

## تحلیل مسائل بزرگ انتقال حرارت هدایت با استفاده از روش چندقطبی سریع تک‌سطحی اصلاح شده

محمد هادی معتقد<sup>۱</sup>، مرتضی بهبهانی‌نژاد<sup>۱\*</sup> و مازیار چنگیزیان<sup>۱</sup>

۱- گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

۲- مرکز تحقیقات شبکه گاز در دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۶/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۹/۲۲)

**چکیده-** در تحقیق حاضر یک روش المان مرزی چندقطبی سریع تک‌سطحی اصلاح شده (MSLFMM) برای حل مسائل انتقال حرارت هدایتی با مقیاس بزرگ ارائه شده است. این روش با کاربرد تقریب دوردست (FFA) در روش چندقطبی سریع تک‌سطحی متداول (SLFMM) حاصل شده است. از این تقریب جهت محاسبه ضرایب تاثیر المان‌های دور از هم درون سلول‌های همسایه و همچنین تعیین گشتاور المان‌های درون سلول‌های دور استفاده شده است. انجام این دو مهم نه تنها از دشواری روابط محاسباتی و پیچیدگی در برنامه‌نویسی کم می‌نماید، بلکه بر کاهش زمان محاسباتی تاثیر چشمگیری دارد. چندین مثال برای ارزیابی روش پیشنهادی در نظر گرفته شده است. زمان محاسباتی روش پیشنهادی در مقایسه با روش المان مرزی متداول (CBEM)، روش چندقطبی سریع تک‌سطحی متداول و روش چندقطبی سریع چندسطحی (MLFMM) نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که سرعت حل این روش بسیار بالاتر از روش تک‌سطحی متداول بوده و با توجه به سادگی کاربرد آن قابل مقایسه با روش چندسطحی است. در نهایت برای بررسی توانایی روش پیشنهادی جهت حل مسائل پیچیده، انتقال حرارت هدایت دائم درون یک بدنه موتور شبیه‌سازی شده است. مقایسه میان نتایج روش حاضر و نتایج روش حجم محدود (نرم‌افزار فلوئنت) بیانگر انطباق مناسب با خطای کمتر از ۱/۵ درصد است.

واژه‌های کلیدی: روش المان مرزی، روش چندقطبی سریع، تقریب دوردست، انتقال حرارت هدایت، مقیاس بزرگ.

## Analysis of Large-Scale Heat Conduction Problems Using a Modified Single-Level Fast Multipole Method

M. H. Motaghd<sup>1</sup>, M. Behbahani-Nejad<sup>1,2\*</sup> and M. Changizian<sup>1,2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

2- Gas Networks Research Center, Shahid Chamran University of Ahvaz, 61357-83151, Ahvaz, Iran

**Abstract:** A Modified Single-Level Fast Multipole Method (MSLFMM) for large-scale heat conduction problems is presented. This method is obtained by embedding the far-field approximation (FFA) within the traditional single-level fast multipole method

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: bnmorteza@scu.ac.ir

(SLFMM). The FFA is used to compute the influence coefficients of the far elements within adjacent cells, and also to determine the moments of the elements within far cells. This approximation not only reduces the difficulty of procedures and programming, but also causes a significant decrease in the CPU time. Several problems are considered to verify and evaluate the proposed method. The computational cost of the MSLFMM is demonstrated by comparing the Conventional Boundary Element Method (CBEM), the SLFMM, and the Multi-Level Fast Multipole Method (MLFMM). It is shown that the MSLFMM is much faster than the SLFMM, and comparable with the MLFMM due to its ease of use. Finally, to check the ability of the proposed method in modeling a complicated problem, steady-state heat conduction in an engine block is solved. The numerical results show a good agreement with those obtained by a Finite Volume Method (FVM), and its difference is less than 1.5%.

**Keywords:** Boundary Element Method; Fast Multipole Method; Far-Field Approximation; Heat Conduction; Large-Scale.

### فهرست علائم

مرز دور تا نقطه هم‌مکانی	$S_{Far}$	ماتریس ضرایب	<b>A</b>
مرز نزدیک به نقطه هم‌مکانی	$S_{Near}$	بردار معلوم در دستگاه معادله	<b>b</b>
تابع هارمونیک	$S_{n,m}$	ضریب معادله انتگرال مرزی	$C(\alpha)$
نقطه هم‌مکانی در المان مرجع	$x$	ابعاد المان	dim
نقطه نزدیک به مرجع	$x_L$	تابع گرین	G
دما	T	تابع گرین	H
نقطه هدف روی مرز	y	تابع کمکی دوبعدی مرتبه k	$I_k$
نقطه نزدیک به هدف روی مرز	$y_c$	اندیس شمارنده	i
نقطه هم‌مکانی در المان هدف	$y_{col}$	اندیس شمارنده	j
حجم جسم	V	اندیس شمارنده	k
نقطه هدف در فرم اعداد مختلط	Z	انتقال گشتاور به محل مرتبه m و n	$L_{n,m}$
نقطه نزدیک به مرز در فرم مختلط	$Z_c$	انتقال گشتاور به محل مرتبه l	$L_l$
نقطه هم‌مکانی در فرم مختلط	$Z_s$	گشتاور حاصل از تابع G مرتبه k	$M_k$
نقطه ابتدای المان در فرم مختلط	$Z_b$	گشتاور حاصل از تابع H مرتبه k	$\tilde{M}_k$
نقطه انتهای المان در فرم مختلط	$Z_e$	اندیس شمارنده	m
نقطه نزدیک به مرجع در فرم مختلط	$Z_L$	تعداد المان‌ها	N
نقطه هم‌مکانی در دستگاه مختلط	$Z_{col}$	نرمال عمود بر سطح و اندیس شمارنده	n
مساحت المان	$\Delta S$	تابع کمکی دوبعدی مرتبه k	$O_k$
بردار مجهولات	$\lambda$	تابع لژاندر معمولی مرتبه m و n	$P_n^m$
اپراتور دیفرانسیل	$\partial$	تابع لژاندر معمولی مرتبه n	$P_n$
زاویه با راستای قائم در دستگاه کروی	$\theta$	شار گرما	q
زاویه محیطی در دستگاه کروی	$\varphi$	تابع هارمونیک	$R_{n,m}$
شعاع نقطه در دستگاه کروی	$\rho$	فاصله میان نقاط مرجع x و هدف y	r
بردار مزدوج مختلط مماس بر سطح	$\bar{\omega}$	مرز جسم	S
		مرز دور تا المان مرجع	$S_c$

## ۱- مقدمه

روش المان مرزی<sup>۱</sup> یکی از مؤثرترین روش‌های عددی انواع مسائل مهندسی است که بر پایه تئوری معادلات انتگرالی بنا شده است. این روش ابتدا توسط جیسون [۱] در دهه ۱۹۶۰ برای مسائل پتانسیل مورد استفاده واقع شده و طی سالیان متمادی به عنوان یک ابزار قوی برای سایر مسائل توسعه یافته است [۲]. دقت بالا، نیاز به تولید شبکه فقط روی مرزهای جسم، تحلیل هندسه‌های پیچیده یا نامحدود از جمله مزایای این روش است. اما در این روش ماتریس ضرایب تأثیر، عموماً نامتقارن و چگال به دست می‌آید. لذا حافظه مورد نیاز و زمان محاسبه ماتریس ضرایب از مرتبه  $N^2$  و زمان حل به روش مستقیم از مرتبه  $N^3$  خواهد بود ( $N$  تعداد المان‌ها یا تعداد معادلات است). به همین دلیل کارایی این روش برای مسائل بزرگ چندان مناسب نیست. هرچند استفاده از روش‌های حل تکرار و تقریب دوردست<sup>۲</sup> می‌تواند تا حدودی در رفع این عیوب و افزایش سرعت محاسبات مؤثر باشد. براون و اشبی [۳] نشان دادند که هرگاه المان‌ها به نسبت ابعاد، از هم دور باشند، اثر کل المان می‌تواند در نقطه هم‌مکانی<sup>۳</sup> تقریب زده شود.

حل اساسی این مساله با استفاده از روش چندقطبی سریع<sup>۴</sup> برای شتاب بخشیدن به روش المان مرزی صورت گرفته است. در این روش، تعامل المان به المان، تبدیل به تعامل گروه به گروه می‌شود. همچنین استفاده از بسط‌ها و انتقال‌ها در ساختار درختی هزینه محاسبات را کاهش می‌دهد. روش چندقطبی سریع ابتدا در اواسط دهه ۱۹۸۰ توسط راخلین و گرینگارد [۴-۶] معرفی شده و بعدها توسعه یافته است. نیشیمورا [۷] در سال ۲۰۰۲ مروری کامل بر کارهای انجام شده در زمینه معادلات لاپلاس، هلمهولتز، موج و گرما به روش چندقطبی سریع انجام داده است. در سال ۲۰۰۵ و ۲۰۰۶ لیو و همکاران [۸ و ۹]، دو مقاله در جهت معرفی کامل روش چندقطبی سریع برای مسائل پتانسیل ارائه دادند. حل مثال‌های مختلف بیانگر کارایی، دقت و توان روش چندقطبی سریع در حل مسائل پتانسیل با مقیاس بزرگ بود. همچنین جهت آشنایی بیشتر با کاربردهای این روش در مهندسی می‌توان کار لیو

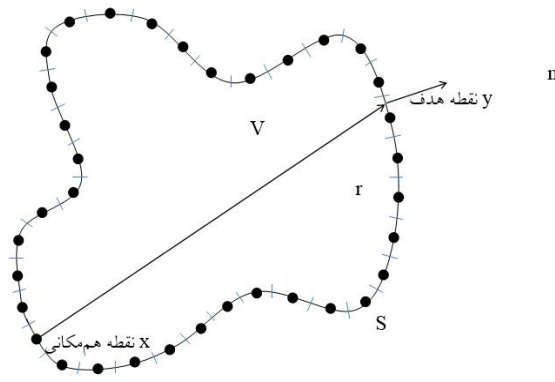
را مطالعه کرد [۱۰]. همچنین در سال ۲۰۰۷ شن و لیو یک روش المان مرزی چندقطبی سریع تطبیقی ارائه کردند که برای حل مسائل پتانسیل در هندسه‌های پیچیده مناسب است [۱۱]. آنها نشان دادند که روش پیشنهادی حدود ۵۰ درصد از نوع غیر تطبیقی سریع‌تر است.

روش چندقطبی سریع به دو صورت متفاوت تک‌سطحی و چندسطحی اعمال می‌شود. با وجود پیچیدگی‌های بسیار در اعمال روش چندسطحی، به علت سرعت بالاتر، در اکثر پژوهش‌های پیشین، از این روش استفاده شده است. اما با توجه به ساده‌تر بودن روش تک‌سطحی و عدم نیاز به ساختار درختی، تحقیقاتی نیز، این روش را مدنظر قرار داده و از آن بهره برده‌اند [۱۲-۱۵]. در هر صورت، پیچیدگی محاسباتی که در روش المان مرزی متداول<sup>۵</sup> از مرتبه  $N^2$  است، به ترتیب به  $N^{1/5}$  و  $N$  برای روش چندقطبی سریع تک‌سطحی<sup>۶</sup> و روش چندقطبی سریع چندسطحی<sup>۷</sup> کاهش می‌یابد [۷]. البته در برخی تحقیقات، با ترکیب تقریب دوردست و روش چندقطبی سریع، سعی بر افزایش سرعت محاسبات کرده‌اند [۱۶-۱۸].

از یک طرف روش تک‌سطحی، عاری از ساختار درختی بوده و کاربرد آن به مراتب ساده‌تر از روش چندسطحی است [۱۳]. مهم‌ترین نقص این روش، سرعت پایین آن است که استفاده از آن را تاکنون بسیار محدود ساخته است. از طرف دیگر لازمه اعمال روش چندسطحی، تشکیل یک ساختار پیچیده درختی از ارتباط میان المان‌ها است که بسط‌ها و انتقال‌ها بر روی برگ‌ها و شاخه‌های آن می‌نشینند. تشکیل این ساختار و در پی آن الگوریتم‌های مبتنی بر سری‌های پیچیده ریاضی (خصوصاً برای مسائل سه‌بعدی)، پیاده‌سازی و برنامه‌نویسی این روش را بسیار مشکل می‌کند. لذا پژوهش حاضر در پی توسعه روش تک‌سطحی است تا ضمن کارایی مناسب و سرعت حل بالاتر، پیچیدگی‌های موجود را مرتفع سازد.

## ۲- روش المان مرزی متداول

در این بخش فرمولاسیون معادله انتگرال مرزی و گسسته‌سازی



شکل ۱- گسسته‌سازی مرزهای جسم

$$H(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} & 2D \\ -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} & 3D \end{cases} \quad (6)$$

در روابط فوق، بردار  $r$  فاصله میان نقطه هم‌مکانی  $X$  و نقطه هدف  $y$  روی مرز  $S$  مطابق شکل (۱) است. با فرض قرار گرفتن نقاط هم‌مکانی روی سطح صاف المان، در این صورت  $C(\alpha) = \frac{1}{\nu}$  حاصل می‌شود [۲]. اگر مانند شکل (۱)، مرز  $S$  به  $N$  المان ثابت تقسیم شده و هر گره روی یک المان قرار گیرد، معادله گسسته شده برای نقطه هم‌مکانی  $i$ ام به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{1}{\nu} T_i = \sum_{j=1}^N [G_{ij} q_j - H_{ij} T_j] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

که در آن  $T_j$  و  $q_j$  به ترتیب مقادیر دما و شار روی نقاط هم‌مکانی المان  $j$ ام در شکل (۱) هستند. همچنین ضرایب تأثیر به این صورت تعریف می‌شوند.

$$G_{ij} = \int_{\Delta S_j} G(x, y) dS(y) \quad , \quad (8)$$

$$H_{ij} = \int_{\Delta S_j} H(x, y) dS(y) \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

برای حل دستگاه معادله (۷)، ابتدا باید ضرایب تأثیر  $G$  و  $H$  محاسبه شوند. برای محاسبه ماتریس‌های ضرایب تأثیر، روش‌های مختلف تحلیلی [۱۹ و ۲۰] و عددی [۲] موجود است. بنابر شرایط مرزی مساله، برخی از المان‌ها دارای مقدار پتانسیل

با استفاده از روش المان مرزی برای مسائل انتقال حرارت هدایتی پایدار به صورت مختصر بیان می‌شود [۸-۱۰]. می‌توان نشان داد که برای یک مساله انتقال حرارت هدایت پایدار درون دامنه  $V$  طبق شکل (۱)، معادله لاپلاس حاکم است.

$$\nabla^2 T(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in V \quad (1)$$

که شرایط مرزی مطابق رابطه زیر تعریف شده است.

$$T(x) = \bar{T}(x) \quad , \quad \forall x \in S_1 \quad (2)$$

$$q(x) = \frac{\partial T}{\partial n}(x) = \bar{q}(x) \quad , \quad \forall x \in S_2 \quad (3)$$

در این روابط  $T$  بیانگر میدان دما،  $q$  شار گرما و  $S = S_1 + S_2$  مرزهای دامنه  $V$  هستند. پارامتر  $n$  بردار نرمال عمود بر سطوح و مقادیر  $\bar{T}$  و  $\bar{q}$  به ترتیب مقادیر معلوم برای دما و شار روی مرز هستند. معادله لاپلاس با شرایط مرزی ذکر شده، می‌تواند با استفاده از جواب اساسی به صورت معادله انتگرال مرزی<sup>۱</sup> بیان شود [۲].

$$C(\alpha)T(x) = \int_S [G(x, y)q(y) - H(x, y)T(y)] dS(y) \quad , \quad \forall x \in S \quad (4)$$

که  $G(x, y)$  و  $H(x, y)$  کرنل‌های انتگرال یا همان توابع گرین هستند که به صورت زیر برای حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی تعریف می‌شوند.

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) & 2D \\ \frac{1}{4\pi r} & 3D \end{cases} \quad (5)$$

## ۲-۲- حل با روش تکرار

مطالعات پیشین نشان می‌دهند که اگر از روش‌های تکرار (مانند روش کم‌ترین باقی‌مانده تعمیم‌یافته<sup>۱۰</sup>) استفاده شود، مدت زمان حل مساله از مرتبه  $N^3$  به مرتبه  $N^2$  کاهش می‌یابد [۱۰]. این روش‌ها خصوصاً برای مسائل با مقیاس بزرگ نسبت به روش‌های مستقیم برتری دارند. در این نوع روش تکرار و در هر مرحله آن، مقدار حاصل ضرب ماتریس- بردار  $\mathbf{A}\lambda$  در سمت چپ رابطه (۹) محاسبه می‌شود. این مقدار سپس با سمت راست معادله مقایسه شده و تا هنگام ارضای شرط همگرایی تصحیح می‌شود.

با استفاده همزمان از دو راه بیان شده، می‌توان زمان محاسبات را تا حدودی کاهش داد؛ بدون آنکه مشکل حافظه مورد نیاز به صورت اصولی حل شود. جهت حل اساسی این مشکل، راه حل مناسب استفاده از روش المان مرزی چندقطبی سریع است.

## ۳- روش المان مرزی چندقطبی سریع<sup>۱۲</sup>

یک راهکار جالب جهت کاهش عملیات ریاضی و همچنین کاهش حافظه مورد نیاز استفاده از بسط سری توابع گرین حول نقاط مرجع و هدف است. در این روش توابع گرین به گونه‌ای بسط داده می‌شوند که المان‌های نزدیک به هم در یک گروه قرار گرفته و مانند یک چشمه واحد رفتار کنند. برای انجام این امر، ارتباط مستقیم میان دو نقطه مرجع و هدف گسسته شده و به صورت غیرمستقیم در می‌آید. نقاط میانی در واقع همان نقاط بسط یا قطب‌ها هستند. با این ایده، برآیند آثار المان‌های یک گروه نسبت به المان‌های یک گروه دور از آن، به صورت یکجا منتقل می‌شود. این تعامل گروهی سبب افزایش سرعت محاسبات می‌شود. این در حالیست که ارتباط میان المان‌های نزدیک هم در یک گروه به همان صورت مستقیم باقی می‌ماند. در این روش ماتریس  $\mathbf{A}$  به صورت مستقیم محاسبه و ذخیره نمی‌شود، بلکه از یک روش حل تکراری مانند GMRES برای حل معادله بیان شده در رابطه (۹) استفاده می‌شود. همچنین از روش چندقطبی سریع جهت شتاب دادن برای محاسبه  $\mathbf{A}\lambda$

معلوم (شار مجهول) و برخی دیگر دارای مقدار شار معلوم (پتانسیل مجهول) هستند. لذا پس از بازنویسی دستگاه و مرتب‌سازی آن، شکل ساده ماتریسی برای دستگاه به دست می‌آید.

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{b} \quad (9)$$

در این رابطه،  $\mathbf{A}$  ماتریس ضرایب تاثیر،  $\lambda$  بردار مجهولات مساله (شامل عناصر مجهول دما و شار) و  $\mathbf{b}$  بردار معلوم در سمت راست معادله است. پرواضح است که ماتریس  $\mathbf{A}$  یک ماتریس غیرممتقارن و چگال است. لذا تعداد عملیات ریاضی و حافظه مورد نیاز برای تشکیل ماتریس  $\mathbf{A}$  از مرتبه  $N^2$  بوده و به همین اندازه فضا برای ذخیره ماتریس  $\mathbf{A}$  در حافظه کامپیوتر باید وجود داشته باشد [۱۰]. در صورت حل به روش مستقیم، عملیات مورد نیاز و زمان محاسباتی از مرتبه  $N^3$  خواهد بود. به همین دلیل است که روش المان مرزی متداول برای یک مساله مقیاس بزرگ، ناکارآمد است. جهت کاهش مشکلات به وجود آمده می‌توان از تقریب دوردست و حل به روش‌های تکرار کمک گرفت.

## ۲-۱- تقریب دوردست

همان‌گونه که روابط (۵) و (۶) نشان می‌دهند، توابع  $G$  و  $H$  هر دو تابعی از  $\mathbf{r}$  بوده که روی المان متغیر هستند. اگر فاصله میان المان‌ها از ابعاد المان ۳ برابر بیشتر باشد، آنگاه می‌توان از تغییرات توابع گرین بر روی المان صرف‌نظر کرد. بدین صورت اثر کل المان توسط یک چشمه نقطه‌ای<sup>۹</sup> در نقطه هم‌مکانی المان روی مرز  $\gamma$  تقریب زده می‌شود [۳]. در نتیجه انتگرال‌گیری بر روی المان بسیار ساده خواهد شد. لذا با استفاده از این تقریب، روابط (۸) به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$G_{ij} = \int_{\Delta S_j} G(x, y) dS(y) \square G(x, y_{col}) \Delta S_j \quad , \quad |x - y| > r \dim_j \quad (10)$$

$$H_{ij} = \int_{\Delta S_j} H(x, y) dS(y) \square H(x, y_{col}) \Delta S_j \quad , \quad |x - y| > r \dim_j \quad (11)$$

که در آن

$$\dim_j = \sqrt{\Delta S_j} \quad (12)$$

کرنل‌های انتگرال  $G$  و  $H$  به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\int_{S_c} G(z_0, z) q(z) dS(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c) \quad (13)$$

$$\int_{S_c} H(z_0, z) T(z) dS(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) \tilde{M}_k(z_c) \quad (14)$$

که گشتاورهای  $M_k(z_c)$  و  $\tilde{M}_k(z_c)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$M_k(z_c) = \int_{S_c} I_k(z - z_c) q(z) dS(z) \\ = q_e \bar{\omega} [I_{k+1}(z_b - z_c) - I_{k+1}(z_a - z_c)] \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$\tilde{M}_k(z_c) = \int_{S_c} n(z) I_{k-1}(z - z_c) T(z) dS(z) \\ = T_e n \bar{\omega} [I_k(z_b - z_c) - I_k(z_a - z_c)] \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

در روابط فوق متغیر  $T_e$  و  $q_e$  به ترتیب بیانگر مقدار دما و شار روی المان،  $\bar{\omega}$  مزدوج بردار مماسی روی مرز و  $z_a$  و  $z_b$  دو انتهای المان هستند. همچنین توابع کمکی  $I_k$  و  $O_k$  به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}, \quad k \geq 0; \quad (17)$$

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}, \quad k \geq 1; \quad O_0(z) = -\ln(z)$$

حال فرض شود که  $z_L$  نقطه‌ای نزدیک به نقطه مرجع  $z_0$  باشد به گونه‌ای که  $|z_0 - z_L| \ll |z_c - z_L|$  در این صورت بسط محلی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{S_c} G(z_0, z) q(z) dS(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_c) \quad (18)$$

همچنین ضرایب بسط محلی  $L_l(z_L)$  توسط انتقال گشتاور به محل  $(M2L)$  به صورت رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$L_l(z_L) = (-1)^l \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_L - z_c) M_k(z_c) \quad (19)$$

همچنین انتقال‌های مطرح شده برای  $M_k$ ، برای  $\tilde{M}_k$  نیز استفاده می‌شوند.

بهره گرفته می‌شود. نتیجه مهم کاهش حافظه مورد نیاز و زمان محاسباتی به مرتبه  $N$  در روش چندقطبی سریع است.

در حالت کلی، ابتدا مکان المان‌ها و نسبت دوری یا نزدیکی آن‌ها، از طریق قرار گرفتن درون یک سلول (گروه) با مختصات خاص مشخص می‌شود. لازمه این امر تشکیل یک ساختار سلولی بوده که هر سلول شامل تعدادی المان است. بسته به نوع تشکیل ساختار سلولی، روش چندقطبی به دو نوع تک‌سطحی و چندسطحی تقسیم می‌شود. در روش تک‌سطحی فقط یک سطح از سلول‌های هم‌اندازه وجود دارد، در حالیکه روش چندسطحی بر مبنای یک ساختار درختی پیچیده استوار است. طرحی از این دو روش چندقطبی سریع در کنار روش المان مرزی متداول در شکل (۲) مشاهده می‌شود.

### ۳-۱- روش چندقطبی سریع تک‌سطحی

همان‌گونه که در شکل (۲-ب) مشاهده می‌شود، روش تک‌سطحی شامل سه مرحله کلی انتقال میان المان‌های یک گروه تا المان‌های گروهی دور از آن است.

(۱) بسط چندقطبی یا گشتاورهای حول قطب<sup>۳</sup>: اثر همه المان‌های گروه هدف (شامل نقاط هدف) به نقطه قطب گروه (نقطه بسط) منتقل شده و با هم جمع می‌شود.

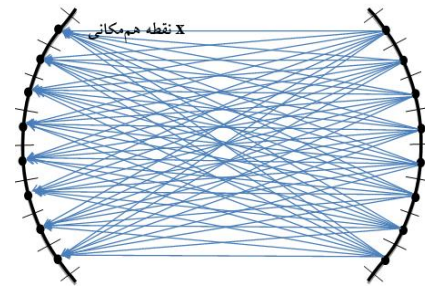
(۲) انتقال گشتاور به محل<sup>۴</sup>: مقادیر محاسبه شده مرحله قبل، از قطب همه گروه‌های دور هدف به قطب گروه مرجع منتقل و با هم جمع می‌شود.

(۳) بسط محلی<sup>۵</sup>: برآیند آثار از قطب گروه مرجع به همه المان‌های آن گروه منتقل می‌شود.

معادلات این روش در حالت دوبعدی در بخش ۳-۱-۱ و در حالت سه‌بعدی در بخش ۳-۱-۲ آورده شده است [۸-۱۰].

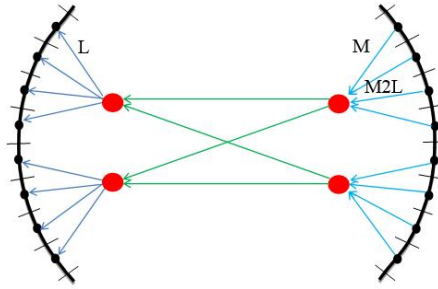
### ۳-۱-۱- روابط دوبعدی

با فرض استفاده از اعداد مختلط، اگر  $z_c$  نقطه مرجع و  $z_0$  نقطه‌ای نزدیک به  $z_c$  روی مرز باشد که  $|z_0 - z_c| \ll |z_0 - z_c|$  آنگاه بسط‌های گشتاور برای

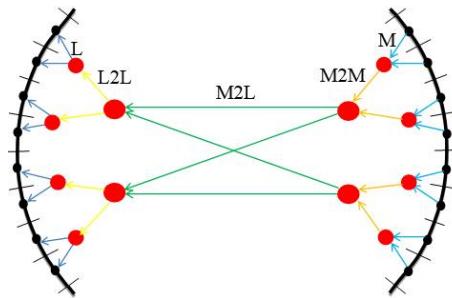


نقطه هدف y

الف) روش المان مرزی متداول (CBEM)



ب) روش چندقطبی سریع تک سطحی (SLFMM)



ج) روش چندقطبی سریع چندسطحی (MLFMM)

شکل ۲- طرح گرافیکی الف) روش‌های المان مرزی متداول، ب) چندقطبی سریع تک سطحی و ج) چندقطبی سریع چندسطحی

$$\int_{S_c} H(x, y) T(y) dS(y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{S}_{n,m}(x-y_c) \tilde{M}_{n,m}(y_c), \quad (21)$$

که در آن  $M_{n,m}(y_c)$  و  $\tilde{M}_{n,m}(y_c)$  گشتاورهای چندقطبی حول مرکز  $y_c$  (نقطه نزدیک به  $y$ ) هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$M_{n,m}(y_c) = \int_{S_c} R_{n,m}(y-y_c) q(y) dS(y) \quad (22)$$

$$\tilde{M}_{n,m}(y_c) = \int_{S_c} \frac{\partial R_{n,m}(y-y_c)}{\partial n(y)} T(y) dS(y) \quad (23)$$

۳-۱-۲- روابط سه بعدی

هر گاه نقطه مرجع  $x$  به میزان کافی از نقطه  $y$  روی مرز  $S_c$  دور باشد، آنگاه با بکارگیری بسط‌های زیر برای المان‌های قرار گرفته روی مرز دور  $S_c$ ، انتگرال‌های دارای کرنل‌های  $G$  و  $H$  را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\int_{S_c} G(x, y) q(y) dS(y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{S}_{n,m}(x-y_c) M_{n,m}(y_c), \quad (20)$$

$$|y-y_c| < |x-y_c|$$

تمام مرزهای جسم را شامل شود. سپس این مربع به سلول‌های هم‌اندازه (مربع‌های کوچک‌تر) تقسیم شده، به‌گونه‌ای که هر سلول شامل تعدادی از المان‌ها باشد. از سلول‌های فاقد المان صرف‌نظر می‌شود. برای مثال روند تقسیم دامنه محاسباتی برای جسم مورد نظر در شکل ۳ نمایش داده شده است. در این مثال، مربع اولیه به ۱۶ (۴×۴) سلول هم‌اندازه تقسیم شده است. دو سلول را همسایه یا نزدیک گویند در صورتی که راس مشترک داشته باشند؛ در غیر این صورت دور از هم محسوب می‌شوند [۱۵]. در شکل (۳)، سلول‌های همسایه و دور برای سلول C مشخص شده‌اند.

روش چندقطبی برای المان‌های درون سلول‌های دور و روش متداول برای المان‌های درون سلول C و سلول‌های همسایه آن استفاده می‌شود. به عبارت دیگر عبارت انتگرال دارای کرنل G از رابطه (۴) به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$\int_S G q dS = \int_{S_{Near}} G q dS + \int_{S_{Far}} G q dS \quad (30)$$

در این رابطه، انتگرال برای مرز نزدیک  $S_{Near}$  (المان‌های درون سلول C و سلول‌های همسایه آن) با استفاده از روش المان مرزی متداول و به صورت مستقیم به دست می‌آید. درحالی‌که برای سلول‌های واقع در مرز دور  $S_{Far}$ ، انتگرال با کاربرد روش چندقطبی سریع محاسبه می‌شود. به عبارت دیگر برای سلول‌های هدف که دور از سلول C هستند، ابتدا گشتاور المان‌های قرار گرفته در این سلول‌ها توسط بسط چندقطبی وفق رابطه (۱۵) به مرکز آن‌ها انتقال می‌یابد. سپس از مرکز سلول‌های دور به مرکز سلول C، انتقال گشتاور به محل طبق رابطه (۱۹) صورت می‌گیرد. این اثر در نهایت توسط بسط محلی منطبق بر رابطه (۱۸) به المان‌های قرار گرفته در سلول C می‌رسد. لازم به ذکر است که انتگرال دارای کرنل H نیز از طریق مشابه محاسبه می‌شود [۱۰]. واضح است که در حالت سه‌بعدی، یک مکعب بزرگ مرزهای جسم سه‌بعدی را در بر گرفته و سپس به مکعب‌های کوچک‌تر هم‌اندازه تقسیم می‌شود.

### ۳-۳- روش چندقطبی سریع تک‌سطحی اصلاح شده<sup>۱۸</sup>

در تحقیق حاضر، دو پیشنهاد مهم جهت استفاده از تقریب

همچنین توابع  $R_{n,m}$  و  $S_{n,m}$  نیز توابع هارمونیک جامد<sup>۱۶</sup> نامیده می‌شوند که در زیر تعریف شده‌اند.

$$R_{n,m}(x) = \frac{1}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \rho^n \quad (24)$$

$$S_{n,m}(x) = (n-m)! P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \frac{1}{\rho^{n+1}} \quad (25)$$

در جایی که  $(\rho, \theta, \varphi)$  مختصات نقطه هم مکانی X در دستگاه مختصات کروی است.

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 &= \rho \cos \theta \end{aligned} \quad (26)$$

همچنین  $P_n^m$  تابع لژاندر وابسته<sup>۱۷</sup> از مرتبه n و m است که با تابع لژاندر معمولی  $P_n$  در ارتباط است.

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (27)$$

حال فرض شود که نقطه  $x_L$  نزدیک به نقطه مرجع X است، در این صورت بسط محلی برای انتگرال با کرنل G توسط رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \int_{S_c} G(x, y) q(y) dS(y) = \\ \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{n,m}(x-x_L) L_{n,m}(x_L) \end{aligned} \quad (28)$$

که ضرایب بسط محلی  $L_{n,m}(x_L)$  توسط رابطه انتقال گشتاور به محل M2L در زیر داده شده‌اند.

$$L_{n,m}(x_L) = (-1)^n \sum_{n'=m'=-n'}^{n'} \frac{1}{S_{n+n',m+m'}(x_L-y_C)} M_{n',m'}(y_C), \quad (29)$$

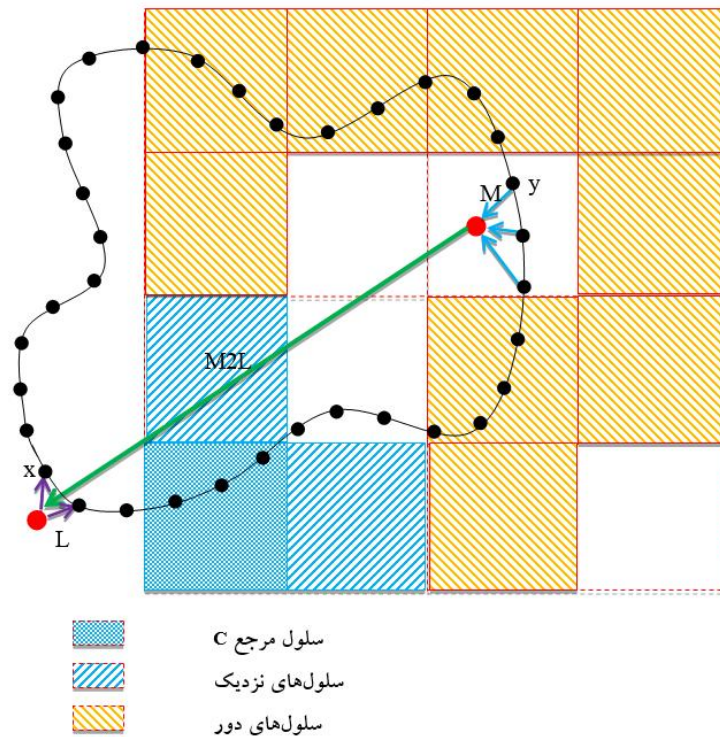
$$|x-x_L| < |y_C-x_L|$$

واضح است که برای انتگرال دارای کرنل H، بسط محلی مشابه وجود داشته و انتقال‌های گشتاور به محل برای  $\tilde{M}_{n,m}$  نیز صادق هستند [۱۰].

### ۳-۲- الگوریتم پیاده‌سازی روش چندقطبی سریع تک‌سطحی

در مسائل دوبعدی، ابتدا یک مربع به گونه‌ای ترسیم می‌شود که





شکل ۳- سلول‌های نزدیک و دور برای سلول C

سرعت محاسبات تأثیر زیادی دارد [۷ و ۲۱]. واضح است که با استفاده از تقریب دور دست درون سلول‌های نزدیک، همواره روش اصلاح شده به حالت بهینه نزدیک خواهد بود.

دور دست در روش تک سطحی متداول و افزایش سرعت محاسبات ارائه شده است.

۳-۳-۲- استفاده از تقریب دور دست برای سلول‌های دور توجه شود که گشتاور المان‌های یک سلول حول مرکز آن، فقط برای سلول‌های دور استفاده می‌شود؛ لذا شرط تقریب دور دست همواره برقرار است. در نتیجه از تغییرات توابع روی المان صرف نظر شده و گشتاور یک المان با استفاده از مقدار متوسط توابع در نقطه هم مکانی تقریب زده می‌شود. پس روابط (۱۵) و (۱۶) به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$M_{APP,k}(z_c) = q_e I_k(z_{col} - z_c) \int_{S_c} dS(z) = q_e \bar{\omega} I_k(z_{col} - z_c)(z_b - z_a) \quad (31)$$

$$\tilde{M}_{APP,k}(z_c) = T_e n I_{k-1}(z_{col} - z_c) \int_{S_c} dS(z) = T_e n \bar{\omega} I_{k-1}(z_{col} - z_c)(z_b - z_a) \quad (32)$$

و روابط (۲۲) و (۲۳) برای مسائل سه بعدی به صورت زیر حاصل می‌شوند.

۳-۳-۱- استفاده از تقریب دور دست برای سلول‌های نزدیک همان گونه که در شکل (۳) نشان داده شده است، بخش بزرگی از دامنه محاسباتی دارای سلول‌های غیر همسایه بوده و با روش چند قطبی می‌توان سرعت محاسبات را برای این سلول‌ها افزایش داد. اما اگر تعداد المان‌های قرار گرفته در سلول C و سلول‌های همسایه آن زیاد باشد، استفاده از روش متداول زمان زیادی را صرف خواهد کرد. برای کاهش زمان محاسباتی، پیشنهاد این است که در صورت امکان، تقریب دور دست در اندرکنش میان المان‌های سلول C و سلول‌های همسایه آن استفاده شود. بنابراین روابط (۱۰) و (۱۱) برای محاسبه ضرایب تأثیر المان‌های دور از هم در سلول‌های نزدیک استفاده می‌شود. کاربرد این شرط سبب می‌شود تا محاسبات روش مستقیم برای سلول‌های همسایه شتاب یافته و در نتیجه کارایی روش متداول افزایش یابد. همچنین در روش تک سطحی متداول، انتخاب تعداد سلول‌ها بر

منطبق بر کار لیو [۱۰] و به شکل (۵) در نظر گرفته شده است. دو ضلع مقابل هم در دمای ثابت (یکی صفر و دیگری ۱۰۰) و دو ضلع دیگر عایق فرض شده‌اند.

ابتدا برای پیش‌آماده سازی، هر ضلع مربع به تعداد یکسانی از المان‌های ثابت تقسیم شده (از ۲۵۰ تا ۲۵۰۰۰) و تعداد کل المان‌ها از ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ تغییر می‌کند. برای حل این مساله دوبعدی یک کد المان مرزی متداول به زبان فترن نوشته شده است. در این کد، توانایی استفاده از تقریب دوردست و حلگر روش تکرار<sup>۱۹</sup> (علاوه بر روش مستقیم<sup>۲۰</sup>) گنجانده شده است. برای حل مستقیم از حلگر GMRES حذف گوسی<sup>۲۱</sup> و برای حل‌های تکرار از حلگر GMRES استفاده شده است. همچنین یک کد چندقطبی تک‌سطحی متداول و یک کد چندقطبی سریع چندسطحی نوشته شده است. سپس کد تک‌سطحی اولیه (متداول) بر اساس پیشنهادهای مطرح شده در پژوهش حاضر جهت افزایش کارایی توسعه یافته است. تعداد ترم‌های سری برای بسط گشتاور و بسط محلی، تا مرتبه ۱۵ و معیار همگرایی روش حل تکرار<sup>۸-۱۰</sup> در نظر گرفته شده است. همچنین در روش چندقطبی چندسطحی، حداکثر المان‌های درون یک سلول برگ ۲۰ در نظر گرفته شده است.

با توجه به اینکه دو مرز روبروی هم عایق هستند، دمای روی محور مربع در راستای x به صورت خطی تغییر خواهد کرد. در شکل (۶)، توزیع دمای حاصل از روش‌های المان مرزی متداول و چندقطبی سریع مقایسه شده که دقیقاً منطبق بر پاسخ تحلیلی هستند. با توجه به این شکل، صحت برنامه نوشته به روش چندقطبی سریع اثبات می‌شود.

در شکل (۷) نمودار زمان محاسباتی اجرای برنامه هر روش بر اساس تعداد المان‌ها، ترسیم شده است. در حالی که تعداد المان‌های مرزی از ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ متغیر است، بسته به استفاده از روش حل، زمان محاسباتی افزایش می‌یابد. به‌طور کلی و برای سیستم رایانه‌ای مورد استفاده در این پژوهش، نکاتی که در ادامه می‌آید قابل دریافت هستند:

$$M_{APP,n,m}(y_c) = q_e R_{n,m}(y_{col} - y_c) S_c \quad (33)$$

$$\tilde{M}_{APP,n,m}(y_c) = T_e \frac{\partial R_{n,m}(y_{col} - y_c)}{\partial n(y)} S_c \quad (34)$$

در حالت دوبعدی رابطه‌های گشتاور چندان پیچیده نیست و پاسخ تحلیلی مطابق روابط (۱۵) و (۱۶) برای آن وجود دارد. اما در حالت سه‌بعدی این امر به این سادگی اتفاق نمی‌افتد و معمولاً نیازمند انتگرال‌گیری عددی توابع هارمونیک روی المان سه‌بعدی به روش‌های عددی همچون گوس-گوادرجر است. لذا این تقریب ضمن حفظ دقت، نه تنها از دشواری برنامه‌نویسی کم می‌کند، بلکه بر کاهش زمان محاسباتی تاثیر چشمگیری دارد. الگوریتم روش پیشنهادی برای حل مسائل انتقال حرارت هدایت دائم در شکل (۴) نمایش داده شده است.

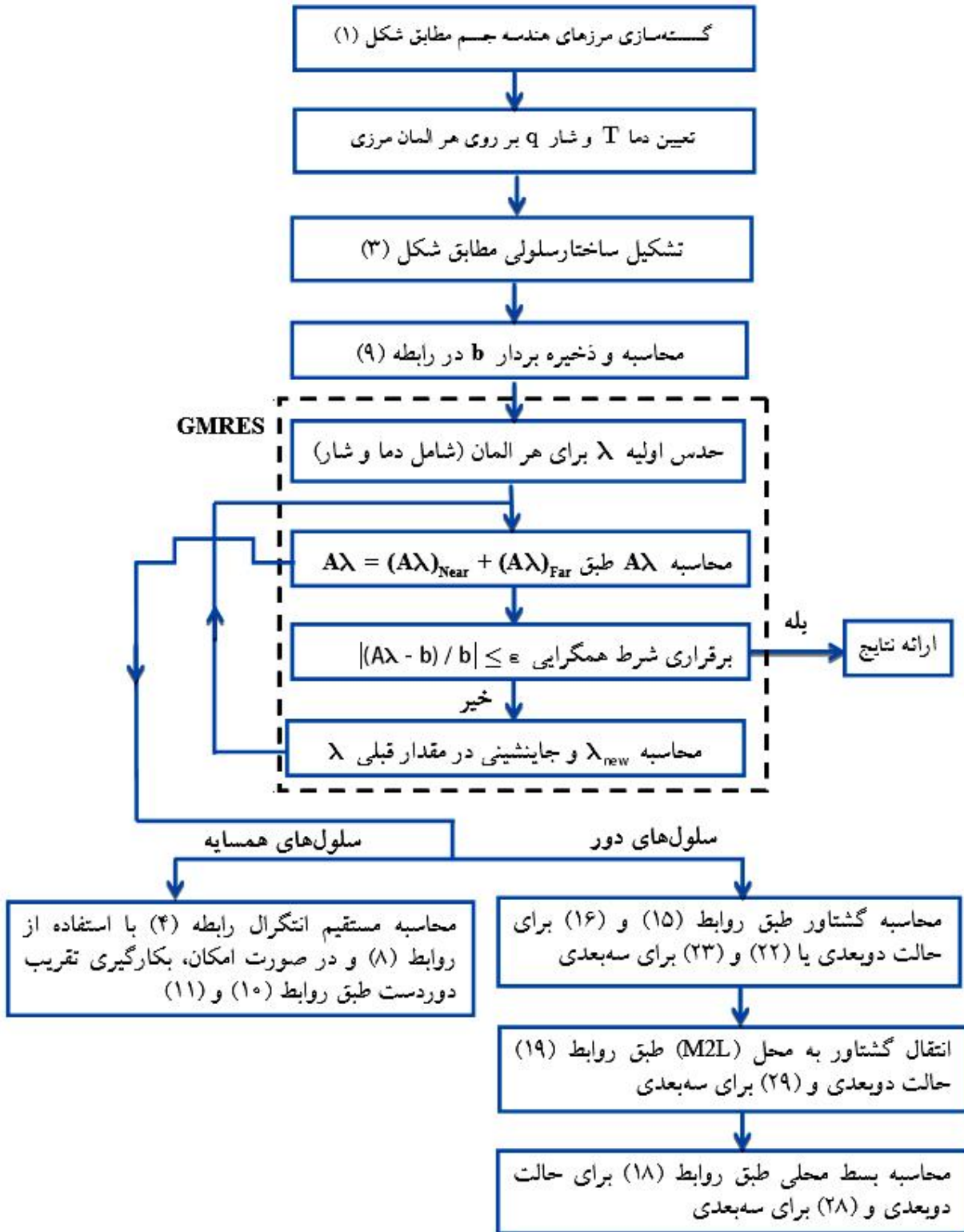
#### ۴- نتایج و بحث

جهت صحت‌سنجی و بیان کارایی روش چندقطبی سریع تک‌سطحی اصلاح شده (MSLFMM)، دو مساله دوبعدی و سه‌بعدی در زمینه انتقال حرارت هدایت دائم، که دارای حل تحلیلی هستند، در نظر گرفته شده است. زمان حل این مسائل با استفاده از روش پیشنهادی در تحقیق حاضر، محاسبه شده و با روش المان مرزی متداول (با استفاده و بدون استفاده از تقریب دوردست و همچنین با کاربرد روش حل مستقیم و روش حل تکرار)، روش چندقطبی سریع تک‌سطحی متداول و روش چندسطحی مقایسه شده است. در انتها نیز برای بررسی دقت روش پیشنهادی، یک بدنه موتور که دارای هندسه پیچیده است، در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که تمام محاسبات انجام شده در سیستمی با مشخصات زیر انجام شده است.

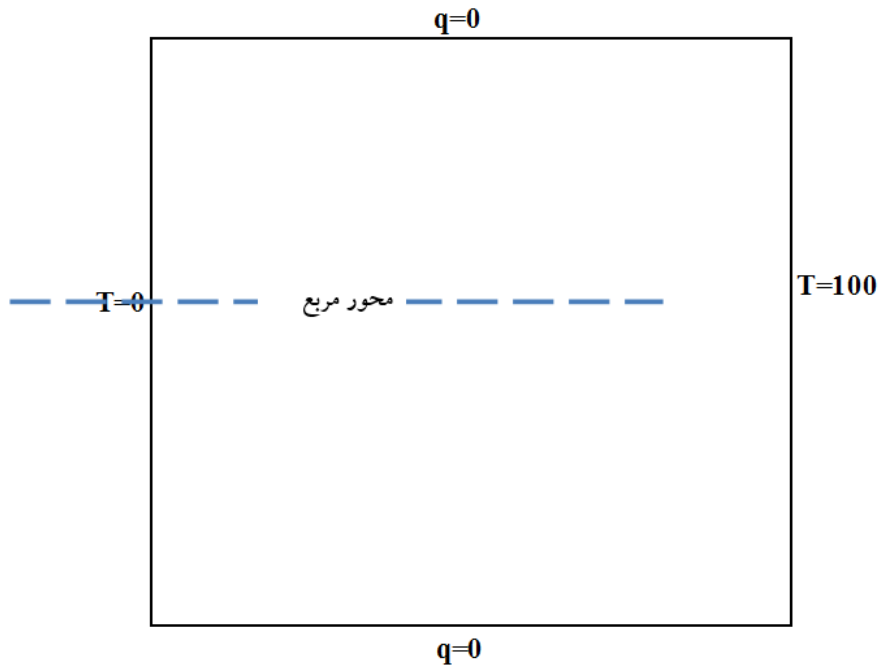
پردازشگر	حافظه نصب شده (RAM)
Intel (R) Core(TM) Duo CPU T۹۶۰۰	۴/۰GB
@ ۲/۸GHZ	

#### ۴-۱- انتقال حرارت هدایت دائم درون یک مربع

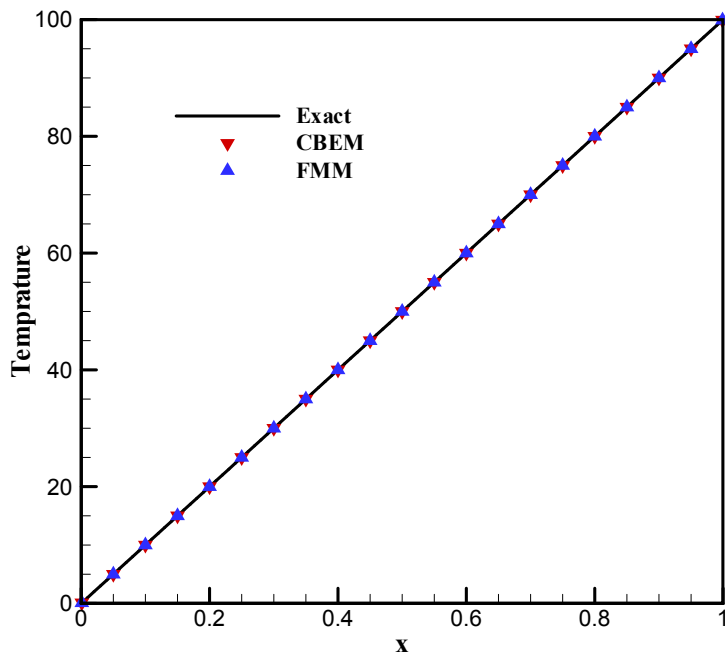
برای حالت دوبعدی، مساله انتقال حرارت دائم درون یک مربع



شکل ۴- الگوریتم روش پیشنهادی (MSLFMM)



شکل ۵- انتقال حرارت دائم درون یک مربع

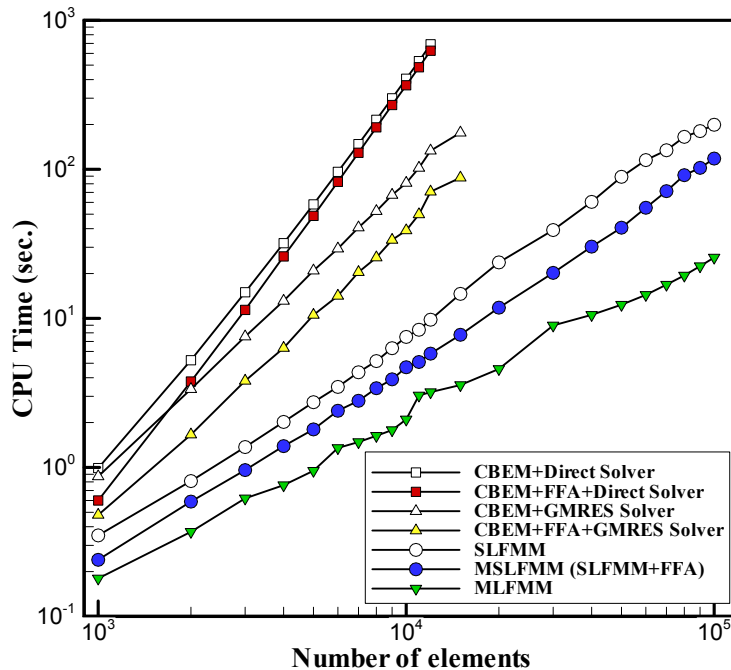


شکل ۶- توزیع دمای محاسبه شده روی محور مربع

همچنین مشاهده می‌شود که روش تکرار دارای سرعت حل بالاتری است.

(۲) استفاده از تقریب دوردست، کاهش زمان محاسباتی را در پی دارد. این مهم، هم در روش المان مرزی متداول و هم در

(۱) روش المان مرزی متداول، اگر از حلگر مستقیم استفاده کند، هندسه‌ای با ۱۲۰۰۰ المان مرزی را می‌تواند حل کند. در حالی که با استفاده از حلگر تکرار (GMRES) حداکثر تعداد المان‌ها به ۱۵۰۰۰ رسیده ولی بالاتر از آن مقدور نیست.



شکل ۷- زمان محاسباتی نسبت به تعداد المان‌ها برای روش‌های مختلف (دو بعدی)

برای حل این مساله سه بعدی یک کد المان مرزی متداول (با استفاده و بدون استفاده از تقریب دوردست و همچنین با کاربرد روش حل مستقیم و روش حل تکرار) نوشته شده است. با توسعه کد دو بعدی و استفاده از فرمولاسیون سه بعدی، کد چندقطبی سریع تک سطحی در حالت سه بعدی تدوین شده است. سپس بر اساس پیشنهادهای ارائه شده در این مقاله، تقریب دوردست اعمال شده است. تعداد ترم‌های سری برای بسط گشتاور و بسط محلی تا مرتبه ۸ و معیار همگرایی روش حل تکرار  $10^{-4}$  در نظر گرفته شده است.

برای استفاده از روش چندقطبی سریع چندسطحی، از فایل اجرایی برنامه نوشته شده توسط لی بهره گرفته شده است [۲۲]. توجه شود که کد ایشان از المان‌های مثلثی برای گسسته‌سازی سطوح استفاده شده است. برای ورودی برنامه، حداکثر المان‌های درون یک سلول برگ ۱۰۰ در نظر گرفته شده است. سایر مشخصات ورودی این برنامه همان مثال پیشین است.

کدهای کامپیوتری بر اساس روش‌های بیان شده، جهت حل مساله اجرا شده است. در شکل (۸) توزیع دمای محاسبه شده روی سطح مکعب مشاهده می‌شود. مطابق بر پاسخ تحلیلی،

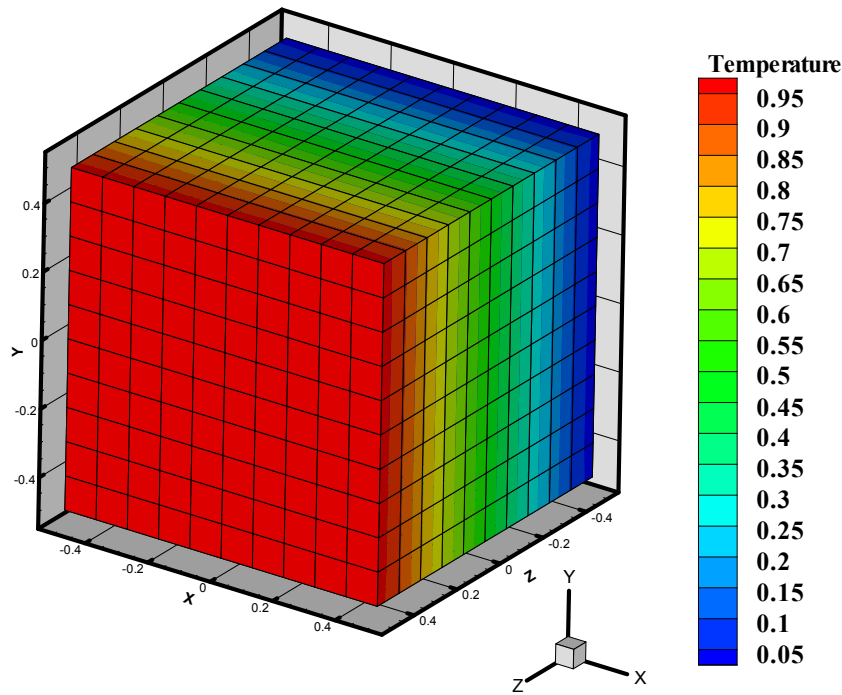
روش تک سطحی به خوبی قابل مشاهده است.

۳) با استفاده از روش چندقطبی سریع، نه تنها سرعت حل محاسبات افزایش بسیار می‌یابد، بلکه حل مسائل مقیاس بزرگ (در اینجا ۱۰۰۰۰۰ المان) میسر می‌شود.

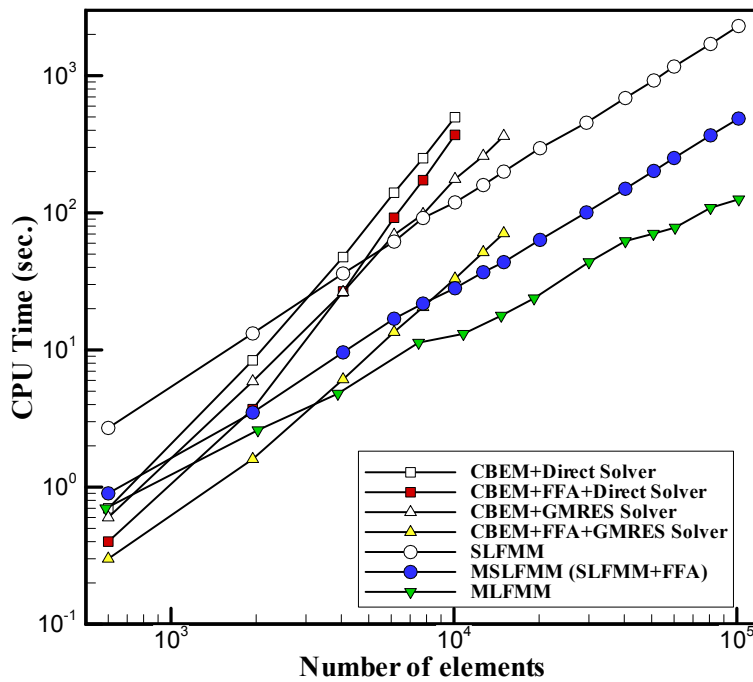
۴) کمترین زمان محاسباتی مربوط به روش چندسطحی چندسطحی است، اما با اصلاح روش تک سطحی و استفاده از تقریب دوردست در آن، سرعت حل آن بسیار بهتر شده است. لذا با توجه به سادگی کاربرد روش تک سطحی اصلاح شده، قابل رقابت با روش چندسطحی است.

#### ۲-۴- انتقال حرارت هدایت دائم درون یک مکعب

این مثال برای یک مساله سه بعدی انتقال حرارت دائم درون یک مکعب طبق کار لیو [۱۰] در نظر گرفته شده است. دو سطح مقابل هم در دمای ثابت (یکی  $0^\circ$  و دیگری  $1^\circ$ ) و بقیه سطوح عایق فرض شده‌اند. ابتدا جهت پیش‌آماده‌سازی برای کد، همه اضلاع مکعب به صورت یکسان تقسیم شده (از ۱۰ تا ۱۳۰) است. بر این اساس سطوح مکعب به المان‌های چهارضلعی از ۶۰۰ تا ۱۰۱۴۰۰ تقسیم شده است.



شکل ۸- توزیع دمای محاسبه شده روی سطوح مکعب



شکل ۹- زمان محاسباتی نسبت به تعداد المان‌ها برای روش‌های مختلف (سه‌بعدی)

شده و در شکل (۹) مقایسه شده است. نکات زیر از این نمودار قابل دریافت هستند.

(۱) استفاده از حلگر تکرار در روش المان مرزی متداول، نه تنها

سطوح هم‌دما عمود بر سطوح عایق قرار گرفته و دما به صورت خطی از صفر تا یک تغییر می‌کند. جهت نمایش کارایی، زمان محاسباتی هر روش بر اساس تعداد المان‌های مرزی محاسبه

سه بعدی گسسته شده است. شکل (۱۰-ب) توزیع دمای حاصل از حل به روش پیشنهادی در این مقاله و شکل (۱۰-ج) نتایج متناظر حاصل از حل فلونت را نشان می‌دهد. برای بررسی دقیق‌تر نتایج، توزیع دما بر روی خطوط ترسیم شده بر بدنه (خطوط ۱ و ۲ در شکل (۱۰-الف) استخراج شده و در شکل ۱۰-د در کنار هم ترسیم شده‌اند. مشاهده می‌شود که نتایج دو روش بسیار به هم نزدیک بوده و دارای تفاوت اندک به میزان ۱/۵ درصد هستند. این مهم نشانگر توانایی روش پیشنهادی برای تحلیل مسائل دارای مقیاس بزرگ با هندسه‌های پیچیده است.

### ۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر یک روش چندقطبی سریع تک‌سطحی اصلاح شده برای مسائل انتقال حرارت هدایتی با مقیاس بزرگ ارائه شده است. دلیل اصلی پیشنهاد این روش، دشواری کاربرد روش چندسطحی از یک طرف و سرعت حل پایین‌تر روش تک‌سطحی متداول از طرف دیگر بوده است. روش پیشنهادی با کاربرد تقریب دور دست در روش چندقطبی تک‌سطحی حاصل شده است. استفاده از این تقریب به دو صورت متفاوت برای سلول‌های نزدیک و سلول‌های دور سبب شتاب‌دهی حل شده است.

۱) برای محاسبه ضرایب تاثیر المان‌های دور از هم در سلول‌های نزدیک، از این تقریب استفاده می‌شود. این کار نه تنها باعث افزایش سرعت محاسبات می‌شود، بلکه از تاثیر تعداد سلول‌ها بر سرعت محاسبات خواهد کاست.

۲) برای محاسبه گشتاور در یک سلول دور، از مقدار متوسط توابع در نقطه هم‌مکانی المان استفاده می‌شود. نتیجه این امر سادگی محاسبه گشتاورهای روش چندقطبی و در نهایت افزایش سرعت محاسبات است.

روش حاضر برای حل مسائل انتقال حرارت هدایتی دائم در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی استفاده شده است. اعتبار و کارایی روش پیشنهادی در مقایسه با روش المان مرزی متداول، روش چندقطبی سریع تک‌سطحی متداول و نیز چندسطحی

سبب کاهش زمانی محاسباتی می‌شود، بلکه حداکثر تعداد المان‌های مرزی را تا ۱۵۰۰۰ افزایش می‌دهد.

۲) استفاده از تقریب دور دست در روش المان مرزی متداول و چندقطبی سریع تک‌سطحی باعث افزایش چشمگیر در سرعت محاسبات می‌شود.

۳) به‌طور کلی مشاهده می‌شود که استفاده از روش چندقطبی سریع (تک‌سطحی و چندسطحی) سبب شتاب‌دهی روش متداول شده است. همچنین با استفاده از روش چندقطبی سریع حل این مساله سه‌بعدی با تعداد المان‌های بیشتر از ۱۰۰۰۰۰ میسر شده است.

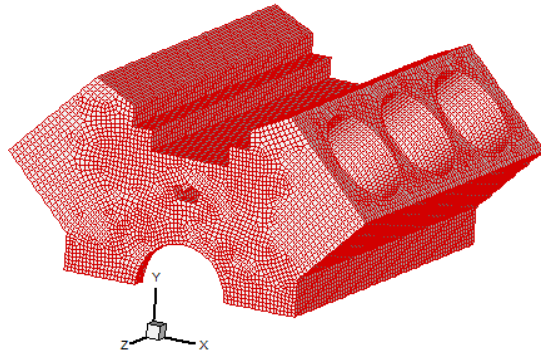
۴) اگر روش المان مرزی متداول در حالت سه‌بعدی، از تقریب دور دست و حلگر تکرار با هم استفاده کند، زمان محاسباتی خصوصاً برای تعداد المان‌های پایین، حتی از روش چندقطبی کمتر است. این مهم به‌علت هزینه بالای محاسباتی برای محاسبه ضرایب تاثیر سه‌بعدی است.

۵) نمودار روش تک‌سطحی اصلاح شده میان نمودارهای چندقطبی تک‌سطحی و چندقطبی چندسطحی، ترسیم شده است. بنابراین، کارایی پیشنهادهای ارائه شده جهت توسعه روش تک‌سطحی و افزایش سرعت آن به‌خوبی تایید می‌شود.

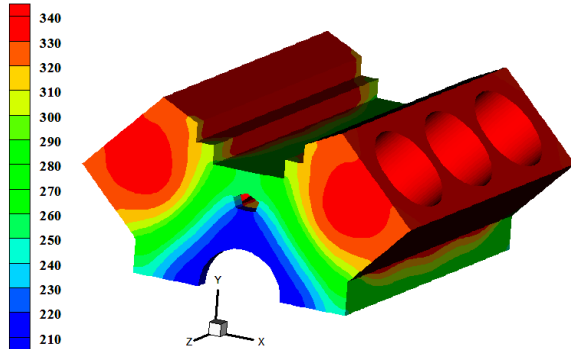
### ۳-۴- انتقال حرارت هدایت دائم درون یک مدل بدنه موتور

برای بررسی دقت روش پیشنهادی، انتقال حرارت هدایتی دائم درون یک بدنه موتور<sup>۲۲</sup> که به نسبت دارای یک هندسه پیچیده است، شبیه‌سازی شده است. مطابق با شکل (۱۰-الف) سطوح بدنه موتور، توسط ۳۳۸۷۵ المان چهارضلعی گسسته‌سازی شده است. دمای درون سطح سیلندرها  $T = 350$  فرض شده و بقیه سطوح دارای شرط مرزی شار گرما به میزان  $\frac{\partial T}{\partial n} = -0.2$  هستند. دقت نتایج روش پیشنهادی با روش حجم محدود<sup>۲۳</sup> با استفاده از نرم‌افزار فلونت<sup>۲۴</sup> مقایسه شده است. توجه شود که تولید شبکه سه‌بعدی مورد استفاده برای فلونت، با همان طرح المان‌های قرار گرفته بر سطوح در روش چندقطبی پیشنهادی انجام شده است. بر این اساس حجم کل بدنه با ۳۴۲۴۰۳ المان

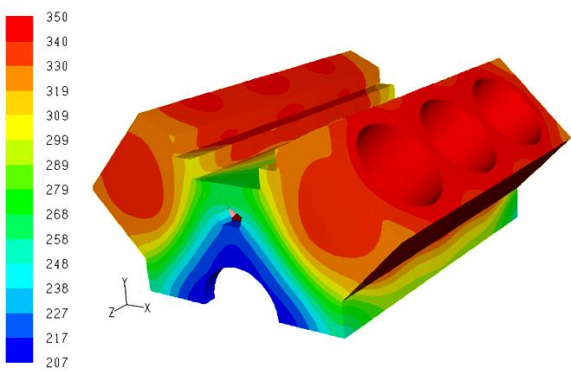
روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۱



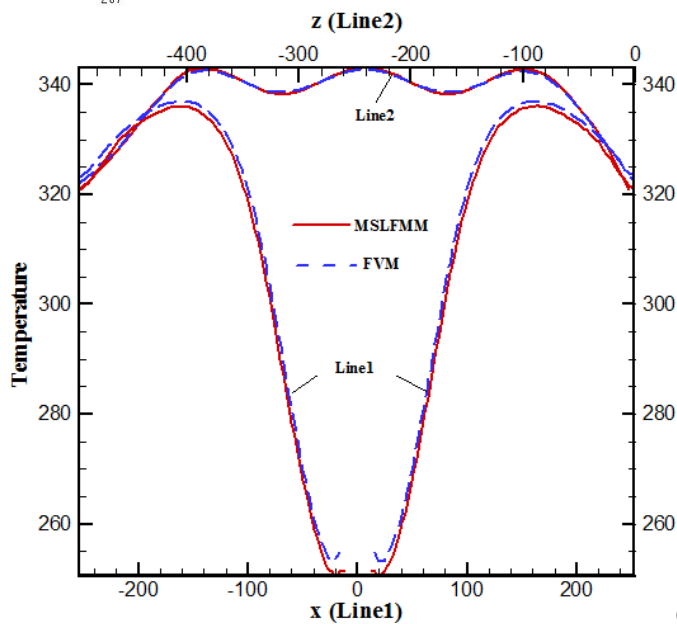
الف) گسسته‌سازی بدنه موتور



ب) توزیع دمای حاصل با استفاده از روش پیشنهادی (MSLFMM)



ج) توزیع دمای حاصل با استفاده از روش حجم محدود (FVM) در نرم‌افزار فلوئنت



د) مقایسه دمای حاصل با استفاده از روش پیشنهادی (MSLFMM) و حجم محدود (FVM)

شکل ۱۰- شبیه‌سازی انتقال حرارت هدایتی دائم درون بدنه یک موتور



را برای سایر مسائل بزرگ المان مرزی تسری داد.

## ۶- تشکر و قدردانی

تحقیق حاضر تحت حمایت دانشگاه شهید چمران اهواز (شماره طرح SCU.EM98.709) صورت گرفته است. همچنین نویسندگان از مرکز تحقیقات شبکه گاز در دانشگاه شهید چمران اهواز کمال تشکر را دارند.

بررسی شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که استفاده از تقریب دوردست، ضمن ساده‌سازی روش تک‌سطحی اصلاح شده، باعث می‌شود که سرعت حل به روش چندسطحی نزدیک گردد. همچنین شبیه‌سازی انتقال حرارت دائم درون یک بدنه موتور با هندسه پیچیده، بیانگر توانایی روش پیشنهادی برای مسائل دارای مقیاس بزرگ است. با وجود آنکه کارایی این روش جدید برای مسائل انتقال حرارت اثبات شده است، پر واضح است می‌توان آن

## واژه‌نامه

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. boundary element method (bem)               | 8. boundary integral equation (bie)                | 16. solid harmonic function                              |
| 2. far-field approximation (ffa)               | 9. point source                                    | 17. associated legendre function                         |
| 3. collocation point                           | 10. generalized minimal residual (gmres)           | 18. modified single-level fast multipole method (mslfmm) |
| 4. fast multipole method (fmm)                 | 11. matrix-vector multiplication                   | 19. iterative solver                                     |
| 5. conventional boundary element method (cbem) | 12. fast multipole boundary element method (fmbem) | 20. direct solver  |
| 6. single-level fast multipole method (slfmm)  | 13. multipole expansion, moments (m)               | 21. gaussian elimination                                 |
| 7. multi-level fast multipole method (mlfmm)   | 14. moment-to-local translation (m2l)              | 22. engine block   |
|  | 15. local expansion (l)                            | 23. finite volume method (fvm)                           |
|  |  | 24. fluent   |

## مراجع

- Jaswon, M., "Integral Equation Methods in Potential Theory. I", *Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 275, No. 1360, pp. 23-32, 1963.
- Brebbia, C., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, 1978.
- Browne, L. E., and Ashby, D. L., *Study of the Integration of Wind Tunnel and Computational Methods for Aerodynamic Configurations*, San Diego State University, 1989.
- Rokhlin, V., "Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory", *Journal of Computational Physics*, Vol. 60, pp. 187-207, 1985.
- Greengard, L. F., and Rokhlin, V., "A Fast Algorithm for Particle Simulations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 73, pp. 325-348, 1987.
- Greengard, L. F., *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- Nishimura, N., "Fast Multipole Accelerated Boundary Integral Equation Methods", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 55, No. 4, pp. 299-324, 2002.
- Liu, Y. J., Nishimura, N., and Yao, Z. H., "A Fast Multipole Accelerated Method of Fundamental Solutions for Potential Problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 29, No. 11, pp. 1016-1024, 2005.
- Liu, Y. J., and Nishimura, N., "The Fast Multipole Boundary Element Method for Potential Problems: A Tutorial", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 30, No. 5, pp. 371-381, 2006.
- Liu, Y. J., *Fast Multipole Boundary Element Method-Theory and Applications in Engineering*, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- Shen, L., and Liu, Y. J. "An Adaptive Fast Multipole Boundary Element Method for Three-Dimensional Potential Problems", *Computational Mechanics*, Vol. 39, No. 6, pp. 681-691, 2007.
- Coifman, R., Rokhlin, V., and Wandzura, S., "The Fast Multipole Method for the Wave Equation: A Pedestrian Prescription", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 35, No. 3, pp. 7-12, 1993.
- Kreuzer, W., Majdak, P., and Chen, Z. S., "Fast Multipole Boundary Element Method to Calculate Head-Related Transfer Functions for A Wide Frequency Range", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 126, No. 3, pp. 1280-1290, 2009.
- López-Portugués, M., López-Fernández, J. A., Menéndez-Canal, J., Rodríguez-Campa, A., and Ranilla, J., "Acoustic Scattering Solver Based on Single Level FMM for Multi-GPU Systems",

- Journal of Parallel and Distributed Computing*, Vol. 72, No. 9, pp.1057-1064, 2012.
15. Landesa, L., Taboada, J. M., Obelleiro, F., Rodriguez, J. L., Mourino, C., and Gomez, A., "Solution of Very Large Integral Equation Problems with Single Level FMM", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 51, No. 10, pp. 2451-2453, 2009.
  16. Lu, C. C., and Chew, W. C., "Fast Far-Field Approximation for Calculating the RCS of Large Objects", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 8, No. 5, pp. 238-241, 1995.
  17. Chew, W. C., Cui, T. J. and Song, J. M., "A FAFFA-MLFMA Algorithm for Electromagnetic Scattering", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 50, No. 11, pp.1641-1649, 2002.
  18. McCowen, A., "A Far-Field Approximation for the Fast-Multipole Method Applied to the Combined Field Integral Equation", *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 39, No. 3, pp.1254-1256, 2003.
  19. Morino, L., Chen, L.T., and Suci, E.O., "Steady and Oscillatory Subsonic and Supersonic Aerodynamics Around Complex Configurations", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 13, No. 3, pp. 1932-1936, 1975.
  20. Katz, J., and Plotkin, A., *Low-Speed Aerodynamics, 2nd Edition*, Cambridge University Press, UK, 2001.
  21. Chen, Z. S., Waubke, H., and Kreuzer, W., "A Formulation of the Fast Multipole Boundary Element Method (FMBEM) for Acoustic Radiation and Scattering from Three-Dimensional Structures", *Journal of Computational Acoustics*, Vol. 16, No. 2, pp. 303-320, 2008.
  22. Liu, Y. J., "A Fast Multipole Boundary Element Code for Solving General 3-D Potential Problems Governed by the Laplace Equation, Including Thermal and Electrostatic Problems, Using the Dual BIE Formulation ( $\alpha$  CBIE +  $\beta$  HBIE)", <http://www.yijunliu.com>.