نشریه علمی - پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۰، ص. ۷۷-۵۹

مقاله پژوهشی

تحلیل خمش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای غیرهمگن در صفحه با استفاده از توابع پایه متعادل شده بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

محمد عزیزپوریان و نیما نورمحمدی*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۶ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۴/۸)

چکیده– در این مقاله تحلیل خمش ورق کامپوزیت لایه‌ای غیرهمگن در صفحه به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به ضخامت نسبتاً زیاد، از تئوری میندلین که تغییر شکل برشی در ضخامت را به‌صورت خطی در نظر می‌گیرد استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل مسئله به‌صورت انتگرال وزنی ارضاء می‌شود. توابع پایه برای تخمین پاسخ، چند جمله‌ای‌های چبی‌شف نوع اول بوده و وزن‌های مورد استفاده نیز از جنس توابع نمایی هستند. با توسعه فرمول‌بندی در یک ناحیه مجازی مستطیلی در برگیرنده سطح ورق، امکان محاسبه انتگرال وزنی به‌صورت ترکیب خطی تعدادی انتگرال یک‌بعدی و نرمال شده وجود دارد که سرعت عملیات را بسیار بالا می‌برد. به‌منظور صحت‌سنجی روش ارائه شده، مثال‌هایی از ورق کامپوزیت لایه‌ای همگن و ناهمگن با انواع جهت‌گیری الیاف و شرایط تکیه‌گاهی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به‌دست آمده با جواب‌های حاصل از روش‌های تحلیلی و نیز حل عددی از نرم‌افزارهای تجاری تطابق خوبی دارد که کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: توابع پایه متعادل شده، ورق نسبتاً ضخیم، کامپوزیت، غیرهمگن، چبی‌شف.

Static Analysis of in-Plane Heterogeneous Laminated Composite Plates Using Equilibrated Basis Functions Based on FSDT

M. Azizpooryan and N. Noormohammadi*

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

Abstract: *In this paper, static analysis of in-plane heterogeneous laminated composite plates is numerically studied. The Mindlin's theory which considers linear transverse shear deformation has been implemented. The governing partial differential equation is satisfied by a weighted residual integration. Chebyshev polynomials of the first kind are used as basis functions and exponential functions make up the weight functions of the integration. The emerging integrals may be composed of some pre-evaluated 1D normalized ones, which effectively paces up the solution progress. To verify the method, several examples of*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Noormohammadi@iut.ac.ir

homogeneous as well as heterogeneous plates with various lamination schemes and boundary conditions have been solved. Results are compared with those from the literature or by commercial codes, which reveal excellent accuracy of the proposed method.

Keywords: *Equilibrated basis functions, Moderately thick plate, Heterogeneous, Composite, Chebyshev.*

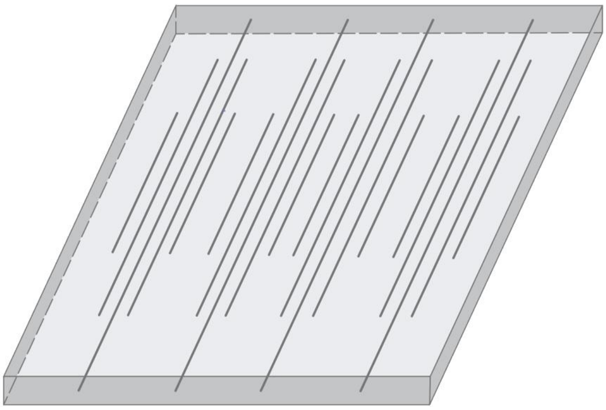
فهرست علائم

$\mathbf{A}$	ماتریس ضرایب در ارضای تعادل	$\bar{Q}_{ij}$	ضرایب سختی تبدیل یافته تنش مستوی
b, a	ابعاد دامنه مجازی مسئله	$\mathbf{q}$	بردار نیروی گسترده خارجی
$\mathbf{B}$	عملگر شرایط مرزی	Q_y, Q_x	نیروهای برشی عرضی
$\mathbf{c}$	بردار ضرایب مجهول پاسخ	U_B	بردار مقادیر مرزی
D_{ij}, B_{ij}, A_{ij}	ضرایب سختی محوری، خمشی-محوری، خمشی	φ_s, φ_n	دوران میان صفحه در راستای عمود و مماس بر مرز
$E_۲, E_۱$	مدول الاستیسیته در راستای الیاف و عمود بر الیاف	φ_y, φ_x	دوران میان صفحه در راستای x,y
$\mathbf{F}$	ماتریس توابع پایه متعادل شده	$\mathbf{u}$	بردار جابه‌جایی
f_j	تابع پایه اولیه j ام	u_p, u_h	پاسخ همگن و خصوصی مسئله
G_{ij}	مدول برشی	w, v, u	جابه‌جایی در راستای z,y,x
$\mathbf{I}$	ماتریس همانی	u_s, u_n	جابه‌جایی عمود و مماس بر مرز
k	شماره لایه	w_j	تابع وزن j ام
K_s	ضریب اصلاح برشی	$\varepsilon_y, \varepsilon_x$	کرنش‌های محوری
$\mathbf{L}$	عملگر معادله دیفرانسیل	$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	کرنش‌های برشی
M_{xy}, M_{yy}, M_{xx}	لنگرهای خمشی و پیچشی	σ_y, σ_x	تنش‌های محوری
N_{xy}, N_{yy}, N_{xx}	نیروهای محوری و برشی درون صفحه	$\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}$	تنش‌های برشی
$n_{w۲}, n_{w۱}$	تعداد سطر و ستون شبکه وزن	Ω	دامنه مسئله
o_y, o_x	درجه تقریب در راستای x و y	$\partial\Omega$	مرز مسئله
Q_{ij}	ضرایب سختی تنش مستوی	$\Omega_{\circ}$	دامنه تصوری مسئله

۱- مقدمه

با توجه به پیشرفت صنعت، ساخت و تحلیل مصالح با مقاومت مناسب در برابر تنش‌ها و خوردگی مورد توجه قرار گرفته است. ورق‌های کامپوزیت را می‌توان از مهم‌ترین مصالحی دانست که در صنایع با تکنولوژی بالا همانند هوافضا، خودرو، کشتی‌سازی و مهندسی پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بررسی سازه‌های متشکل از اعضای پوسته مانند نشان می‌دهد که همواره الگوی بزرگی و راستای تنش‌ها در آنها ثابت نیست، لذا می‌توان با ایجاد تغییر در مدول الاستیسیته یا ضخامت ساختاری در صفحه، سازه را از نظر اقتصادی بهینه کرد. از این‌رو توسعه روش‌های مناسب برای تحلیل ورق‌های کامپوزیت دارای ناهمگنی در صفحه موجه و لازم است.

مواد کامپوزیت از تلفیق دو یا چند ماده با خواص فیزیکی و مکانیکی مجزا تشکیل شده‌اند. از جمله پرکاربردترین کامپوزیت‌های مورد استفاده در صنعت، مواد الیافی هستند که به‌دلیل مقاومت بالاتر در راستای الیاف نسبت به راستای عمود بر آنها، رفتاری مشابه با مواد ارتوتروپیک دارند. از روی هم گذاری لایه‌های متعدد این مواد با زوایای متفاوت الیاف،



شکل ۱- نمایی از ورق کامپوزیت غیرهمگن در صفحه

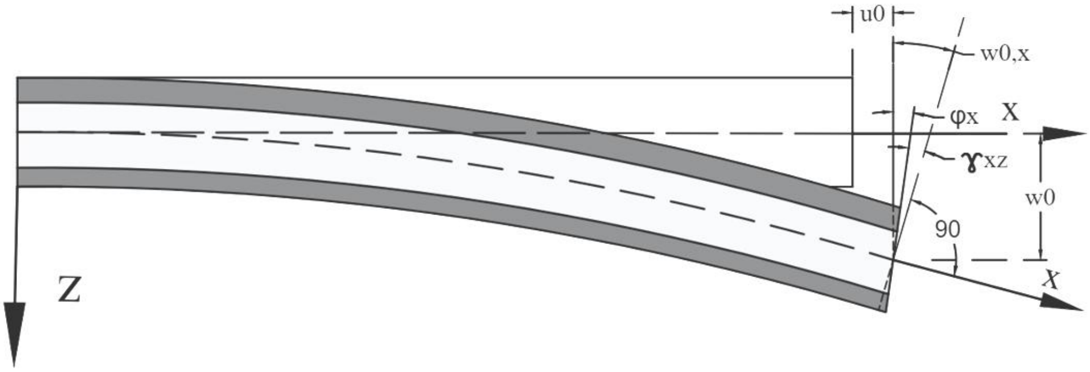
ساختار کامپوزیت لایه‌ای به دست می‌آید. با توجه به پیچیدگی در خواص مکانیکی و فیزیکی، روش‌های متعددی برای بررسی رفتار این نوع مواد توسعه داده شده است. شکل (۱) نمونه‌ای از ورق‌های کامپوزیت غیرهمگن در صفحه را نمایش می‌دهد.

تمام پدیده‌های فیزیکی تابعی از قوانین ریاضی هستند؛ در بسیاری از موارد معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار آنها قابل استخراج است که تحت شرایط خاصی دارای حل دقیق هستند. به‌دلیل تنوع و پیچیدگی معادلات حاکم بر اصول مهندسی، عموماً راه عملی برای حل آنها استفاده از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل است. در بین این روش‌ها، روش اجزا محدود[1] قوی‌ترین و پرکاربردترین شیوه درحل مسائل مکانیک جامدات است که در آن، دامنه مسئله با مجموعه‌ای از المان‌ها که در تعدادی گره به هم متصل هستند مدلسازی می‌شوند. با وجود توانایی روش اجزا محدود، بعضی از ویژگی‌های ذاتی آن باعث طولانی شدن و کاهش دقت حل مساله می‌شود. به‌طور مشخص این روش به‌دلیل استفاده از تقریبات مرتبه پایین (عموماً خطی یا مرتبه دو) قادر به دستیابی به دقت‌های بسیار بالا و پیوستگی کافی خصوصاً در مشتقات توابع جابه‌جایی (برش و لنگر) نیست.

در کنار روش‌های مبتنی بر شبکه همانند روش اجزاء محدود، می‌توان روش‌های بدون شبکه را نیز به‌کار گرفت. از مزایای این روش‌ها می‌توان به سرعت بالای حل، کاهش هزینه محاسبات، نرخ همگرایی بالاتر، توانایی ارائه حل با درجات بالاتری از پیوستگی و سازگاری بهتر با تغییرمکان‌های بزرگ اشاره کرد. همچنین در بعضی از مسائل ویژه همچون ناپیوستگی ترک، عملکرد روش‌های بدون شبکه در ارائه میدان‌های تنش بهتر از روش اجزا محدود است. روش‌های بدون شبکه را می‌توان به دو دسته محلی و مرزی تقسیم کرد. از جمله روش‌های بدون شبکه محلی در حل مسائل ورق می‌توان روش بدون شبکه گالرکین[2] را نام برد [۱]. در این روش امکان ارضاء شرایط دریشله به‌صورت مستقیم فراهم نبوده و بنابراین در فرم ضعیف وزنی گالرکین از ضرایب لاگرانژ برای این منظور استفاده می‌شود. لزوم استفاده از شبکه المان پس زمینه برای محاسبه انتگرال عددی از سرعت و سهولت این روش می‌کاهد. آتلوری روش بدون شبکه پترو گالرکین[3] را ابداع کرد [۲] که بر خلاف روش قبل، صورت ضعیف معادلات حاکم را در محدوده پیرامون یک گره اعمال می‌کند. در کنار روش‌های فوق، تکنیک‌های بدون شبکه مرزی نیز مورد توجه بوده‌اند. این تکنیک‌ها به‌عنوان روش‌های استفاده از توابع پایه نیز شناخته می‌شوند. فرایند حل توسط آنها، ارضای دقیق معادله با انتخاب مناسب توابع پایه تشکیل دهنده سری پاسخ تقریبی، و سپس اعمال شرایط مرزی به ترکیب مذکور به‌منظور برآورد ضرایب مجهول آن است. از جمله روش‌های بدون شبکه مرزی می‌توان به روش ترفتز[4] اشاره کرد [۳]. اساس کار در این روش تخمین پاسخ با مجموعه‌ای از پایه‌های حل است که قادر به ارضای دقیق صورت همگن معادله دیفرانسیل هستند. از جمله کاستی‌های این روش عدم توانایی در حل معادلات با ضرایب متغیر و همچنین محدودیت در انتخاب توابع

پایه صدق کننده در صورت همگن معادله دیفرانسیل است. روش حل‌های اساسی[5] نیز یک روش بدون شبکه مرزی است که ابتدا توسط الکسیدزه و کوپرادزه ارائه شد [۴]. در این روش حاصل اعمال اپراتور معادله دیفرانسیل بر پایه‌های جواب همگن برابر با تابع دلتای دیراک به مرکزیت خارج از محدوده حل در نظر گرفته می‌شود تا پایه حاصل درون ناحیه حل در عملگر معادله صدق کند. لازم به ذکر است که یافتن این پایه‌ها که به توابع گرین معروف هستند ساده نبوده و در کلیه حالات موجود نیستند. در اقدامی جایگزین برومند و همکاران با استفاده از سری متشکل از توابع پایه نمایی، یک روش بدون شبکه محلی را توسعه دادند که برای ارضای معادله دیفرانسیل از روابط صریح در عبارت توان تابع نمایی در قالب معادلات مشخصه استفاده می‌کند [۵ و ۶]. از این رو روش مذکور صرفاً قادر به برآورد معادلات دیفرانسیل در محیط‌های همگن (دارای ضرایب ثابت مادی) است. در راستای رفع محدودیت روش‌های توابع پایه یعنی نیاز به توابعی که صورت همگن معادله دیفرانسیل را به‌طور دقیق ارضا کنند، نورمحمدی و برومند ایده توابع پایه متعادل شده را ارائه کردند [۷ و ۸]. نگرش این شیوه برآوردن فرم انتگرال وزنی صورت همگن معادله به‌جای ارضای دقیق آن است. حاصل این کار پایه‌های جدیدی است که صورت همگن معادله را در شکل انتگرال وزنی ارضا کرده و به‌عنوان توابع پایه متعادل شده شناخته می‌شوند. روند حل با پایه‌های جدید مشابه سایر روش‌های توابع پایه است. هدف تحقیق حاضر به‌کارگیری توابع مذکور در حل مسائل خمش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای دارای ناهمگنی در صفحه است.

در زمینه تحلیل مسائل ورق، نخستین بار ناویر توانست یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی مفصلی را تحلیل کند [۹ و ۱۰]. در ادامه لوی یک ورق مستطیلی با دو ضلع مفصلی مقابل یکدیگر را بررسی کرد [۱۱ و ۱۲]. لیو و لی با استفاده از فرم همیلتونی معادلات تعادل ورق نازک اقدام به حل دقیق ورق‌هایی با دو ضلع مجاور آزاد و دو ضلع دیگر مفصلی و یا گیردار کردند [۱۳]. با توسعه روش‌های عددی، گستره مسائل قابل حل به‌طور قابل توجهی گسترش یافت. ارسالر و ردی از جمله محققانی هستند که با استفاده از روش اجزا محدود و با در نظر گرفتن کرنش‌های برشی مرتبه اول به تحلیل ورق‌های کامپوزیت پرداختند [۱۴]. بر و همکاران نیز با بهره‌گیری از روش اجزاء محدود و تئوری کرنش‌های برشی مرتبه اول و سوم، ورق‌های کامپوزیت ضخیم تقویت شده را تحلیل کردند [۱۵]. چنانکه پیش‌تر بیان شد، روش اجزاء محدود نیز علیرغم همه مزایا، دارای نقایصی در تحلیل مسائل ورق است. در این راستا روش‌های بدون شبکه توانسته‌اند جایگزین مناسبی برای روش اجزا محدود باشند. اسلادک و همکاران تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق ناهمسانگرد[6] در تئوری میندلین- رینسنر را با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروگالرکین مورد بررسی قرار دادند [۱۶]. جابرزاده و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین به بحث ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت پرداختند [۱۷]. شهبازی و برومند با بهره‌گیری از روش بدون شبکه توابع پایه نمایی، حل مسائل استاتیک ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای را مورد توجه قرار دادند [۱۸]. ازهری و برومند با استفاده از تئوری زیگزاگ مرتبه بالا، تحلیل مسائل خمشی ورق‌های کامپوزیت ضخیم را به روش توابع پایه نمایی بررسی کردند [۱۹]. معتمدی و برومند با بهره جستن از توابع پایه نمایی هموار به شکل بدون شبکه محلی، رفتار خمشی ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای نسبتاً ضخیم را براساس تئوری‌های خمش کلاسیک و تغییر شکل برشی مراتب اول و سوم مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. همچنین نورمحمدی و برومند به حل معادله بای‌هارمونیک و مسئله ورق نازک به روش توابع پایه متعادل شده پرداختند [۲۱]. روش انرژی یا ریتز از دیگر تکنیک‌هایی است که در تحلیل ورق‌ها به‌کار گرفته می‌شود. داو و رافائل از جمله محققانی هستند که ارتعاش ورق میندلین را با استفاده از تئوری رایلی- ریتز بررسی کردند [۲۲]. تانگ و وانگ توانستند با تخمین تابع تنش ایری با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبی‌شف، مسئله کمانش ورق کامپوزیت نازک تحت بار سهموی را با



شکل ۲- مؤلفه‌های تغییر شکل ورق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

بهره‌گیری از روش انرژی تحلیل نمایند [۲۳].

همان‌طور که بیان شد تحقیقات فراونی در زمینه تحلیل ورق‌ها انجام شده است، ولی تحلیل ورق‌های کامپوزیت غیرهمگن در صفحه کمتر مورد توجه بوده است. نتایج این پژوهش به‌خوبی نشان دهنده کارایی روش توابع پایه متعادل شده در تحلیل این نوع ورق‌ها است. در ادامه، ابتدا معادلات تعادل برحسب جابه‌جایی حاکم بر ورق کامپوزیت دارای ناهمگنی درون صفحه استخراج می‌شود و سپس معادلات دیفرانسیل مذکور به فرم انتگرال وزنی ارضاء خواهند شد. با در نظر گرفتن تعداد کافی از نقاط در امتداد مرزها و اعمال شرایط مرزی در آنها، ضرایب مجهول سری پاسخ نهایی تعیین می‌شوند. در انتها با ارائه چندین مثال از مراجع معتبر و یا مقایسه با نتایج حاصل از نرم‌افزارهای تجاری، دقت و کارآیی روش مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲- معادلات حاکم بر ورق کامپوزیت لایه‌ای

بر اساس تئوری تغیر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابه‌جایی ورق به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$u(x,y,z,t)=u_{\circ}(x,y,t)+z\phi_x(x,y,t)$$
$$v(x,y,z,t)=v_{\circ}(x,y,t)+z\phi_y(x,y,t) \qquad (۱)$$
$$w(x,y,z,t)=w_{\circ}(x,y,t)$$

که در آن $(u_{\circ},v_{\circ},w_{\circ})$ مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای x,y,z در میان صفحه (موقعیت $z=\circ$) هستند. ϕ_x و ϕ_y نیز دوران‌های مستقل در میان صفحه حول محورهای x و y هستند. در این تئوری المان‌های خطی عمود بر میان صفحه پس از تغییر شکل ورق همچنان به‌صورت خطی می‌مانند، اما بر خلاف نظریه کلاسیک عمود بر میان صفحه نخواهند بود، بلکه نسبت به صفحه قائم بر محور x زاویه ϕ_x و نسبت به صفحه قائم بر محور y زاویه ϕ_y می‌سازند (شکل ۲). این تئوری منجر به بروز تنش‌های برشی عرضی ثابت در ضخامت ورق می‌شود که در تناقض با صفر بودن تنش‌های برشی در سطوح بالایی و پایینی ورق است. برای جبران این نقص در محاسبه تنش‌های برشی عرضی از ضریب اصلاح برشی K_s استفاده می‌شود. البته برآورد ضریب اصلاح برشی برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای بسیار دشوار است، زیرا به آرایش لایه‌ای ورق، شکل هندسی آن، بارگذاری و شرایط مرزی وابسته است؛ اما می‌توان به‌طور تقریبی از مقدار $5/6$ استفاده کرد. کرنش‌های خطی مرتبط با میدان جابه‌جایی رابطه (۱) در شکل برداری به‌صورت زیر هستند

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(\circ)}\\ \varepsilon_{yy}^{(\circ)}\\ \gamma_{yz}^{(\circ)}\\ \gamma_{xz}^{(\circ)}\\ \gamma_{xy}^{(\circ)}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(1)}\\ \varepsilon_{yy}^{(1)}\\ \gamma_{yz}^{(1)}\\ \gamma_{xz}^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\partial u_{\circ}/\partial x\\ \partial v_{\circ}/\partial y\\ \partial w_{\circ}/\partial y+\phi_y\\ \partial w_{\circ}/\partial x+\phi_x\\ \partial v_{\circ}/\partial x+\partial u_{\circ}/\partial y\end{Bmatrix}+$$

$$z\begin{Bmatrix}\partial\phi_x/\partial x\\ \partial\phi_y/\partial y\\ \circ\\ \circ\\ \partial\phi_x/\partial y+\partial\phi_y/\partial x\end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

معادلات تعادل در حضور نیروهای غشایی و لنگرهای خمشی به‌صورت زیر بیان می‌شوند

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0 \quad \text{(۳- الف)}$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0 \quad \text{(۳- ب)}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-Q_y=0 \quad \text{(۳- ت)}$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0 \quad \text{(۳- ث)}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=0 \quad \text{(۳- ج)}$$

روابط بنیادی برای لایه k ام در دستگاه اصلی با فرض آنکه راستای ۱ در امتداد الیاف و راستای ۲ عمود بر آن باشد مطابق زیر است. راستای ۳ عمود بر میان صفحه است

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{16}\\ Q_{12}&Q_{22}&Q_{26}\\ Q_{16}&Q_{26}&Q_{66}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix}^{(k)},$$
$$\begin{Bmatrix}\sigma_{23}\\ \sigma_{13}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}Q_{44}&Q_{45}\\ Q_{45}&Q_{55}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\gamma_{23}\\ \gamma_{13}\end{Bmatrix}^{(k)} \quad (۴)$$

که در آن $Q_{ij}^{(k)}$ ضرایب سختی تنش مستوی ناهمسانگرد بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Q_{11}^{(k)}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad Q_{12}^{(k)}=\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},$$
$$Q_{22}^{(k)}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad Q_{66}^{(k)}=G_{12}, \quad (۵)$$
$$Q_{55}^{(k)}=G_{13},\qquad Q_{44}^{(k)}=G_{23}$$

در صورت بازنویسی روابط بالا در راستای محورهای کلی x,y,z با استفاده از دوران، روابط جدید زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}&\bar{Q}_{12}&\bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12}&\bar{Q}_{22}&\bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16}&\bar{Q}_{26}&\bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}^{(k)}$$
$$\begin{Bmatrix}\sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{44}&\bar{Q}_{45}\\ Q_{45}&Q_{55}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}^{(k)} \quad (۶)$$

$\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ ضریب سختی تبدیل یافته در حالت تنش مستوی است که براساس زاویه ناهمسانگردی لایه kام ورق برحسب $Q_{ij}^{(k)}$ از مرجع [۲۴] محاسبه می‌شود،

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11}&=Q_{11}\cos^4\theta+2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{22}\sin^4\theta\\
\bar{Q}_{12}&=(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{12}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\
\bar{Q}_{22}&=Q_{11}\sin^4\theta+2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{22}\cos^4\theta\\
\bar{Q}_{16}&=(Q_{11}-Q_{22}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta+(Q_{12}-Q_{22}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta\\
\bar{Q}_{26}&=(Q_{11}-Q_{22}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta+(Q_{12}-Q_{22}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta\\
\bar{Q}_{66}&=(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\
\bar{Q}_{44}&=Q_{44}\cos^2\theta+Q_{55}\sin^2\theta\\
\bar{Q}_{45}&=(Q_{44}-Q_{55})\sin\theta\cos\theta\\
\bar{Q}_{55}&=Q_{55}\cos^2\theta+Q_{44}\sin^2\theta
\end{aligned} \quad (۷)$$

نیروها و لنگرهای منتجه با انتگرال‌گیری مناسب از تنش‌ها در راستای ضخامت به‌صورت لایه به لایه محاسبه می‌شوند

$$\begin{Bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{n_l}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}dz=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}\\ A_{12}&A_{22}&A_{26}\\ A_{16}&A_{26}&A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(0)}\\ \varepsilon_{yy}^{(0)}\\ \gamma_{xy}^{(0)}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{16}\\ B_{12}&B_{22}&B_{26}\\ B_{16}&B_{26}&B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(1)}\\ \varepsilon_{yy}^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{Bmatrix} \quad \text{(۸- الف)}$$

$$\begin{Bmatrix}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{n_l}\int_{z_k}^{z_{k+1}}Z\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}dz=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{16}\\ B_{12}&B_{22}&B_{26}\\ B_{16}&B_{26}&B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(0)}\\ \varepsilon_{yy}^{(0)}\\ \gamma_{xy}^{(0)}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&D_{16}\\ D_{12}&D_{22}&D_{26}\\ D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(1)}\\ \varepsilon_{yy}^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{Bmatrix} \quad \text{(۸- ب)}$$

$$\begin{Bmatrix}Q_y\\ Q_x\end{Bmatrix}=K_s\sum_{k=1}^{n_l}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\begin{Bmatrix}\sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}dz=K_s\begin{bmatrix}A_{44}&A_{45}\\ A_{45}&A_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^{(0)}\\ \gamma_{xz}^{(0)}\end{Bmatrix} \quad \text{(۸- پ)}$$

در روابط (۸) n_l تعداد لایه‌ها است. ضرایب سختی A_{ij},B_{ij},D_{ij} به‌صورت زیر به دست می‌آیند

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij}\right)=\sum_{k=1}^{n_l}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\bar{Q}_{ij}^{(k)}(1,z,z^2)dz \quad (۹)$$

معادلات تعادل به شکلی که در روابط (۳) تا (۹) آمد همراه با انواع شرایط مرزی بر مسئله ورق حاکم هستند. ویژگی انواع تکیه‌گاه های ساده[۷]، گیردار[۸] و آزاد[۹] بر مبنای تئوری حاضر در جدول (۱) قابل مشاهده است. در توضیح اجزای این جدول لازم

جدول ۱- مقادیر مرزی معلوم بر اساس نوع شرایط مرزی

شرایط تکیه‌گاهی	مؤلفه‌های معلوم
S-۱	$u_s, N_{nn}, w_\circ, \phi_s, M_{nn}$
S-۲	$u_n, N_{ns}, w_\circ, \phi_s, M_{nn}$
C	$u_s, u_n, w_\circ, \phi_s, \phi_n$
F	$N_{ns}, N_{nn}, Q_n, M_{ns}, M_{nn}$

به‌ذکر است که بیان شرایط در لبه‌های مفصلی برای ورق‌هایی با جهت‌گیری الیاف در امتداد محورهای کلی به‌صورت $S-۱$ و برای جهت‌گیری‌هایی در غیر از راستای محورهای کلی از نوع $S-۲$ است. با داشتن روابط تعادل و شرایط مرزی، در بخش بعد اجزای روش پیشنهادی معرفی خواهد شد.

۳- روش حل مسئله

مهم‌ترین ویژگی روش پیشنهادی، برآورد پاسخ همگن مسئله با ارضای تقریبی معادله تعادل حاکم بر آن در یک ناحیه مجازی در برگیرنده ناحیه اصلی حل است. این ایده روش را بی‌نیاز از داشتن پایه‌هایی می‌کند که به‌طور دقیق معادله دیفرانسیل را ارضا کنند. با این وجود ساختار کلی روش شباهت زیادی به سایر روش‌های استفاده از توابع پایه دارد. پاسخ کلی مسئله شامل دو بخش جواب همگن ($\mathbf{u}_h$) و جواب خصوصی ($\mathbf{u}_p$) است

$$\mathbf{Lu}+\mathbf{q}=\circ\ ,\ \ \mathbf{u}=\mathbf{u}_h+\mathbf{u}_p \tag{۱۰}$$

$$\mathbf{Lu}_h=\circ\ ,\ \mathbf{Lu}_p+\mathbf{q}=\circ\ \text{ in }\Omega \tag{۱۱}$$

$$\mathbf{Bu}=\mathbf{u}_B\ \text{ on }\ \Gamma=\partial\Omega \tag{۱۲}$$

در روابط اخیر $\mathbf{L}$ و $\mathbf{B}$ به‌ترتیب بیانگر عملگر معادله (به‌صورت ماتریسی با اجزای مطابق پیوست ۱) و عملگر شرایط مرزی هستند. Ω دامنه مسئله و $\Gamma=\partial\Omega$ مرز آن هستند. بردار مجهولات جابه‌جایی و دوران ($\mathbf{u}$) و نیز بارگذاری خارجی ($\mathbf{q}$) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathbf{u}=\left\{w_\circ\ \ \phi_x\ \ \phi_y\ \ u_\circ\ \ v_\circ\right\}^T \tag{۱۳}$$

$$\mathbf{q}=\left\{q\ \ \circ\ \ \circ\ \ \circ\ \ \circ\right\}^T \tag{۱۴}$$

در رابطه (۱۴) $\mathbf{q}$ بارگذاری گسترده عمود بر سطح ورق است. $\mathbf{u}_B$ نیز مقادیر معلوم مرزی (جابه‌جایی، دوران، لنگر و برش) را شامل می‌شود. بر مبنای این معادلات اجزای روش پیشنهادی در ادامه تشریح می‌شوند.

۳- ۱- پاسخ همگن معادله

بخش همگن پاسخ به‌صورت سری زیر تقریب زده می‌شود

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_h\simeq\hat{\mathbf{u}}_h=\sum_{j=۱}^{N}\mathbf{f}_j\mathbf{c}_j=\mathbf{f}^T\mathbf{c}\\&\mathbf{f}_j=f_j\times\mathbf{I}_{۵\times۵}\\&\mathbf{c}_j=\left[c_j^۱\ \ c_j^۲\ \ c_j^۳\ \ c_j^۴\ \ c_j^۵\right]^T\end{aligned} \tag{۱۵}$$

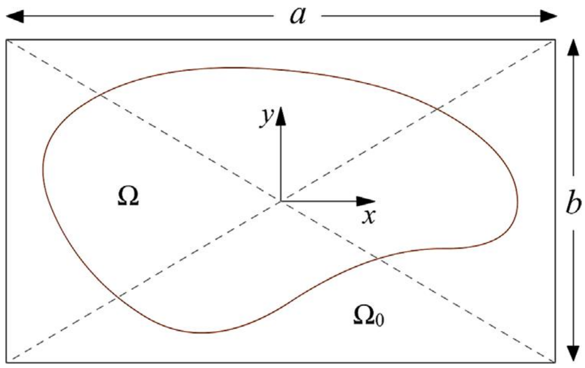
در رابطه فوق f_j توابع پایه اولیه متشکل از چند جمله‌ای‌های چبی‌شف نوع اول می‌باشد و $\mathbf{I}$ ماتریس همانی است. همچنین ضرایب $\mathbf{c}_j$ مجهولات پاسخ مسئله هستند. از آنجا که پایه‌های حل لزوماً قادر به ارضای دقیق معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله نیستند، این معادله به‌صورت باقی‌مانده وزنی روی دامنه مستطیلی مجازی $\Omega_\circ$ به ابعاد $a\times b$ که در بردارنده دامنه اصلی Ω است اعمال می‌شود (شکل ۳)

$$\int_{\Omega_\circ}\mathbf{w}\,\mathbf{Lu}d\Omega=\left(\int_{\Omega_\circ}\mathbf{w}\,\mathbf{Lf}^T d\Omega_\circ\right)\mathbf{c}=\mathbf{Ac}=\circ \tag{۱۶}$$

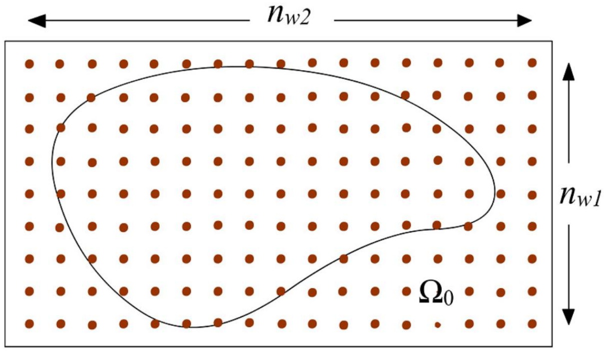
در این رابطه $\mathbf{w}$ ماتریس توابع وزن است

$$\mathbf{w}=\left[w_۱\mathbf{I}_{۵\times۵}\ \ ,\ldots,\ w_M\mathbf{I}_{۵\times۵}\right]^T \tag{۱۷}$$

اضلاع مستطیل مجازی مذکور ۵ درصد بزرگ‌تر از مستطیل محیط بر دامنه اصلی حل در نظر گرفته می‌شوند تا اثرات نامطلوب در مرز بروز نکنند. پاسخ معادله فوق مترادف با انتخابی از فضای پوچ[۱۰] ماتریس $\mathbf{A}$ است که با $\boldsymbol{\varphi}$ نمایش داده



شکل ۳- نواحی اصلی و مجازی حل و موقعیت مبدأ مختصات



شکل ۴- شبکه نقاط مورد استفاده برای توابع وزن نمایی

می‌شود. تعداد بردارهای فضای پوچ مذکور برابر با $5N-\bar{M}$ است که $\bar{M}$ مرتبه[11] ماتریس $\mathbf{A}$ است. بردار مجهولات $\mathbf{c}$ می‌تواند ترکیب خطی دلخواهی از ستون‌های $\boldsymbol{\varphi}$ باشد

$$\mathbf{c} = \sum_{r=1}^{5N-\bar{M}} d_r \varphi_r \tag{18}$$

رابطه (۱۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت که در آن، توابع پایه متعادل شده $\mathbf{F}_r$ توانایی ارضاء تقریبی معادله دیفرانسیل حاکم را در ناحیه مجازی مستطیلی و در نتیجه ناحیه اصلی حل که زیر مجموعه آن است دارند

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_h &= \sum_{r=1}^{5N-\bar{M}} d_r \mathbf{f}^T \varphi_r = \sum_{r=1}^{5N-\bar{M}} \mathbf{F}_r d_r = \mathbf{F}^T \mathbf{d},\\ \mathbf{F}_r &= \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi}_r,\\ \mathbf{F}^T &= \left[\mathbf{F}_1 \;\ldots\; \mathbf{F}_{5N-\bar{M}}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

با توجه به دامنه تعریف چندجمله‌ای‌های چبی‌شف در بازه نرمال $[-1,+1]$، سری پاسخ همگن تقریبی مسئله به این صورت خواهد بود

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_h &= \sum_{m=0}^{O_x} \sum_{n=0}^{O_y} T_m\left(\frac{2x}{a}\right) T_n\left(\frac{2y}{b}\right) \mathbf{I}_{(5\times5)} \mathbf{c}_{(m,n)}\\ &= \sum_{m=0}^{O_x} \sum_{n=0}^{O_y} T_m(\xi) T_n(\eta) \mathbf{I}_{(5\times5)} \mathbf{c}_{(m,n)}\\ \mathbf{c}_{(m,n)} &= \left[c^1_{(m,n)} \;\; c^2_{(m,n)} \;\; c^3_{(m,n)} \;\; c^4_{(m,n)} \;\; c^5_{(m,n)}\right]^T\end{aligned} \tag{20}$$

در این سری T_m بیانگر چندجمله‌ای چبی‌شف نوع اول از مرتبه m است. O_x و O_y بالاترین مرتبه چندجمله‌ای مورد استفاده در راستای x و y هستند. همچنین از توابع نمایی در صفحه گوسی هم‌پایه شده برای وزن‌دهی در انتگرال (۱۶) استفاده می‌شود

$$w_i = e^{-W\left[(\xi-\xi_l)^2+(\eta-\eta_k)^2\right]} \tag{21}$$

مراکز وزن (ξ_l, η_k) در n_{w1} سطر و n_{w2} ستون در مستطیل مجازی به‌صورت منظم توزیع شده‌اند (شکل ۴)، به‌گونه‌ای که فاصله بین اولین سطر (ستون) از مرز مجاور برابر نصف فواصل بین سطرها (ستون‌ها) است. این الگوی توزیع در فضای نرمال شده نیز رعایت می‌شود. پارامتر وزنی W یک ضریب برای کنترل تمرکز توابع وزن در مجاورت نقطه وزن مورد نظر است که برای مسئله مورد بحث استفاده از مقدار ۳۰ نتایج مطلوبی به همراه دارد. شاخص i با رابطه زیر، معرف توابع وزن در مختصات (ξ_l, η_k) در فضای نرمال شده است

$$i = i(k,l),\; k = 1,\ldots,n_{w1},\; l = 1,\ldots,n_{w2} \tag{22}$$

تعداد سطرها و ستون‌های شبکه مورد بحث از روابط صریح زیر تعیین می‌شود

$$n_{w1} = O_y - 1,\;\; n_{w2} = O_x - 1 \tag{23}$$

در صورتی که ضرایب معادله دیفرانسیل به‌عنوان توابعی از مشخصات مادی و هندسی ورق در صفحه متغیر باشند، لازم است که پیش از حل مسئله با یک بسط از جملات غیر کامل مثلث خیام- پاسکال جایگزین شوند. دلیل این جایگزینی اعطای قابلیت تفکیک‌پذیری به‌صورت حاصل‌ضرب دو مجموعه مستقل یک متغیره به ضرایب مذکور است. جملات غیر کامل مذکور در دستگاه مختصات نرمال شده تا مرتبه n_k به‌صورت زیر هستند

$$f_D = \left[1, \xi, \ldots, \xi^{n_k}, \eta, \xi\eta, \ldots, \xi^{n_k}\eta, \ldots, \xi^{n_k}\eta^{n_k}\right] \tag{24}$$

با برازش حداقل مربعات در تعداد مناسبی نقطه روی ناحیه حل Ω و در امتداد مرزهای آن می‌توان ضرایب مجهول متناسب با پایه‌های فوق را استخراج کرد. برای بازنویسی عبارت رابطه (۲۴) به‌صورت حاصل‌ضرب دو مجموعه یک متغیره، لازم است پایه‌های تقریب و ضرایب آنها با آرایش زیر با یکدیگر ترکیب شوند

$$D_i = \mathbf{f}_{D\xi}^T \mathbf{C}_D^i \mathbf{f}_{D\eta}\ ,\ \mathbf{f}_{D\xi} = \left[1,\xi,\ldots,\xi^{n_k}\right]^T ,\quad \mathbf{f}_{D\eta} = \left[1,\eta,\ldots,\eta^{n_k}\right]^T \tag{۲۵}$$

ماتریس $\mathbf{C}_D^i$ به ابعاد $(1+n_k)\times(1+n_k)$ ضرایب به‌دست آمده را به‌صورتی متناسب با آرایش ارائه شده در خود جای می‌دهد، به‌گونه‌ای که درایه سطر i و ستون j از این ماتریس ضریب عبارت $\xi^i\eta^j$ در بسط جایگزین باشد [۷]. با توجه به تفکیک پذیری توابع پایه و وزن و نیز بسط جایگزین ضرایب مادی، می‌توان کلیه انتگرال‌های موجود در فرآیند باقی‌مانده وزنی را به‌صورت ترکیب انتگرال‌های نرمال‌شده یک‌بعدی در دو راستای x و y نوشت. ساختار این انتگرال‌های جای گرفته در ماتریس‌هایی سه‌اندیسی مطابق زیر است

$$\begin{aligned}
(A_1)_{l,5m+1,p+1} &= \frac{2}{a}\int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^2}\xi^p \frac{\partial^2 T_m(\xi)}{\partial \xi^2}d\xi \\
(B_1)_{k,5n+1,q+1} &= \frac{2}{b}\int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^2}\eta^q \frac{\partial^2 T_n(\eta)}{\partial \eta^2}d\eta \\
(A_2)_{l,5m+1,p+1} &= \int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^2}\xi^p \frac{\partial T_m(\xi)}{\partial \xi}d\xi \\
(B_2)_{k,5n+1,q+1} &= \int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^2}\eta^q \frac{\partial T_n(\eta)}{\partial \eta}d\eta \\
(A_3)_{l,5m+1,p+1} &= \frac{a}{2}\int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^2}\xi^p T_m(\xi)d\xi \\
(B_3)_{k,5n+1,q+1} &= \frac{b}{2}\int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^2}\eta^q T_n(\eta)d\eta \\
(A_4)_{l,5m+1,p+2} &= \frac{2}{a}\int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^2}\xi^p \frac{\partial T_m(\xi)}{\partial \xi}d\xi \\
(B_4)_{k,5n+1,q+2} &= \frac{2}{b}\int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^2}\eta^q \frac{\partial T_n(\eta)}{\partial \eta}d\eta \\
(A_5)_{l,5m+1,p+2} &= \int_{-1}^{+1} e^{-W(\xi-\xi_l)^2}\xi^p T_m(\xi)d\xi \\
(B_5)_{k,5n+1,q+2} &= \int_{-1}^{+1} e^{-W(\eta-\eta_k)^2}\eta^q T_n(\eta)d\eta
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

عملگر معادله دیفرانسیل مطابق با روابط ارائه شده در پیوست (۲) بازسازی می‌شود. حاصل عبارت مورد اشاره در پیوست مذکور، ماتریس کمکی $\mathbf{A}_h$ به ابعاد $5(1+O_x)\times 5(1+O_y)$ است. اگر سطرهای این ماتریس در دسته‌های پنج‌تایی به‌ترتیب از چپ به راست در کنار یکدیگر قرار بگیرند، پنج سطر از ماتریس ضرایب نهایی $\mathbf{A}$ متناسب با نقطه وزن روی سطر kام وستون lام شبکه نقاط وزن را خواهند ساخت. با تکرار این عمل به‌ازای کلیه نقاط شبکه وزن، ماتریس ضرایب نهایی تکمیل می‌شود. پس از محاسبه فضای پوچ این ماتریس، سری پاسخ همگن تقریبی مسئله با استفاده از توابع پایه متعادل شده مطابق با توضیحات قبلی ساخته خواهد شد.

۳- ۲- پاسخ خصوصی معادله

مشابه روند طی شد برای حل همگن، پاسخ خصوصی رابطه ($\mathbf{u}_p$) به‌صورت یک سری از توابع پایه همراه با ضرایب مجهول متناسب آنها در نظر گرفته می‌شود،

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_p &\simeq \hat{\mathbf{u}}_p = \sum_{j=1}^{N}\mathbf{f}_j^p \mathbf{c}_j^p \\
\mathbf{f}_j^p &= f_j^p \times \mathbf{I}_{5\times5} \\
\mathbf{c}_j^p &= \left[(c_j^1)_p\ \ (c_j^2)_p\ \ (c_j^3)_p\ \ (c_j^4)_p\ \ (c_j^5)_p\right]^T
\end{aligned} \tag{۲۷}$$

در این تحقیق از بسط مشابه با پاسخ همگن برای تقریب حل خصوصی نیز استفاده می‌شود

$$\hat{\mathbf{u}}_p = \sum_{m=0}^{O_x^p}\sum_{n=0}^{O_y^p} T_m(\xi)T_n(\eta)\mathbf{I}_{(5\times5)}\mathbf{c}_{(m,n)}^p \tag{۲۸}$$

با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از نقاط درون دامنه اصلی حل و در امتداد مرزهای آن و با داشتن مقدار تابع بارگذاری مسئله ($\mathbf{q}$) در هر یک از نقاط مذکور، مبادرت به اعمال وزنی صورت غیرهمگن معادله به سری پاسخ تقریبی می‌شود

$$\int_{\Omega_0}\mathbf{w}_i\left\{\mathbf{L}\left(\sum_{j=1}^{N}\mathbf{f}_j^p\mathbf{c}_j^p\right)+\mathbf{q}\right\}d\Omega_0 = \mathbf{A}_p\mathbf{c}_p + \mathbf{q} = 0,\quad i = 1,\ldots,M_p \tag{۲۹}$$

انتخاب‌های گوناگونی برای توابع وزن در رابطه بالا ممکن است. در تحقیق حاضر از توابع دلتای دیراک به مرکزیت شبکه

نقاط ذکر شده استفاده می‌شود

$$\mathbf{w}_i = \delta(x - x_i)\delta(y - y_i)\mathbf{I}_{5\times5} \qquad (۳۰)$$

حاصل انتگرال فوق یک معادله ماتریسی است که با حل آن، ضرایب مجهول سری پاسخ ($\mathbf{c}_j^p$) به‌دست می‌آیند. به‌منظور دستیابی به دقت مناسب، لازم است تعداد سطرها و ستون‌های تشکیل دهنده شبکه نقاط وزن با رابطه زیر به مرتبه تقریب حل خصوصی مربوط باشد.

$$n_{w1}^P \geq 1/5 O_y^P \ , \ n_{w2}^P \geq 1/5 O_x^P \qquad (۳۱)$$

بنابراین دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه نامعین خواهد بود که حل آن مستلزم استفاده از برازش حداقل مربعات است. عملگر معادله دیفرانسیل برای جواب خصوصی از طریق ماتریس کمکی $\mathbf{A}_p$ مطابق پیوست (۳) بازسازی می‌شود.

۳-۳- اعمال شرایط مرزی

به‌منظور ارضای شرایط مرزی در امتداد مرز ناحیه اصلی حل مسأله ($\partial\Omega$)، تعداد N_B نقطه در امتداد مرز با مقادیر مرزی معلوم در نظر گرفته می‌شود. بردار مقادیر مرزی $\mathbf{U}_B$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{U}_B = \left[\mathbf{u}_B\Big|_{x_1,y_1} - \mathbf{B}(\mathbf{u}_p)\Big|_{x_1,y_1} \ \dots \ \mathbf{u}_B\Big|_{x_{N_B},y_{N_B}} - \mathbf{B}(\mathbf{u}_p)\Big|_{x_{N_B},y_{N_B}} \right]^T \qquad (۳۲)$$

هر یک از درآیه‌های ماتریس فوق، معادل با اختلاف مقدار ثابت مرزی روی نقطه مربوطه با تأثیر عملگر شرایط مرزی بر حل خصوصی معادله در همان نقطه است که مستقیماً سهم بخش همگن پاسخ را در بازسازی مقادیر مرزی نشان می‌دهد. بعد بردار مقادیر معلوم $\mathbf{u}_B$ در هر نقطه برابر تعداد اجزای مستقل میدان پتانسیل مسأله یعنی ۵ است. رابطه (۱۸) را می‌توان برای مقادیر مرزی بازنویسی کرد

$$\mathbf{U}_B = \sum_{r=1}^{5N-\bar{M}} d_r \mathbf{V}_r = \mathbf{V}\mathbf{d} \qquad \mathbf{V}_r = \left[\mathbf{F}_r\Big|_{x_1,y_1} \ \dots \ \mathbf{F}_r\Big|_{x_{N_B},y_{N_B}} \right]^T$$
$$\mathbf{V} = \left[\mathbf{V}_1 \ \dots \ \mathbf{V}_{5N-\bar{M}} \right] \qquad (۳۳)$$

پیش از اقدام به حل معادله (۳۳)، لازم است از فرآیند هم پایه کردن برای بهبود شرایط ماتریس $\mathbf{V}$ در فرآیند وارون‌سازی مطابق زیر استفاده شود

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{V} \qquad (۳۴)$$

اجزای غیرصفر ماتریس قطری $\mathbf{E}$ با ابعاد $5N_B \times 5N_B$ در رابطه (۳۴) به‌صورت زیر هستند

$$\boldsymbol{E}_{qq} = \begin{cases} 1 & \text{شرایط دریشله (جابجایی و دوران)} \\ E & \text{شرایط نویمان (برش و لنگر)} \end{cases} \qquad (۳۵)$$

E مدول الاستیسیته در موضع مورد نظر است. با تقریب حداقل مربعات به‌صورت زیر می‌توان بردار مجهولات نهایی $\mathbf{d}$ را تعیین کرد

$$\Pi = \left(\bar{\mathbf{V}}\mathbf{d} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}_B\right)^T \left(\bar{\mathbf{V}}\mathbf{d} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}_B\right), \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = 0 \qquad (۳۶)$$

با تعیین بردار مجهولات، پاسخ کلی مسئله به‌دست می‌آید. بخش آتی به ارائه نتایجی از روش پیشنهادی در حل مسائل گوناگون خواهد پرداخت.

۴- نتایج

این بخش به ارائه چندین مثال منتخب از مراجع معتبر برای نشان دادن کارآیی روش اختصاص دارد. مقادیر جابه‌جایی یا تنش برای ورق‌های لایه‌ای با ترکیبات مختلف در این قسمت آورده شده‌اند. به‌منظور مقایسه از تکنیک‌های گوناگون از جمله روش‌های نیمه تحلیلی و یا نرم‌افزارهای تجاری استفاده شده است.

مثال اول

در این مسئله ورق مربعی به ضلع $a = 20\text{m}$ و ضخامت h با آرایش لایه‌ای $\left(0^\circ, 90^\circ\right)_n$ دارای ضخامت یکسان لایه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. خصوصیات مکانیکی ناهمسانگرد لایه‌ها به قرار زیر است

$$E_2 = E_3 = 10\text{GPa} \quad E_1 = 25E_2 \ , \ G_{12} = G_{13} = 0/5E_2$$
$$G_{23} = 0/2E_2 \ , \ \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0/25 \qquad (۳۷)$$

جدول ۲- مقادیر تغییرمکان قائم بی‌بعد در مرکز ورق مربعی $\left(۰^\circ,۹۰^\circ\right)_n$ تحت بار کسینوسی

n	$\frac{a}{h}$	Method	SSSS	SSSC	SCSC	SFSF	SFSS	SFSC
۱	۵	Ref. [۲۴]	۱/۷۵۸۰	۱/۴۷۷۰	۱/۲۵۷۰	۲/۷۷۷۰	۲/۳۳۵۰	۱/۸۹۷۰
		Present	۱/۷۵۸۰	۱/۴۷۷۰	۱/۲۵۶۰	۲/۷۷۷۰	۲/۳۳۵۱	۱/۸۹۷۲
	۱۰	Ref. [۲۴]	۱/۲۳۷۰	۰/۸۸۳۰	۰/۶۵۶۰	۲/۰۲۸۰	۱/۶۸۷۰	۱/۲۲۳۰
		Present	۱/۲۳۷۰	۰/۸۸۳۰	۰/۶۵۶۰	۲/۰۲۸۰	۱/۶۸۷۰	۱/۲۲۳۲
۵	۵	Ref. [۲۴]	۱/۱۳۷۰	۱/۰۴۵۰	۰/۹۴۵۰	۱/۶۶۳۰	۱/۴۶۰۰	۱/۲۵۸۰
		Present	۱/۱۳۶۰	۱/۰۴۵۰	۰/۹۴۴۰	۱/۶۶۲۴	۱/۴۵۹۳	۱/۲۵۷۵
	۱۰	Ref. [۲۴]	۰/۶۱۵۰	۰/۴۸۰۰	۰/۳۸۵۰	۰/۹۱۵۰	۰/۸۰۰۰	۰/۶۱۲۰
		Present	۰/۶۱۵۰	۰/۴۷۹۵	۰/۳۸۵۰	۰/۹۱۴۰	۰/۸۰۰۲	۰/۶۱۲۳

جدول ۳- مقادیر تنش محوری $-\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}(-h/۲)$ در مرکز ورق مربعی $\left(۰^\circ,۹۰^\circ\right)$ تحت بار کسینوسی

a / h	Method	SSSS	SSSC	SCSC	SFSF	SFSS	SFSC
۵	Ref. [۲۴]	۰/۷۱۵۷	۰/۵۳۳۸	۰/۳۹۱۱	۰/۲۴۶۹	۰/۴۴۳۰	۰/۲۴۳۴
	Present	۰/۷۱۵۷	۰/۵۳۳۸	۰/۳۹۱۰	۰/۲۴۶۹	۰/۴۴۲۹	۰/۲۴۳۴
۱۰	Ref. [۲۴]	۰/۷۱۵۷	۰/۵۴۹۴	۰/۴۴۵۰	۰/۲۴۴۲	۰/۴۴۳۵	۰/۲۷۹۰
	Present	۰/۷۱۵۷	۰/۵۴۹۳	۰/۴۴۵۰	۰/۲۴۴۲	۰/۴۴۳۵	۰/۲۷۹۰

این ورق تحت بارگذاری کسینوسی نسبت به دستگاه مختصات با مبدأ واقع بر مرکز ورق قرار گرفته است

$$q(x,y)=q_\circ\cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a) \qquad (۳۸)$$

کمیت‌های فیزیکی شامل تغیرمکان قائم و تنش در کلیه مثال‌ها به‌صورت نرمال شده گزارش می‌شوند،

$$\begin{aligned}
&\bar{w}=\frac{۱۰۰h^۳E_۲}{q_\circ a^۴}w(۰,۰)\ ,\ \bar{\sigma}_{xx}^{(m)}=\frac{h^۲}{q_\circ a^۲}\sigma_{xx}(۰,۰,z)\\
&\bar{\sigma}_{xy}^{(m)}=\frac{h^۲}{q_\circ a^۲}\sigma_{xy}(a/۲,a/۲,z)\ ,\ \bar{\sigma}_{yy}^{(m)}=\frac{h^۲}{q_\circ a^۲}\sigma_{yy}(۰,۰,z) \qquad (۳۹)\\
&\bar{\sigma}_{yz}^{(m)}=\frac{h}{q_\circ a}\sigma_{yz}(۰,-a/۲,z)\ ,\ \bar{\sigma}_{xz}^{(m)}=\frac{h}{q_\circ a}\sigma_{yz}(-a/۲,۰,z)
\end{aligned}$$

این ورق تحت انواع شرایط تکیه‌گاهی بررسی می‌شود. جدول (۲) و جدول (۳) به‌ترتیب بیانگر تغییرمکان قائم و تنش محوری در ساختار ورق است. نماد n در این جدول نشان دهنده شماره لایه است. به‌منظور حل مسئله، پایه‌های اولیه حل‌های همگن و خصوصی تا مرتبه ۱۵ در نظر گرفته شده‌اند. سایر پارامترهای روش حل، شامل شبکه وزن و نقاط مرزی، براساس توضیحات بخش‌های قبل مرتبط با مرتبه پایه‌های اولیه انتخاب می‌شوند.

مثال دوم

در این مسئله ورق چهار طرف مفصل دو لایه‌ای با آرایش پادمتقارن $\left(-۴۵^\circ,۴۵^\circ\right)$ با ضخامت یکسان لایه‌ها تحت بارگذاری کسینوسی مشابه مثال قبل مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات هندسی ورق و خواص الاستیک هریک از لایه‌ها، و نیز اجزای مورد استفاده در روش حل مشابه با مثال اول است. نتایج در جدول (۴) قابل مشاهده است.

مثال سوم

در این مسئله ورق تک‌لایه مربع شکل به طول $a=۲m$، و ضخامت h تحت بار یکنواخت $q_\circ$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

جدول ۴- مقادیر تغییرمکان و تنش‌های بدون بعد ورق چهار طرف مفصل $(۴۵^\circ,-۴۵^\circ)$ تحت بار کسینوسی

a/h	Method	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}^{(۲)}(h/۲)$	$\bar{\sigma}_{yy}^{(۲)}(h/۲)$	$\bar{\sigma}_{xy}^{(۱)}(-h/۲)$	$\sigma_{yz}^{(۲)}(h/۴)$	$\sigma_{xz}^{(۲)}(h/۴)$
۱۰	Ref [۲۴]	۰/۸۲۸۴	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰
	Present	۰/۸۲۸۴	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰
۲۰	Ref [۲۴]	۰/۶۹۸۱	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰
	Present	۰/۶۹۸۱	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰
۱۰۰	Ref [۲۴]	۰/۶۵۶۴	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰
	Present	۰/۶۵۶۴	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	۰/۲۳۳۶	۰/۱۹۱۰	۰/۱۹۱۰

جدول ۵- مقادیرتغییر مکان برون صفحه بدون‌بعد در مرکز ورق کامپوزیت غیرهمگن در صفحه تحت بار یکنواخت

a/h	Method	SSSS	CSCS	FSFS	SSCS	SSFS	FSCS
۱۰	COMSOL	۱/۷۱۱۳	۱/۳۶۴۵	۱/۸۷۷۳	۱/۵۳۲۹	۱/۷۹۶۲	۱/۶۲۰۶
	Present	۱/۷۱۱۲	۱/۳۶۴۴	۱/۸۷۷۳	۱/۵۳۲۸	۱/۷۹۶۱	۱/۶۲۰۵
۵	COMSOL	۲/۴۹۶۱	۲/۱۲۹۹	۲/۷۷۰۹	۲/۳۶۹۱	۲/۶۳۷۱	۲/۴۴۵۴
	Present	۲/۴۹۶۰	۲/۱۲۹۹	۲/۷۷۰۹	۲/۳۶۹۱	۲/۶۳۷۰	۲/۴۴۵۳

جدول ۶- مقادیر تنش‌های بدون بعد در ورق کامپوزیت چهار طرف مفصل غیرهمگن در صفحه تحت بار یکنواخت

a/h	Method	$\bar{\sigma}_{xx}(h/۲)$	$\bar{\sigma}_{yy}(h/۲)$	$\bar{\sigma}_{xy}(h/۲)$
۱۰	COMSOL	۰/۶۷۶۴	۰/۰۷۶۸	۰/۰۹۵۶
	Present	۰/۶۷۶۴	۰/۰۷۶۸	۰/۰۹۵۲
۵	COMSOL	۰/۶۵۰۵	۰/۰۹۰۳	۰/۱۰۲۵
	Present	۰/۶۵۰۵	۰/۰۹۰۳	۰/۱۰۲۱

خواص ماده در صفحه متغیر به‌صورت زیر است

$$E_۲ = E_۳ = a^۲ GPa \;,\; E_۱ = ۱۰(a^۲ - x^۲) GPa$$
$$G_{۱۲} = G_{۱۳} = ۰/۵E_۲ \;,\; G_{۲۳} = ۰/۲E_۲$$
$$\nu_{۱۲} = \nu_{۲۳} = \nu_{۱۳} = ۰/۲۵ \qquad (۴۰)$$

در جدول‌های (۵) و (۶) مقادیر تغییر مکان حداکثر قائم و تنش‌های محوری و برشی نرمال شده براساس رابطه (۳۹) برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت ورق و همچنین برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده و با نمونه مشابه مدل‌سازی شده به‌روش اجزاء محدود در نرم‌افزار COMSOL با مش‌بندی بسیار ریز مقایسه شده است. لازم به‌ذکر است که پایه‌های حل همگن و اختصاصی تا مرتبه ۱۵ در نظر گرفته شده است.

نتایج کلیه مثال‌های ارائه شده بیانگر کارآیی روش پیشنهادی و دقت بالای آن است. لازم به تذکر است که دقت حاصل نه تنها در مؤلفه‌های جابه‌جایی، بلکه در منتجه‌های تنش که مشتقات توابع مذکور را در خود دارند نیز قابل مشاهده است. از این منظر روش پیشنهادی امتیاز ویژه‌ای نسبت به روش‌های دارای پیوستگی مرتبه صفر (همانند روش اجزاء محدود) دارد، زیرا پیوستگی را نه تنها در مقادیر مؤلفه‌های جابه‌جایی، بلکه در مشتقات آنها نیز برآورده می‌کند.

۵- نتیجه‌گیری

روش بدون شبکه توابع پایه متعادل شده ابزاری قدرتمند در

حل مسائل مکانیک جامدات است و برخلاف بسیاری از روش‌های استفاده از توابع پایه، توانایی حل انواع معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر را نیز دارد. توزیع ناهمگن الیاف در ورق‌های کامپوزیت سبب تغییر ضرایب سختی در صفحه ورق می‌شود. با توجه به نتایج به‌دست آمده، دقت بالای روش پیشنهادی در حل این‌گونه مسائل استنباط می‌شود؛ این در حالی است که از روش باقی‌مانده وزنی برای اعمال صورت همگن معادله در این شیوه استفاده شده و به این ترتیب نیاز به‌وجود پایه‌های صادق در عملگر معادله دیفرانسیل برطرف می‌شود. با بازنویسی کلیه پارامترهای حل مسئله به‌صورت تفکیک‌پذیر، این قابلیت به‌وجود می‌آید که انتگرال‌های حاصل به‌صورت ترکیب انتگرال‌های یک‌بعدی هم‌پایه شده برآورد شود که به‌سادگی روش و افزایش قابل توجه سرعت حل آن می‌انجامد.

واژه‌نامه

1. finite element method (FEM)
2. element free galerkin (EFG)
3. mesh-less local petrov galerkin (MLPG)
4. trefftz method
5. method of fundamental solutions (MFS)
6. orthotropic
7. simply supported (S)
8. clamped (C)
9. free (F)
10. null space
11. rank

مراجع

1. Belytschko, T. Lu, Y. Y., and Gu, L., “Element Free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
2. Atluri, S. N., and Zhu, T., “A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics”, *Computational Mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 117-127, 1998.
3. Trefftz, T., “Ein Gegenstuck Zum Ritzschen Verfahren”, *Proceedings of 2nd International Congress on Applied Mechanics*, Zurich, 1926.
4. Kupradze, V. D. and Aleksidze, M. A., “The Method of Functional Equations for the Approximate Solution of Certain Boundary Value Problems”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 4, No .4, pp. 82-126, 1964.
5. Soghrati, S., “Implementation of Smooth Fundamental Solutions in Solving Some Governing Differential Equations in Solid Mechanics”, *M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2007. (in Persian).
6. Boroomand, B., Soghrati, S. and Movahedian, B., “Exponential Basis Functions in Solution of Static and Time Harmonic Elastic Problems in a Meshless Style”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, No. 8, pp. 971-1018, 2010.
7. Noormohammadi, N., “Solution of Solid Mechanics Problems Using Equilibrated Basis Functions and Mesh-Free Methods”, *Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2015. (in Persian).
8. Boroomand, B. and Noormohammadi, N., “Weakly Equilibrated Basis Functions for Elasticity Problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, No. 12, pp. 1712-1727, 2013.
9. Bert, C. W., and Chen T. L. C., “Effect of Shear Deformation on Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Rectangular Plates”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No. 6, pp. 465-473, 1978.
10. Swaminathan, K., and Ragounadin, D., “Analytical Solutions Using a Higher-Order Refined Theory for the Static Analysis of Antisymmetric Angle-Ply Composite and Sandwich Plates”, *Composite Structures*, Vol. 64, No. 3, pp. 405-417, 2004.
11. Reddy, J. N., Khdeir, A. A., and Librescu, L., “Le´vy Type Solutions for Symmetrically Laminated Rectangular Plates Using First-Order Shear Deformation Theory”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, No. 3, pp. 740-742, 1987.
12. Khdeir, A. A., and Reddy, J. N., “Analytical Solutions of Refined Plate Theories of Cross-Ply Composite Laminates”, *Journal of Pressure Vessels Technology*, Vol. 113, No. 4, pp. 570-578, 1991.
13. Yuemei, L. and Rui, L., “Accurate Bending Analysis of Rectangular Plates with Two Adjacent Edges Free and the Others Clamped or Simply Supported Based on New Symplectic Approach”, *Applied Mathematical Modeling*, Vol.34, No.4, pp.856-865, 2010.
14. Urthaler, Y. and Reddy, J. N., “A Mixed Finite Element for the Nonlinear Bending Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT”,

Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 15, No. 5, pp. 355-354, 2008.
15. Bhar, A., Phoenix, S. S., and Satsangi, S. K., "Finite Element Analysis of Laminated Composite Stiffened Plates Using FSDT and HSDT: A Comparative Perspective", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 2, pp. 312-321, 2010.
16. Sladek, J., Sladek, V., Zhang, Ch., Krivacek, J., Wen, P. H., "Analysis of Orthotropic Thick Plates by Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 13, pp. 1830-1850, 2006.
17. Jaberzadeh, E., Azhari, M., and Boroomand, B., "Free Vibration of Moving Laminated Composite Plates with and Without Skew Roller Using the Element-Free Galerkin Method", *Iranian Journal of Science and Technology: Transactions of Civil Engineering,* Vol. 38, pp. 377-393, 2014.
18. Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "A Mesh-Free Method Using Exponential Basis Functions for Laminates Modeled by CLPT, FSDT and TSDT–Part I: Formulation." *Composite Structures*, Vol. 93, No. 12, pp. 3112-3119, 2011.
19. Azhari, F., Boroomand, B., and Shahbazi, M., "Exponential Basis Functions in the Solution of Laminated Plates Using a Higher-Order Zig–Zag Theory." *Composite Structures*, Vol. 105, pp. 398-407, 2013.
20. Motamedi Ghahfarokhi, A., "On Bending Problem of Laminated Composite Plates Using Exponential Basis Functions in Mesh-Less Local Form", *M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology*, 2013 (in Persian).
21. Noormohammadi, N., and Boroomand, B., "A Fictitious Domain Method Using Equilibrated Basis Functions for Harmonic and Bi-Harmonic Problems in Physics", *Journal of Computational Physics,* Vol. 272, pp. 189-217, 2014.
22. Dawe, D. J., and Roufaeil, O. L., "Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No. 3, pp. 345-359, 1980.
23. Yuhua, T., and Wang, X., "Buckling of Symmetrically Laminated Rectangular Plates Under Parabolic Edge Compressions", *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 53, No. 2, pp. 91-97, 2011.
24. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC press, 2003.

پیوست ۱

اجزای ماتریس عملگر معادله تعادل در رابطه (۱۰) مطـابق زیر هستند:

$$L_{۱۱}=\frac{\partial A_{۴۵}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+A_{۴۵}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial A_{۵۵}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+A_{۵۵}\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial A_{۴۴}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+A_{۴۴}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial A_{۴۵}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+A_{۴۵}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}$$

$$L_{۱۲}=\frac{\partial A_{۵۵}}{\partial x}+A_{۵۵}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial A_{۴۵}}{\partial y}+A_{۴۵}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{۱۳}=\frac{\partial A_{۴۵}}{\partial x}+A_{۴۵}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial A_{۴۴}}{\partial y}+A_{۴۴}\frac{\partial}{\partial y}\quad L_{۱۴}=L_{۱۵}=۰$$

$$L_{۲۱}=-A_{۴۵}\frac{\partial}{\partial y}-A_{۵۵}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{۲۲}=\frac{\partial D_{۱۱}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+D_{۱۱}\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial D_{۱۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+D_{۱۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial D_{۱۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+D_{۱۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial D_{۶۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+D_{۶۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}-A_{۵۵}$$

$$L_{۲۳}=\frac{\partial D_{۱۲}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+D_{۱۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial D_{۱۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+D_{۱۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial D_{۲۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+D_{۲۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial D_{۶۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+D_{۶۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y\partial x}-A_{۴۵}$$

$$L_{۲۴}=\frac{\partial B_{۱۱}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{۱۱}\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial B_{۱۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+B_{۱۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{۱۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+B_{۱۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{۶۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{۶۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}$$

$$L_{۲۵}=\frac{\partial B_{۱۲}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+B_{۱۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{۱۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{۱۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial B_{۲۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{۲۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial B_{۶۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+B_{۶۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y\partial x}$$

$$L_{۳۱}=-A_{۴۴}\frac{\partial}{\partial y}-A_{۴۵}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{۳۲}=\frac{\partial D_{۱۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+D_{۱۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial D_{۶۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+D_{۶۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial D_{۱۲}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+D_{۱۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial D_{۲۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+D_{۲۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}-A_{۴۵}$$

$$L_{۳۳}=\frac{\partial D_{۲۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+D_{۲۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial D_{۶۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+D_{۶۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial D_{۲۲}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+D_{۲۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial D_{۲۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+D_{۲۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y\partial x}-A_{۴۴}$$

$$L_{۳۴}=\frac{\partial B_{۱۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{۱۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial B_{۶۶}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+B_{۶۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{۱۲}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+B_{۱۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{۲۶}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{۲۶}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}$$

$$L_{35}=\frac{\partial B_{26}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial B_{22}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial B_{26}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

$$L_{41}=0$$

$$L_{42}=\frac{\partial B_{11}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial B_{16}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{16}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{66}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{43}=\frac{\partial B_{12}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+B_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{16}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial B_{26}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial B_{66}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

$$L_{44}=\frac{\partial A_{11}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A_{16}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial A_{16}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial A_{66}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{45}=\frac{\partial A_{12}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+A_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial A_{16}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A_{26}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial A_{66}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

$$L_{51}=0$$

$$L_{52}=\frac{\partial B_{16}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{12}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{26}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{53}=\frac{\partial B_{26}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial B_{22}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial B_{26}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

$$L_{54}=\frac{\partial A_{16}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A_{66}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial A_{12}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial A_{26}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{55}=\frac{\partial A_{26}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial A_{66}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A_{22}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial A_{26}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+A_{26}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

(پ- ۱)

پیوست ۲

به‌منظور بازسازی عملگر معادله، ابتدا با استفاده از ماتریس های معرفی شده در رابطه (۲۶)، ماتریس‌های مشابه زیر تشکیل می‌شوند. نکته بارز در روابط زیر، تغییر مؤلفه دوم ماتریس‌ها است.

$$\left(\mathbf{A}_{\mathrm{i}}\right)_{l,5m+1,p+1}=\left(\mathbf{A}_{\mathrm{ii}}\right)_{l,5m+2,p+1}=\left(\mathbf{A}_{\mathrm{iii}}\right)_{l,5m+3,p+1}=\left(\mathbf{A}_{\mathrm{iiii}}\right)_{l,5m+4,p+2}=\left(\mathbf{A}_{\mathrm{iiiii}}\right)_{l,5m+5,p+2}\qquad i=1,\ldots,5$$

(پ- ۲)

$$\left(\mathbf{B}_{\mathrm{i}}\right)_{k,5n+1,q+1}=\left(\mathbf{B}_{\mathrm{ii}}\right)_{k,5n+2,q+1}=\left(\mathbf{B}_{\mathrm{iii}}\right)_{k,5n+3,q+1}=\left(\mathbf{B}_{\mathrm{iiii}}\right)_{k,5n+4,q+2}=\left(\mathbf{B}_{\mathrm{iiiii}}\right)_{k,5n+5,q+2}\qquad i=1,\ldots,5$$

(پ- ۳)

عملگر معادله در قالب ماتریس کمکی زیر ساخته می‌شود. $[\mathbf{X}]_i$ بیانگر کلیه درایه‌های ماتریس سه اندیسی $\mathbf{X}$ است که مؤلفه نخست آن برابر i باشد (متناسب با مرکز وزنی واقع بر سطر یا ستون i ام).

$$\mathbf{A}_h=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\mathbf{L}_{ij}\ ,\ \ i,j=1,..,5$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{11}=&\left[\mathbf{A}_5\right]_l\mathbf{m}_x\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\left[\mathbf{B}_2\right]_k^T+\left[\mathbf{A}_2\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\left[\mathbf{B}_2\right]_k^T\\&+\left[\mathbf{A}_4\right]_l\mathbf{m}_x\overset{A}{\mathbf{C}}_{55}\left[\mathbf{B}_3\right]_k^T+\left[\mathbf{A}_1\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{55}\left[\mathbf{B}_3\right]_k^T\\&+\left[\mathbf{A}_3\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{44}\mathbf{m}_y\left[\mathbf{B}_4\right]_k^T+\left[\mathbf{A}_3\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{44}\left[\mathbf{B}_1\right]_k^T\\&+\left[\mathbf{A}_2\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\mathbf{m}_y\left[\mathbf{B}_5\right]_k^T+\left[\mathbf{A}_2\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\left[\mathbf{B}_2\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{12}=&\left[\mathbf{A}_5\right]_l\mathbf{m}_x\overset{A}{\mathbf{C}}_{55}\left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T+\left[\mathbf{A}_2\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{55}\left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T\\&+\left[\mathbf{A}_3\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\mathbf{m}_y\left[\mathbf{B}_{55}\right]_k^T+\left[\mathbf{A}_3\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{13}=&\left[\mathbf{A}_5\right]_l\mathbf{m}_x\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T+\left[\mathbf{A}_2\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T\\&+\left[\mathbf{A}_3\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{44}\mathbf{m}_y\left[\mathbf{B}_{555}\right]_k^T+\left[\mathbf{A}_3\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{44}\left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{21}=-\left[\mathbf{A}_{33}\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{45}\left[\mathbf{B}_2\right]_k^T-\left[\mathbf{A}_{22}\right]_l\overset{A}{\mathbf{C}}_{55}\left[\mathbf{B}_3\right]_k^T$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{22} =& \left[\mathbf{A}_{44}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{11}^{D} \left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{11}\right]_l \mathbf{C}_{11}^{D} \left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{55}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{D} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{D} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{D} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{55}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{D} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{D} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{44}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{D} \left[\mathbf{B}_{11}\right]_k^T \\ &- \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{55}^{A} \left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{23} =& \left[\mathbf{A}_{55}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{12}^{D} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{12}^{D} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{44}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{D} \left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{11}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{D} \left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{D} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{444}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{D} \left[\mathbf{B}_{111}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{D} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{555}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{D} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T \\ &- \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{45}^{A} \left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{24} =& \left[\mathbf{A}_{44}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{11}^{B} \left[\mathbf{B}_{3333}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{11}\right]_l \mathbf{C}_{11}^{B} \left[\mathbf{B}_{3333}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{55}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{5555}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{4444}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \left[\mathbf{B}_{1111}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{25} =& \left[\mathbf{A}_{55}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{12}^{B} \left[\mathbf{B}_{22222}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{12}^{B} \left[\mathbf{B}_{22222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{44}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{33333}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{11}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{33333}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{44444}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{33}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \left[\mathbf{B}_{11111}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{55555}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{22}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \left[\mathbf{B}_{22222}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{31} = -\left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{44}^{A} \left[\mathbf{B}_{2}\right]_k^T - \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{45}^{A} \left[\mathbf{B}_{3}\right]_k^T$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{32} =& \left[\mathbf{A}_{444}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{D} \left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{111}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{D} \left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{555}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{66}^{D} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{D} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{12}^{D} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{55}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{12}^{D} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{D} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{44}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{D} \left[\mathbf{B}_{11}\right]_k^T \\ &- \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{45}^{A} \left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{33} =& \left[\mathbf{A}_{555}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{26}^{D} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{D} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{444}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{66}^{D} \left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{111}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{D} \left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{22}^{D} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{444}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{22}^{D} \left[\mathbf{B}_{111}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{D} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{555}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{D} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T \\ &- \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{44}^{A} \left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{34} =& \left[\mathbf{A}_{444}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{3333}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{111}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{3333}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{555}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{66}^{B} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{12}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{5555}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{12}^{B} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{4444}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \left[\mathbf{B}_{1111}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{35} =& \left[\mathbf{A}_{555}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{26}^{B} \left[\mathbf{B}_{22222}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \left[\mathbf{B}_{22222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{444}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{66}^{B} \left[\mathbf{B}_{33333}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{111}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \left[\mathbf{B}_{33333}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{22}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{44444}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{333}\right]_l \mathbf{C}_{22}^{B} \left[\mathbf{B}_{11111}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{55555}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{222}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \left[\mathbf{B}_{22222}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{42} =& \left[\mathbf{A}_{4444}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{11}^{B} \left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{1111}\right]_l \mathbf{C}_{11}^{B} \left[\mathbf{B}_{33}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{5555}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{55}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{22}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{3333}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{44}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{3333}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \left[\mathbf{B}_{11}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{43} =& \left[\mathbf{A}_{5555}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{12}^{B} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{12}^{B} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{4444}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{1111}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{B} \left[\mathbf{B}_{333}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{3333}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{444}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{3333}\right]_l \mathbf{C}_{26}^{B} \left[\mathbf{B}_{111}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{555}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{B} \left[\mathbf{B}_{222}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{44} =& \left[\mathbf{A}_{4444}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{11}^{A} \left[\mathbf{B}_{3333}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{1111}\right]_l \mathbf{C}_{11}^{A} \left[\mathbf{B}_{3333}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{5555}\right]_l \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{16}^{A} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{A} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{A} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{5555}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{2222}\right]_l \mathbf{C}_{16}^{A} \left[\mathbf{B}_{2222}\right]_k^T \\ &+ \left[\mathbf{A}_{3333}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{A} \mathbf{m}_y \left[\mathbf{B}_{4444}\right]_k^T + \left[\mathbf{A}_{3333}\right]_l \mathbf{C}_{66}^{A} \left[\mathbf{B}_{1111}\right]_k^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۴۵} &= [\mathbf{A}_{۵۵۵۵}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۱۲}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۱۲}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۴۴۴۴}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۱۶}^{A} [\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}]_k^T + [\mathbf{A}_{۱۱۱۱}]_l\, \mathbf{C}_{۱۶}^{A} [\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{A} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۴۴۴۴۴}]_k^T + [\mathbf{A}_{۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{A} [\mathbf{B}_{۱۱۱۱۱}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۶۶}^{A} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۵۵۵۵۵}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۶۶}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}]_k^T \\ \mathbf{L}_{۵۲} &= [\mathbf{A}_{۴۴۴۴۴}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۱۶}^{B} [\mathbf{B}_{۳۳}]_k^T + [\mathbf{A}_{۱۱۱۱۱}]_l\, \mathbf{C}_{۱۶}^{B} [\mathbf{B}_{۳۳}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۵۵۵۵۵}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۶۶}^{B} [\mathbf{B}_{۲۲}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۶۶}^{B} [\mathbf{B}_{۲۲}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۱۲}^{B} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۵۵}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۱۲}^{B} [\mathbf{B}_{۲۲}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۳۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{B} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۴۴}]_k^T + [\mathbf{A}_{۳۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{B} [\mathbf{B}_{۱۱}]_k^T \\ \mathbf{L}_{۵۳} &= [\mathbf{A}_{۵۵۵۵۵}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۲۶}^{B} [\mathbf{B}_{۲۲۲}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{B} [\mathbf{B}_{۲۲۲}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۴۴۴۴۴}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۶۶}^{B} [\mathbf{B}_{۳۳۳}]_k^T + [\mathbf{A}_{۱۱۱۱۱}]_l\, \mathbf{C}_{۶۶}^{B} [\mathbf{B}_{۳۳۳}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۳۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۲}^{B} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۴۴۴}]_k^T + [\mathbf{A}_{۳۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۲}^{B} [\mathbf{B}_{۱۱۱}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{B} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۵۵۵}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{B} [\mathbf{B}_{۲۲۲}]_k^T \\ \mathbf{L}_{۵۴} &= [\mathbf{A}_{۴۴۴۴۴}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۱۶}^{A} [\mathbf{B}_{۳۳۳۳}]_k^T + [\mathbf{A}_{۱۱۱۱۱}]_l\, \mathbf{C}_{۱۶}^{A} [\mathbf{B}_{۳۳۳۳}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۵۵۵۵۵}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۶۶}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۶۶}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۱۲}^{A} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۵۵۵۵}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۱۲}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۳۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{A} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۴۴۴۴}]_k^T + [\mathbf{A}_{۳۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{A} [\mathbf{B}_{۱۱۱۱}]_k^T \\ \mathbf{L}_{۵۵} &= [\mathbf{A}_{۵۵۵۵۵}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۲۶}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l \\ &\mathbf{C}_{۲۶}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}]_k^T + [\mathbf{A}_{۴۴۴۴۴}]_l\, \mathbf{m}_x \mathbf{C}_{۶۶}^{A} [\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}]_k^T \\ &+ [\mathbf{A}_{۱۱۱۱۱}]_l\, \mathbf{C}_{۶۶}^{A} [\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}]_k^T + [\mathbf{A}_{۳۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۲}^{A} \mathbf{m}_y \\ &[\mathbf{B}_{۴۴۴۴۴}]_k^T + [\mathbf{A}_{۳۳۳۳۳}]_l\, \mathbf{C}_{۲۲}^{A} [\mathbf{B}_{۱۱۱۱۱}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l \\ &\mathbf{C}_{۲۶}^{A} \mathbf{m}_y [\mathbf{B}_{۵۵۵۵۵}]_k^T + [\mathbf{A}_{۲۲۲۲۲}]_l\, \mathbf{C}_{۲۶}^{A} [\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}]_k^T\end{aligned}$$

(پ- ۴)

پیوست ۳

انتگرال های مورد نیاز برای برآورد حل خصوصی مطابق زیر هستند. این مقادیر در ماتریس‌هایی سه اندیسی ذخیره شده‌اند.

$$\left(\mathbf{A}_{۱}\right)_{l,۵m+۱} = \frac{۲}{a}\frac{\partial^{۲} T_m(\xi)}{\partial \xi^{۲}}\bigg|_{\xi=\xi_l}$$
$$\left(\mathbf{B}_{۱}\right)_{k,۵n+۱} = \frac{۲}{b}\frac{\partial^{۲} T_n(\eta)}{\partial \eta^{۲}}\bigg|_{\eta=\eta_k}$$

(پ- ۵)

$$\left(\mathbf{A}_{۲}\right)_{l,۵m+۱} = \frac{\partial T_m(\xi)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=\xi_l}$$
$$\left(\mathbf{B}_{۲}\right)_{k,۵n+۱} = \frac{\partial T_n(\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\eta_k}$$

(پ- ۶)

$$\left(\mathbf{A}_{۳}\right)_{l,۵m+۱} = \frac{a}{۲} T_m(\xi)\Big|_{\xi=\xi_l}$$
$$\left(\mathbf{B}_{۳}\right)_{k,۵n+۱} = \frac{b}{۲} T_n(\eta)\Big|_{\eta=\eta_k}$$

(پ- ۷)

مشابه پیوست قبل، ماتریس‌هایی مشابه با موارد فوق نیز ساخته می‌شوند که در ساختار نهایی لازم هستند.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{A}_{i}\right)_{l,۵m+۱,p+۱} &= \left(\mathbf{A}_{ii}\right)_{l,۵m+۲,p+۱} = \left(\mathbf{A}_{iii}\right)_{l,۵m+۳,p+۱} = \\ &\left(\mathbf{A}_{iiii}\right)_{l,۵m+۴,p+۱} = \left(\mathbf{A}_{iiiii}\right)_{l,۵m+۵,p+۱}, \\ i &= ۱,۲,۳\end{aligned}$$

(پ- ۸)

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{B}_{i}\right)_{k,۵n+۱,q+۱} &= \left(\mathbf{B}_{ii}\right)_{k,۵n+۲,q+۱} = \left(\mathbf{B}_{iii}\right)_{k,۵n+۳,q+۱} = \\ &\left(\mathbf{B}_{iiii}\right)_{k,۵n+۴,q+۱} = \left(\mathbf{B}_{iiiii}\right)_{k,۵n+۵,q+۱}, \\ i &= ۱,۲,۳\end{aligned}$$

(پ- ۹)

در نهایت عملگر معادله در قالب ماتریس کمکی زیر ساخته می‌شود. $(\mathbf{X})_i$ بیانگر سطر i ام از ماتریس دو اندیسی $\mathbf{X}$ است (متناسب با مرکز وزنی واقع بر سطر یا ستون i ام از شبکه وزن).

$$\mathbf{A}_p = \sum_{i=۱}^{۵}\sum_{j=۱}^{۵} \mathbf{L}_{ij}\ ,\ i,j = ۱,..,۵$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۱۱} &= A_{۴۵,x}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^T\left(\mathbf{B}_{۲}\right) + A_{۴۵}\left(\mathbf{A}_{۲}\right)^T\left(\mathbf{B}_{۲}\right) \\ &+ A_{۵۵,x}\left(\mathbf{A}_{۲}\right)^T\left(\mathbf{B}_{۳}\right) + A_{۵۵}\left(\mathbf{A}_{۱}\right)^T\left(\mathbf{B}_{۳}\right) \\ &+ A_{۴۴,y}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^T\left(\mathbf{B}_{۲}\right) + A_{۴۴}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^T\left(\mathbf{B}_{۱}\right) \\ &+ A_{۴۵,y}\left(\mathbf{A}_{۲}\right)^T\left(\mathbf{B}_{۳}\right) + A_{۴۵}\left(\mathbf{A}_{۲}\right)^T\left(\mathbf{B}_{۲}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۱۲} &= A_{۵۵,x}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)+A_{۵۵}\left(\mathbf{A}_{۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)\\ &\quad +A_{۴۵,y}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)+A_{۴۵}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۱۳} &= A_{۴۵,x}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)+A_{۴۵}\left(\mathbf{A}_{۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)\\ &\quad +A_{۴۴,y}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)+A_{۴۴}\left(\mathbf{A}_{۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{۲۱} = -A_{۴۵}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲}\right)-A_{۵۵}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۲۲} &= D_{۱۱,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)+D_{۱۱}\left(\mathbf{A}_{۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)\\ &\quad +D_{۱۶,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)+D_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)\\ &\quad +D_{۱۶,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)+D_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)\\ &\quad +D_{۶۶,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)+D_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱}\right)\\ &\quad -A_{۵۵}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۲۳} &= D_{۱۲,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)+D_{۱۲}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)\\ &\quad +D_{۱۶,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)+D_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)\\ &\quad +D_{۲۶,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)+D_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱۱}\right)\\ &\quad +D_{۶۶,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)+D_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)\\ &\quad -A_{۴۵}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۲۴} &= B_{۱۱,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳}\right)+B_{۱۱}\left(\mathbf{A}_{۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳}\right)\\ &\quad +B_{۱۶,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲}\right)+B_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۱۶,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳}\right)+B_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۶۶,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲}\right)+B_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱۱۱}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۲۵} &= B_{۱۲,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}\right)+B_{۱۲}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۱۶,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}\right)+B_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}\right)\\ &\quad +B_{۲۶,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}\right)+B_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱۱۱۱}\right)\\ &\quad +B_{۶۶,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}\right)+B_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}\right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{۳۱} = -A_{۴۴}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲}\right)-A_{۴۵}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۳۲} &= D_{۱۶,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)+D_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۱۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)\\ &\quad +D_{۶۶,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)+D_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)\\ &\quad +D_{۱۲,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)+D_{۱۲}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)\\ &\quad +D_{۲۶,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)+D_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱}\right)\\ &\quad -A_{۴۵}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۳۳} &= D_{۲۶,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)+D_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)\\ &\quad +D_{۶۶,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)+D_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۱۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)\\ &\quad +D_{۲۲,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)+D_{۲۲}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱۱}\right)\\ &\quad +D_{۲۶,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)+D_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)\\ &\quad -A_{۴۴}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۳۴} &= B_{۱۶,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳}\right)+B_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۱۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳}\right)\\ &\quad +B_{۶۶,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲}\right)+B_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۱۲,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳}\right)+B_{۱۲}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۲۶,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲}\right)+B_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱۱۱}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۳۵} &= B_{۲۶,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}\right)+B_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۶۶,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}\right)+B_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۱۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}\right)\\ &\quad +B_{۲۲,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}\right)+B_{۲۲}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱۱۱۱}\right)\\ &\quad +B_{۲۶,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳۳۳}\right)+B_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲۲۲}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۴۲} &= B_{۱۱,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)+B_{۱۱}\left(\mathbf{A}_{۱۱۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)\\ &\quad +B_{۱۶,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)+B_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۱۶,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳}\right)+B_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۶۶,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲}\right)+B_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{۴۳} &= B_{۱۲,x}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)+B_{۱۲}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)\\ &\quad +B_{۱۶,x}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)+B_{۱۶}\left(\mathbf{A}_{۱۱۱۱}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)\\ &\quad +B_{۲۶,y}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)+B_{۲۶}\left(\mathbf{A}_{۳۳۳۳}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۱۱۱}\right)\\ &\quad +D_{۶۶,y}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۳۳۳}\right)+D_{۶۶}\left(\mathbf{A}_{۲۲۲۲}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{۲۲۲}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{44} = {} & A_{11,x}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{3333}\right)+A_{11}\left(\mathbf{A}_{1111}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{3333}\right) \\
& +A_{16,x}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{3333}\right)+A_{16}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{2222}\right) \\
& +A_{16,y}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{3333}\right)+A_{16}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{2222}\right) \\
& +A_{66,y}\left(\mathbf{A}_{3333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{2222}\right)+A_{66}\left(\mathbf{A}_{3333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{1111}\right) \\
\mathbf{L}_{45} = {} & A_{12,x}\left(\mathbf{A}_{3333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22222}\right)+A_{12}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22222}\right) \\
& +A_{16,x}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33333}\right)+A_{16}\left(\mathbf{A}_{1111}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33333}\right) \\
& +A_{26,y}\left(\mathbf{A}_{3333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22222}\right)+A_{26}\left(\mathbf{A}_{3333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{11111}\right) \\
& +A_{66,y}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33333}\right)+A_{66}\left(\mathbf{A}_{2222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22222}\right) \\
\mathbf{L}_{52} = {} & B_{16,x}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33}\right)+B_{16}\left(\mathbf{A}_{11111}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33}\right) \\
& +B_{66,x}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22}\right)+B_{66}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22}\right) \\
& +B_{12,y}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33}\right)+B_{12}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22}\right) \\
& +B_{26,y}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22}\right)+B_{26}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{11}\right) \\
\mathbf{L}_{53} = {} & B_{26,x}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{222}\right)+B_{26}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{222}\right) \\
& +B_{66,x}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{333}\right)+B_{66}\left(\mathbf{A}_{11111}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{333}\right) \\
& +B_{22,y}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{222}\right)+B_{22}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{111}\right) \\
& +B_{26,y}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{333}\right)+B_{26}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{222}\right) \\
\mathbf{L}_{54} = {} & A_{16,x}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{3333}\right)+A_{16}\left(\mathbf{A}_{11111}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{3333}\right) \\
& +A_{66,x}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{2222}\right)+A_{66}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{2222}\right) \\
& +A_{12,y}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{3333}\right)+A_{12}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{2222}\right) \\
& +A_{26,y}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{2222}\right)+A_{26}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{1111}\right) \\
\mathbf{L}_{55} = {} & A_{26,x}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22222}\right)+A_{26}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22222}\right) \\
& +A_{66,x}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33333}\right)+A_{66}\left(\mathbf{A}_{11111}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33333}\right) \\
& +A_{22,y}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22222}\right)+A_{22}\left(\mathbf{A}_{33333}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{11111}\right) \\
& +A_{26,y}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{33333}\right)+A_{26}\left(\mathbf{A}_{22222}\right)^{T}\left(\mathbf{B}_{22222}\right)
\end{aligned}
$$

(پ- ۱)

دسته‌های پنج‌تایی از سطرهای ماتریس فوق به‌ترتیب در کنار یکدیگر قرار گرفته و پنج سطر از ماتریس ضرایب نهایی $\mathbf{A}_{p}$ را خواهند ساخت. با حل دستگاه مربوطه، ضرایب لازم $\mathbf{c}_{p}$ به‌دست می‌آیند.