gamma_{T}} &= \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{0}x} \\ L_{\gamma_{T}} &= \frac{\partial A_{\gamma_{T}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{\gamma_{T}} &= \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{0}y} + \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{\gamma_{T}} &= \frac{\partial A_{\gamma_{T}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{\gamma_{T}} &= \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{0\gamma} &= \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{0}y} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{0\gamma} &= \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{T}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{0\gamma} &= \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + B_{\gamma_{T}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\gamma_{F}}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{0\gamma} &= \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{F}} \frac{\partial^{\gamma}}}{\partial y^{\gamma}} \\ L_{0\rho} &= \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + A_{\gamma_{T}} \frac{\partial^{\gamma}}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial A_{\gamma_{F}}}}{\partial y$$

 $\mathbf{L}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}} \end{bmatrix}_{\mathbf{h}} \mathbf{m}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}$ +  $[\mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}}]_{\mathbf{I}} \mathbf{m}_{\mathbf{X}} \mathbf{C}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{D}} [\mathbf{B}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}}]_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} + [\mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}]_{\mathbf{L}}^{\mathbf{D}} \mathbf{C}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{D}} [\mathbf{B}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}}]_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$ +  $[\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}]_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{\mathbf{D}} \mathbf{m}_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}]_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} + [\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}]_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{\mathbf{D}} [\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma}]_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{\mathbf{D}} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{z}\mathbf{z}\mathbf{z}} \end{bmatrix}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}$  $-[\mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}}]_{\mathbf{I}} \mathbf{C}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} [\mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}}]_{\mathbf{I}}^{\mathrm{T}}$  $\mathbf{L}_{rrr} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rrr} \end{bmatrix}_{l} \mathbf{m}_{x} \mathbf{C}_{15}^{B} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{rrrr} \end{bmatrix}_{l}^{T} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{111} \end{bmatrix}_{l} \mathbf{C}_{15}^{B} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{rrrrr} \end{bmatrix}_{l}^{T}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Delta\Delta\Delta} \end{bmatrix}_{\mathbf{I}} \mathbf{m}_{\mathbf{X}} \mathbf{C}_{\mathfrak{F}}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathsf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}} \end{bmatrix}_{\mathfrak{F}} \mathbf{C}_{\mathfrak{F}}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathsf{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}^{\mathbf{B}} \mathbf{m}_{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{B}}_{\gamma\varsigma} \mathbf{m}_{\mathrm{V}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{B}}_{\gamma\varsigma} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}$  $\mathbf{L}_{r_{0}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{000} \end{bmatrix}_{l} \mathbf{m}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{r_{0}}^{\mathrm{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{r_{1}r_{1}r_{1}} \end{bmatrix}_{l_{r}}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r_{1}r_{1}} \end{bmatrix}_{l} \mathbf{C}_{r_{0}}^{\mathrm{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{r_{1}r_{1}r_{1}} \end{bmatrix}_{l_{r}}^{\mathrm{T}}$ +  $[\mathbf{A}_{\mathsf{Y}\mathsf{Y}\mathsf{Y}}]_{\mathsf{I}} \mathbf{m}_{\mathsf{X}} \mathbf{C}^{\mathsf{B}}_{\mathsf{S}\mathsf{S}} [\mathbf{B}_{\mathsf{Y}\mathsf{Y}\mathsf{Y}\mathsf{Y}\mathsf{Y}}]^{\mathsf{T}}_{\mathsf{L}} + [\mathbf{A}_{\mathsf{Y}\mathsf{Y}}]_{\mathsf{L}}^{\mathsf{B}} [\mathbf{B}_{\mathsf{Y}\mathsf{Y}\mathsf{Y}\mathsf{Y}}]^{\mathsf{T}}_{k}$ +  $[\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}]_{\mathbf{U}} \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{\mathbf{B}} \mathbf{m}_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}]_{\mathbf{U}}^{\mathbf{T}} + [\mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}]_{\mathbf{U}} \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{\mathbf{B}} [\mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma}]_{\mathbf{U}}^{\mathbf{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{\mathbf{B}} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$  $\mathbf{L}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{m}_{\mathbf{x}}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{T}}$ +  $[\mathbf{A}_{\text{AAAA}}]_{\mu} \mathbf{m}_{\mathbf{X}} \mathbf{C}_{\text{V}5}^{\text{B}} [\mathbf{B}_{\text{Y}7}]_{\mu}^{\text{T}} + [\mathbf{A}_{\text{Y}777}]_{\mu} \mathbf{C}_{\text{V}5}^{\text{B}} [\mathbf{B}_{\text{Y}7}]_{\mu}^{\text{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{S}}^{\mathbf{B}} \mathbf{m}_{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{S}}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\beta\gamma}^{\mathbf{B}} \mathbf{m}_{\mathbf{V}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\beta\gamma}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{V}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$  $\mathbf{L}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{AAAA}} \end{bmatrix}_{I} \mathbf{m}_{\mathbf{X}} \mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}^{\mathrm{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{L}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{I} \mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}^{\mathrm{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{L}^{\mathrm{T}}$ +  $[\mathbf{A}_{\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}}]_{\mathbf{h}} \mathbf{m}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{x}}^{\mathbf{B}} [\mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{x}}]_{\mathbf{h}}^{\mathbf{T}} + [\mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}}]_{\mathbf{h}}^{\mathbf{C}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{x}}^{\mathbf{B}} [\mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{x}}]_{\mathbf{h}}^{\mathbf{T}}$ +  $[\mathbf{A}_{rrrr}]_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{rs}^{\mathbf{B}} \mathbf{m}_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}_{sss}]_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} + [\mathbf{A}_{rrrrr}]_{\mathbf{V}} \mathbf{C}_{rs}^{\mathbf{B}} [\mathbf{B}_{\mathbf{V}}]_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$  $+ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\texttt{Y}\texttt{Y}\texttt{Y}\texttt{Y}} \end{bmatrix}_{I} \mathbf{C}_{\texttt{F}\texttt{F}}^{B} \mathbf{m}_{\texttt{Y}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\texttt{A}\texttt{A}\texttt{A}} \end{bmatrix}_{L}^{T} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\texttt{Y}\texttt{Y}\texttt{Y}} \end{bmatrix}_{I} \mathbf{C}_{\texttt{F}\texttt{F}}^{B} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\texttt{Y}\texttt{Y}\texttt{Y}} \end{bmatrix}_{L}^{T}$  $\mathbf{L}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \left[\mathbf{A}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}}\right]_{\mathbf{I}} \mathbf{m}_{\mathbf{X}} \mathbf{C}_{11}^{\mathbf{A}} \left[\mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}}\right]_{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} + \left[\mathbf{A}_{1111}\right]_{\mathbf{I}} \mathbf{C}_{11}^{\mathbf{A}} \left[\mathbf{B}_{\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}\mathbf{y}}\right]_{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}$ + $[\mathbf{A}_{0000}]_{I}\mathbf{m}_{\mathbf{X}}\mathbf{C}_{15}^{A}[\mathbf{B}_{YYYY}]_{L}^{T}$ + $[\mathbf{A}_{YYYY}]_{I}\mathbf{C}_{15}^{A}[\mathbf{B}_{YYYY}]_{L}^{T}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{S}}^{\mathbf{A}} \mathbf{m}_{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}} \mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{S}}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$ +  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{\varsigma\varsigma}^{\mathbf{A}} \mathbf{m}_{\mathbf{V}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{\varsigma\varsigma}^{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\gamma\gamma\gamma\gamma} \end{bmatrix}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}$ 

$$\begin{split} \mathbf{L}_{vvv} &= \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l}^{l} \mathbf{m}_{x} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vvv} \right]_{k}^{T} + \left[ \mathbf{A}_{1,1} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vvv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{00} \right]_{l} \mathbf{m}_{x} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vv} \right]_{k}^{T} + \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \mathbf{m}_{y} \left[ \mathbf{B}_{00} \right]_{k}^{T} + \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{0}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vv} \right]_{k}^{T} + \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vv} \right]_{k}^{T} \\ &- \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{0}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vv} \right]_{k}^{T} + \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vvv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{0}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vv} \right]_{k}^{T} + \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vvv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \mathbf{m}_{x} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vvv} \right]_{k}^{T} + \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vvv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \mathbf{m}_{y} \mathbf{D}_{vvv} \right]_{k}^{T} + \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \left[ \mathbf{B}_{vvv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \mathbf{D}_{y} \mathbf{D}_{vvv} \mathbf{D}_{k} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \mathbf{D}_{y} \mathbf{D}_{vvv} \mathbf{D}_{k} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \mathbf{B}_{vvvv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \mathbf{B}_{vvvvv} \right]_{k}^{T} \\ &+ \left[ \mathbf{A}_{vvv} \right]_{l} \mathbf{C}_{1}^{D} \mathbf{B}_{vvv} \right]_{k}^{$$

$$\begin{split} \left(\mathbf{A}_{1}\right)_{l,\Delta m+1} &= \frac{r}{a} \frac{\partial^{r} T_{m}\left(\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial \boldsymbol{\xi}^{r}} \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{l}} \\ \left(\mathbf{B}_{1}\right)_{k,\Delta n+1} &= \frac{r}{b} \frac{\partial^{r} T_{n}\left(\boldsymbol{\eta}\right)}{\partial \boldsymbol{\eta}^{r}} \bigg|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_{k}} \end{split} \tag{$\Delta-\psi$}$$

$$\begin{split} \left( \mathbf{A}_{\tau} \right)_{l, \Delta m^{+1}} &= \frac{\partial T_{m} \left( \boldsymbol{\xi} \right)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \bigg|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{l}} \\ \left( \mathbf{B}_{\tau} \right)_{k, \Delta n^{+1}} &= \frac{\partial T_{n} \left( \boldsymbol{\eta} \right)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \bigg|_{\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{k}} \end{split} \tag{$\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\psi}$} \end{split}$$

$$\begin{split} \left( \mathbf{B}_{i} \right)_{k, \Delta n+1, q+1} &= \left( \mathbf{B}_{iii} \right)_{k, \Delta n+1, q+1} = \left( \mathbf{B}_{iii} \right)_{k, \Delta n+1, q+1} = \\ & \left( \mathbf{B}_{iiiii} \right)_{k, \Delta n+1, q+1} = \left( \mathbf{B}_{iiiii} \right)_{k, \Delta n+2, q+1} , \\ i &= 1, 1, 1, 1 \end{split}$$

در نهایت عملگر معادله در قالب ماتریس کمکی زیـر سـاخته میشود. <sub>i</sub>(X) بیـانگر سـطر i ام از مـاتریس دو اندیسـی X است (متناسب با مرکز وزنی واقع بـر سـطر یـا سـتون i ام از شبکه وزن).

$$\begin{split} \mathbf{A}_{p} &= \sum_{i=1}^{\delta} \sum_{j=1}^{\delta} \mathbf{L}_{ij} \ , \ i, j = 1, ..., \delta \\ \mathbf{L}_{11} &= \mathbf{A}_{\tau_{\delta, X}} \left( \mathbf{A}_{\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau} \right) + \mathbf{A}_{\tau_{\delta}} \left( \mathbf{A}_{\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{\delta \delta, X} \left( \mathbf{A}_{\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau} \right) + \mathbf{A}_{\delta \delta} \left( \mathbf{A}_{1} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{\tau \tau_{\tau}, y} \left( \mathbf{A}_{\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau} \right) + \mathbf{A}_{\tau \tau} \left( \mathbf{A}_{\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{\tau \delta, y} \left( \mathbf{A}_{\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau} \right) + \mathbf{A}_{\tau \delta} \left( \mathbf{A}_{\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau} \right) \end{split}$$

$$\begin{split} \mathbf{L}_{\tau_{0}} &= \left[\mathbf{A}_{0000}\right]_{I} \mathbf{m}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \left[\mathbf{B}_{00000}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \left[\mathbf{B}_{00000}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{m}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{000000}\right]_{I} \mathbf{m}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{000000}\right]_{I} \mathbf{m}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \left[\mathbf{B}_{00}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \left[\mathbf{B}_{0000}\right]_{\mathbf{x}}^{T} + \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{B} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}_{\tau_{7}}^{A} \left[\mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{\mathbf{x}}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}\right]_{I} \mathbf{C}$$

**پیوست ۳** انتگرال های مورد نیاز برای برآورد حل خصوصی مطابق زیـر هستند. این مقادیر در ماتریسهایی سه اندیسی ذخیره شدهاند.

$$\begin{split} \mathbf{L}_{rrr} &= \mathbf{D}_{i,s,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) + \mathbf{D}_{i,s} \left( \mathbf{A}_{i,rrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) & \mathbf{L} \\ &+ \mathbf{D}_{ss,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) + \mathbf{D}_{ss} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{i,r,y} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) + \mathbf{D}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) + \mathbf{D}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) \\ &- \mathbf{A}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) + \mathbf{D}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) + \mathbf{D}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) + \mathbf{D}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) + \mathbf{D}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) + \mathbf{D}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) + \mathbf{D}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) + \mathbf{B}_{ss} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrrr} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrrr} \right) + \mathbf{B}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrrr} \right) + \mathbf{B}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrrr} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrrr} \right) + \mathbf{B}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrrr} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrrr} \right) + \mathbf{B}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) + \mathbf{B}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrrr} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) + \mathbf{B}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrrr} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) + \mathbf{B}_{rs} \left( \mathbf{A}_{rrrrrr} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{rrr} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{rs,\chi} \left( \mathbf{A}_{rrrrrr} \right)^{T$$

$$\begin{split} \mathbf{L}_{1Y} &= \mathbf{A}_{000,X} \left( \mathbf{A}_{Y} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) + \mathbf{A}_{00} \left( \mathbf{A}_{Y} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{Y0,Y} \left( \mathbf{A}_{Y} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) + \mathbf{A}_{Y0} \left( \mathbf{A}_{Y} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ \mathbf{L}_{1YY} &= \mathbf{A}_{Y0,X} \left( \mathbf{A}_{Y} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) + \mathbf{A}_{Y0} \left( \mathbf{A}_{Y} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{YY,Y} \left( \mathbf{A}_{Y} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) + \mathbf{A}_{YY} \left( \mathbf{A}_{Y} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ \mathbf{L}_{Y1} &= -\mathbf{A}_{Y0} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) + \mathbf{A}_{YY} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) \\ \mathbf{L}_{Y1} &= -\mathbf{A}_{Y0} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) + \mathbf{D}_{10} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{15,X} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) + \mathbf{D}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{15,Y} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YY} \right) + \mathbf{D}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{55,Y} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) + \mathbf{D}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{15,X} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) + \mathbf{D}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{15,X} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) + \mathbf{D}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{15,Y} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) + \mathbf{D}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{15,X} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYY} \right) + \mathbf{D}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{55,Y} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYY} \right) + \mathbf{D}_{55} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYY} \right) \\ &+ \mathbf{D}_{55,Y} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYY} \right) + \mathbf{B}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYY} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{15,X} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYYY} \right) + \mathbf{B}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYY} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{55,Y} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYYY} \right) + \mathbf{B}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYYY} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{55,Y} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYYY} \right) + \mathbf{B}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYYY} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{15,X} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYYY} \right) + \mathbf{B}_{15} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{YYYYY} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{15,Y} \left( \mathbf{A}_{YY} \right)^{T} \left( \mathbf{B}$$

$$\begin{split} \mathbf{L}_{\text{DT}} &= \mathbf{A}_{15,\text{X}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) + \mathbf{A}_{15} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{55,\text{X}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) + \mathbf{A}_{55} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{17,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) + \mathbf{A}_{17} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) + \mathbf{A}_{15} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{1111} \right) \\ \mathbf{L}_{\text{DD}} &= \mathbf{A}_{75,\text{X}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) + \mathbf{A}_{75} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYY}} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{55,\text{X}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) + \mathbf{A}_{55} \left( \mathbf{A}_{11111} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{75,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) + \mathbf{A}_{75} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{11111} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{75,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) + \mathbf{A}_{75} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{75,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) + \mathbf{A}_{75} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{75,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) + \mathbf{A}_{75} \left( \mathbf{A}_{\text{YYYYY}} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{\text{YYYYY}} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{9} \left( \mathbf{A}_{11,111} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{11,111} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{11,111} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{17,1717} \right) + \mathbf{A}_{75} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{11,111} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{17,1717} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{17,1717} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{17,1717} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right)^{\text{T}} \left( \mathbf{B}_{17,1717} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,\text{y}} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right)^{\text{T} \left( \mathbf{B}_{17,1717} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,17} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,17} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,17} \left( \mathbf{A}_{17,1717} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15,17} \left$$

$$\begin{split} \mathbf{L}_{\tau\tau} &= \mathbf{A}_{1,1,X} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{1,1} \left( \mathbf{A}_{1,11,1} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{1,5,X} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{1,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{1,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{1,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{1,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{1,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{5,X} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{1,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{1,5,X} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{1,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{7,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{7,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{5,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{A}_{5,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{A}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{B}_{1,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{5,5,X} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{B}_{5,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{B}_{7,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{5,5,X} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{B}_{5,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{B}_{5,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{B}_{5,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau} \right) + \mathbf{B}_{5,5} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau} \right) \\ &+ \mathbf{B}_{5,5,Y} \left( \mathbf{A}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau} \right)^{T} \left( \mathbf{B}_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau}$$