نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱، ص. ۵۹-۳۷

مقاله پژوهشی

آنالیز ناپایداری دینامیکی ارتعاشات عرضی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی تحت جرم‌های متحرک

مهران قمشی بزرگ

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی جندی شاپور

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۵/۱۷ – دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۸/۲۳)

چکیده– در این مقاله، ناپایداری دینامیکی ناشی از تشدید پارامتریک[1] و تشدید خارجی[2] ورق‌های مدرج تابعی[3] نسبتاً ضخیم تحت عبور پی‌درپی جرم‌های متحرک بررسی شده است. فرض می‌شود که مدول یانگ و جرم واحد حجم ورق به‌طور پیوسته در سرتاسر ضخامت ورق تغییر کرده و از یک تابع توانی از یک کسر حجمی[4] تبعیت می‌کنند. ورق‌های مستطیلی درنظرگرفته شده دارای دو تکیه‌گاه ساده در دو لبه متقابل به‌هم هستند در حالی که همه ترکیب‌های ممکن دیگر از شرایط مرزی آزاد، تکیه‌گاه ساده و گیردار برای دو لبه دیگر می‌تواند درنظرگرفته شود. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کوپل شده حاکم بر ورق مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با درنظرگرفتن اثرات اینرسی دورانی و تنش‌های برشی عرضی استخراج شده و همه مؤلفه‌های اینرسی جرم متحرک در فرمول‌بندی دینامیکی لحاظ شده است. با استفاده از روش گالرکین[5]، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب وابسته به زمان تبدیل شده‌اند. از روش نیمه‌تحلیلی آنالیز هموتوپی[6] برای به‌دست آوردن نواحی پایدار و ناپایدار و منحنی‌های تشدید خارجی در فضای پارامترهای سیستم استفاده شده است. اثر مقادیر اندیس توان[7] کسر حجمی، نسبت ضخامت به طول ورق و ترکیب‌های متفاوت شرایط مرزی روی پایداری دینامیکی سیستم بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که کاهش اندیس توان کسر حجمی، افزایش نسبت ضخامت به طول ورق و درجه بالاتر قیود اعمال شده به دو لبه دیگر ورق (به‌ترتیب آزاد، تکیه‌گاه ساده و گیردار) سبب انتقال ناحیه ناپایدار و منحنی‌های تشدید به بالای صفحه پارامترها شده و از نقطه‌نظر فیزیکی، سیستم پایدارتر می‌شود. برای تایید نتایج روش آنالیز هموتوپی علاوه‌بر استفاده از شبیه‌سازی عددی جابجایی نقطه میانی ورق، از تئوری فلاکه[8] نیز استفاده شده است. همچنین در یک حالت خاص، نتایج این مطالعه با نتایج مطالعه دیگر مقایسه و تایید شده است.

واژه‌های کلیدی: ورق مدرج تابعی، جرم متحرک، پایداری دینامیکی، روش آنالیز هموتوپی.

Dynamic Instability Analysis of Transverse Vibrations of Functionally Graded Rectangular Plates under Moving Masses

M. Ghomeshi Bozorg

Department of Mechanical Engineering, Jundi Shapur University of Technology, Dezful, Iran.

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی:m.ghomeshibozorg@jsu.ac.ir

Abstract: ***In this paper, dynamic instability due to parametric and external resonances of moderately thick functionally graded rectangular plates, under successive moving masses, is examined. Plate mass per unit volume and Young's modulus are assumed to vary continuously through the thickness of the plate and obey a power-law distribution of the volume fraction of the constituent. The considered rectangular plates have two opposite simply supported edges while all possible combinations of free, simply supported and clamped boundary conditions are applied to the other two edges. The governing coupled partial differential equations of the plate are derived based on the first-order shear deformation theory with consideration of the rotational inertial effects and the transverse shear stresses. All inertial components of the moving masses are considered in the dynamic formulation. Using the Galerkin procedure, the partial differential equations are transformed into a set of ordinary differential equations with time-dependent coefficients. The Homotopy Analysis Method (HAM) is implemented as a semi-analytical method to obtain stable and unstable zones and external resonance curves in a parameters space. The effects of the index of volume fraction, thickness to length ratio, and different combinations of the boundary conditions on the dynamic stability of the system are also investigated. The results indicate that decreasing the index of volume fraction, increasing thickness to length ratio, and higher degree of edge constraints (respectively from free to simply-supported to clamped) applied to the other two edges of the plate shift up the instability region and resonance curves in the parameters plane and, from a physical point of view, the system becomes more stable. In addition to using numerical simulations of the plate midpoint displacement, Floquet theory is also employed to validate the HAM results. Finally, the results of this study, in a particular case, are compared and validated with the results of other works.***

Keywords: ***Functionally graded plate, Moving mass, Dynamic stability, Homotopy analysis method.***

فهرست علائم

a	طول ورق (شکل ۱) (m)	V	سرعت جسم متحرک ($m.s^{-1}$)
$A_j(t)$	تابع زمانی متناظر با شکل مود j ام	x_{M1}, x_{M2}	موقعیت جرم متحرک (شکل ۱) (m)
$\bar{A}_i$	حل معادله رتبه i ام هموتوپی	ρ	چگالی (۲) ($Kg.m^{-3}$)
b	عرض ورق (شکل ۱) (m)	φ_1, φ_2	جابجایی زاویه‌ای (۳) (rad)
E	مدول یانگ ($N.m^{-2}$)	φ_3	جابجایی خطی (۳) (m)
g	شتاب جاذبه زمین ($m.s^{-2}$)	σ	تنش (۴) ($N.m^{-2}$)
h	ضخامت ورق (شکل ۱) (m)	ν	ضریب پواسون (۴)
I_1	جرم واحد سطح ورق (۷) ($Kg.m^{-2}$)	$\tilde{\varphi}_{1j}, \tilde{\varphi}_{2j}, \tilde{\varphi}_{3j}, ...$	توابع شکل ورق (۱۰)
I_2	گشتاور اینرسی واحد سطح ورق (۷) (Kg)	η	نسبت طول به عرض ورق (۱۲)
k	ضریب اصلاح برش (۴)	δ	نسبت ضخامت به طول ورق (۱۲)
M	جرم جسم متحرک (شکل ۱)	ω_j	j امین فرکانس ارتعاشات آزاد ورق (۱۲)
M_{11}, M_{22}	مؤلفه‌های گشتاور خمشی (۴) (N.m)	δ_{ij}	دلتای کرانکر (۲۸)
M_{12}	گشتاور پیچشی (۴) (N.m)	$\bar{\beta}_1$	پارامتر بدون بعد فرکانس پایه (جدول۲)
p	اندیس توان کسر حجمی (۱)	$\bar{\delta}$	دلتای دیراک (۳۴)
P	نیروی وارد بر واحد سطح ورق (۷) ($N.m^{-2}$)	α	پارامتر بدون بعد جرم (۳۸)
P_M	نیروی جرم متحرک به ورق (۳۱) (N)	γ	پارامتر بدون بعد سرعت (۳۸)
Q_1, Q_2	مؤلفه‌های نیروی برشی (۴) (N)	τ	پارامتر بدون بعد زمان (۴۶)
r	پارامتر مصنوعی	$\hat{\lambda}$	پارامتر کمکی (۴۹)
t	زمان (sec)	λ_i	i امین ضریب بسط (۵۱)
$U_1, U_2, U_3, ...$	مؤلفه‌های جابجایی (m)	ω	فرکانس پاسخ (۵۱)

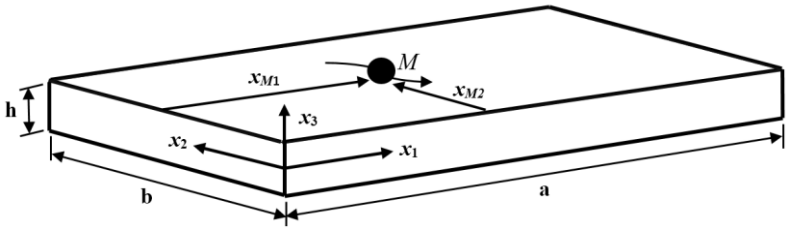
۱- مقدمه

ورق‌ها در صنایع مختلف دارای کاربردهای فراوانی هستند. بنابراین برای طراحان شناخت رفتار دینامیکی ورق‌ها یک نیاز ضروری است. در این میان به‌دلیل کاهش تمرکز تنش و تنش‌های باقیمانده در ورق‌هایی از جنس مواد مدرج تابعی، استفاده از آنها به‌طور روزافزونی در صنایع مختلف مورد توجه قرارگرفته است.

در مقایسه با تعداد مطالعاتی که در زمینه ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های مدرج تابعی انجام شده است، تعداد محدودی از آنها به مسئله پاسخ دینامیکی ورق مدرج تابعی تحت عبور بار متحرک پرداخته‌اند. ملک‌زاده و همکاران با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول[۹] و به‌کارگیری اصل هامیلتون[۱۰] و روش المان محدود، پاسخ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارهای حرارتی – مکانیکی متحرک و بارهای متحرک نامتقارن را مورد مطالعه قرار دادند [۱ و۲]. سونگ و همکاران فقط با درنظر گرفتن مؤلفه اینرسی حاصل از شتاب قائم جرم متحرک، با استفاده از تئوری ورق کلاسیک[۱۱] و روش حل ریلی – ریتز بهبودیافته[۱۲] برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی ورق مدرج تابعی تحت بار متحرک اقدام کردند [۳]. یوسف‌زاده و همکاران با صرف‌نظر کردن از اینرسی جرم متحرک و مدل نمودن آن به‌صورت یک نیروی متحرک، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، ارتعاشات عرضی ورق مستطیلی از جنس مدرج تابعی در تماس با سیال غیرقابل تراکم تحت بار متحرک را مطالعه کردند [۴]. در هیچ یک از این مطالعات اثر تمام مؤلفه‌های اینرسی جرم متحرک در تعیین پاسخ دینامیکی سیستم لحاظ نشده است.

یکی از جنبه‌های مهم در مسئله یک عضو الاستیک تحت عبور جسم متحرک، شناخت شرایطی است که سبب بروز ناپایداری دینامیکی در عضو الاستیک می‌شود. لحاظ تمام مؤلفه‌های اینرسی جرم‌های متحرک و عبور متناوب آنها از روی یک عضو الاستیک سبب می‌شود که ضرایب معادله حاکم بر ارتعاشات سیستم به‌طور متناوب با زمان تغییر کرده و این نوع سیستم‌ها جزء سیستم‌های متغیر با زمان دسته‌بندی شوند. تغییر ضرایب با زمان نقش تحریک پارامتریک را برای سیستم ایفا می‌کند که می‌تواند در شرایط معینی سبب ناپایداری دینامیکی و یا به اصطلاح تشدید پارامتریک در سیستم شود. در این نوع سیستم‌ها، در شرایط دیگری، می‌تواند پاسخ فزاینده ایجاد شود به این ترتیب که اگر در معادلات حاکم، فرکانس عبارت تحریک کننده با فرکانس پاسخ همگن سیستم برابر شود شرایط برای رشد فزاینده پاسخ دینامیکی سیستم ایجاد می‌شود. به این حالت، وقوع تشدید خارجی در سیستم گفته می‌شود.

تشدید پارامتریک در سیستم‌های تحت عبور جرم متحرک توسط محققان متعددی مورد توجه قرار گرفته است. نلسون و کانوور [۵] و ماکرتیچ [۶] برای تیر با تکیه‌گاه ساده و تحت اثر عبور جرم‌های متحرک، با استفاده از روش تئوری فلاکه نواحی پایدار و ناپایدار را در فضای پارامترهای سیستم تعیین کردند. آلدریم و باز با استفاده از تئوری تحریک تکانشی پایداری تیر تحت اثر حرکت متناوب جرم‌های متحرک را مطالعه کردند [۷]. رائو [۸] برای بررسی پایداری دینامیکی تیر اولر – برنولی تحت بار متحرک و پیرمرادیان و همکاران [۹] در بررسی اثر تغییر شکل‌های بزرگ بوجود آمده در تیر تحت عبور جرم متحرک روی نتایج آنالیز پایداری، از روش مقیاس‌های چندگانه جهت تعیین شرایط وقوع ناپایداری استفاده کردند. ترکان و همکاران پایداری دینامیکی ورق مستطیلی نازک با تکیه‌گاه ساده تحت عبور پی در پی جرم‌های متحرک را با استفاده از روش پارامترهای فشرده مطالعه کردند [۱۰]. آنها در دو مطالعه دیگر با استفاده از روش هارمونیک بالانس نموی برای سه حالت حرکت متوالی جرم‌های متحرک روی خط راست، خط مورب و مسیر دایره‌ای روی یک ورق نسبتاً ضخیم، نواحی پایدار و ناپایدار را در صفحه پارامترهای جسم متحرک تعیین کردند [۱۱ و ۱۲]. مطالعات انجام شده توسط قمشی بزرگ و همکاران [۱۳]، در مسئله تیر تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک با استفاده از روش اختلالی هموتوپی،[۱۳] و حسن‌آبادی و همکاران [۱۴]، در مسئله ورق تحت عبور متوالی جرم متحرک با استفاده از روش آنالیز مودال بهبود یافته[۱۴] و تعیین ماکزیمم فاکتور بزرگنمایی



شکل ۱- ورق مدرج تابعی تحت عبور جرم متحرک

دینامیکی[۱۵] ورق، از جمله مطالعات محدودی هستند که با درنظرگرفتن مشخصه متغیر با زمان سیستم‌های الاستیک تحت جرم متحرک، شرایط بروز تشدید خارجی را نیز مورد توجه قرار داده‌اند.

بر اساس بهترین دانش نگارنده تاکنون شرایط بروز ناپایداری دینامیکی ناشی از تشدید پارامتریک و تشدید خارجی در ورق مدرج تابعی تحت عبور جرم‌های متحرک بررسی نشده است. در این مطالعه با درنظر گرفتن تمام مؤلفه‌های اینرسی جرم متحرک و با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادله حاکم بر ارتعاشات یک ورق مدرج تابعی مستطیلی نسبتاً ضخیم تحت عبور متوالی جرم‌های تعیین شده و سپس با استفاده از روش آنالیز هموتوپی شرایط ناپایداری دینامیکی سیستم بررسی می‌شود. پس از آن نتایج از طریق تعیین ضابطه مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و ضابطه منحنی‌های مکان هندسی شرایط بروز تشدید در صفحه پارامترها تعیین می‌شوند. به این ترتیب با تعیین شرایط وقوع ناپایداری و بروز تشدید در این سیستم سعی می‌شود تا مطالعات گذشته از این جنبه تکمیل شده و توانایی روش آنالیز هموتوپی در تعیین شرایط پایداری دینامیکی این سیستم نیز نشان داده شود. ویژگی روش آنالیز هموتوپی نسبت به روش اختلالی هموتوپی این است که در روش آنالیز هموتوپی از طریق تامین شرایط لازم برای تضمین همگرایی حل، دقت نتایج افزایش می‌یابد [۱۵]. به‌منظور تکمیل بررسی، اثر مقدار اندیس توان کسر حجمی، که مبین نحوه توزیع مواد در جهت ضخامت ورق مدرج تابعی است، اثر نسبت ضخامت به‌طول ورق و اثر شرایط مرزی ورق روی شرایط پایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه برای تایید نتایج به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی، مقایسه و شبیه‌سازی‌های عددی لازم انجام شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش آنالیز هموتوپی با دقت مناسبی شرایط پایداری سیستم ورق مدرج تابعی – جرم متحرک را پیش‌بینی کرده و می‌تواند به‌عنوان روشی مناسب برای آنالیز پایداری دینامیکی این سیستم درنظرگرفته شود.

۲- معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق مدرج تابعی

شکل (۱) یک ورق مستطیلی مدرج تابعی نسبتاً ضخیم و ایزوتروپیک[۱۶] به‌طول a، عرض b و ضخامت h تحت عبور جرم متحرک به جرم M را نشان می‌دهد.

سیستم مختصات کارتزین (x_1, x_2, x_3) برای بیان روابط ریاضی استفاده می‌شود. صفحه x_1x_2 در سطح میانی ورق تغییر شکل نیافته قرار داده شده است و مختصات (x_{M1}, x_{M2}) موقعیت لحظه‌ای جرم متحرک روی صفحه را نشان می‌دهد. ورق در امتداد دو لبه متقابل و موازی $x_1 = 0$ و $x_1 = a$ دارای تکیه‌گاه ساده است در حالی که در دو لبه $x_2 = 0$ و $x_2 = b$ ممکن است دارای تکیه‌گاه ساده، آزاد و یا گیردار باشد. ورق مدرج تابعی به‌صورت مخلوطی از یک فلز و یک سرامیک درنظرگرفته شده که خواص ماده به‌صورت پیوسته در جهت ضخامت تغییر می‌کند. بر این اساس به‌صورت زیر یک تابع کسر حجمی برای بیان تغییر مدول یانگ و چگالی ورق درنظرگرفته شده است:

$$E(x_3) = E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h}\right)^p \qquad (1)$$

$$\rho(x_3) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h}\right)^p \qquad (2)$$

در این روابط زیر نویس m و c به‌ترتیب مشخصه فلز و سرامیک را مشخص می‌کنند و p اندیس توان کسر حجمی است که فقط مقادیر مثبت را می‌تواند بگیرد. از روابط (۱) و (۲) ملاحظه می‌شود که مستقل از مقدار p، در صفحه پایینی $x_3 = -\frac{h}{2}$ ورق از فولاد خالص و در صفحه بالایی $x_3 = \frac{h}{2}$ ورق از سرامیک خالص تشکیل شده است و به‌ازای $p = 0$ ورق کاملاً از سرامیک و به‌ازای $p \to \infty$ ورق کاملاً از فلز تشکیل یافته است.

جابجایی نقاط ورق در امتداد محورهای x_1 و x_2 به‌ترتیب با U_1 و U_2 و جابجایی در جهت عمود بر سطح میانی تغییر شکل نیافته به‌وسیله U_3 نشان داده می‌شود. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در دستگاه مختصات کارتزین (x_1, x_2, x_3) مؤلفه‌های جابجایی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} U_1 &= -x_3\varphi_1(x_1, x_2, t), \\ U_2 &= -x_3\varphi_2(x_1, x_2, t), \\ U_3 &= \varphi_3(x_1, x_2, t) \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن φ_1 و φ_2 به‌ترتیب جابجایی‌های زاویه‌ای حول محور x_2 و x_1 در صفحه میانی هستند و φ_3 جابجایی عرضی است و t متغیر زمان است. با فرض کوچک بودن جابجایی‌ها و با استفاده از روابط کرنش – جابجایی و روابط تنش – کرنش، برآیند گشتاورهای خمشی، گشتاورهای پیچشی و نیروهای برشی عرضی در واحد طول برای ورق مستطیلی مدرج تابعی بر حسب جابجایی‌های φ_1، φ_2 و φ_3 به‌صورت زیر حاصل می‌شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 = -D_2\left(\varphi_{1,1} + \nu\varphi_{2,2}\right), \\ M_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 = -D_2\left(\varphi_{2,2} + \nu\varphi_{1,1}\right), \\ M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3 = -\frac{D_2(1-\nu)}{2}\left(\varphi_{1,2} + \nu\varphi_{2,1}\right), \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 = -\frac{D_1(1-\nu)k^2}{2}\left(\varphi_1 - \nu\varphi_{3,1}\right), \\ Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 = -\frac{D_1(1-\nu)k^2}{2}\left(\varphi_2 - \nu\varphi_{3,2}\right) \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن $(.)_{,i} = \frac{\partial(.)}{\partial x_i}$ و ν ضریب پواسون[۱۷] است که مقدار آن ثابت و برابر ۰/۳ درنظرگرفته می‌شود. پارامترهای D_1 و D_2 نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu^2} dx_3, \\ D_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu^2} x_3^2 dx_3 \end{aligned} \tag{۵}$$

و در روابط نیروهای برشی Q_1 و Q_2 برای ورق مدرج تابعی موردنظر، ضریب اصلاح برش[۱۸] k^2 به‌صورت زیر تعیین می‌شود [۱۷]:

$$\begin{aligned} k^2 = \frac{5}{6} &+ 0/75(e^{-0/025p} - e^{-2p})(\frac{10h}{a} - 2) - \\ &0/64(e^{-0/06p} - e^{-p})(\frac{10h}{a} - 1) \end{aligned} \tag{۶}$$

با استفاده از معادله ناویر[۱۹] در سیستم مختصات دکارتی و پس از انجام عملیات ریاضی لازم، معادلات حاکم بر ورق مستطیلی مدرج تابعی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند [۱۶]:

$$\begin{aligned} &M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1 = -I_2\ddot{\varphi}_1, \\ &M_{12,1} + M_{22,2} - Q_2 = -I_2\ddot{\varphi}_2, \\ &Q_{1,1} + Q_{2,2} - P = I_1\ddot{\varphi}_3 \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن P نیروی عرضی عمود بر واحد سطح ورق و یک نقطه در بالای هر پارامتر مبین مشتق جزئی آن پارامتر نسبت به زمان t است و عبارات اینرسی I_1 و I_2 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_3) dx_3, \\ I_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_3) x_3^2 dx_3 \end{aligned} \tag{۸}$$

از جای‌گذاری روابط (۴) در معادلات (۷)، معادلات حاکم بر حرکت ورق بر حسب مؤلفه‌های میدان جابجایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\frac{D_2(1-\nu)}{2}\nabla^2\varphi_1 + \frac{D_2(1+\nu)}{2}\left(\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}\right)_{,1} - \\ &\frac{D_1k^2(1-\nu)}{2}\left(\varphi_1 - \varphi_{3,1}\right) = I_2\ddot{\varphi}_1, \\ &\frac{D_2(1-\nu)}{2}\nabla^2\varphi_2 + \frac{D_2(1+\nu)}{2}\left(\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}\right)_{,2} - \\ &\frac{D_1k^2(1-\nu)}{2}\left(\varphi_2 - \varphi_{3,2}\right) = I_2\ddot{\varphi}_2, \\ &\frac{D_1k^2(1-\nu)}{2}\left(\nabla^2\varphi_3 - \varphi_{1,1} - \varphi_{2,2}\right) - P = I_1\ddot{\varphi}_3 \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن ∇^2 نماد عملگر لاپلاسین است.

۳- گسسته‌سازی معادلات حاکم

برای حل معادلات حاکم، از روش گالرکین برای تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای[۲۰] به معادلات دفرانسیل معمولی[۲۱] استفاده می‌شود. برای این منظور توابع φ_1، φ_2 و φ_3 مطابق روابط زیر به دامنه زمان و مکان جداسازی می‌شوند:

$$\varphi_1(x_1,x_2,t)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{1j}(X_1,X_2)A_j(t),$$
$$\varphi_2(x_1,x_2,t)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{2j}(X_1,X_2)A_j(t), \qquad (10)$$
$$\varphi_3(x_1,x_2,t)=\sum_{j=1}^{n}a\tilde{\varphi}_{3j}(X_1,X_2)A_j(t)$$

که در این روابط $\tilde{\varphi}_{1j}$، $\tilde{\varphi}_{2j}$ و $\tilde{\varphi}_{3j}$ توابع شکل j ام، $A_j(t)$ تابع زمانی متناظر با شکل مود j ام و X_1 و X_2 پارامترهای بدون بعدی هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$X_1=\frac{x_1}{a},\ X_2=\frac{x_2}{b} \qquad (11)$$

به‌منظور عمومیت بخشیدن به معادلات و تحلیل آنها، پارامترهای بدون بعد زیر تعریف می‌شوند

$$\eta=\frac{a}{b},\ \delta=\frac{h}{a},\ \beta_{1j}=\omega_j\sqrt{\frac{I_2}{D_1}},$$
$$\beta_{2j}=a\omega_j\sqrt{\frac{I_1}{D_1}},\ \varepsilon=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \qquad (12)$$

در این روابط ω_j نماد j امین فرکانس ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی است. با جای‌گذاری روابط (۱۰) در معادلات حاکم (۹)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\begin{array}{l}\left(\tilde{\varphi}_{1j,11}+\eta^2\tilde{\varphi}_{1j,22}\right)+\frac{\nu_2}{\nu_1}\left(\tilde{\varphi}_{1j,11}+\eta\tilde{\varphi}_{2j,12}\right)-\\ \frac{D_1k^2a^2}{D_2}\left(\tilde{\varphi}_{1j}-\tilde{\varphi}_{3j,1}\right)\end{array}\right]A_j(t)=$$
$$\frac{I_2a^2}{D_2\nu_1}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{1j}\ddot{A}_j(t),$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left[\begin{array}{l}\left(\tilde{\varphi}_{2j,11}+\eta^2\tilde{\varphi}_{2j,22}\right)+\frac{\nu_2}{\nu_1}\eta\left(\tilde{\varphi}_{1j,12}+\eta\tilde{\varphi}_{2j,22}\right)-\\ \frac{D_1k^2a^2}{D_2}\left(\tilde{\varphi}_{2j}-\eta\tilde{\varphi}_{3j,2}\right)\end{array}\right]A_j(t)=$$
$$\frac{I_2a^2}{D_2\nu_1}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{2j}\ddot{A}_j(t),$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\tilde{\varphi}_{3j,11}+\eta^2\tilde{\varphi}_{3j,22}\right)-\left(\tilde{\varphi}_{1j,1}+\eta\tilde{\varphi}_{2j,2}\right)\right]A_j(t)-$$
$$\frac{a}{D_1k^2\nu_1}P=\frac{I_1a^2}{D_1k^2\nu_1}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{3j}\ddot{A}_j(t) \qquad (13)$$

که در آن $(.)_{,i}=\frac{\partial(.)}{\partial X_i}$، $(.)_{,ij}=\frac{\partial^2(.)}{\partial X_i\partial X_j}$، $\nu_1=\frac{1-\nu}{2}$ و $\nu_2=\frac{1+\nu}{2}$ است.

۳-۱- آنالیز ارتعاشات آزاد

برای دستیابی به شکل مودهای ارتعاشی، ضرورت دارد که آنالیز ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی مورد بررسی قرارگیرد. حل هارمونیکی ارتعاشات آزاد ورق برای جابجایی عرضی φ_3 و جابجایی زاویه‌ای φ_1 و φ_2 به‌صورت زیر درنظرگرفته می‌شود:

$$\varphi_1(x_1,x_2,t)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{1j}(X_1,X_2)e^{i\omega_jt}, \qquad (14)$$
$$\varphi_2(x_1,x_2,t)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{2j}(X_1,X_2)e^{i\omega_jt}, \qquad (15)$$
$$\varphi_3(x_1,x_2,t)=\sum_{j=1}^{n}a\tilde{\varphi}_{3j}(X_1,X_2)e^{i\omega_jt} \qquad (16)$$

که در آن $i=\sqrt{-1}$ است. از جای‌گذاری دسته روابط (۱۴) تا (۱۶) و $P=0$ در معادلات (۹)، سه معادله کوپله زیر برای ارتعاشات آزاد ورق حاصل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\begin{array}{l}\left(\tilde{\varphi}_{1j,11}+\eta^2\tilde{\varphi}_{1j,22}\right)+\frac{\nu_2}{\nu_1}\left(\tilde{\varphi}_{1j,11}+\eta\tilde{\varphi}_{2j,12}\right)-\\ \frac{D_1k^2a^2}{D_2}\left(\tilde{\varphi}_{1j}-\tilde{\varphi}_{3j,1}\right)\end{array}\right]_j=$$
$$-\frac{I_2a^2}{D_2\nu_1}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2\tilde{\varphi}_{1j},$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left[\begin{array}{l}\left(\tilde{\varphi}_{2j,11}+\eta^2\tilde{\varphi}_{2j,22}\right)+\frac{\nu_2}{\nu_1}\eta\left(\tilde{\varphi}_{1j,12}+\eta\tilde{\varphi}_{2j,22}\right)-\\ \frac{D_1k^2a^2}{D_2}\left(\tilde{\varphi}_{2j}-\eta\tilde{\varphi}_{3j,2}\right)\end{array}\right]=$$
$$-\frac{I_2a^2}{D_2\nu_1}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2\tilde{\varphi}_{2j},$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\tilde{\varphi}_{3j,11}+\eta^2\tilde{\varphi}_{3j,22}\right)-\left(\tilde{\varphi}_{1j,1}+\eta\tilde{\varphi}_{2j,2}\right)\right]=-\frac{I_1a^2}{D_1k^2\nu_1}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2\tilde{\varphi}_{3j} \qquad (17)$$

هاشمی حسینی و همکاران نشان دادند که در شرایطی که حداقل دو لبه متقابل ورق مدرج تابعی دارای تکیه‌گاه ساده باشد، با درنظرگرفتن حل عمومی معادلات (۱۷) بر حسب توابع پتانسیل بی‌بعد W_{1j}، W_{2j} و W_{3j} به‌صورت:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{1j} &= c_{1j}W_{1j,1} + c_{2j}W_{2j,1} - \eta W_{3j,2},\\ \tilde{\varphi}_{2j} &= c_{1j}\eta W_{1j,2} + c_{2j}\eta W_{2j,2} - W_{3j,1},\\ \tilde{\varphi}_{3j} &= W_{1j} + W_{2j}\end{aligned} \tag{۱۸}$$

امکان غیرکوپله کردن معادلات (۱۷) وجود دارد [۱۷]. پس از جای‌گذاری توابع (۱۸) در معادلات (۱۷) و انجام عملیات ریاضی لازم ضرایب c_{1j} و c_{2j} به‌صورت زیر حاصل می‌شوند

$$c_{1j} = 1 - \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{1j}}\right)^2,\quad c_{2j} = 1 - \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{3j}}\right)^2 \tag{۱۹}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\alpha_{1j}^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{1j}^2}{\varepsilon^2} - \frac{\beta_{2j}^2}{k^2\nu_1}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{2j}^2}{k^2\nu_1} + \frac{\beta_{1j}^2}{\varepsilon^2}\right)\right)^2 - \frac{\beta_{2j}^2}{\varepsilon^2}},\\ \alpha_{2j}^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{2j}^2}{k^2\nu_1} + \frac{\beta_{1j}^2}{\varepsilon^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{2j}^2}{k^2\nu_1} + \frac{\beta_{1j}^2}{\varepsilon^2}\right)\right)^2 - \frac{\beta_{2j}^2}{\varepsilon^2}},\\ \alpha_{3j}^2 &= \left(\frac{\beta_{2j}^2}{k^2\nu_1} - \frac{k^2}{\varepsilon^2}\right)\end{aligned} \tag{۲۰}$$

به این ترتیب معادله (۱۷) می‌تواند بر حسب سه تابع پتانسیل بدون بعد به شکل زیر بازنویسی شود

$$\begin{aligned}W_{1j,11} + \eta^2 W_{1j,22} &= -\alpha_{1j}^2 W_{1j},\\ W_{2j,11} + \eta^2 W_{2j,22} &= -\alpha_{2j}^2 W_{2j},\\ W_{3j,11} + \eta^2 W_{3j,22} &= -\alpha_{3j}^2 W_{3j}\end{aligned} \tag{۲۱}$$

برای شرایط تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $X_1 = 0$ و $X_2 = 0$، مجموعه حل زیر برای دسته معادلات (۲۱) می‌تواند نوشته شود:

$$\begin{aligned}W_{1j} &= \left(A_1 \sin\left(s_{1j}X_2\right) + A_2 \cos\left(s_{1j}X_2\right)\right)\sin\left(\mu_1 X_1\right),\\ W_{2j} &= \left(A_5 \sinh\left(s_{2j}X_2\right) + A_6 \cosh\left(s_{2j}X_2\right)\right)\sin\left(\mu_2 X_1\right),\\ W_{3j} &= \left(A_{11} \sinh\left(s_{3j}X_2\right) + A_{12} \cosh\left(s_{3j}X_2\right)\right)\sin\left(\mu_3 X_1\right)\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در این روابط $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = m\pi\ (m = 1,2,3,...)$ و پارامتر s_{1j}، s_{2j} و s_{3j} به صورت زیر به‌ترتیب با پارامترهای α_{1j}، α_{2j} و α_{3j} ارتباط دارند:

$$\begin{aligned}&\alpha_{1j}^2 = \mu_1^2 + \eta^2 s_{1j}^2,\ \alpha_{2j}^2 = \mu_2^2 - \eta^2 s_{2j}^2,\\ &\alpha_{3j}^2 = \mu_3^2 - \eta^2 s_{3j}^2\end{aligned} \tag{۲۳}$$

با استفاده از شرایط مرزی ورق، ثابت‌های A_1 تا A_6 در دسته توابع (۲۲) تعیین می‌شوند. شرایط تکیه‌گاه ساده در امتداد لبه‌های $X_1 = 0$ و $X_1 = 1$ به‌صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$M_{11} = \tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_3 = 0 \tag{۲۴}$$

و شرایط مرزی در امتداد لبه‌های $X_2 = 0$ و $X_2 = 1$ برای لبه آزاد:

$$M_{22} = M_{12} = Q_2 = 0 \tag{۲۵}$$

و برای یک لبه تکیه‌گاه ساده:

$$M_{22} = \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_3 = 0 \tag{۲۶}$$

و برای لبه گیردار به‌صورت:

$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_3 = 0 \tag{۲۷}$$

قابل بیان هستند. جای‌گذاری روابط (۲۲) در روابط (۱۸) و جای‌گذاری نتیجه در شرایط مرزی مناسب در امتداد لبه‌های $X_2 = 0$ و $X_2 = 1$، به شش معادله همگن منجر می‌شود. صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب معادله همگن حاصل، که شرط وجود حل غیربدیهی برای این معادلات است، معادله فرکانسی سیستم را معرفی می‌کند که از حل آن فرکانس ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی حاصل شده و سپس ضرایب توابع شکل از حل دستگاه معادلات مشخص می‌شوند.

در این مطالعه، در ورق مدرج تابعی از آلمینیوم به‌عنوان فلز و از آلمینا[۲۲] به‌عنوان سرامیک استفاده شده است. جدول (۱) مدول یانگ و چگالی مواد استفاده شده در ورق مدرج تابعی را نشان می‌دهد.

در ادامه برای موارد مدنظر در بررسی، شامل اثر اندیس توان کسر حجمی (p)، نسبت ضخامت به طول ورق (δ) و شرایط مرزی ورق روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی، اولین شکل مود $\tilde{\varphi}_{11}$، $\tilde{\varphi}_{21}$ و $\tilde{\varphi}_{31}$ به دست می‌آید. سپس با توجه به ویژگی تعامد مودهای ارتعاشی در ورق‌های مستطیلی می‌توان نوشت:

جدول ۱- مدول یانگ و چگالی فلز و سرامیک استفاده شده در ورق مدرج تابعی

سرامیک آلومینا		فلز آلمینیوم	
مدول یانگ (Gpa)	چگالی ($Kg.m^{-3}$)	مدول یانگ (Gpa)	چگالی ($Kg.m^{-3}$)
۳۸۰	۳۸۰۰	۷۰	۲۷۰۲

جدول ۲- اولین شکل مود $\tilde{\varphi}_{31}$ و پارامتر فرکانس پایه $\bar{\beta}_1 = \omega_1 h\sqrt{\rho_c / E_c}$ برای مقادیر مختلف اندیس توان کسر حجمی (p) ورق مدرج تابعی با شرایط مرزی SSSS، $\eta = \frac{a}{b} = 1$ و $\delta = h/a = 0/1$

p	$\tilde{\varphi}_{31}$	$\bar{\beta}_1$ [۱۷]
۰	$\left(0/4664\sin\left(3/0881X_2\right) - 0/0002\sinh\left(5/2895X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	۰/۰۵۷۶۹
۰/۵	$\left(0/4645\sin\left(2/9754X_2\right) - 0/0008\sinh\left(5/2367X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	۰/۰۴۹۲۰
۱	$\left(0/4666\sin\left(2/8199X_2\right) - 0/0017\sinh\left(5/1567X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	۰/۰۴۴۵۴
۱۰	$\left(0/4738\sin\left(2/8677X_2\right) - 0/0014\sinh\left(5/1529X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	۰/۰۳۶۲۷
بینهایت	$\left(0/4671\sin\left(3/1390X_2\right) - 0/0001\sinh\left(5/3155X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	۰/۰۲۹۳۶

جدول ۳- اولین شکل مود $\tilde{\varphi}_{31}$ و پارامتر فرکانس پایه $\bar{\beta}_1 = \omega_1 h\sqrt{\rho_c / E_c}$ برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول ($\delta = \frac{h}{a}$) ورق مدرج تابعی با شرایط مرزی SSSS ، $\eta = \frac{a}{b} = 1$ و $p = 10$

δ	$\tilde{\varphi}_{31}$	$\bar{\beta}_1$ [۱۷]
۰/۰۵	$\left(0/4504\sin\left(3/8182X_2\right) + 0/0016\sinh\left(5/8112X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	۰/۰۰۹۶۳
۰/۱	$\left(0/4738\sin\left(2/8677X_2\right) - 0/0014\sinh\left(5/1529X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	۰/۰۳۶۲۷
۰/۲	$\left(0/5810\sin\left(3/7976X_2\right) + 0/0036\sinh\left(5/2677X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	۰/۱۳۰۴

$$\int_0^1\int_0^1\left(\tilde{\varphi}_{1i}\tilde{\varphi}_{1j} + \tilde{\varphi}_{2i}\tilde{\varphi}_{2j} + \tilde{\varphi}_{3i}\tilde{\varphi}_{3j}\right)dX_1 dX_2 = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{۲۸}$$

بر این اساس نسبت به نرمال‌سازی شکل مودهای به‌دست آمده اقدام شده است. برای هر مورد در جدول‌های (۴)-(۲)، اولین شکل مود نرمال $\tilde{\varphi}_{31}$ به‌همراه پارامتر فرکانس پایه $\bar{\beta}_1 = \omega_1 h\sqrt{\rho_c / E_c}$ متناظر به‌دست آمده از [۱۷] ارائه شده‌اند. لازم به توضیح است که به‌عنوان مثال نماد SCSF نشان‌دهنده این است که لبه‌های $X_1 = 0$ و $X_1 = 1$ تکیه‌گاه ساده (S) دارند و لبه $X_2 = 0$ گیردار (C) و لبه $X_2 = 1$ آزاد (F) است.

۳-۲- آنالیز ارتعاشات اجباری

با استفاده از رابطه (۱۷)، رابطه (۱۳) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\sum_{j=1}^{n} -\omega_j^2\tilde{\varphi}_{1j}A_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{1j}\ddot{A}_j(t), \tag{۲۹}$$

$$\sum_{j=1}^{n} -\omega_j^2\tilde{\varphi}_{2j}A_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{2j}\ddot{A}_j(t), \tag{۳۰}$$

$$\sum_{j=1}^{n} -\omega_j^2\tilde{\varphi}_{3j}A_j(t) + \frac{1}{aI_1}P_M = \sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_{3j}\ddot{A}_j(t), \tag{۳۱}$$

که در (۳۱) P_M نیروی وارد بر ورق از سوی جرم متحرک است. با ضرب طرفین تساوی (۲۹) در $\tilde{\varphi}_{1i}$ و (۳۰) در $\tilde{\varphi}_{2i}$ و (۳۱) در $\tilde{\varphi}_{3i}$ و جمع طرفین سه تساوی حاصل و انتگرال‌گیری

جدول ۴- اولین شکل مود $\tilde{\varphi}_{31}$ و پارامتر فرکانس پایه $\bar{\beta}_1 = \omega_1 h\sqrt{\rho_c / E_c}$ برای شرایط مرزی مختلف ورق مدرج تابعی با مشخصات $\delta = \frac{h}{a} = 0/15$، $\eta = \frac{a}{b} = 2$ و $p = 1$

$\bar{\beta}_1$ [۱۷]	$\tilde{\varphi}_{31}$	شرایط مرزی
۰/۲۰۵۹۲	$\left(0/3947\sin\left(4/0616X_2\right)+0/0147\sinh\left(3/7553X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	SSSS
۰/۰۴۹۷۰	$\left(-0/5277\sinh\left(0/4387X_2\right)+0/5171\cosh\left(0/4387X_2\right) -0/0131\sinh\left(2/1406X_2\right)+0/0238\cosh\left(2/1406X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	SFSF
۰/۲۶۰۹۱	$\left(0/3536\sin\left(3/3042X_2\right)-0/1563\cos\left(3/3042X_2\right) -0/1630\sinh\left(3/4254X_2\right)+0/1563\cosh\left(3/4254X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	SCSC
۰/۱۰۰۶۶	$\left(0/4815\sin\left(1/5215X_2\right)-0/2279\cos\left(1/5215X_2\right) -0/2112\sinh\left(2/5679X_2\right)+0/2279\cosh\left(2/5679X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	SCSF
۰/۰۷۸۵۱	$\left(0/5197\sin\left(1/0967X_2\right)+0/0161\sinh\left(2/3955X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	SSSF
۰/۲۳۲۶۲	$\left(0/3841\sin\left(3/1141X_2\right)-0/0007\sinh\left(3/3364X_2\right)\right)\sin\left(\pi X_1\right)$	SSSC

از طرفین تساوی به‌دست آمده روی کل سطح ورق، نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1\int_0^1\left(\tilde{\varphi}_{1i}\tilde{\varphi}_{1j}+\tilde{\varphi}_{2i}\tilde{\varphi}_{2j}+\tilde{\varphi}_{3i}\tilde{\varphi}_{3j}\right)dX_1dX_2\right)\ddot{A}_j(t) +\sum_{j=1}^{n}\left(\omega_j^2\int_0^1\int_0^1\left(\tilde{\varphi}_{1i}\tilde{\varphi}_{1j}+\tilde{\varphi}_{2i}\tilde{\varphi}_{2j}+\tilde{\varphi}_{3i}\tilde{\varphi}_{3j}\right)dX_1dX_2\right)A_j(t) = \int_0^1\int_0^1\frac{1}{aI_1}P_M\tilde{\varphi}_{3i}dX_1dX_2 \tag{۳۲}$$

با توجه به رابطه (۲۸) و با استفاده از شکل مودهای نرمال، رابطه (۳۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\ddot{A}_j(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2\delta_{ij}A_j(t) = \int_0^1\int_0^1\frac{1}{aI_1}P_M\tilde{\varphi}_{3i}\left(X_1,X_2\right)dX_1dX_2 \tag{۳۳}$$

نیروی وارد از جرم متحرک بر ورق P_M به‌صورت (۳۴) بیان می‌شود:

$$P_M(x_1,x_2,t) = M\left(g-\frac{d^2\varphi_3}{dt^2}\right)\bar{\delta}\left(x-x_{M1}\right)\bar{\delta}\left(y-x_{M2}\right) \tag{۳۴}$$

که در آن $\bar{\delta}$ نماد تابع دلتای دیراک[23] است که برای نشان دادن موقعیت بار اعمال شده روی ورق استفاده شده است. مشتق زمانی اول و دوم φ_3 به‌صورت (۳۵) و (۳۶) قابل تعیین هستند:

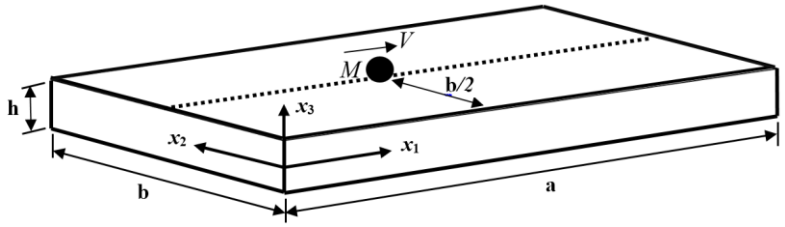
$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial t} \tag{۳۵}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\right)\frac{\partial x_1}{\partial t}+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\right)\frac{\partial x_2}{\partial t}+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\right) \tag{۳۶}$$

برای وقتی که مطابق شکل (۲) جرم متحرک با سرعت ثابت V روی ورق مدرج تابعی بر روی مسیر خط مستقیم $x_2 = \frac{b}{2}$ حرکت می‌کند، با جای‌گذاری (۳۶) در (۳۴) و انجام عملیات جبری لازم، ضابطه نیروی وارد بر ورق به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$P_M(x_1,x_2,t) = M\left(g-\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2}-2V\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial t}-V^2\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1^2}\right)\times \bar{\delta}\left(x_1-Vt\right)\bar{\delta}(x_2-\frac{b}{2}) \tag{۳۷}$$

برای ارائه سایر روابط می‌توان پارامترهای بدون بعدی به‌صورت:



شکل ۲- عبور جرم متحرک با سرعت ثابت V از روی ورق مدرج تابعی روی مسیر خط مستقیم $x_2 = \frac{b}{2}$

$$\alpha = \frac{M}{I_1 ab}, \quad \gamma = \frac{\pi V}{a\omega_1} \tag{۳۸}$$

تعریف کرد که در آن ω_1 اولین فرکانس ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی است. همچنین I_1 جرم واحد سطح ورق است که از (۸) قابل محاسبه است. با استفاده از رابطه (۱۶) و با جای‌گذاری رابطه (۳۷) در (۳۳) و پس از انجام عملیات ریاضی لازم، معادله حاکم بر مختصات مودال به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$T(t)\ddot{A} + Y(t)\dot{A} + \Lambda(t)A = f(t) \tag{۳۹}$$

که در آن درایه‌های ضرایب ماتریسی (۳۹) به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \delta_{ij} + \alpha\tilde{\varphi}_{3i}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\tilde{\varphi}_{3j}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right), \\ Y_{ij} &= \frac{2\alpha\gamma\omega_1}{\pi}\tilde{\varphi}_{3i}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\tilde{\varphi}'_{3j}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right), \\ \Lambda_{ij} &= \omega_j^2\delta_{ij} + \frac{\alpha(\gamma\omega_1)^2}{\pi^2}\tilde{\varphi}_{3i}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\tilde{\varphi}''_{3j}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right), \\ f_i &= \frac{\alpha g}{a}\tilde{\varphi}_{3i}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{۴۰}$$

که در آن $\tilde{\varphi}'_{3j}$ و $\tilde{\varphi}''_{3j}$ به‌ترتیب اولین و دومین مشتق شکل مود $\tilde{\varphi}_{3j}$ نسبت به X_1 هستند. با درنظر گرفتن اولین مود ارتعاشی، معادله حاکم بر مختصات مودال سیستم به‌صورت رابطه (۴۱) درمی‌آید:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \alpha\tilde{\varphi}_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\tilde{\varphi}_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\right)\ddot{A} + \\ &\left(\frac{2\alpha\gamma\omega_1}{\pi}\tilde{\varphi}_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\tilde{\varphi}'_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\right)\dot{A} + \\ &\left(\omega_1^2 + \frac{\alpha(\gamma\omega_1)^2}{\pi^2}\tilde{\varphi}_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\tilde{\varphi}''_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)\right)A = \\ &\frac{\alpha g}{a}\tilde{\varphi}_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{۴۱}$$

از جدول‌های (۲)، (۳) و (۴) ملاحظه می‌شود که برای موارد مدنظر در آنالیز پایداری دینامیکی، فرم کلی شکل مود $\tilde{\varphi}_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right)$ به‌صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$\tilde{\varphi}_{31}\left(\frac{Vt}{a},\frac{1}{2}\right) = K_1 \sin(\pi X_1) \tag{۴۲}$$

که در هر مورد، ضریب K_1 از جدول‌های مذکور قابل محاسبه هستند. از جای‌گذاری رابطه (۴۲) در معادله (۴۱)، معادله حاکم بر مختص مودال به شکل معادله (۴۳) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\left(1 + K_1^2\alpha\sin^2(\gamma\omega_1 t)\right)\ddot{A} + \\ &\left(2K_1^2\alpha\gamma\omega_1\sin(\gamma\omega_1 t)\cos(\gamma\omega_1 t)\right)\dot{A} + \\ &\left(\omega_1^2 - K_1^2\alpha(\gamma\omega_1)^2\sin^2(\gamma\omega_1 t)\right)A = \\ &K_1\frac{\alpha g}{a}\sin(\gamma\omega_1 t) \end{aligned} \tag{۴۳}$$

چنانچه فرض شود که وقتی یک جسم متحرک ورق را ترک می‌کند جسم متحرک دیگری با مشخصات یکسان با جرم و سرعت جسم قبلی روی ورق وارد می‌شود، ورق تحت یک تحریک متناوب قرارگرفته و ضرایب رابطه (۴۳) توابعی متناوب با دوره تکرار تحریک $T = \frac{a}{V}$ می‌شوند. به‌منظور انعکاس این واقعیت، با درنظرگرفتن بسط فوریه ضرایب معادله (۴۳)، معادله (۴۴) نتیجه گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{K_1^2\alpha}{2}\left(1 - \cos 2(\gamma\omega_1 t)\right)\right)\ddot{A} + \left(K_1^2\alpha\gamma\omega_1\sin(2\gamma\omega_1 t)\right)\dot{A} + \\ &\left(\omega_1^2 - \frac{K_1^2\alpha(\gamma\omega_1)^2}{2}\left(1 - \cos 2(\gamma\omega_1 t)\right)\right)A = \\ &K_1\frac{\alpha g}{a}\left(\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos(2n\gamma\omega_1 t)}{\pi(1 - 4n^2)}\right) \end{aligned} \tag{۴۴}$$

با توجه به تفاوت فرکانس پایه ω_1 و جرم واحد سطح I_1 ورق‌ها در مطالعه اثر اندیس توان کسر حجمی و همچنین اثر نسبت ضخامت به طول ورق و شرایط مرزی ورق روی نتایج آنالیز، از رابطه (۳۸) ملاحظه می‌شود که مقادیر یکسان α و γ در ورق‌های متفاوت، مبین مقادیر متفاوت برای جرم و سرعت جسم متحرک هستند. به‌دلیل لزوم یکسان بودن مقادیر جرم و سرعت جسم‌های متحرک در راستای مقایسه نتایج حاصل از ورق‌های متفاوت، از میان مجموعه ورق‌هایی که نتایج آنالیز پایداری دینامیکی آنها مورد مقایسه قرار می‌گیرند، یک ورق به‌عنوان ورق مرجع انتخاب می‌شود. با استفاده از فرکانس پایه و جرم واحد سطح ورق مرجع (I_{R1},ω_{R1}) و تعریف پارامتر بدون بعد جرم α_R و سرعت γ_R به‌صورت:

$$\alpha_R=\frac{M}{I_{R1}ab},\quad \gamma_R=\frac{\pi V}{a\omega_{R1}} \tag{۴۵}$$

معادله حاکم بر مختص مودال (۴۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(1+\frac{K_1^2\alpha_R}{2K_2}\left(1-\cos(2\tau)\right)\right)\ddot{A}+\left(\frac{K_1^2\alpha_R\gamma_R\omega_{R1}}{K_2}\sin(2\tau)\right)\dot{A}+\left(\omega_1^2-\frac{K_1^2\alpha_R(\gamma_R\omega_{R1})^2}{2K_2}\left(1-\cos(2\tau)\right)\right)A=\frac{K_1\alpha_R g}{K_2 a}\left(\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos(2n\tau)}{\pi\left(1-4n^2\right)}\right) \tag{۴۶}$$

در این رابطه پارامتر بدون بعد K_2 نسبت جرم واحد سطح ورق تحت عبور جرم متحرک به جرم واحد سطح ورق مرجع است که به‌همراه پارامتر بدون بعد τ به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$K_2=\frac{I_1}{I_{R1}},\quad \tau=\gamma_R\omega_{R1}t \tag{۴۷}$$

۴- آنالیز پایداری

۴-۱- روش آنالیز هموتوپی

به‌منظور انجام آنالیز پایداری، از روش آنالیز هموتوپی، که توسط لیو [۱۵] برای حل نیمه‌تحلیلی معادلات دیفرانسیل معرفی شده، استفاده می‌شود. در این روش در ابتدا معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{A}+N(A,\dot{A},\ddot{A},t)=0,\quad A(0)=0,\quad \dot{A}(0)=0 \tag{۴۸}$$

که در حالت کلی N یک اپراتور دیفرانسیلی غیرخطی است که از معادله دیفرانسیل مورد نظر قابل تعیین است. در گام بعد معادله تغییر شکل مرتبه صفر این روش برای معادله‌ی دیفرانسیل (۴۸) به‌صورت:

$$(1-r)\left(\ddot{A}+A\right)=\hbar r\left(\ddot{A}+N(A,\dot{A},\ddot{A},t)\right) \tag{۴۹}$$

نوشته می‌شود که در آن $\hbar$ یک پارامتر کمکی غیر صفر برای تامین شرایط لازم برای همگرایی حل است و r یک پارامتر مصنوعی است که بین صفر و یک تغییر می‌کند $r\in[0,1]$ که به‌ازای $r=0$ معادله (۴۹) به یک معادله خطی ساده تبدیل شده و به‌ازای $r=1$ همان معادله (۴۸) حاصل می‌شود. با افزودن و کاستن A از سمت راست تساوی (۴۹)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$(1-r)\left(\ddot{A}+A\right)=\hbar r\left(\ddot{A}+N(A,\dot{A},\ddot{A},t)\right)+A-1\times A \tag{۵۰}$$

در رابطه (۵۰) با جای‌گذاری ضریب ۱ به‌وسیله یک سری توانی از r به جای ضریب به‌صورت

$$1=\omega^2-\sum_{i=1}^{n}r^i\lambda_i \tag{۵۱}$$

که در آن ω مبین فرکانس پاسخ سیستم است و λ_iها ضرایب این سری هستند، معادله هموتوپی به‌صورت زیر می‌تواند مرتب شود:

$$(1-r)\ddot{A}+\left(\omega^2-r-\sum_{i=1}^{n}r^i\lambda_i\right)A=\hbar r\left(\ddot{A}+N(A,\dot{A},\ddot{A},t)\right) \tag{۵۲}$$

حل معادله (۴۸) به‌صورت یک سری توانی از r به شکل زیر درنظرگرفته می‌شود:

$$A=\sum_{i=1}^{n}r^i\bar{A}_i \tag{۵۳}$$

که در آن $\bar{A}_i$ حل معادله رتبه i ام هموتوپی و λ_i، i امین

ضریب بسط است. با جای‌گذاری حل (۵۳) در معادله هموتوپی (۵۲)، از طریق مساوی هم قرار دادن عبارات هم توان r، یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل خطی حاصل می‌شود که باید از طریق جای‌گذاری حل معادلات رتبه پایین‌تر در معادلات رتبه بالاتر، به‌صورت مرحله به مرحله حل شوند. در این روند به‌منظور حل معادلات باید ترم‌های سکولار[۲۴] استخراج و از طریق تنظیم مقدار مناسب برای ضرایب λ_i حذف شوند. سپس فرکانس پاسخ از (۵۱) با در نظرگرفتن $r=1$ درآن به‌دست می‌آید. از حل این دستگاه معادلات، $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, ...$ تعیین می‌شوند و در نهایت، حل معادله (۴۸) با در نظرگرفتن $r=1$ در (۵۳) حاصل می‌شود. جهت تعیین پارامتر کمکی $\tilde{\lambda}$، ظاهر شده در حل، از شیوه ارائه شده توسط وانگ و همکاران [۱۸] و کوین و چن [۱۹] استفاده می‌شود. در این شیوه برای تامین شرایط لازم جهت تضمین همگرایی سری حل، بازه مناسب برای $\tilde{\lambda}$ به گونه‌ای معرفی می‌شود که در آن بازه نمودار $\omega-\tilde{\lambda}$ کمترین شیب را داشته باشد.

در شرایطی که مقدار زیر رادیکال عبارت ω که از رابطه (۵۱) تعیین می‌شود منفی شود، عبارت‌هایی نمایی که با افزایش زمان رشد می‌کنند در پاسخ ظاهر می‌شوند. به این ترتیب شرایطی که سبب منفی شدن مقدار زیر رادیکال می‌شود سبب بروز ناپایداری و تشدید پارامتریک در سیستم خواهد شد.

بر این اساس به‌منظور انجام آنالیز پایداری به روش آنالیز هموتوپی، از جای‌گذاری (۵۳) در (۵۲) فرم هموتوپی معادله (۴۶) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&(1-r)(\ddot{\bar{A}}_0 + r\ddot{\bar{A}}_1 + r^2\ddot{\bar{A}}_2 + ...) + \\
&(\omega^2 - r - (r\lambda_1 + r^2\lambda_2 + ...))(\bar{A}_0 + r\bar{A}_1 + r^2\bar{A}_2 + ...) = \\
&\tilde{\lambda} r\Big[\big(1+\bar{\alpha}_R(1-\cos(2\bar{\omega}_{R1}t))\big)(\ddot{\bar{A}}_0 + r\ddot{\bar{A}}_1 + r^2\ddot{\bar{A}}_2 + ...) + \\
&\quad 2\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}\sin(2\bar{\omega}_{R1}t)(\dot{\bar{A}}_0 + r\dot{\bar{A}}_1 + r^2\dot{\bar{A}}_2 + ...) + \\
&\quad \big(\omega_1^2 - \bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2(1-\cos(2\bar{\omega}_{R1}t))\big)(\bar{A}_0 + r\bar{A}_1 + r^2\bar{A}_2 + ...) - \\
&\quad \frac{4g\bar{\alpha}_R}{K_1 a\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-4n^2}\cos(2n\bar{\omega}_{R1}t)\right)\Big],
\end{aligned}
\tag{۵۴}
$$

که در آن $\bar{\alpha}_R = \frac{K_1^2\alpha_R}{(2K_2)}$ و $\bar{\omega}_{1R} = \gamma_R\omega_{1R}$ است. با تعیین عبارات دارای توان مساوی، یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل خطی به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&r^0: \dot{\bar{A}}_0 + \omega^2\dot{\bar{A}}_0 = 0, \\
&r^1: \ddot{\bar{A}}_1 + \omega^2\bar{A}_1 = \\
&\quad \ddot{\bar{A}}_0 + (1+\lambda_1)\bar{A}_0 + \tilde{\lambda}L(\bar{A}_0) + \\
&\quad \frac{4\bar{\alpha}_R g}{K_1 a\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1-4n^2)}\cos(2n\bar{\omega}_{R1}t)\right), \\
&r^2: \ddot{\bar{A}}_2 + \omega^2\bar{A}_2 = \\
&\quad \ddot{\bar{A}}_1 + (1+\lambda_1)\bar{A}_1 + \lambda_2\bar{A}_0 + \tilde{\lambda}L(\bar{A}_1), \\
&r^3: \ddot{\bar{A}}_3 + \omega^2\bar{A}_3 = \\
&\quad \ddot{\bar{A}}_2 + (1+\lambda_1)\bar{A}_2 + \lambda_2\bar{A}_1 + \lambda_3\bar{A}_0 + \tilde{\lambda}L(\bar{A}_2), \\
&r^4: \ddot{\bar{A}}_4 + \omega^2\bar{A}_4 = \\
&\quad \ddot{\bar{A}}_3 + (1+\lambda_1)\bar{A}_3 + \lambda_2\bar{A}_2 + \lambda_3\bar{A}_1 + \\
&\quad \lambda_4\bar{A}_0 + \tilde{\lambda}L(\bar{A}_3),
\end{aligned}
\tag{۵۵-۱}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
&L(\bar{A}_k) = \\
&\quad \big(1+\bar{\alpha}_R(1-\cos(2\bar{\omega}_{R1}t))\big)\ddot{\bar{A}}_k + \big(2\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}\sin(2\bar{\omega}_{R1}t)\big)\dot{\bar{A}}_k + \\
&\quad \big(\omega_1^2 - \bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2(1-\cos(2\bar{\omega}_{R1}t))\big)\bar{A}_k,
\end{aligned}
\tag{۵۵-۲}
$$

تمام معادلات در (۵۵) با لحاظ شرایط اولیه $\bar{A}_k(0)=0$ و $\dot{\bar{A}}_k(0)=0$ بایستی به‌صورت متوالی حل شوند. به این ترتیب که از طریق جای‌گذاری حل معادلات رتبه پایین‌تر در معادلات رتبه بالاتر، معادلات پشت سر هم حل شده و ترم‌های سکولار به‌وسیله تعیین مناسب مقادیر λ_i حذف می‌شوند. در روند حل این معادلات، برای توابع $A_3(t), A_2(t), A_1(t), A_0(t)$ ضابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&A_0(t) = 0 \\
&A_1(t) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos(2n\bar{\omega}_{R1}t) + a_3\cos(\omega t) \\
&A_2(t) = b_1\cos\big((\omega+2\bar{\omega}_{R1})t\big) + \\
&\quad b_2\cos\big((\omega-2\bar{\omega}_{R1})t\big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{3n}\cos(2n\bar{\omega}_{R1}t) +
\end{aligned}
$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{4n}\cos\left(2(n+1)\bar{\omega}_{R1}t\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{5n}\cos\left(2(n-1)\bar{\omega}_{R1}t\right)+b_6+b_7\cos(2\bar{\omega}_{R1}t)+b_8\cos(\omega t)$$
$$A_3(t)=c_1\cos\left((\omega+2\bar{\omega}_{R1})t\right)+$$
$$c_2\cos\left((\omega-2\bar{\omega}_{R1})t\right)+\sum_{n=1}^{\infty} c_{3n}\cos(2n\bar{\omega}_{R1}t)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{4n}\cos\left(2(n+1)\bar{\omega}_{R1}t\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{5n}\cos\left(2(n-1)\bar{\omega}_{R1}t\right)+c_6+c_7\cos(2\bar{\omega}_{R1}t)+$$
$$c_8\cos\left((\omega+4\bar{\omega}_{R1})t\right)+c_9\cos\left((\omega-4\bar{\omega}_{R1})t\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{10n}\cos\left(2(n+2)\bar{\omega}_{R1}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty} c_{11n}\cos\left(2(n-2)\bar{\omega}_{R1}t\right)+$$
$$c_{12}\cos(4\bar{\omega}_{R1}t)+c_{13}\cos(\omega t) \tag{۵۶}$$

مجموعه ضرایب این توابع در پیوست آمده‌اند. همچنین مقادیر حاصل شده برای $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ناشی از حل معادلات تا رتبه p^3 و حذف ترم‌های سکولار به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\lambda_1=-1+\left(1+\hat{\lambda}\left(1+\bar{\alpha}_R\right)\right)\omega^2-\hat{\lambda}\left(\omega_1^2-\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2\right)$$
$$\lambda_2=\frac{\hat{\lambda}^2\bar{\alpha}_R^2}{8}\left(3\omega^2+\bar{\omega}_{R1}^2\right) \tag{۵۷}$$
$$\lambda_3=\frac{\hat{\lambda}^2\bar{\alpha}_R^2}{8}\left(1+\hat{\lambda}\left(1+\bar{\alpha}_R\right)\right)\left(3\omega^2+\bar{\omega}_{R1}^2\right)$$

با جای‌گذاری این مقادیر در (۵۱) و لحاظ $r=1$ در آن، مقدار فرکانس ارتعاشات ω به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega=\sqrt{\frac{8(\omega_1^2-\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2)-\hat{\lambda}\bar{\alpha}_R^2\bar{\omega}_{R1}^2\left(2+\hat{\lambda}\left(1+\bar{\alpha}_R\right)\right)}{8(1+\bar{\alpha}_R)+3\hat{\lambda}\bar{\alpha}_R^2\left(2+\hat{\lambda}\left(1+\bar{\alpha}_R\right)\right)}} \tag{۵۸}$$

مقدار مناسب برای $\hat{\lambda}$ می‌تواند از طریق تعیین جایی که شیب $\frac{d\omega}{d\hat{\lambda}}$ صفر می‌شود، تعیین شود. بر این اساس، با استفاده از رابطه (۵۸) مقدار $\hat{\lambda}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\lambda}=-\frac{1}{1+\bar{\alpha}_R} \tag{۵۹}$$

با جای‌گذاری (۵۹) در (۵۸)، فرکانس ارتعاشات ورق مدرج تابعی تحت اثر حرکت یک جرم متحرک با مقادیر جرم و سرعت مشخص به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega=\sqrt{\frac{8\left(1+\bar{\alpha}_R\right)(\omega_1^2-\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2)+\bar{\alpha}_R^2\bar{\omega}_{R1}^2}{8(1+\bar{\alpha}_R)^2-3\bar{\alpha}_R^2}} \tag{۶۰}$$

همان‌طور که اشاره شد در حالتی که مقدار زیر رادیکال در (۶۰) منفی شود ناپایداری و تشدید پارامتریک در حل $A(t)$ اتفاق می‌افتد. بنابراین مرز بین دو ناحیه ناپایدار و پایدار در صفحه $\alpha_R-\gamma_R$ در واقع مکان هندسی نقاطی از صفحه است که در آنها $\omega=0$ است. بنابراین ضابطه این مرز از مساوی قرار دادن (۶۰) با صفر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\gamma_{R,\text{border}}^{HAM}=\frac{\omega_1}{\omega_{R1}}\sqrt{\frac{8\left(1+\bar{\alpha}_R\right)}{\left(8+7\bar{\alpha}_R\right)\bar{\alpha}_R}} \tag{۶۱}$$

مبتنی بر روش آنالیز هموتوپی برای تعیین شرایط بروز تشدید خارجی در ناحیه پایدار، آنالیز می‌تواند ادامه یابد. شرایط بروز تشدید خارجی به‌وسیله آنالیز توابع تحریک هارمونیک حاضر در سمت راست معادلات (۵۵) مشخص می‌شود. در این روش، فرکانس‌های تشدید به‌صورت زیر قابل تشخیص هستند:

$$\omega_{res}=2n\gamma_R\omega_{R1},\ \ n=1,2,3,... \tag{۶۲}$$

با جای‌گذاری عبارت ω از (۶۰) بجای ω_{res} در(۶۲)، عبارت زیر برای شرایط بروز تشدید خارجی نتیجه می‌شود:

$$\gamma_{R,res}^{HAM}=\frac{\omega_1}{\omega_{R1}}\sqrt{\frac{8(1+\bar{\alpha}_R)}{4n^2\left(8+16\bar{\alpha}_R+5\bar{\alpha}_R^2\right)+\left(8+7\bar{\alpha}_R\right)\bar{\alpha}_R}}\qquad n=1,2,3,... \tag{۶۳}$$

به‌عبارت دیگر رابطه (۶۳) نشان‌دهنده منحنی‌هایی در صفحه $\alpha_R-\gamma_R$ هستند که نقاط واقع روی آنها شرایط بروز تشدید خارجی را معرفی می‌کنند. از روابط (۶۱) و (۶۳) ملاحظه می‌شود که مجموع منحنی‌های حاصل از این روابط را می‌توان در یک معادله به‌صورت زیر خلاصه کرد:

$$\gamma_{R,critical}^{HAM}=\frac{\omega_1}{\omega_{R1}}\sqrt{\frac{8(1+\bar{\alpha}_R)}{4n^2\left(8+16\bar{\alpha}_R+5\bar{\alpha}_R^2\right)+\left(8+7\bar{\alpha}_R\right)\bar{\alpha}_R}}\qquad n=0,1,2,3,... \tag{۶۴}$$

که در رابطه (۶۴)، $n=0$ نشان‌دهنده مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و مابقی متناظر با شرایط تشدید خارجی هستند.

۴-۲- روش تئوری فلاکه

در این مطالعه به‌منظور بررسی دقت نتیجه به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی، از مقایسه آن با نتیجه مشابه به‌دست آمده از روش تئوری فلاکه استفاده می‌شود. تئوری فلاکه، روشی است که امکان آنالیز پایداری سیستم‌های خطی همگن با ضرایب متناوب را فراهم می‌کند [۲۰]. در اولین گام این روش معادله حاکم (۴۶) به فرم فضای حالت:

$$\begin{cases}\dot{q}=\{R(t)\}q+F(t)\\ \{R(t+T_p)\}=\{R(t)\},\ \ F(t+T_p)=F(t)\end{cases} \qquad (۶۵)$$

نوشته می‌شود که در آن $q=\left[A,\dot{A}\right]^T$ و T_p دوره تناوب ضرایب معادلات فضای حالت سیستم است که با دوره تکرار بار برابر است. بر اساس این روش، بخش $F(t)$ در معادله فضا – حالت (۶۵) کنارگذاشته شده و این معادله به فرم:

$$\begin{cases}\dot{q}=\{R(t)\}q\\ \{R(t+T_p)\}=\{R(t)\}\end{cases} \qquad (۶۶)$$

ساده می‌شود. شیوه روش تئوری فلاکه به این صورت است که پایداری تمام حل‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و خطی با ضرایب متناوب به فرم (۶۶) را مشخص می‌کند. برای تبیین این تئوری، حل معادله (۶۶) برای شرایط اولیه $q_\circ=q(\circ)$ در حالت کلی به‌صورت زیر درنظرگرفته می‌شود:

$$q(t)=\{\phi_\circ(t)\}q_\circ \qquad (۶۷)$$

در واقع $\{\phi_\circ(t)\}$ یک ماتریس پایه است که ستون‌های آن از حل‌های مستقل خطی معادله همگن (۶۶) تشکیل شده‌اند. با تعریف ماتریس $\{C\}$ به‌صورت:

$$\{C\}=\{\phi_\circ(T_p)\} \qquad (۶۸)$$

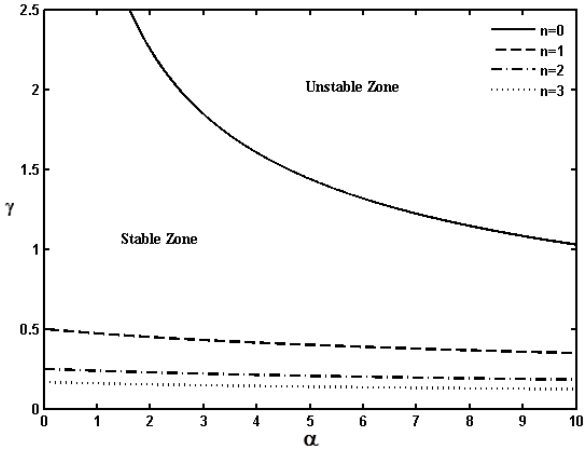
ملاحظه می‌شود که با انتگرال‌گیری عددی از رابطه (۶۶) در بازه زمانی یک دوره تناوب، می‌توان از (۶۸) ماتریس $\{C\}$ را به‌دست آورد. تئوری فلاکه بیان می‌کند که اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس $\{C\}$ در داخل و روی یک دایره‌ی واحد به مرکز $(\circ,\circ)$ در صفحه مختلط باشند، سیستم پایدار است و اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه در خارج از دایره‌ی مذکور قرارگرفته باشد، سیستم ناپایدار خواهد بود.

۵- نتایج آنالیز

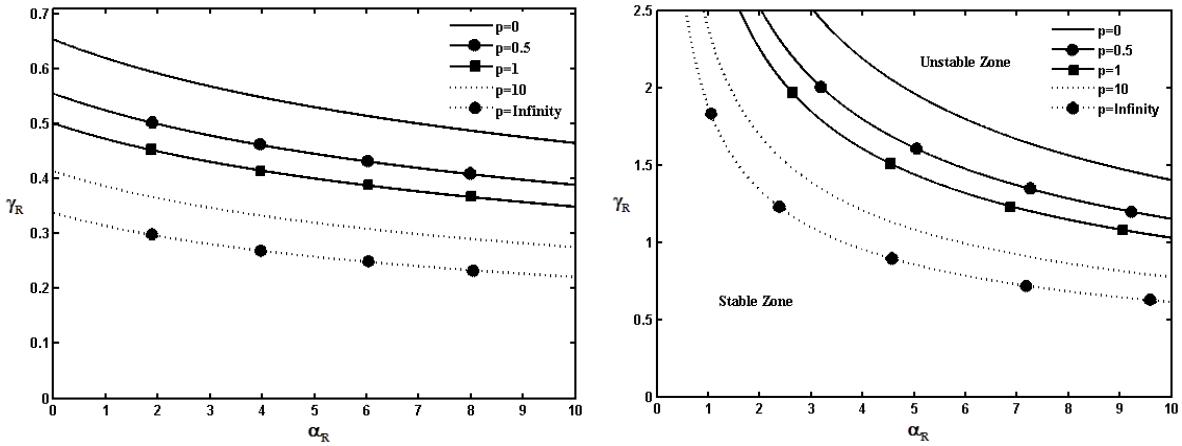
در این بخش نتایج حاصل از آنالیز پایداری دینامیکی ورق مدرج تابعی تحت اثر عبور متناوب جرم‌های متحرک با استفاده از روش آنالیز هموتوپی ارائه شده است. ورق به طول سه متر $(a=۳m)$ و به‌صورت مخلوطی از فلز آلمینیوم و سرامیک آلمینا درنظرگرفته شده است. مدول الاستیسیته و چگالی ورق در جهت ضخامت ورق طبق روابط (۱) و (۲) تغییر کرده و خواص مکانیکی مواد مورد استفاده در آن مطابق جدول (۱) لحاظ شده است. شرایط تکیه‌گاهی ورق در لبه‌های $X_۱=\circ$ و $X_۱=۱$ ساده درنظرگرفته شده و مطابق شکل (۲) ورق تحت عبور متوالی جرم‌های متحرکی که روی خط مستقیم $X_۲=\frac{۱}{۲}$ حرکت می‌کنند قرار دارد به این ترتیب که فرض می‌شود که بلافاصله پس از خروج یک جسم متحرک از روی ورق، جسم متحرک دیگری با همان مشخصات جسم قبلی روی ورق وارد می‌شود. به‌منظور ارائه نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق مدرج تابعی – جسم متحرک، با استفاده از رابطه (۶۴) برای $n=\circ$ مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و برای مقادیر $n=۱,۲,۳$ مکان هندسی شرایط بروز تشدید در بازه $\circ<\alpha_R\leq ۱\circ$ و $\circ<\gamma_R\leq ۲/۵$ از صفحه پارامترهای $\alpha_R-\gamma_R$ ترسیم شده و با بررسی اثر مقدار اندیس توان کسر حجمی (p)، نسبت ضخامت به طول ورق $(\delta=\frac{h}{a})$ و شرایط مرزی ورق روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و روی مکان هندسی شرایط بروز تشدید، بررسی جامعی از پایداری سیستم انجام شده است.

۵-۱- نتایج آنالیز پایداری سیستم ورق مدرج تابعی – جسم متحرک

در این بخش، نتایج آنالیز پایداری دینامیکی حاصل از روش آنالیز هموتوپی برای یک ورق مدرج تابعی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک با مشخصات SSSS، $\eta=۱$، $\delta=\circ/۱$ و $p=۱$ ارائه شده است. این نتایج در شکل (۳) نمایش داده شده‌اند. ناحیه بالای منحنی مرز، مقادیری از جرم و سرعت جرم متحرک را نشان



شکل ۳- نقشه پایداری دینامیکی ورق مدرج تابعی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک حاصل از روش آنالیز هموتوپی؛ SSSS، $\eta=۱$، $\delta=۰/۱$ و $p=۱$



(ب) (الف)

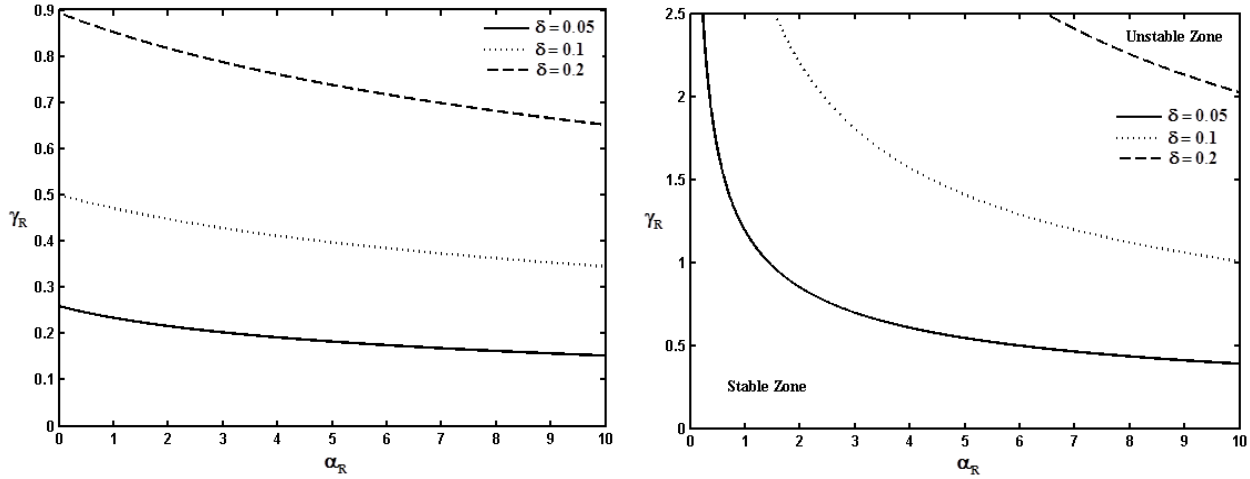
شکل ۴- تأثیر اندیس توان کسر حجمی (p) روی الف) مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و ب) اولین منحنی تشدید؛ SSSS، $\eta=۱$ و $\delta=۰/۱$

می‌دهد که سبب ایجاد ناپایداری در ورق مدرج تابعی می‌شوند. در پایین مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار، ناحیه پایدار قرار گرفته است. در این ناحیه، مکان هندسی مشخصاتی از جرم و سرعت جرم متحرک که سبب شکل‌گیری تشدید در ورق مدرج تابعی می‌شوند، به‌وسیله منحنی‌های ترسیم شده، مشخص شده‌اند.

۵-۲- اثر مقدار اندیس توان کسر حجمی ورق مدرج تابعی روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی

برای ورق مدرج تابعی با مشخصات SSSS، $\eta=۱$ و $\delta=۰/۱$، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و اولین منحنی تشدید برای هر یک از مقادیر اندیس توان کسر حجمی $p=۰, ۰/۵, ۱, ۱۰, \infty$ به‌ترتیب در شکل (۴- الف) و (۴- ب) رسم شده و با هم مقایسه شده‌اند. در این بررسی، ورق با اندیس توان $p=۱$ به‌عنوان ورق مرجع درنظرگرفته شده است.

شکل‌های (۴- الف) و (۴- ب) نشان می‌دهند که با افزایش اندیس توان کسر حجمی (p) و یا به‌عبارت دیگر افزایش فاز فلز و کاهش فاز سرامیک در ترکیب ورق مدرج تابعی ناحیه ناپایدار در صفحه پارامترها وسیع‌تر شده و منحنی تشدید به



(الف) (ب)

شکل ۵- تاثیر نسبت ضخامت به طول ورق (δ) روی الف) مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و ب) اولین منحنی تشدید؛ SSSS، $\eta=۱$ و $p=۱۰$

عرض‌های پایین‌تر انتقال می‌یابد. بر این اساس افزایش اندیس توان کسر حجمی سبب تضعیف پایداری دینامیکی ورق شده و مقدار سرعت جسم متحرک که سبب بروز تشدید در ورق می‌شود کاهش می‌یابد.

۵-۳- اثر پارامتر نسبت ضخامت به طول ورق مدرج تابعی روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی

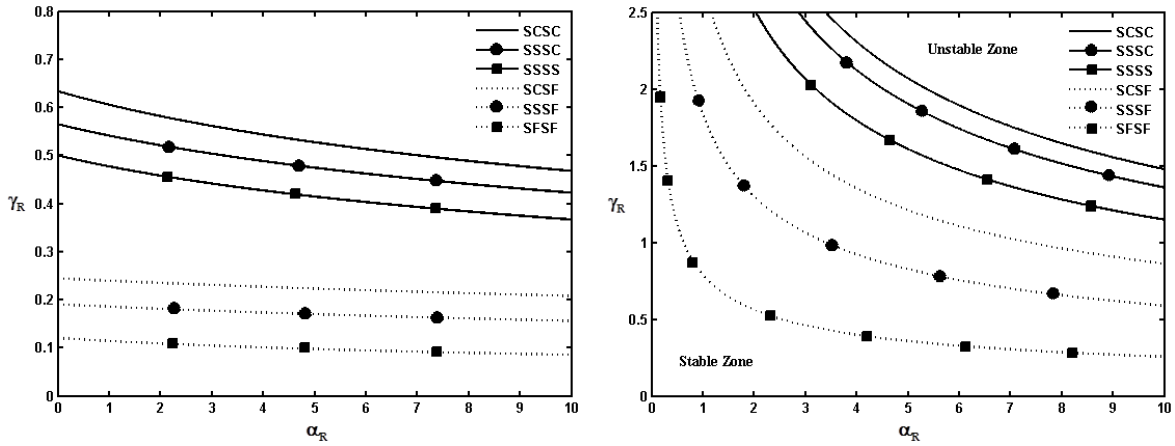
برای ورق مدرج تابعی با مشخصات SSSS، $\eta=۱$ و $p=۱۰$، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و اولین منحنی تشدید برای هر یک از مقادیر نسبت ضخامت به طول ورق $\delta=۰/۰۵, ۰/۱, ۰/۲$ به‌ترتیب در شکل (۵- الف) و (۵- ب) رسم شده و با هم مقایسه شده‌اند. در این بررسی، ورق با نسبت ضخامت به طول $\delta=۰/۱$ به‌عنوان ورق مرجع درنظرگرفته شده است.

شکل‌های (۵- الف) و (۵- ب) نشان می‌دهند که کاهش نسبت ضخامت به طول ورق (δ) سبب گسترش ناحیه ناپایدار و تضعیف پایداری سیستم و انتقال منحنی تشدید به عرض‌های پایین‌تر شده و در نتیجه برای جرم مشخصی از جسم متحرک، تشدید در ورق برای سرعت‌های کمتر روی می‌دهد.

۵-۴- اثر شرایط مرزی ورق مدرج تابعی روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی

برای ورق مدرج تابعی با مشخصات $\eta=۲$، $\delta=۰/۱۵$ و $p=۱$، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و اولین منحنی تشدید برای هر یک از شش شرایط مرزی SSSS، SFSF، SCSC، SCSF، SSSF، SSSC به‌ترتیب در شکل (۶- الف) و (۶- ب) رسم شده و با هم مقایسه شده‌اند. در این بررسی، ورق با شرایط مرزی SSSS به‌عنوان ورق مرجع درنظرگرفته شده است.

شکل (۶- الف) نشان می‌دهد که با کاهش قیود تکیه‌گاهی ورق، ناحیه‌ی ناپایدار گسترش یافته و پایداری سیستم تضعیف می‌شود. به این ترتیب که شرایط مرزی SFSF با کمترین قیود تکیه‌گاهی و SCSC با بیشترین قیود تکیه‌گاهی به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین سطح ناحیه ناپایدار را به خود اختصاص داده‌اند. از طرف دیگر شکل (۶- ب) نشان می‌دهد که کاهش قیود تکیه‌گاهی سبب انتقال منحنی تشدید به عرض‌های پایین‌تر شده و تشدید در ورق در سرعت‌های کمتر جسم متحرک روی دهد.



(الف) (ب)

شکل ۶- تاثیر شرایط مرزی ورق روی الف) مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و ب) اولین منحنی تشدید؛ $\eta=۲$، $\delta=۰/۱۵$ و $p=۱$

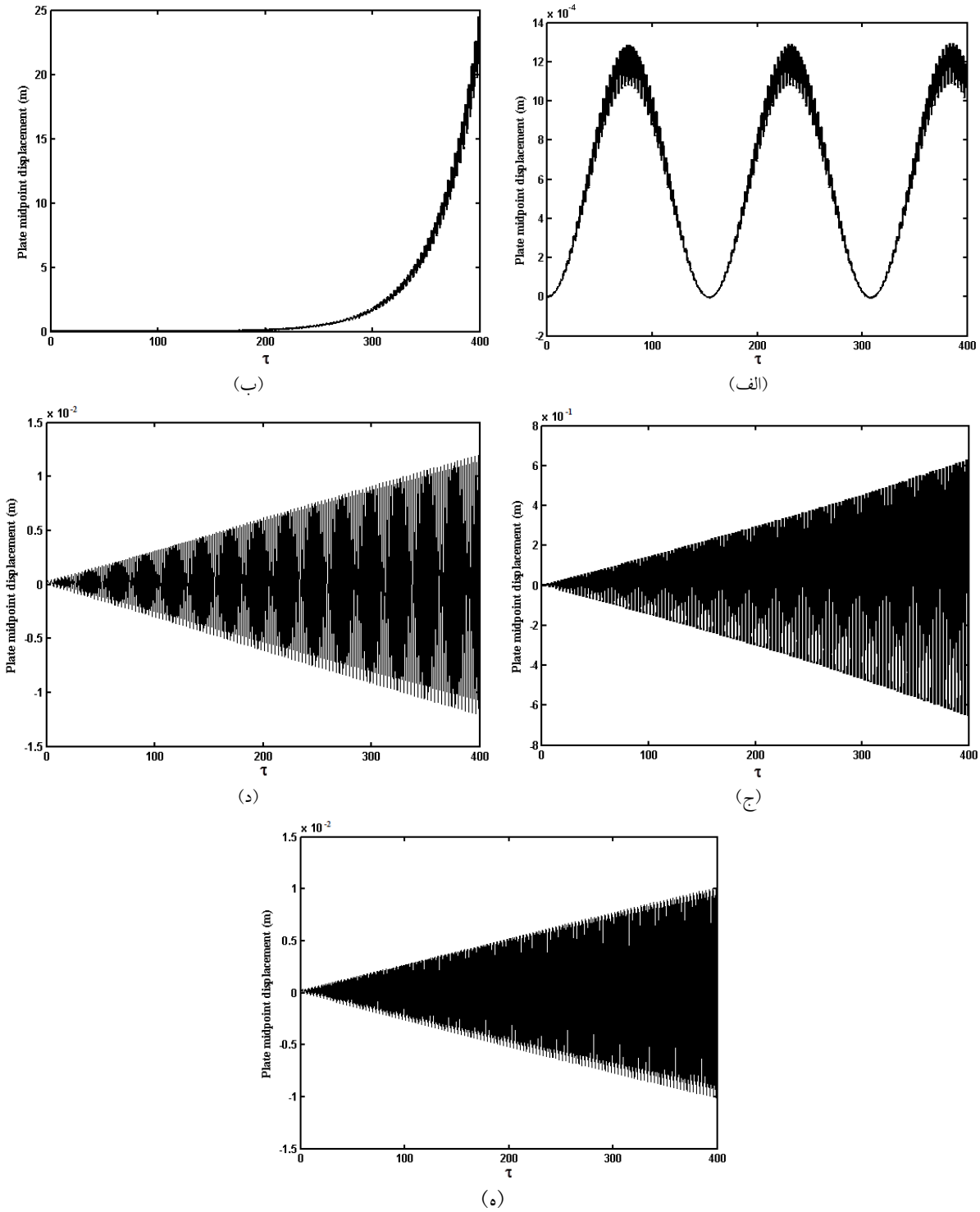
۶- صحت سنجی نتایج

در این بخش، با استفاده از چهار روش شبیه‌سازی عددی، مقایسه‌ی نتایج با نتایج حاصل از تئوری فلاکه، مقایسه نتایج با نتایج به‌دست آمده در مرجع [۲۱] و در نهایت از طریق مقایسه‌ی پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق مدرج تابعی حاصل از روش آنالیز هموتوپی با نتیجه حاصل از روش عددی رانج – کوتای مرتبه چهار[۲۵]، صحت نتایج به‌دست آمده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

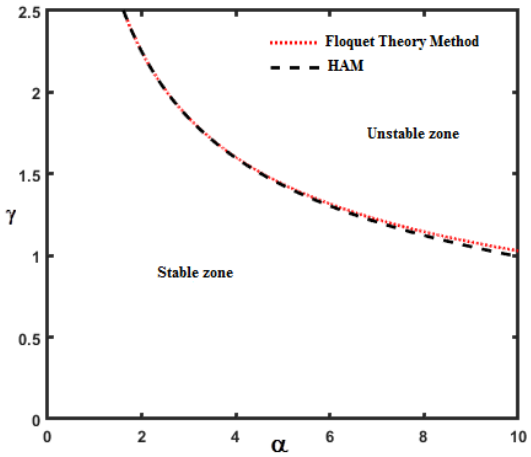
با استفاده از حل عددی معادله (۴۶)، شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه‌ی میانی ورق برای دو مشخصه $(\alpha=۵,\gamma=۱/۴۳۵)$ و $(\alpha=۵,\gamma=۱/۴۴)$ که به‌ترتیب در ناحیه پایدار و ناپایدار و در مجاورت مرز بین این دو ناحیه در شکل (۳) هستند و برای سه مشخصه $(\alpha=۳,\gamma=۰/۴۳۰۳)$ و $(\alpha=۳,\gamma=۰/۲۱۹۷)$ و $(\alpha=۳,\gamma=۰/۱۴۷۰)$ که به‌ترتیب روی منحنی مکان هندسی شرایط بروز تشدید $n=۱$، $n=۲$ و $n=۳$ در شکل (۳) هستند، در شکل (۷) نشان داده شده است. همان گونه که ملاحظه می‌شود پاسخ در شکل (۷ – الف) پایدار و در شکل (۷ – ب) ناپایدار بوده و در شکل‌های (۷ – ج)، (۷ – د) و (۷ – ر) تشدید روی داده است و به این ترتیب نتایج به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی مورد تایید قرارگرفته‌اند.

منحنی به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی در شکل (۳) با منحنی متناظر به‌دست آمده از روش تئوری فلاکه در شکل (۸) مقایسه شده است. مقایسه انجام شده نزدیکی نتیجه حاصل از هر دو روش را نشان داده و دقت نتیجه به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی را تایید می‌کند. لازم به ذکر است که در روش تئوری فلاکه به‌دلیل کنار گذاشته شدن بخش تحریک اجباری، شرایط بروز تشدید خارجی قابل تشخیص نیست.

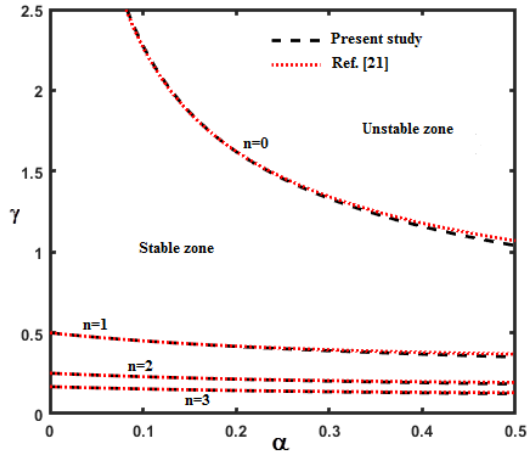
به‌منظور بررسی دقت نتایج از طریق مقایسه با نتایج به‌دست آمده در سایر مطالعات، نتایج مطالعه حاضر با نتایج گزارش شده توسط ترکان و همکاران [۲۱] مقایسه می‌شود. در این مطالعه آنها شرایط پایداری ورق همگن نازک تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک را مطالعه کردند. وقتی $\delta\leq۰/۰۲$ باشد، به‌دلیل این که توابع $\varphi_۱,\varphi_۲$ به سمت شیب‌های ناشی از جابجایی عرضی میل می‌کنند، نتایج حاصل از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به نتایج متناظر از تئوری کلاسیک ورق میل خواهد کرد. بر این اساس نتایج به‌دست آمده از آنالیز پایداری دینامیکی ورق همگن ($p\to\infty$) با نسبت ضخامت $\delta=۰/۰۲$ با نتایج مرجع [۲۱] که با درنظرگرفتن تئوری کلاسیک ورق حاصل شده‌اند، مقایسه می‌شود. با درنظرگرفتن



شکل۷- پاسخ زمانی نقطه میانی ورق مدرج تابعی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک با مشخصه الف) ($\alpha=۵,\gamma=۱/۴۳۵$) متعلق به ناحیه پایدار، ب) ($\alpha=۵,\gamma=۱/۴۴$) متعلق به ناحیه ناپایدار، ج) ($\alpha=۳,\gamma=۰/۴۳۰۳$) متعلق به اولین منحنی تشدید ($n=۱$)، د) ($\alpha=۳,\gamma=۰/۲۱۹۷$) متعلق به دومین منحنی تشدید ($n=۲$) و ه) ($\alpha=۳,\gamma=۰/۱۴۷۰$) متعلق به سومین منحنی تشدید ($n=۳$)؛ SSSS، $\delta=۰/۱$ و $p=۱$



شکل ۸- مقایسه بین مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار در یک ورق مدرج تابعی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک حاصل از روش آنالیز هموتوپی و روش تئوری فلاکه؛ SSSS، $\eta=1$، $\delta=0/1$ و $p=1$



شکل ۹- مقایسه بین نتایج آنالیز پایداری حاصل از مطالعه حاضر و مرجع [۲۱] ؛ SSSS، $\eta=1$، $\delta=0/02$ و $p\to\infty$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده برای تمام لبه‌های ورق و $\eta=1$، ضریب K_1 در رابطه (۴۲) برابر با ۱/۹۸۶۶ به‌دست آمده و با توجه به یکسان بودن ورق در این مقایسه، ضریب K_2 برابر یک درنظرگرفته می‌شود. به این ترتیب از رابطه (۶۴)، به ازای $n=0$ منحنی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و برای $n=1,2,3$ منحنی‌های شرایط بروز تشدید به‌دست آمده و مجموعه‌ای این منحنی‌ها در شکل (۹) با نتایج متناظر گزارش شده در مرجع [۲۱] مقایسه شده‌اند. مقایسه انجام شده نزدیکی نتایج مطالعه حاضر و نتایج مرجع [۲۱] را نشان می‌دهد.

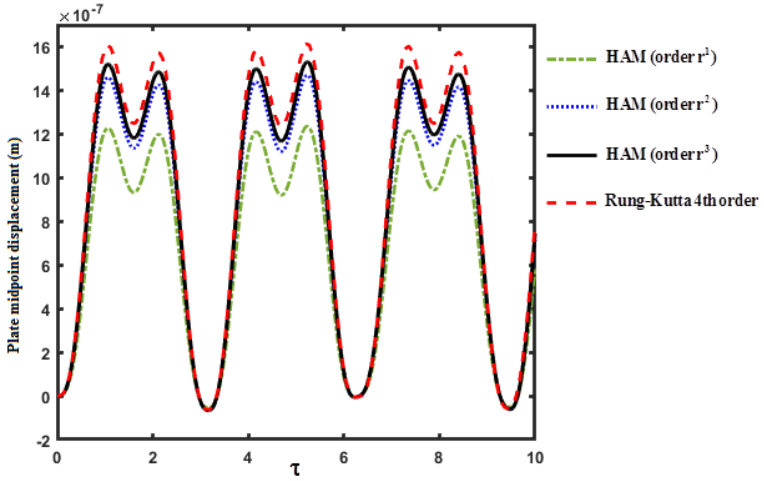
در آخرین گام ارزیابی نتایج، با استفاده از توابع زمانی به‌دست آمده در (۵۶)، حل نیمه‌تحلیلی معادله (۴۶) به روش آنالیز هموتوپی برای نقطه میانی ورق مدرج تابعی تا رتبه r^1، r^2 و r^3 به‌ترتیب به‌صورت:

$$\varphi_3(t)=a\tilde{\varphi}_{31}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\big(A_0(t)+A_1(t)\big)$$

$$\varphi_3(t)=a\tilde{\varphi}_{31}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\big(A_0(t)+A_1(t)+A_2(t)\big)$$

$$\varphi_3(t)=a\tilde{\varphi}_{31}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\big(A_0(t)+A_1(t)+A_2(t)+A_3(t)\big)$$

به‌دست آمده و با پاسخ نقطه میانی ورق به‌دست آمده از حل عددی معادله (۴۶) به روش رانج – کوتای مرتبه چهار مقایسه



شکل ۱۰- مقایسه حل عددی رانگ – کوتای مرتبه چهار با حل رتبه r^1، r^2 و r^3 حاصل از روش آنالیز هموتوپی برای پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق مدرج تابعی با مشخصه SSSS، $\eta=1$، $\delta=0/05$، $p=10$، $a=3m$، تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک با مشخصه $\gamma=0/2, \alpha=0/3$

می‌شوند. در این مقایسه، ورق مدرج تابعی با مشخصات $a=3$، $\eta=1$، $\delta=0/5$، $p=10$ و شرایط مرزی SSSS تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک با مشخصه $\gamma=0/2, \alpha=0/3$ درنظرگرفته شده است. در شکل (۱۰) این مقایسه نشان داده شده است. مقایسه انجام شده نشان می‌دهد که با افزایش رتبه حل، حل نیمه‌تحلیلی آنالیز هموتوپی به حل عددی رانج – کوتا همگرا شده و حل به‌دست آمده تا رتبه r^3 از دقت خوبی برخوردار بوده و به حل عددی بسیار نزدیک است.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از روش آنالیز هموتوپی ناپایداری دینامیکی ناشی از تشدید پارامتریک و تشدید خارجی ورق مستطیلی مدرج تابعی نسبتاً ضخیم تحت اثر عبور متناوب جرم‌های متحرک مورد مطالعه قرارگرفته است. ورق به‌صورت مخلوطی از فلز آلمینیوم و سرامیک آلومینا درنظرگرفته شده است به نحوی که چگالی و مدول یانگ ورق مطابق تابع توانی از یک کسر حجمی به‌صورت پیوسته در جهت ضخامت ورق تغییر می‌کنند. برای دو لبه موازی ورق شرایط تکیه‌گاهی ساده و برای دو لبه دیگر همه ترکیب‌های ممکن از نوع آزاد، تکیه‌گاه ساده و گیردار درنظرگرفته شده است. در این بررسی، اثرات اندیس توان کسر حجمی، نسبت ضخامت به طول ورق و شرایط مرزی ورق بر روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و شرایط بروز تشدید مطالعه شده است. آنالیز پایداری انجام شده به جمع‌بندی زیر منجر می‌شود.

- عبور متناوب جرم متحرک از روی ورق مدرج تابعی می‌تواند سبب شکل‌گیری ناپایداری ناشی از تشدید پارامتریک و تشدید خارجی می‌شود.
- در روش آنالیز هموتوپی از طریق تعیین ضابطه ریاضی برای ضابطه‌ی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و مکان هندسی شرایط بروز تشدید، شرایط ناپایداری در صفحه پارامترها تشخیص داده می‌شود.
- ناحیه ناپایدار در صفحه پارمترهای سیستم تحت تأثیر هر یک از عوامل افزایش اندیس توان کسر حجمی، کاهش قیود تکیه‌گاهی و کاهش نسبت ضخامت به طول ورق گسترش یافته و پایداری سیستم تضعیف می‌شود.
- با افزایش اندیس توان کسر حجمی، کاهش قیود تکیه‌گاهی و یا کاهش نسبت ضخامت به طول ورق، منحنی مکان هندسی شرایط بروز تشدید در صفحه پارامترهای سیستم به

عرض‌های پایین‌تر منتقل شده و به‌عبارت دیگر مقدار سرعت جسم متحرک که به ازای آن در ورق تشدید ایجاد می‌شود کاهش می‌یابد.

شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده برای پاسخ زمانی نقطه میانی ورق و نتایج به‌دست آمده از تئوری فلاکه، مؤید نتایج به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی هستند.

واژه‌نامه

1. parametric resonance
2. external resonance
3. functionally graded
4. volume fraction
5. Galerkin method
6. homotopy analysis method
7. power Index
8. Floquet theory
9. first-order shear deformation
10. Hamilton principle
11. classical plate theory
12. refined Rayleigh-Ritz method
13. homotopy perturbation method
14. improved modal analysis
15. dynamic amplification factor
16. isotropic
17. Poisson coefficient
18. shear correction factor
19. Navier
20. partial differential equation
21. ordinary differential equation
22. alumina
23. Dirac delta function
24. secular terms
25. Runge – Kutta 4th Order

مراجع

1. Malekzadeh, P., Lee, Y. Y., and Liew, K. M., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Using the Element-Free-KP-Ritz method", *Journal Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 918-939, 2009.
2. Malekzadeh, P., and Darai, M., "Dynamic Analysis of Functionally Graded Truncated Conical Shells Subjected to Asymmetric Moving Loads", *Thin-Wall Structures*, Vol. 84, pp. 1-13, 2014.
3. Song, Q., Shi, J., and Liu, Z., "Vibration Analysis of a Functionally Graded Plate with a Moving Mass", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 46, pp. 141-160, 2017.
4. Yousezadeh, S., Akbari, A., and Najafi, M., "Dynamic Response of FG Rectangular Plate in Contact with Stationary Fluid under Moving Load", *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 6, pp. 213-224, 2019 (In Persian).
5. Nelson, H. D., and Conover, R. A., "Dynamic Stability of a Beam Carrying Moving Masses", *Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 4, pp.1003-1006, 1971.
6. Mackertich, S., "Dynamic Stability of a Beam Excited by a Sequence of Moving Mass Particles", *Acoustical Society of America*, Vol. 115, No. 4, pp. 1416-1419, 2004.
7. Aldraihem, O. J., and Baz, A., "Dynamic Stability of Stepped Beams under Moving Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 250, No. 5, pp. 835-848, 2002.
8. Rao, G. V., "Linear Dynamics of an Elastic Beam under Moving Loads", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, pp. 281-289, 2000.
9. Pirmoradian, M., and Karimpour, H., "Nonlinear Effects on Parametric Resonance of a Beam Subjected to Periodic Mass Transition", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 284-292, 2017 (In Persian).
10. Torkan, E., Pirmoradian, M., and Hashemian, M., "Stability Analysis of Transverse Vibrations of Rectangular Plate under Periodic Passage of Moving Masses", *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 8, No. 3, pp. 18-26, 2017 (In Persian).
11. Torkan, E., Pirmoradian, M., and Hashemian, M., "Instability Inspection of Parametric Vibrating Rectangular Mindlin Plates Lying on Winkler Foundations under Periodic Loading of Moving Masses", *Acta Mechanica Sinica*, Vol.35, pp. 242-263, 2019.
12. Torkan, E., Pirmoradian, M., and Hashemian, M., "Dynamic Instability Analysis of Moderately Thick Rectangular Plates Influenced by an Orbiting Mass Based on the First-Order Shear Deformation Theory", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 9, pp. 2203-2213, 2019 (In Persian).
13. Ghomeshi Bozorg, M., and Keshmiri, M., "Stability Analysis of a Beam under the Effect of Moving Masses Using Homotopy Perturbation Method", *Journal of Computational Methods in Engineering*, Vol. 34, No. 1, pp. 79-95, 2015 (In Persian).
14. Hassanabadi, M. E., Attari, N. K. A., Nikkhoo, A., and Mariani, S., "Resonance of a Rectangular Plate Influenced by Sequential Moving Mass", *Coupled Systems Mechanics*, Vol. 5, pp.87-100, 2016.
15. Liao, S. J., "Comparison Between the Homotopy Analysis Method and Homotopy Perturbation Method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, pp. 1186-1194, 2005.
16. Yousefzadeh, Sh., Akbari, A., and Najafi, M., "Hydro-Elastic Vibration Analysis of Functionally

Graded Rectangular Plate in Contact with Stationary Fluid", *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 27, pp. 229-246, 2018.
17. Hosseini-Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., and Omidi, M., "Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates using First-Order Shear Deformation Plate Theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 1276-1291, 2010.
18. Wang, C., Wu, Y. Y., and Wu, W., "Solving the Nonlinear Periodic Wave Problems with the Homotopy Analysis Method", *Wave Motion*, Vol. 4, pp. 329-337, 2005.
19. Qian, Y., and Chen, S., "Accurate Approximate Analytical Solutions for Multi-Degree-of-Freedom Coupled Vander Pol-Duffing Oscillators by Homotopy Analysis Method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, pp. 3113–3130, 2010.
20. D' Angelo, H., *Linear Time-Varying System: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
21. Torkan, E., and Pirmoradian, M., and Hashemian, M., "On the Parametric and External Resonances of Rectangular Plates on an Elastic Foundation Traversed by Sequential Masses", *Archive Applied Mechanics*, Vol. 88, pp. 1411-1428, 2018.

پیوست

ضرایب توابع زمانی $A_3(t), A_2(t), A_1(t)$، حاصل از حل معادلات آنالیز هموتوپی تا رتبه r^3، به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$a_1 = -\frac{4\lambda g\bar{\alpha}_R}{\pi K_1 a\omega^2}$$

$$a_{2n} = -\frac{8\lambda g\bar{\alpha}_R}{\pi(1-4n^2)(\omega^2-4n^2\bar{\omega}_{R1}^2)}$$

$$a_3 = -\left(a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\right)$$

$$b_1 = -\frac{\lambda\bar{\alpha}_R a_3}{8\bar{\omega}_{R1}}(\omega+\bar{\omega}_{R1})$$

$$b_2 = -\frac{\lambda\bar{\alpha}_R a_3}{8\bar{\omega}_{R1}}(\omega-\bar{\omega}_{R1})$$

$$b_{3n} = a_{2n}\left(1+\lambda(1+\bar{\alpha}_R)\right)$$

$$b_{4n} = \frac{\lambda\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2(2n+1)^2 a_{2n}}{2\left(\omega^2-4(n+1)^2\bar{\omega}_{R1}^2\right)}$$

$$b_{4n} = \frac{\lambda\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2(2n+1)^2 a_{2n}}{2\left(\omega^2-4(n+1)^2\bar{\omega}_{R1}^2\right)}$$

$$b_{5n} = \frac{\lambda\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2(2n-1)^2 a_{2n}}{2\left(\omega^2-4(n-1)^2\bar{\omega}_{R1}^2\right)}$$

$$b_6 = a_1\left(1+\lambda(1+\bar{\alpha}_R)\right)$$

$$b_7 = \frac{\lambda\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2 a_1}{\omega^2-4\bar{\omega}_{R1}^2}$$

$$b_8 = -\left(b_1 + b_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_{3n}+b_{4n}+b_{5n}) + b_6 + b_7\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{8\bar{\omega}_{R1}(\omega+\bar{\omega}_{R1})}\left[2b_1\left((2+\bar{\alpha}_R)(\omega+2\bar{\omega}_{R1})^2-\left(1+\lambda_1+\lambda(\omega_1^2-\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2)\right)\right)-\lambda b_8\bar{\alpha}_R(\omega+\bar{\omega}_{R1})^2\right]$$

$$c_2 = \frac{1}{8\bar{\omega}_{R1}(\omega-\bar{\omega}_{R1})}\left[-2b_1\left((2+\bar{\alpha}_R)(\omega-2\bar{\omega}_{R1})^2-\left(1+\lambda_1+\lambda(\omega_1^2-\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2)\right)\right)+\lambda b_8\bar{\alpha}_R(\omega-\bar{\omega}_{R1})^2\right]$$

$$c_{3n} = \frac{1}{4n^2\omega_{R1}^2 - \omega^2}\left[\tilde{\lambda}\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}\left(b_{4n}\left(-2\bar{\omega}_{R1}(n+1)^2 + 2(n+1) - \frac{\bar{\omega}_{R1}}{2}\right) + b_{5n}\left(-2\bar{\omega}_{R1}(n-1)^2 + 2(n-1) - \frac{\bar{\omega}_{R1}}{2}\right)\right)\right]$$

$$c_{4n} = \frac{1}{4(n+1)^2\bar{\omega}_{R1}^2 - \omega^2}\left[-2\tilde{\lambda}\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 b_{3n} + \left(4(n+1)^2\,\bar{\omega}_{R1}^2(2+\bar{\alpha}_R) - \left(1+\lambda_1 + \tilde{\lambda}\left(\omega_1^2 - \bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2\right)\right)b_{4n}\right]$$

$$c_{5n} = \frac{1}{4(n-1)^2\bar{\omega}_{R1}^2 - \omega^2}\left[-2\tilde{\lambda}\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 b_{3n} + \left(4(n-1)^2\,\bar{\omega}_{R1}^2(2+\bar{\alpha}_R) - \left(1+\lambda_1 + \tilde{\lambda}\left(\omega_1^2 - \bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2\right)\right)b_{5n}\right]$$

$$c_6 = \frac{1}{\omega^2}\left[\lambda_2 a_1 + b_6\left(1+\lambda_1 + \tilde{\lambda}(\omega_1^2 - \bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2)\right) + 2\tilde{\lambda}b_7\bar{\omega}_{R1}^2\left(1 - \frac{3\bar{\alpha}_R}{2}\right)\right]$$

$$c_7 = \frac{1}{\omega^2 - 4\bar{\omega}_{R1}^2}\left[\tilde{\lambda}b_6\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2 + b_7\left(-4\bar{\omega}_{R1}^2(2+\bar{\alpha}_R) + \left(1+\lambda_1 + \tilde{\lambda}(\omega_1^2 - \bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2)\right)\right)\right]$$

$$c_8 = -\frac{\tilde{\lambda}b_1\bar{\alpha}_R}{4\omega + 8\bar{\omega}_{R1}}\left(\frac{\omega^2}{4\bar{\omega}_{R1}} + \frac{3\omega}{2} + \frac{7\bar{\omega}_{R1}}{4}\right)$$

$$c_9 = \frac{\tilde{\lambda}b_1\bar{\alpha}_R}{4\omega - 8\bar{\omega}_{R1}}\left(\frac{\omega^2}{4\bar{\omega}_{R1}} - \frac{3\omega}{2} + \frac{9\bar{\omega}_{R1}}{4}\right)$$

$$c_{10n} = \frac{-2\tilde{\lambda}b_{4n}\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2}{4(n+2)^2\bar{\omega}_{R1}^2 - \omega^2}\left[(n+1)^2 + \left(n+\frac{5}{4}\right)\right]$$

$$c_{11n} = \frac{-2\tilde{\lambda}b_{5n}\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2}{4(n-2)^2\bar{\omega}_{R1}^2 - \omega^2}\left[(n-1)^2 - \left(n-\frac{5}{4}\right)\right]$$

$$c_{12} = \frac{9\tilde{\lambda}b_7\bar{\alpha}_R\bar{\omega}_{R1}^2}{2\omega^2 - 32\bar{\omega}_{R1}^2}$$