نشریه علمی - پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱، ص. ۷۷-۶۱

مقاله پژوهشی

بررسی تحلیلی و عددی کمانش تیر همگن پوشیده شده با مواد مدرج تابعی متخلخل، با شرایط مرزی مختلف

حمزه صالحی‌پور*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ایلام

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱/۱۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۴/۶)

چکیده– در این مقاله کمانش استاتیکی تیرهای همگن پوشیده شده با لایه تشکیل شده از مواد مدرج تابعی متخلخل، با شرایط مرزی مختلف بر اساس تئوری تیر تیموشنکو بررسی شده است. از اصل کار مجازی برای به‌دست آوردن روابط حاکم بر مسئله استفاده شده است و سپس دو روش حل تحلیلی دقیق و حل عددی برای به‌دست آوردن نیروی کمانش و حل روابط مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روابط حاکم به‌صورت یک سری رابطه دیفرانسیل معمولی جفت شده هستند. در حل تحلیلی ابتدا این روابط با استفاده از یک سری عملیات ریاضی جدا می‌شوند و سپس حل می‌شوند. حل به‌دست آمده دارای یک سری پارامترها و ثابت‌های مجهول است. با استفاده از روابط شرایط مرزی در دو انتهای تیر یک دستگاه رابطه همگن استخراج می‌شود که از رویه حل نابدیهی آن، مقدار نیروی کمانش محوری تیر به‌دست می‌آید. در حل عددی از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای حل روابط استاتیکی استفاده شده است. در پایان، نتایج عددی ارائه شده است و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت ضخامت به طول تیر، ضخامت لایه متخلخل، مقدار پارامتر تخلخل بر روی میزان نیروی کمانش مطالعه شده است. مقایسه نتایج به‌دست آمده از دو روش حل تحلیلی و عددی، صحت و اعتبار هر دو روش را تایید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: کمانش استاتیکی، تیر تیموشنکو، مواد مدرج تابعی متخلخل، حل تحلیلی دقیق، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته.

Analytical and Numerical Study on the Buckling of Homogeneous Beams Coated by a Functionally Graded Porous Layer with Different Boundary Conditions

H. Salehipour *

Department of Mechanical Engineering, Ilam University, Ilam, Iran.

Abstract*: In this paper, static buckling of homogeneous beams coated by a functionally graded porous layer with different*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: h.salehipour@ilam.ac.ir

boundary conditions is investigated based on the Timoshenko beam theory. The principle of virtual work has been used to obtain the governing equations. Two different methods, namely analyticalsolution and numerical solution are used to solve the governing equations and extract the buckling force. The governing equations are coupled as a series of ordinary differential equations. In the analytical solution, these equations are first uncoupled using a series of mathematical operations, and are then solved. The obtained solution has a series of parameters and unknown constants. Using the boundary conditions at the boundaries of the beam, a homogeneous system of equations is extracted, from which the axial buckling force is obtained. In the numerical solution, the generalized differential quadrature method is used to solve the static equations. Finally, the numerical results are presented and the effects of various parameters such as thickness to beam length ratio, porous layer thickness, porosity parameter, etc. on the buckling of the beam are investigated. Comparison of the results obtained from the two analytical and numerical solution methods confirms the accuracy and validity of both methods.

Keywords: ***Static buckling, Timoshenko beam, Functionally graded porous material, Exact analytical solution, Generalized differential quadrature method.***

فهرست علائم

b	عرض تیر	u_z	مولفه جابه‌جایی در راستای ضخامت z تیر
$\bar{E}$	مدول الاستیسیته	u_0	جابه جایی محوری در سطح میانی تیر
$e_\circ$	پارامتر تخلخل	W	کار خارجی ناشی از نیروی محوری کمانش
h	ضخامت تیر	w_0	جابه جایی عرضی در سطح میانی تیر
h_0	ضخامت لایه همگن	x_i	نقاط شبکه
L	طول تیر	α	پارامتر تخلخل
$L_{ij}^{(g)}$	ضریب وزن برای مشتق مرتبه gام	ν	ضریب پواسون
n	تعداد نقاط شبکه‌بندی	ψ	چرخش تیر حول صفحه میانی
$P_\circ$	بار محوری عمل کننده بر تیر	σ_{ij}	مولفه تنش
U	انرژی پتانسیل	ε_{ij}	مولفه کرنش
u_x	مولفه جابه‌جایی در راستای محور طولی x		

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی[۱] (FGM) ابتدا توسط گروهی از دانشمندان ژاپنی در دهه ۸۰ میلادی در قرن بیستم معرفی شدند. درصد اجزا تشکیل دهنده در این مواد کامپوزیتی از یک نقطه از بدنه ماده تا نقطه دیگر در آن به‌صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند و از اینرو خواص فیزیکی و مکانیکی نیز از یک نقطه تا نقطه دیگر در داخل ماده نیز به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند. در مواد کامپوزیتی چند لایه، لایه‌ها بر اثر تنش‌های حرارتی و یا تنش‌های نیرویی زیاد جدا می‌شوند که با پیدایش مواد FGM این مشکلات حل شدند. از این‌رو مواد FGM توانستند در تعدادی زیادی از کاربردهای صنعتی جایگزین مناسبی برای مواد کلاسیک مرسوم باشند [۱ و ۲].

امروزه نسل جدیدی از مواد به‌نام مواد متخلخل[۲] به‌دلیل ویژگی‌های منحصر به‌فردی که دارند مورد توجه بسیاری از محققان و دانشمندان در سرتاسر دنیا قرار گرفتند و در بسیاری از صنایع از جمله صنایع هوافضا، خودروسازی و مهندسی عمران استفاده می‌شوند [۶-۳]. مواد متخلخل به‌دلیل سبک بودن و همچنین دارا بودن حفره‌های زیاد قادر به جذب درصد بالایی از انرژی هستند و می‌توانند به‌عنوان سازه‌های مقاوم تحت اثر بار دینامیکی مورد استفاده قرار گیرند. در سال‌های اخیر، موادی توسعه داده شده‌اند که تخلخل در آنها از یک نقطه تا نقطه دیگر به‌صورت تدریجی تغییر می‌کند. این دسته از مواد را مواد مدرج تابعی متخلخل[۳] (FGP) می‌نامند که کاربردهای گوناگونی در

صنایع مختلف دارند [۱۰–۷].

در چند سال اخیر محققانی از سراسر دنیا به بررسی رفتار مکانیکی سازه‌های تشکیل شده از مواد FGP پرداخته‌اند. در ادامه پژوهش‌هایی که به بررسی کمانش این سازه‌ها پرداخته‌اند را بررسی می‌کنیم. مجاهدین و همکارن کمانش ورق‌های دایره‌ای FGP را براساس یک تئوری برشی مرتبه بالاتر ورق مطالعه کردند و نتایج به‌دست آمده را با نتایج حاصل از تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول مقایسه کردند [۱۱]. کیتوپورنیچای و همکاران ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای FGP را براساس تئوری تیر تیموشنکو مورد مطالعه قرار دادند [۱۲]. آنها از روش ریتز برای حل روابط استفاده و تأثیر پارامترهای مختلف را بر رفتار مکانیکی سازه بررسی کردند. آنها در یک مقاله دیگر، همین روش حل را برای مطالعه ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های FGP براساس تئوری برشی مرتبه اول ورق‌ها به‌کار بردند [۱۳]. دانگ و همکاران کمانش پوسته‌های استوانه‌ای FGM در حال چرخش که با نانو کامپوزیت متخلخل[۴] تقویت شده‌اند را مورد بررسی قرار دادند [۱۴]. آنها از تئوری برشی مرتبه اول پوسته‌ها استفاده کردند و تغییرات خواص را فقط در راستای ضخامت و در جهت شعاعی پوسته درنظر گرفتند. همچنین آنها روش گلرکین[۵] را به‌همراه یک سری توابع وزن خاص برای شرایط مرزی مختلف به‌کار بردند. ژه هوان و همکاران کمانش غیرخطی ورق‌های FGP تقویت شده را مورد مطالعه قرار دادند [۱۵]. آنها دانل تئوری[۶] را به‌همراه تئوری برشی مرتبه اول ورق برای استخراج روابط حاکم استفاده کردند، سپس روش گلرکین را برای حل روابط به‌کار بردند. لیو و همکاران کمانش جفت شده مکانیکی–حرارتی تیرهای ساندویچی (چند لایه) FGP را با استفاده از تئوری برشی سینوسی تیر به‌ازای شرایط مرزی مختلف بررسی کردند [۱۶]. یاس و رحیمی کمانش حرارتی تیرهای نانوکامپوزیتی FGP را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته[۷] (GDQM) برای شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار دادند [۱۷]. ترینه و همکاران کمانش تصادفی ورق‌های FGP را براساس یک روش نیمه‌تحلیلی مطالعه کردند [۱۸]. آنها با استفاده از یک تئوری برشی بهبودیافته مرتبه بالاتر ورق و شبیه‌سازی مونت کارلو[۸]، نیروی کمانش ورق را به‌صورت فرم–بسته استخراج کردند و نتایج مفصلی به‌صورت عددی ارائه کردند. رفیعی آناماق و بدیز رفتار ارتعاشی و کمانشی ورق‌های FGP تقویت شده با پلاکت‌های گرافین[۹] را با استفاده از روش طیفی چبیشف[۱۰] و تئوری برشی مرتبه اول ورق بررسی کردند [۱۹]. هانگ و همکاران کمانش غیرخطی پوسته‌های FGP با ضخامت متغیر قرار گرفته در یک محیط الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند [۲۰]. آنها با استفاده از روش گلرکین یک پاسخ فرم بسته برای نیروی کمانش به‌دست آوردند و مشاهده کردند که تخلخل می‌تواند تأثیر قابل توجهی روی نیروی کمانش داشته باشد. فروتن و همکاران کمانش‌های استاتیکی و دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ناقص FGP را با استفاده از روش عددی رانگ کوتا[۱۱] مورد مطالعه قرار دادند [۲۱]. نگوین و همکاران یک نظریه برشی مرتبه بالای سه متغیره را مورد استفاده قرار داده و خمش استاتیکی، ارتعاشات آزاد، کمانش و پایداری ورق‌های FGP تقویت شده با پلاکت‌های گرافن را بررسی کردند [۲۲]. انتخاب این تئوری سبب شد تا نتایج با دقت بالا به‌دست آیند. پایداری غیرخطی و کمانش ناشی از ضربه بر پوسته FGP نانوکامپوزیتی با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی توسط لی بررسی شده است. در مقاله ایشان از مدل متقارن برای توزیع نقاط تخلخل استفاده شده است [۲۳]. لی و همکاران کمانش استاتیکی پوسته‌های FGP تقویت شده با پلاکت‌های گرافن که تحت یک میدان حرارتی قرار دارند را با استفاده از یک روش تحلیلی دقیق بررسی کردند [۲۴]. آنها از روش انرژی و تئوری پوسته‌های نازک برای به‌دست آوردن روابط حاکم استفاده کردند. زو و همکاران کمانش استاتیکی و دینامیکی لوله‌های FGP با نقص هندسی را بررسی کردند [۲۵]. آنها تغییرات خواص تخلخل را در راستای شعاعی درنظر گرفتند و از تئوری تیر اویلر–برنولی به‌همراه روش انرژی برای استخراج روابط استفاده کردند. سپس روابط را با استفاده از یک روش تحلیلی دقیق حل

کردند و تأثیر پارامترهای مختلف روی نیروی کمانش را بررسی کردند. کوونگ-لو و همکاران یک حل سه بعدی برای ارتعاشات آزاد و همچنین کمانش ورق‌های دایره‌ای و پوسته‌های استوانه‌ای FGP با استفاده از روش تجزیه‌وتحلیل ایزوژئومتریک[۱۲] انجام دادند [۲۶].

یکی از کاربردهای مهم مواد FGP استفاده از آنها به‌عنوان لایه‌های پوششی برای سازه‌های غیر متخلخل به‌عنوان جاذب انرژی و عایق است که استحکام لازم را نیز در برابر نیروهای خارجی دارد. تاکنون پژوهش‌های بسیار اندکی در این زمینه صورت گرفته است و علت آن نوپا بودن مواد FGP است. در پژوهش حاضر کمانش تیرهای همگن پوشیده شده با لایه FGP براساس تئوری تیر تیموشنکو (مرتبه اول) بررسی می‌شود. بررسی رفتار کمانشی اینگونه از تیرها و اثر ضخامت لایه های مختلف روی مقادیر نیروی کمانش تیر اصلی ترین نوآوری مقاله است که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. حل مساله فوق تاکنون با هیچ کدام از روش های تحلیلی و عددی انجام نشده است. از اصل کار مجازی برای به‌دست آوردن روابط کمانش و شرایط مرزی استفاده می‌شود. در ادامه، روابط دیفرانسیل حاکم بر مساله با استفاده از دو روش حل تحلیلی دقیق و روش عددی GDQM حل می‌شوند. روش تحلیلی ارائه شده برای اولین بار است که برای بررسی رفتار تیرهای FGP براساس تئوری تیر تیموشنکو ارائه می‌شود. روش حل تحلیلی یک روش ریاضی است که به صورت کاملا دقیق مقادیر نیروی کمانش را به‌صورت پارامتری و براساس حل تحلیلی معادلات کمانش استخراج می‌کند. در روش حل عددی از روش عددی محبوب و کاربردی GDQM استفاده است. روش GDQM بر این اساس استوار است که معادلات دیفرانسیل را بر اساس نقاط شبکه به‌صورت یک چندجمله‌ای (درجه چندجمله‌ای متناسب با نقاط شبکه است) که از نقاط شبکه می گذرد تقریب می زند و بدین ترتیب معادلات دیفرانسیل به یک سری معادلات گسسته شبکه‌بندی شده تبدیل می‌شوند. از مزایای حل GDQM ارائه جواب‌های دقیق و بسیار نزدیک به حل تحلیلی است. هر کدام از دو روش حل مزایای مربوط به خود را دارند. در حل عددی مطالعه پارامتری کمانش آسانتر است و نتایج به‌دست امده دقیق هستند. در روش عددی GDQM نیز می‌توان به نتایج نسبتا دقیق درحد نتایج حل تحلیلی دست یافت که کاملا در جدول‌های ارائه شده در مقاله، این امر مشهود است. ارائه نتایج با استفاده از روش عددی برای یک طیف گسترده از مقادیر پارامترها بسیار ساده‌تر است، زیرا می توان با استفاده از کدنویسی و حلقه‌های تکرار این کار را به سادگی انجام داد. در پایان و در بخش نتایج هم تأثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت ضخامت لایه FGP به کل ضخامت تیر، میزان تخلخل، و تابع توزیع تخلخل روی کمانش تیر بررسی می‌شود.

۲- مدلسازی ریاضی

۲-۱- تیر همگن پوشیده شده با لایه تشکیل شده از مواد FGP

یک تیر همگن پوشیده شده با لایه تشکیل شده از مواد FGP به‌همراه جزییات هندسه تیر و محورهای مختصات در شکل (۱) نمایش داده شده است. محورهای x و z به‌ترتیب در راستای طول و ضخامت تیر هستند. تابع توزیع تخلخل در راستای ضخامت لایه FGP براساس یکی از سه مدل غیریکنواخت متقارن (مدل ۱)، غیریکنواخت غیر متقارن (مدل ۲) و یکنواخت (مدل ۳) درنظر گرفته می‌شود که رابطه مدول الاستیسیته برحسب مختصه z در راستای ضخامت براساس این سه مدل به‌شرح زیر است [۲۷]:

$$E(z)=\begin{cases}\bar{E} & z<h_0-h/2\\ \bar{E}\left(1-e_0\cos\left(\dfrac{\pi\left(z-h_0/2\right)}{h-h_0}\right)\right) & z\geq h_0-h/2\end{cases}$$

(۱- الف)

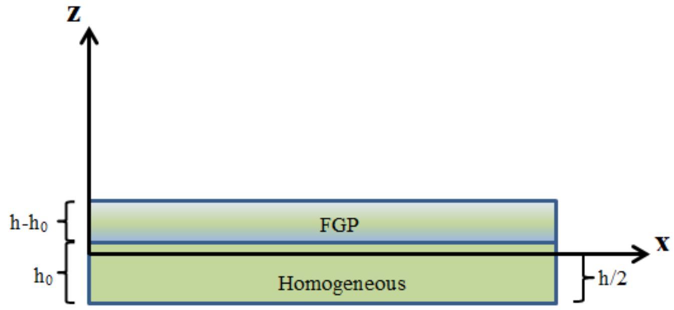
$$E(z)=\begin{cases}\bar{E} & z<h_0-h/2\\ \bar{E}\left(1-e_0\cos\left(\dfrac{\pi\left(z-\left(h_0-h/2\right)\right)}{2\left(h-h_0\right)}\right)\right) & z\geq h_0-h/2\end{cases}$$

(۱- ب)

$$E(z)=\begin{cases}\bar{E} & z<h_0-h/2\\ \bar{E}\left(1-e_0\alpha\right) & z\geq h_0-h/2\end{cases}$$

(۱- پ)

که در روابط بالا $\bar{E}$ مدول الاستیسیته در کف لایه FGP است.



شکل ۱- تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP به همراه هندسه و مختصات

e_0 و α پارامترهای تخلخل هستند که از یکدیگر مستقل نیستند و می‌توان با استفاده از رابطه زیر مقدار α را بر حسب e_0 به‌دست آورد:

$$\alpha = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1-e_0} - \frac{2}{\pi} + 1\right)^2 \tag{۲}$$

۲-۲- تئوری تیر تیموشنکو (برشی مرتبه اول)

در تئوری تیر تیموشنکو یا همان تئوری برشی تیر مرتبه اول، جابه‌جایی‌ها در سه جهت مختصات برای تیر به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z,t) &= u_0(x,t) + z\psi(x,t) \\ u_y(x,y,z,t) &= 0 \\ u_z(x,y,z,t) &= w_0(x,t) \end{aligned} \tag{۳}$$

که u_x و u_z به‌ترتیب مولفه‌های جابه‌جایی در راستای محور طولی x و در راستای ضخامت z تیر هستند. همچنین u_0 و w_0 مولفه‌های جابه‌جایی در سطح میانی تیر و ψ میزان چرخش تیر حول صفحه میانی تیر هستند. از انجا که از تئوری برشی مرتبه اول تیر برای استخراج روابط حاکم بر مسئله استفاده می‌شود و این تئوری متغیرهای مربوط به چرخش صفحه میانی را دارد، از اینرو می‌توان اطمینان حاصل کرد که مدل‌سازی فوق اثرات متقابل خمش و نیروی محوری تیر را درنظر می‌گیرد.

۳-۲- روابط کمانش و شرایط مرزی

برای به‌دست آوردن روابط حاکم بر مسئله، در ابتدا باید مولفه‌های کرنش و تنش برحسب مولفه‌های جابه‌جایی در رابطه (۳) استخراج شوند. کرنش‌ها برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \partial u_0/\partial x + z\,\partial\psi/\partial x \\ \lambda_{xz} &= \partial w_0/\partial x + \psi \end{aligned} \tag{۴}$$

و تنش‌ها نیز برحسب کرنش‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E(z)\varepsilon_{xx} = E(z)\left(\partial u_0/\partial x + z\,\partial\psi/\partial x\right) \\ \sigma_{xz} &= \left(E(z)/2(1+\upsilon)\right)\gamma_{xz} = \left(E(z)/2(1+\upsilon)\right)\left(\partial w_0/\partial x + \psi\right) \end{aligned} \tag{۵}$$

برای استخراج روابط استاتیکی و شرایط مرزی از اصل کار مجازی استفاده می‌شود که رابطه آن به‌صورت زیر است:

$$\delta(W-U) = 0 \tag{۶}$$

که در این رابطه W و U به‌ترتیب کار خارجی ناشی از نیروی محوری کمانش و انرژی پتانسیل هستند و به‌صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2}\int_0^b\int_0^L \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}\,dx\,dy\,dz \tag{الف -۷}$$

$$\delta W = \int_0^L P_0\left(\partial w_0/\partial x\right)\left(\delta\partial w_0/\partial x\right)dx \tag{الف -۷}$$

که در این رابطه P_0 بار محوری عمل کننده بر تیر است. محل اعمال بار محوری تیر همانند آنچه که در سایر مقالات بیان شده است درست در مرکز آن و یا به عبارت بهتر در تارمیانی تیر درنظر گرفته شده است. با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۶-الف) و سپس جایگذاری روابط (۷) در رابطه (۶) و استفاده از روش انتگرال جزء به جزء، و سپس مساوی صفر قرار دادن ضرایب δu_0، $\delta\psi$ و δw_0، روابط کمانش استاتیکی به‌همراه روابط شرایط مرزی به‌صورت زیر استخراج می‌شوند:

(۸- الف)
$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0$$

(۸- ب)
$$\delta \psi : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - F_{xz} = 0$$

(۸- پ)
$$\delta w_0 : \frac{\partial F_{xz}}{\partial x} - P_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0$$

و روابط شرایط مرزی در دو انتهای تیر به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

(۹- الف)
$$u_0 = 0 \quad \text{or} \quad N_{xx} = 0$$

(۹- ب)
$$\psi = 0 \quad \text{or} \quad M_{xx} = 0$$

(۹- پ)
$$w_0 = 0 \quad \text{or} \quad F_{xz} - P_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$

که در روابط بالا:

(۱۰- الف)
$$N_{xx} = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz dy$$

(۱۰- ب)
$$M_{xx} = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz dy$$

(۱۰- پ)
$$F_{xz} = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz dy$$

با استفاده از روابط ۵ و ۹ در روابط (۸) می‌توان روابط استاتیکی را به‌صورت زیر برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به‌دست آورد:

(۱۱- الف)
$$\delta u_0 : E_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + E_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

(۱۱- ب)
$$\delta \psi : E_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{E_0}{2(1+\upsilon)} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi \right) = 0$$

(۱۱- پ)
$$\delta w_0 : \frac{E_0}{2(1+\upsilon)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - P_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$

که در روابط بالا:

(۱۲)
$$\begin{Bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \times E(z) dz$$

۳- حل روابط حاکم بر مسئله

۳-۱- روش حل تحلیلی

برای حل روابط حاکم بر مسئله، ابتدا باید روابط را از حالت جفت شده دیفرانسیلی خارج کرد. از رابطه (۱۱- الف) $\partial^2 u_0 / \partial x^2$ در رابطه (۱۱- ب) جایگذاری می‌شود و رابطه زیر به‌دست می‌آید:

(۱۳)
$$\left(E_2 - \frac{E_1^2}{E_0} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{E_0}{2(1+\upsilon)} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi \right) = 0$$

از رابطه بالا $\partial w_0 / \partial x$ به‌دست آمده و در رابطه (۱۱- پ) جایگذاری می‌شود که منجر به استخراج رابطه دیفرانسیلی زیر برحسب فقط مولفه جابه‌جایی ψ می‌شود:

$$\left(E_2 - \frac{E_1^2}{E_0} \right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - P_0 \frac{2(1+\upsilon)}{E_0} \left(\left(E_2 - \frac{E_1^2}{E_0} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{E_0}{2(1+\upsilon)} \psi \right) = 0$$
(۱۴)

رابطه بالا یک رابطه دیفرانسیلی همگن خطی مرتبه ۳ برحسب متغیر جابه‌جایی ψ است. از حل رابطه بالا، تابع ψ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

(۱۵)
$$\psi = \sum_{i=1}^{3} \bar{\psi}_i e^{\zeta_i x}$$

با جایگذاری ψ از رابطه (۱۵) در روابط (۱۳) و (۱۱- الف) و حل خصوصی آنها برای متغیرهای w_0 و u_0، نتایج زیر استخراج می‌شوند:

(۱۶)
$$u_0 = \sum_{i=1}^{3} \bar{u}_i e^{\zeta_i x} + \bar{\psi}_5 x + \bar{\psi}_6$$
$$w_0 = \sum_{i=1}^{3} \bar{w}_i e^{\zeta_i x} + \bar{\psi}_4$$

که

(۱۷)
$$\bar{u}_i = -\frac{E_1}{E_0} \bar{\psi}_i$$
$$\bar{w}_i = \frac{2(1+\upsilon)}{E_0 \zeta_i} \left(\left(E_2 - \frac{E_1^2}{E_0} \right) \zeta_i^2 - \frac{E_0}{2(1+\upsilon)} \right) \bar{\psi}_i$$

هر سه مولفه جابه‌جایی برحسب شش ضریب $\bar{\psi}_i$ بیان می‌شوند. با جایگذاری این مولفه‌های جابه‌جایی در روابط شرایط مرزی ارائه شده در رابطه (۹)، یک دستگاه شش رابطه شش-مجهول برحسب متغیرهای $\bar{\psi}_i$ به‌دست می‌آید که از حل نابدیهی آن مقدار نیروی کمانش نتیجه می‌شود.

۳-۲- روش حل عددی GDQM

در روش حل عددی GDQM، مشتق مرتبه gام یک تابع مفروض در نقطه x_i به‌صورت زیر برحسب مقادیر تابع در نقاط شبکه‌بندی بیان می‌شود [۲۸]:

$$\left.\frac{\partial^g f(x)}{\partial x^g}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{(g)} f(x_j) \tag{۱۸}$$

که در رابطه بالا $L_{ij}^{(g)}$ ضریب وزن برای مشتق مرتبه gام و n تعداد نقاط شبکه‌بندی است که این نقاط در مسئله مورد بررسی در راستای محور طولی تیر است. این ضرایب برای مشتق مرتبه اول با استفاده از روابط زیر بیان می‌شوند:

$$L_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{t=1,t\neq i}^{n}(x_i - x_t)}{(x_i - x_j)\prod_{t=1,t\neq j}^{n}(x_j - x_t)}, \qquad i \neq j \tag{۱۹- الف}$$

$$L_{ij}^{(1)} = -\sum_{t=1,t\neq j}^{n} L_{it}^{(1)}, \qquad i = j \tag{۱۹- ب}$$

برای مشتق‌های مرتبه بالاتر از یک، مقادیر این ضرایب به‌صورت زیر و با استفاده از روابط بازگشتی به‌دست می‌آیند:

$$L_{ij}^{(g)} = g\left(L_{ii}^{(g-1)} L_{ij}^{(1)} - \frac{L_{ij}^{(g-1)}}{(x_i - x_j)}\right), \qquad i = j \tag{۲۰- الف}$$

$$L_{ij}^{(g)} = -\sum_{t=1,t\neq j}^{n} L_{it}^{(g)}, \qquad i = j \tag{۲۰- ب}$$

توزیع نقاط شبکه در راستای محور طولی تیر می‌تواند به‌صورت یکنواخت و یا غیریکنواخت باشد. تاکنون تابع‌های توزیع مختلفی برای نقاط شبکه در روش GDQM ارائه شده است که در مقاله حاضر از تابع زیر که یک تابع توزیع پرطرفدار در بین دانشمندان این حوزه است استفاده می‌شود:

$$x_i = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right)\right) \times L \tag{۲۱}$$

که در رابطه بالا L طول تیر است. مشتق‌های مولفه‌های جابه‌جایی در روابط کمانش (۱۱) با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) به‌صورت زیر به روابط گسسته تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x = x_i) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{(2)} u_0(x_j) \tag{۲۲- الف}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x = x_i) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{(2)} \psi(x_j), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x = x_i) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{(1)} \psi(x_j) \tag{۲۲- ب}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x = x_i) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{(2)} w_0(x_j), \quad \frac{\partial w_0}{\partial x}(x = x_i) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{(1)} w_0(x_j) \tag{۲۲- پ}$$

با استفاده از روابط (۲۲) می‌توان روابط کمانش (۱۱) را به روابطی گسسته در تمام نقاط شبکه تبدیل کرد. در این‌صورت تعداد $3\times n$ رابطه گسسته در نقاط شبکه برحسب $3\times n$ مولفه جابه‌جایی $u_0(x_i)$، $\psi(x_i)$ و $w_0(x_i)$ به‌دست می‌آیند. همچنین با استفاده از روابط (۱۰) در روابط شرایط مرزی (۹)، تعداد شش رابطه برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به‌دست می‌آید که این شش رابطه با شش رابطه کمانش استاتیکی در نقاط مرزی جایگزین می‌شود. از مجموع روابط استاتیکی در نقاط درونی شبکه و شش رابطه شرایط مرزی، به تعداد $3\times n$ رابطه همگن برحسب $3\times n$ مولفه جابه‌جایی $u_0(x_i)$، $\psi(x_i)$ و $w_0(x_i)$ به‌دست می‌آیند که از حل نابدیهی آن نیروی کمانش تیر استخراج می‌شود.

۳- نتایج عددی

به‌منظور ارائه نتایج مقایسه‌پذیر، از مقدار بی بعد شده زیر برای نیروی کمانش در نتایج عددی استفاده می‌شود:

$$\bar{P}_0 = P_0/\bar{A}, \qquad \bar{A} = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\,dz\,dy \tag{۲۳}$$

از آنجا که مسئله کمانش تیرهای همگن پوشیده شده با لایه FGP تاکنون در هیچ مرجعی بررسی نشده است لذا به‌منظور مقایسه نتایج و صحت‌سنجی نتایج، کمانش یک تیر FGM برای بررسی و مقایسه درنظر گرفته شده است. در جدول (۱) مقدار نیروی کمانش یک تیر FGM با تابع توزیع خواص توانی و سه

جدول ۱- مقایسه مقدار نیروی کمانش بی‌بعد شده $P_0 L^2 / (12 h^3)$ برای یک تیر FGM با شرایط مرزی مختلف ($L/h = 5$)

شرایط مرزی	تئوری و روش حل	k = ۰	k = ۱	k = ۲	k = ۵	k = ۱۰
S-S	وو و همکاران [۲۹]	۴۹/۵۹۰۱	۲۵/۲۱۱۶	۱۹/۶۱۲۴	۱۶/۰۸۴۲	۱۴/۴۱۱۶
	نگوین و همکاران [۳۰]	۴۸/۸۴۰۶	۲۴/۶۸۹۴	۱۹/۱۵۷۷	۱۵/۷۳۵۵	۱۴/۱۴۴۸
	کهیا و توران [۳۱]	۴۸/۵۹۰۷	۲۴/۵۸۱۵	۱۹/۱۶۱۷	۱۵/۹۴۱۷	۱۴/۳۴۴۵
	روش تحلیلی حاضر	۴۸/۵۹۰۳۵	۲۴/۵۸۱۳۸	۱۹/۱۶۱۶۲	۱۵/۹۴۱۷۲	۱۴/۳۴۴۴۶
C-C	وو و همکاران [۲۹]	۱۶۰/۱۰۷۰	۸۳/۶۹۵۸	۶۴/۱۲۲۷	۴۹/۳۸۵۶	۴۳/۱۵۷۹
	نگوین و همکاران [۳۰]	۱۵۴/۵۶۱۰	۸۰/۵۹۴۰	۶۱/۷۶۶۶	۴۷/۷۱۷۴	۴۱/۷۸۸۵
	کهیا و توران [۳۱]	۱۵۱/۹۴۳۰	۷۹/۳۹۰۳	۶۱/۷۴۴۹	۴۹/۵۸۲۸	۴۳/۵۰۱۴
	روش تحلیلی حاضر	۱۵۱/۹۳۱۹	۷۹/۳۸۴۱۹	۶۱/۷۴۰۱۶	۴۹/۵۷۹۰۸	۴۳/۴۹۸۲۳
C-F	وو و همکاران [۲۹]	۱۳/۰۹۹۳	۶/۶۰۶۷	۵/۱۶۸۰	۴/۳۲۹۰	۳/۹۱۲۱
	نگوین و همکاران [۳۰]	۱۳/۰۷۷۱	۶/۵۴۲۷	۵/۰۹۷۷	۴/۲۷۷۲	۳/۸۸۲۰
	کهیا و توران [۳۱]	۱۳/۰۵۹۴	۶/۵۳۵۲	۵/۰۹۸۱	۴/۲۹۲۶	۳/۸۹۷۰
	روش تحلیلی حاضر	۱۳/۰۵۹۳۵	۶/۵۳۵۱۷	۵/۰۹۸۱۲	۴/۲۹۲۵۲	۳/۸۹۶۹۸

شرط مرزی مختلف مفصل-مفصل (S-S)، گیردار-گیردار (C-C)، و گیردار-آزاد (C-F) ارائه شده و با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. مدول الاستیسته تیر FGM در راستای ضخامت به‌صورت زیر است:

$$E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m, \quad E_m = 70\text{GPa}, \quad E_c = 380\text{GPa} \qquad (24)$$

مقدار ضریب پواسون نیز ثابت و برابر ۰/۳ است. نتایج ارائه شده توسط وو و همکاران [۲۹]، نگوین و همکاران [۳۰]، و کهیا و توران [۳۱] به‌ترتیب براساس تئوری برشی تیر مرتبه اول، تئوری برشی تیر مرتبه بالاتر، و یک تئوری سه‌بعدی هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود تقارب خوبی بین نتایج به‌دست آمده از این مقاله و نتایج ارائه شده توسط مراجع [۳۱-۲۹] وجود دارد. همگرایی در بین نتایج حاصل از مقاله حاضر و مرجع [۳۱] بسیار بیشتر از دو مورد دیگر است که علت آن در این است که پژوهش حاضر و پژوهش ارائه شده در مرجع [۳۱] هر دو براساس تئوری برشی مرتبه اول تیر انجام شده‌اند. البته قابل توجه است که حل ارائه شده در مرجع [۳۱] بر اساس روش اجزا محدود[۱۳] است و علت اختلاف کوچک بین نتایج حاصل از این پژوهش و مرجع [۳۱]، روش‌های حل متفاوت استفاده شده در دو پژوهش است.

در جدول (۲) با استفاده از هر دو روش حل تحلیلی و عددی، مقدار نیروی کمانش به‌ازای نسبت‌های مختلف ضخامت ورق و ضخامت لایه FGP، و همچنین مقادیر مختلف پارامتر تخلخل مدل نوع یک، ارائه شده است. در همه مثال‌های عددی این مقاله از فوم فولادی با خواص $\bar{E} = 200\text{GPa}$ و $\nu = 0/3$ استفاده شده است. شرایط مرزی بررسی شده در این جدول مفصل-مفصل (S-S) و مفصل-گیردار (S-C) هستند. برای به‌دست اوردن نتایج عددی با استفاده از روش GDQM از ۳۱ نقطه شبکه استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود همگرایی و انطباق خوبی بین نتایج حاصل از دو روش حل عددی و تحلیلی وجود دارد که تایید کننده صحت و دقت هر دو روش حل است. نتایج مشابهی در جدول (۳) به‌ازای تابع تخلخل نوع دوم ارائه شده است که نتایج حاصل از دو روش حل مختلف در این جدول نیز از انطباق کامل برخوردارند. در جدول‌های (۴) و (۵) برای شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C) و گیردار-آزاد (C-F)،مشابه آنچه که در جدول‌های (۲) و (۳)

جدول ۲- مقدار نیروی کمانش بی‌بعد شده یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP، به‌ازای تابع تخلخل نوع ۱ و شرایط مرزی S-S و S-C

L/h	h_0/h	e_0	S-S		S-C	
			روش تحلیلی	روش عددی	روش تحلیلی	روش عددی
۱۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰۰۶۴۸۹	۰/۰۰۶۴۸۹	۰/۰۱۲۸۳	۰/۰۱۲۸۳
		۰/۶	۰/۰۰۵۶۷۵	۰/۰۰۵۶۷۵	۰/۰۱۱۱۷	۰/۰۱۱۱۷
	۰/۳۵	۰/۳	۰/۰۰۶۶۹۲	۰/۰۰۶۶۹۲	۰/۰۱۳۲۶	۰/۰۱۳۲۶
		۰/۶	۰/۰۰۵۹۶۳	۰/۰۰۵۹۶۳	۰/۰۱۱۸۰	۰/۰۱۱۸۰
	۰/۷	۰/۳	۰/۰۰۶۶۳۰	۰/۰۰۶۶۳۰	۰/۰۱۳۱۷	۰/۰۱۳۱۷
		۰/۶	۰/۰۰۵۸۸۰	۰/۰۰۵۸۸۰	۰/۰۱۱۷۰	۰/۰۱۱۷۰
۲۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰۰۱۶۵۶	۰/۰۰۱۶۵۶	۰/۰۰۳۳۵۹	۰/۰۰۳۳۵۹
		۰/۶	۰/۰۰۱۴۵۳	۰/۰۰۱۴۵۳	۰/۰۰۲۹۴۳	۰/۰۰۲۹۴۳
	۰/۳۵	۰/۳	۰/۰۰۱۷۰۶	۰/۰۰۱۷۰۶	۰/۰۰۳۴۶۲	۰/۰۰۳۴۶۲
		۰/۶	۰/۰۰۱۵۲۲	۰/۰۰۱۵۲۲	۰/۰۰۳۰۸۶	۰/۰۰۳۰۸۶
	۰/۷	۰/۳	۰/۰۰۱۶۸۸	۰/۰۰۱۶۸۸	۰/۰۰۳۴۲۸	۰/۰۰۳۴۲۷
		۰/۶	۰/۰۰۱۴۹۵	۰/۰۰۱۴۹۵	۰/۰۰۳۰۳۷	۰/۰۰۳۰۳۷

جدول ۳- مقدار نیروی کمانش بی‌بعد شده یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP، به‌ازای تابع تخلخل نوع ۲ و شرایط مرزی S-S و S-C

L/h	h_0/h	e_0	S-S		S-C	
			روش تحلیلی	روش عددی	روش تحلیلی	روش عددی
۱۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰۰۵۹۵۰	۰/۰۰۵۹۵۰	۰/۰۱۱۸۰	۰/۰۱۱۸۰
		۰/۶	۰/۰۰۴۳۷۱	۰/۰۰۴۳۷۱	۰/۰۰۸۶۷۹	۰/۰۰۸۶۷۹
	۰/۳۵	۰/۳	۰/۰۰۶۹۲۷	۰/۰۰۶۹۲۷	۰/۰۱۳۷۱	۰/۰۱۳۷۱
		۰/۶	۰/۰۰۶۵۲۳	۰/۰۰۶۵۲۳	۰/۰۱۲۸۷	۰/۰۱۲۸۷
	۰/۷	۰/۳	۰/۰۰۶۷۶۶	۰/۰۰۶۷۶۶	۰/۰۱۳۴۳	۰/۰۱۳۴۳
		۰/۶	۰/۰۰۶۱۷۰	۰/۰۰۶۱۷۰	۰/۰۱۲۲۶	۰/۰۱۲۲۶
۲۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰۰۱۵۱۶	۰/۰۰۱۵۱۶	۰/۰۰۳۰۷۷.	۰/۰۰۳۰۷۷.
		۰/۶	۰/۰۰۱۱۱۳	۰/۰۰۱۱۱۳	۰/۰۰۲۲۵۹	۰/۰۰۲۲۵۹
	۰/۳۵	۰/۳	۰/۰۰۱۷۶۸	۰/۰۰۱۷۶۸	۰/۰۰۳۵۸۵	۰/۰۰۳۵۸۵
		۰/۶	۰/۰۰۱۶۶۸	۰/۰۰۱۶۶۸	۰/۰۰۳۳۷۹	۰/۰۰۳۳۸۰
	۰/۷	۰/۳	۰/۰۰۱۷۲۳	۰/۰۰۱۷۲۳	۰/۰۰۳۴۹۸	۰/۰۰۳۴۹۸
		۰/۶	۰/۰۰۱۵۷۱	۰/۰۰۱۵۷۱	۰/۰۰۳۱۸۹	۰/۰۰۳۱۸۹

جدول ۴- مقدار نیروی کمانش بی‌بعد شده یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP، به‌ازای تابع تخلخل نوع ۱ و شرایط مرزی C-C و C-F

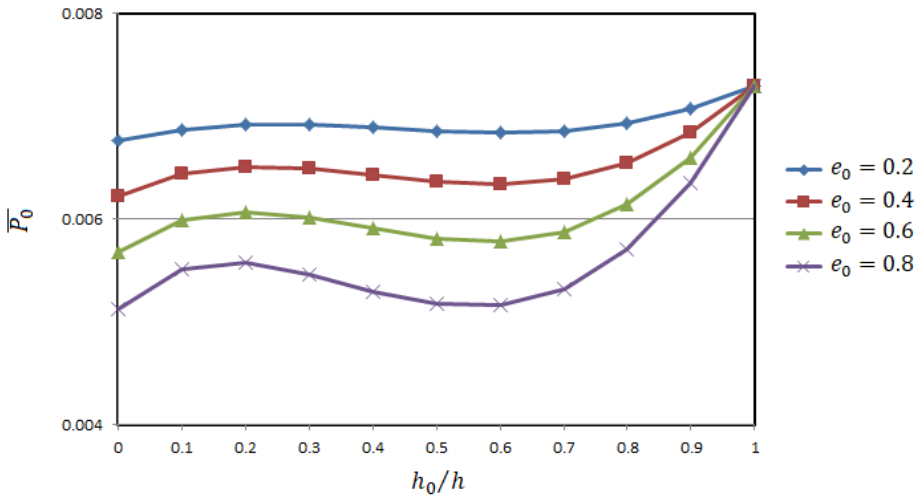
L/h	h_0/h	e_0	C-C روش تحلیلی	C-C روش عددی	C-F روش تحلیلی	C-F روش عددی
۱۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰۲۳۹۸	۰/۰۲۳۹۸	۰/۰۰۱۶۵۶	۰/۰۰۱۶۵۶
		۰/۶	۰/۰۲۰۷۴	۰/۰۲۰۷۴	۰/۰۰۱۴۵۳	۰/۰۰۱۴۵۳
	۰/۳۵	۰/۳	۰/۰۲۴۸۲	۰/۰۲۴۸۲	۰/۰۰۱۷۰۶	۰/۰۰۱۷۰۶
		۰/۶	۰/۰۲۲۰۵	۰/۰۲۲۰۵	۰/۰۰۱۵۲۲	۰/۰۰۱۵۲۲
	۰/۷	۰/۳	۰/۰۲۴۷۳	۰/۰۲۴۷۳	۰/۰۰۱۶۸۸	۰/۰۰۱۶۸۸
		۰/۶	۰/۰۲۲۰۲	۰/۰۲۲۰۲	۰/۰۰۱۴۹۵	۰/۰۰۱۴۹۵
۲۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰۰۶۴۸۹	۰/۰۰۶۴۸۹	۰/۰۰۰۴۱۶	۰/۰۰۰۴۱۶
		۰/۶	۰/۰۰۵۶۷۵	۰/۰۰۵۶۷۵	۰/۰۰۰۳۶۴	۰/۰۰۰۳۶۵
	۰/۳۵	۰/۳	۰/۰۰۶۶۹۲	۰/۰۰۶۶۹۲	۰/۰۰۰۴۲۹	۰/۰۰۰۴۲۹
		۰/۶	۰/۰۰۵۹۶۳	۰/۰۰۵۹۶۳	۰/۰۰۰۳۸۲	۰/۰۰۰۳۸۲
	۰/۷	۰/۳	۰/۰۰۶۶۳۰	۰/۰۰۶۶۳۰	۰/۰۰۰۴۲۴	۰/۰۰۰۴۲۴
		۰/۶	۰/۰۰۵۸۸۰	۰/۰۰۵۸۸۰	۰/۰۰۰۳۷۵	۰/۰۰۰۳۷۵

جدول ۵- مقدار نیروی کمانش بی‌بعد شده یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP، به‌ازای تابع تخلخل نوع ۲ و شرایط مرزی C-C و C-F

L/h	h_0/h	e_0	C-C روش تحلیلی	C-C روش عددی	C-F روش تحلیلی	C-F روش عددی
۱۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰۲۲۱۳	۰/۰۲۲۱۳	۰/۰۰۱۵۱۶	۰/۰۰۱۵۱۶
		۰/۶	۰/۰۱۶۳۰	۰/۰۱۶۳۰	۰/۰۰۱۱۱۳	۰/۰۰۱۱۱۳
	۰/۳۵	۰/۳	۰/۰۲۵۶۲	۰/۰۲۵۶۲	۰/۰۰۱۷۶۸	۰/۰۰۱۷۶۸
		۰/۶	۰/۰۲۳۹۶	۰/۰۲۳۹۶	۰/۰۰۱۶۶۸	۰/۰۰۱۶۶۸
	۰/۷	۰/۳	۰/۰۲۵۲۰	۰/۰۲۵۲۰	۰/۰۰۱۷۲۳	۰/۰۰۱۷۲۳
		۰/۶	۰/۰۲۳۰۳	۰/۰۲۳۰۳	۰/۰۰۱۵۷۱	۰/۰۰۱۵۷۱
۲۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰۰۵۹۵۰	۰/۰۰۵۹۵۰	۰/۰۰۰۳۸۰	۰/۰۰۰۳۸۱
		۰/۶	۰/۰۰۴۳۷۱	۰/۰۰۴۳۷۱	۰/۰۰۰۲۸۰	۰/۰۰۰۲۸۰
	۰/۳۵	۰/۳	۰/۰۰۶۹۲۶	۰/۰۰۶۹۲۶	۰/۰۰۰۴۴۴	۰/۰۰۰۴۴۴
		۰/۶	۰/۰۰۶۵۲۳	۰/۰۰۶۵۲۳	۰/۰۰۰۴۱۹	۰/۰۰۰۴۱۹
	۰/۷	۰/۳	۰/۰۰۶۷۶۶	۰/۰۰۶۷۶۶	۰/۰۰۰۴۳۳	۰/۰۰۰۴۳۳
		۰/۶	۰/۰۰۶۱۷۰	۰/۰۰۶۱۷۰	۰/۰۰۰۳۹۴	۰/۰۰۰۳۹۴

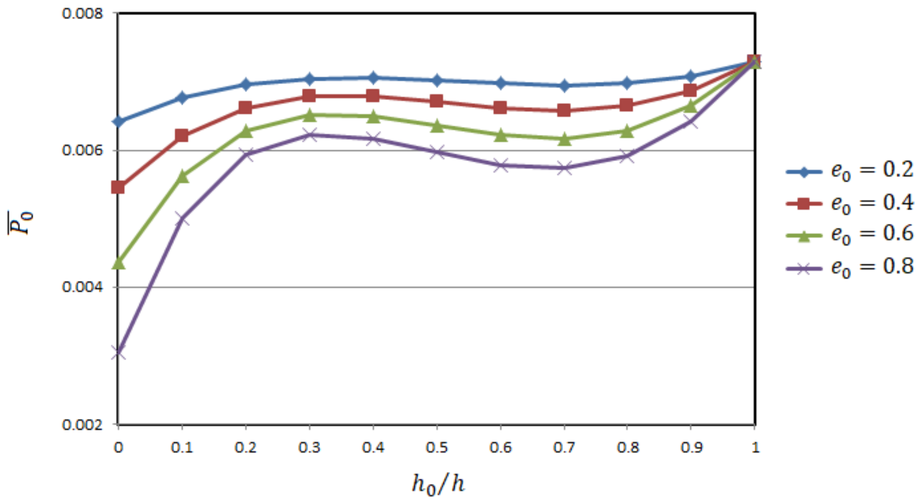
ارائه شد، نیروی کمانش محاسبه و ارائه شده است. در این جدول‌ها نیز انطباق کامل بین نتایج عددی و تحلیلی به‌دست آمده، وجود دارد.

در شکل (۲) نمودار مقدار نیروی کمانش بی‌بعد شده تیر با

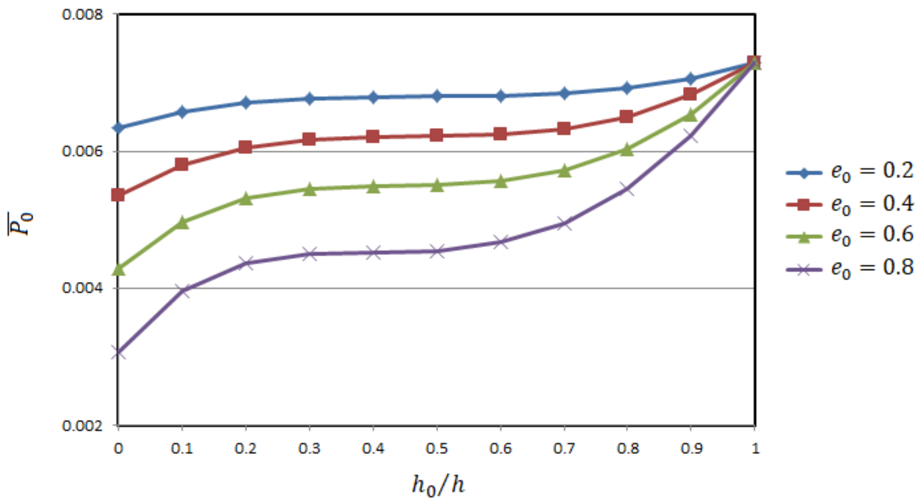


شکل ۲- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با تابع تخلخل از نوع ۱ و شرایط مرزی S-S

شرایط مرزی دو طرف مفصل در برابر نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر به‌ازای چهار مقدار مختلف ۰/۲، ۰/۴، ۰/۶، و ۰/۸ پارامتر تخلخل نوع یک رسم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت لایه همگن تیر از صفر تا صددرصد، در ابتدا مقدار نیروی کمانش افزایش می‌یابد و سپس کاهش و در انتها نیز دوباره افزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر نمودارهای فوق دارای یک مقدار بیشینه و یک مقدار کمینه نسبی هستند. لایه FGP یک لایه متخلخل است و نسبت به لایه همگن چگالی حجمی کمتری دارد و از این‌رو باید هرچه میزان ضخامت لایه FGP افزایش پیدا کند مقدار نیروی کمانش نیز افزایش پیدا کند. اما همان‌طور که دیده می‌شود محدوده‌ای وجود دارد که با افزایش ضخامت لایه FGP مقدار نیروی کمانش نیز افزایش پیدا می‌کند (ناحیه وسط نمودارها بین نقاط بیشینه و کمینه) که این مهم باید حتما در طراحی چنین سازه‌هایی مورد توجه قرار گیرد. با افزایش مقدار پارامتر تخلخل، شیب تغییرات نمودارها نیز افزایش می‌یابد به‌طوری که به‌ازای مقدار ۰/۸ پارامتر تخلخل بیشترین میزان شیب نمودارها مشاهده می‌شود که به بیان دیگر با افزایش مقدار پارامتر تخلخل تأثیر تغییر ضخامت لایه‌ها روی مقدار نیروی کمانش افزایش می‌یابد. همان‌طور که دیده می‌شود بیشترین میزان تغییرات و شیب نمودارها در انتهای نمودارها و مربوط به زمانی است که بیشتر ضخامت ورق را لایه همگن تشکیل می‌دهد و به بیان دیگر افزایش یک لایه کوچک FGP روی تیر همگن می‌تواند تغییرات زیادی را در سختی خمشی تیر و نیروی کمانش ایجاد کند. همچنین افزایش پارامتر تخلخل موجب کاهش نیروی کمانش و در نتیجه کاهش مقدار سختی خمشی تیر می‌شود. به بیان دیگر به‌منظور طراحی تیرهای پوشیده شده با لایه FGP براساس تخلخل نوع یک، که از استحکام لازم نیز برخوردار باشند، باید تا حد امکان پارامتر تخلخل کوچک باشد؛ البته باید طوری باشد که وظیفه اصلی آن که جذب انرژی است را مختل نکند؛ و همچنین ضخامت لایه FGP در محدوده منطقه بیشینه نمودارهای نشان داده شده باشد. نمودارهای مشابهی در شکل‌های (۳) و (۴) برای نوع‌های دوم و سوم تابع توزیع تخلخل ارائه شده‌اند. روند کلی نمودارها برای تابع توزیع نامتقارن نوع دوم در شکل (۳) و تابع توزیع یکنواخت نوع سوم در شکل (۴) مشابه نمودارهای شکل (۲) است با این تفاوت که در شکل (۳) تغییرات و شیب نمودارها در ابتدا بسیار زیاد است و در شکل (۴) که مربوط به تخلخل یکنواخت لایه



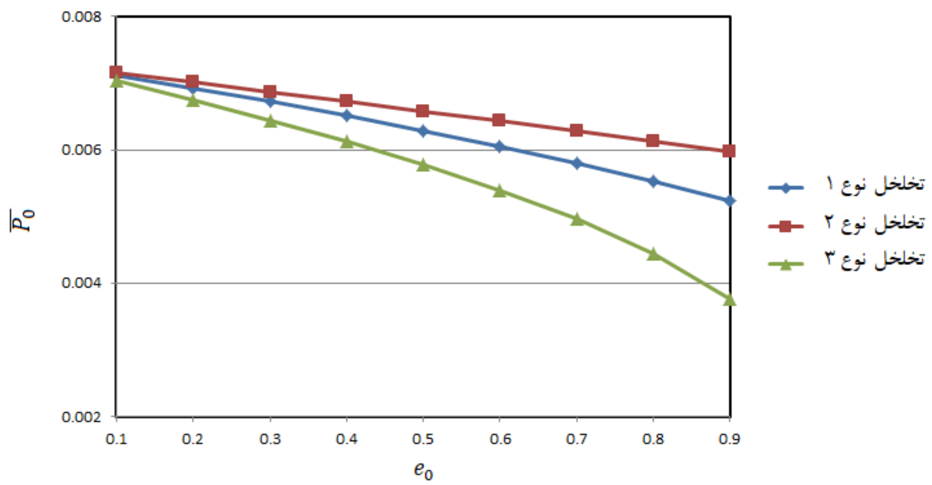
شکل ۳- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با تابع تخلخل از نوع ۲ و شرایط مرزی S-S



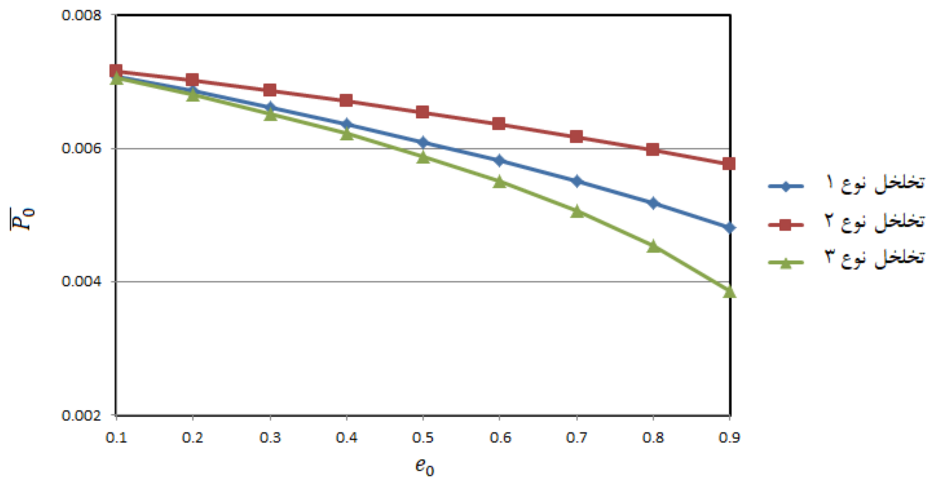
شکل ۴- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با تابع تخلخل از نوع ۳ و شرایط مرزی S-S

FGP است، نمودارها مقدار کمینه و بیشینه نسبی ندارند و در یک محدوده‌ای شیب نمودارها به‌ازای این نوع تخلخل بسیار کم و در حد صفر است. به بیان دیگر به‌منظور طراحی تیرهای پوشیده شده با لایه FGP براساس تخلخل نوع یک، که از استحکام لازم نیز برخوردار باشند، باید تا حد امکان پارامتر تخلخل کوچک باشد و همچنین ضخامت لایه FGP تا حد امکان نیز کوچک باشد. البته ضخامت لایه FGP باید در حدی باشد که وظیفه اصلی آن که جذب انرژی است را مختل نکند.

در شکل (۵) نمودار تغییرات نیروی کمانش یک تیر با شرایط مرزی مفصل-مفصل نسبت به پارامتر تخلخل e_0 برای نسبت $h_0/h=0/25$ و سه نوع تابع توزیع تخلخل مختلف رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تخلخل



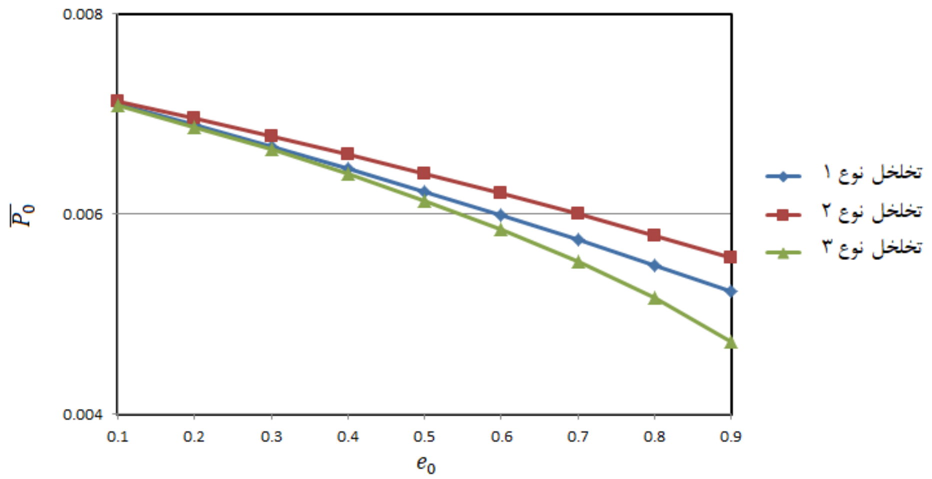
شکل ۵- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده نسبت به پارامتر تخلخل $e_{\circ}$ به‌ازای $h_{\circ}/h = ۰/۲۵$ و شرایط مرزی S-S



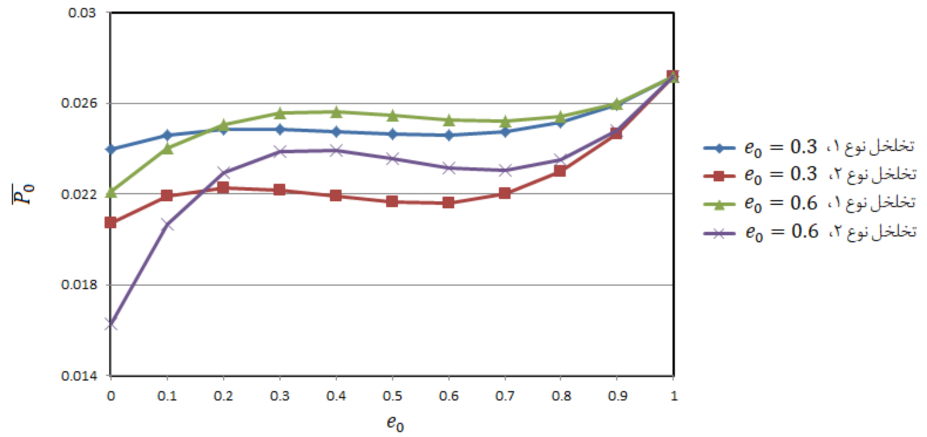
شکل ۶- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده نسبت به پارامتر تخلخل $e_{\circ}$ به‌ازای $h_{\circ}/h = ۰/۵$ و شرایط مرزی S-S

مقدار نیروی کمانش کاهش می‌یابد و علت آن هم کاهش جرم ماده در واحد حجم و به‌عبارت دیگر کاهش سختی تیر است. بیشترین تغییرات نیروی کمانش نسبت به تخلخل مربوط به تابع تخلخل یکنواخت نوع سوم و کمترین آن مربوط به تابع تخلخل غیریکنواخت نامتقارن نوع یک است. از این‌رو می‌توان نتیجه گرفت زمانی که استحکام کمانشی تیر از اهمیت بالایی برخوردار است تخلخل نامتقارن نوع یک می‌تواند گزینه مناسبی برای طراحی تیر در مقایسه با دو نوع تخلخل دیگر باشد.

همان‌طور که قابل مشاهده است شیب نمودارهای فوق به‌ازای مقادیر بالای پارامتر تخلخل افزایش می‌یابد. با افزایش مقدار پارامتر تخلخل از صفر تا ۰/۹، نیروی کمانش حدود ۵۰ درصد کاهش می‌یابد که می‌تواند منجر به ناپایداری کمانشی سازه شود. نمودارهای مشابهی در شکل‌های (۶) و (۷) برای نسبت‌های $h_{\circ}/h = ۰/۵$ و $h_{\circ}/h = ۰/۷۵$ رسم شده‌اند. تغییرات نمودارها در این دو شکل نیز مشابه شکل (۵) هستند و با افزایش تخلخل مقدار نیروی کمانش کاهش می‌یابد.



شکل ۷- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده نسبت به پارامتر تخلخل e_0 به‌ازای $h_0/h=0/75$ و شرایط مرزی S-S



شکل ۸- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با شرایط مرزی C-C

نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده تیر در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار در شکل (۸) رسم شده است. در این شکل نمودارها برای دو مقدار پارامتر تخلخل ۰/۳ و ۰/۶ و دو نوع تابع توزیع تخلخل نوع ۱ و ۲ رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که تغییرات مقدار نیروی کمانش برای تابع توزیع تخلخل نامتقارن نوع دوم در مقایسه با تابع توزیع متقارن نوع یک بیشتر است. نمودارها دارای یک نقطه بیشینه نسبی و یک نقطه کمینه نسبی هستند که نقطه بیشینه قبل از نقطه کمینه قرار دارد. همچنین این نقاط کمینه و بیشینه برای تابع توزیع تخلخل نوع دوم به‌ازای مقادیر بیشتری از نسبت h_0/h در مقایسه با نوع یک رخ می‌دهد. به‌عبارت دیگر نقاط کمینه و بیشینه برای تابع توزیع تخلخل نوع دوم در مقایسه با تابع توزیع تخلخل نوع یک زمانی رخ می‌دهد که درصد بیشتری از سازه را ماده همگن تشکیل داده باشد. با افزایش ضخامت لایه FGP در تابع تخلخل نوع دوم، تغییرات نیروی کمانش در مقایسه با تابع تخلخل نوع یک بیشتر است. همچنین می‌توان از نمودارهای فوق نتیجه گرفت که تأثیر مقدار پارامتر تخلخل روی مقدار نیروی کمانش

برای تابع تخلخل نوع دوم بیشتر از نوع یک است. بنابراین با توجه به مطالب بالا زمانی که استحکام کمانشی تیر از اهمیت بالایی برخوردار است انتخاب تابع تخلخل غیریکنواخت نوع یک گزینه مناسبتری است. نمودارهای مشابهی در شکل‌های (۹) و (۱۰) برای شرایط مرزی مفصل–گیردار و گیردار–آزاد رسم شده‌اند. روند نمودارها در این شکل‌ها نیز مشابه شکل (۸) است. از مقایسه نمودارهای شکل‌های (۱۰–۸) مشخص می‌شود که وجود شرط مرزی گیردار سبب افزایش سختی تیر و نیروی کمانش می‌شود درحالی که وجود شرایط مرزی آزاد سبب کاهش سختی تیر و در نتیجه نیروی کمانش می‌شود. بنابراین بیشترین مقدار نیروی کمانش به‌ازای شرایط مرزی گیردار–گیردار رخ می‌دهد و کمترین مقدار نیروی کمانش به‌ازای شرایط مرزی گیردار–آزاد رخ می‌دهد که در این حالت نسبت به شرایط مرزی دیگر میزان نیروی کمانش بسیار کمتر است که نشان می‌دهد وجود شرط مرزی آزاد به مقدار قابل توجهی می‌تواند مقدار استحکام کمانشی سازه را کاهش دهد.

۴- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، کمانش استاتیکی تیرهای همگن پوشیده شده با لایه تشکیل شده از مواد FGP، با شرایط مرزی مختلف براساس تئوری تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفت. برای به‌دست آوردن روابط دیفرانسیلی حاکم بر مسئله از اصل کار مجازی استفاده شد و سپس با استفاده از دو روش حل تحلیلی دقیق و حل عددی، روابط حل شدند. در روش حل تحلیلی، ابتدا روابط دیفرانسیلی جفت شده به یک سری رابطه دیفرانسیلی جفت نشده و مستقل از هم تبدیل شدند و سپس حل شدند که در پاسخ به‌دست آمده تعدادی پارامتر و ثابت مجهول وجود داشت. با استفاده از روابط شرایط مرزی در دو انتهای تیر، یک دستگاه رابطه همگن استخراج شد که از رویه استخراج حل ناصفر، مقدار نیروی کمانش محوری تیر به‌دست آمد. هم‌چنین در بخش دیگری از مقاله از روش GDQM برای حل عددی روابط استفاده شد. در بخش نتایج عددی مشاهده شد که با افزایش مقدار پارامتر تخلخل، مقدار نیروی کمانش کاهش می‌یابد و وجود تخلخل یکنواخت نسبت به دو نوع تابع توزیع تخلخل دیگر، تأثیر بیشتری روی مقدار نیروی کمانش دارد. همچنین مشاهده شد که با افزایش ضخامت لایه FGP از صفر تا صد درصد ضخامت تیر، مقدار نیروی کمانش تیر در ابتدا کاهش، سپس افزایش و دوباره کاهش می‌یابد و نقاط کمینه و بیشینه در نمودارها می‌توانند به‌عنوان مبنایی برای انتخاب ضخامت لایه FGP باشند که براساس این نقاط تیر دارای حداقل و حداکثر استحکام کمانشی است.

واژه‌نامه

1. functionally graded material
2. porous material
3. functionally graded porous material
4. nano composite porous
5. Galerkin method
6. Donnell's theory
7. generalized differential quadrature method
8. Monte Carlo simulation
9. graphene platelets
10. spectral-Chebyshev approach
11. Runge–Kutta method
12. isogeometric analysis
13. finite element method

مراجع

1. Udupa, G., Rao, SS., and Gangadharan, K., " Functionally Graded Composite Materials: an Overview", *Procedia Materials Science*, Vol. 5, pp. 1291-1299, 2014.
2. Rafiee, M., Yang, J., and Kitipornchai, S." Large Amplitude Vibration of Carbon Nanotube Reinforced Functionally Graded Composite Beams with Piezoelectric Layers", *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 716-725, 2013.
3. Smith, B., Szyniszewski, S., Hajjar, J., Schafer, B., Arwade, S., "Steel Foam for Structures: a Review of Applications, Manufacturing and Material Properties", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 71, pp. 1-10, 2012.
4. Ashby, MF., Evans, T., Fleck, NA., Hutchinson, J., Wadley, H. and Gibson, L., *Metal Foams :a Design*

Guide, Elsevier. 2000.
5. Badiche, X., Forest, S., Guibert, T., Bienvenu, Y., Bartout, J-D., Ienny, P., Croset, M., and Bernet, H., “Mechanical Properties and Non-Homogeneous Deformation of Open-Cell Nickel Foams :Application of the Mechanics of Cellular Solids and of Porous Materials”, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 289, No. 1, pp. 276-88, 2000.
6. Banhart, J., “Manufacture, Characterization and Application of Cellular Metals and Metal Foams”, *Progress in Materials Science*, Vol. 46, No. 6, pp. 559-632, 2001.
7. Lopatnikov, SL., Gama, BA., Haque, MJ., Krauthauser, C., Gillespie, JW., Guden, M., and Hall, IW., “Dynamics of Metal Foam Deformation During Taylor Cylinder–Hopkinson Bar Impact Experiment”, *Composite Structures*, Vol. 61, No. 1, pp. 61-71, 2003.
8. Pinnoji, PK., Mahajan, P., Bourdet, N., Deck, C., and Willinger, R., “Impact Dynamics of Metal Foam Shells for Motorcycle Helmets: Experiments and Numerical Modeling”, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 37, No. 3, pp. 274-284, 2010.
9. Lefebvre, L-P., Banhart, J., and Dunand, D., “Porous Metals And Metallic Foams: Current Status and Recent Developments”, *Advanced Engineering Materials*, Vol. 10, No. 9, pp. 775-787, 2008.
10. Ahmad, Z., and Thambiratnam, DP., “Dynamic Computer Simulation and Energy Absorption of Foam-Filled Conical Tubes under Axial Impact Loading”, *Composite Structures*, Vol. 87, No. 3, pp. 186-97, 2009.
11. Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, AR., and Eslami, MR., “Buckling Analysis of Functionally Graded Circular Plates Made of Saturated Porous Materials Based on higher Order Shear Deformation Theory”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 992, pp. 83-90, 2016.
12. Kitipornchai, S., Chen, D., and Yang, J., “Free Vibration and Elastic Buckling of Functionally Graded Porous Beams Reinforced by Graphene Platelets”, *Materials & Design*, Vol. 116, pp. 656-665, 2017.
13. Yang, J., Chen, D., and Kitipornchai, S., “Buckling and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Plates Based on Chebyshev-Ritz Method”, *Composite Structures*, Vol. 193, pp. 281-294, 2018.
14. Dong, YH., He, LW., Wang, L., Li, Y H., and Yang, J. “Buckling of Spinning Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Cylindrical Shells: An Analytical Study”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 82-83, pp. 466-478, 2018.
15. Zhenhuan, Zh., Yiwen, N., Zhenzhen, T., Shengbo, Zh., Jiabin, S.,and Xinsheng, X., “Accurate Nonlinear Buckling Analysis of Functionally Graded Porous Graphene Platelet Reinforced Composite Cylindrical Shells” *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 151, pp. 537-50, 2019.
16. Liu, Y., Su, Sh., Huang, H., and Liang, Y. “Thermal-Mechanical Coupling Buckling Analysis of Porous Functionally Graded Sandwich Beams Based on Physical Neutral Plane”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 168, pp. 236-242, 2019.
17. Yas, MH., and Rahimi, S. “Thermal Buckling Analysis of Porous Functionally Graded Nanocomposite Beams Reinforced by Graphene Platelets Using Generalized Differential Quadrature Method”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 107, p. 106261, 2020.
18. Trinh, MCh., Mukhopadhyay, T., and Kim, S-E., “A Semi-Analytical Stochastic Buckling Quantification of Porous Functionally Graded Plates”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 105, p. 105928, 2020.
19. Rafiei Anamagh, M., and Bediz, B., “Free Vibration and Buckling Behavior of Functionally Graded Porous Plates Reinforced By Graphene Platelets Using Spectral Chebyshev Approach”, *Composite Structures*, Vol. 253, p. 112765, 2020.
20. Hung, DX., Tu, TM., Long, NV., and Anh, PH., “Nonlinear Buckling and Postbuckling of FG Porous Variable Thickness Toroidal Shell Segments Surrounded by Elastic Foundation Subjected to Compressive Loads”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 107, p. 106253, 2020.
21. Foroutan, K., Shaterzadeh, A., and Ahmadi, H., “Nonlinear Static and Dynamic Hygrothermal Buckling Analysis Of Imperfect Functionally Graded Porous Cylindrical Shells”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 77, pp. 539-53, 2020.
22. Nguyen, QH., Nguyen, LB., Nguyen, HB., and Nguyen-Xuan, H., “A Three-Variable High Order Shear Deformation Theory for Isogeometric Free Vibration, Buckling and Instability Analysis of FG Porous Plates Reinforced by Graphene Platelets”, *Composite Structures*, Vol. 245, p. 112321, 2020.
23. Li, Zh. “Exploration of the Encased Nanocomposites Functionally Graded Porous Arches: Nonlinear Analysis and Stability Behavior”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 82, pp. 1-16, 2020.
24. Li, Zh., Chen, Y., Zheng, J., and Sun, Q., “Thermal-Elastic Buckling of the Arch-Shaped Structures with FGP Aluminum Reinforced by Composite Graphene Platelets”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 157, p. 107142, 2020.
25. Zhu, B., Chen, X-Ch., Guo, Y., and Li, Y-H., “Static and Dynamic Characteristics of the Post-Buckling of Fluid-Conveying Porous Functionally Graded Pipes with Geometric Imperfections”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 189, p. 105947, 2021.
26. Cuong-Le, Th., Nguyen, KhD., Nguyen-Trong, N.,

Khatir, S., Nguyen-Xuan, H., and Abdel-Wahab, M., "A Three-Dimensional Solution for Free Vibration and Buckling of Annular Plate, Conical, Cylinder and Cylindrical Shell of FG Porous-Cellular Materials Using IGA", *Composite Structures*, Vol. 259, pp. 113216, 2021.

27. Talebizadehsardari, P., Salehipour, H., Shahgholian-Ghahfarokhi, D., Shahsavar, A., and Karimi, M., "Free Vibration Analysis of the Macro-Micro-Nano Plates and Shells Made of a Material with Functionally Graded Porosity: A Closed-Form Solution", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, under publication, 2020.
28. Shu, C., "Differential Quadrature and Its Application in Engineering", *Berlin: Springer*. 2000.
29. Vo, TP., Thai, HT., Nguyen, TK., Inam, F., and Lee, J., "A Quasi-3D Theory for Vibration and Buckling of Functionally Graded Sandwich Beams", *Composite Structures*, Vol. 119, pp. 1-12, 2015.
30. Nguyen, T-K., Truong-Phong Nguyen T., Vo, TP., and Thai, H-T., "Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Beams by a New Higher-Order Shear Deformation Theory", *Composite Structures*, Vol. 76, pp. 273-85, 2015.
31. Kahya, V., and Turan, M.,"Finite Element Model for Vibration and Buckling of Functionally Graded Beams Based on the First-Order Shear Deformation Theory", *Composites Part B*, Vol. 109, pp. 118-115, 2017.